

ИЗУЧЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В БИСТАБИЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ДВОЙНОЙ СТОХАСТИЧНОСТЬЮ

*С. Л. Гинзбург, О. В. Геращенко**

*Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова Российской академии наук
188350, Гатчина, Ленинградская обл., Россия*

Поступила в редакцию 6 декабря 2002 г.

В простой стохастической системе, передемпфированном крамерсовском осцилляторе с двумя источниками шума — белым и дихотомическим, теоретически и при помощи аналогового моделирования исследовано явление стохастического резонанса в зависимости от величины асимметрии потенциала, амплитуды и времени корреляции дихотомического шума. Обнаружено, что стохастический резонанс наблюдается при медленном по сравнению с крамерсовским временем переключений дихотомическом шуме, а отношение сигнал/шум имеет максимум при амплитуде шума, равной величине статического смещения.

PACS: 02.50.-г, 05.40.-а, 84.30.-г

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы пристальное внимание исследователей привлекает проблема конструктивной роли шума в природе. Множество экспериментальных фактов из самых различных областей науки подтверждает точку зрения, согласно которой влияние шума, являющегося постоянным спутником всех реальных систем, далеко не всегда ограничивается деструктивными и термодинамическими эффектами. Было установлено, что наличие шумовых источников в нелинейных динамических системах может порождать принципиально новые режимы функционирования, которые невозможны в отсутствие шума, например, индуцированные шумом колебания [1]. Эффекты такого типа получили название индуцированных шумом переходов [2].

Исследования последних лет убедительно показали, что в нелинейных системах воздействие шума может вызывать новые, более упорядоченные режимы, приводить к образованию более регулярных структур, увеличивать степень когерентности, вызывать рост усиления и т. п. В частности, при прохождении через нелинейные системы полезных сигналов шум оптимальной (ненулевой) интенсивности,

тепловой либо приложенный извне, может улучшать передачу сигнала. Это явление получило название стохастического резонанса. Эффект стохастического резонанса определяет группу явлений, при которых отклик нелинейной системы на слабый сигнал заметно усиливается с ростом интенсивности шума в системе. При этом интегральные характеристики, такие как коэффициент усиления и отношение сигнал/шум, имеют отчетливо выраженный максимум при некотором оптимальном уровне шума. Эффект стохастического резонанса был обнаружен во многих бистабильных системах: в кольцевом лазере [3], в пассивных оптических бистабильных системах [4], в системах с электронным парамагнитным резонансом [5], в экспериментах с броуновскими частицами [6], в туннельном диоде [7], в СКВИДах [8], в ферромагнетиках и сегнетоэлектриках [9–11], в аналоговых электронных экспериментах [12–20], в химических системах [21–23], в социологических моделях [24]. Исследования показали, что стохастический резонанс представляет собой фундаментально общее физическое явление, типичное для нелинейных систем, в которых при помощи шума можно контролировать один из характерных временных масштабов системы. Результаты, достигнутые в изучении явления стохастического резонанса, обобщены в

*E-mail: gerashch@pppi.spb.ru

обзорах [25, 26].

Основная масса теоретических работ по проблеме стохастического резонанса посвящена исследованию прохождения сигнала через системы с одним источником шума, обычно белого; явление идентифицируется как появление максимума зависимости отношения сигнал/шум от интенсивности шума. Некоторые авторы, однако, исследовали системы с двумя источниками шума, вначале без периодического сигнала, а затем и с таковым [27, 28]. Такая постановка задачи физически естественна и плодотворна, поскольку в любой реальной системе имеется внутренний тепловой шум, интенсивность которого определяется температурой. Управляющий же шум, так же как и сигнал, подается на систему извне. Однако до сих пор в этих задачах изучалась зависимость прохождения сигнала от интенсивности только внутреннего шума. С другой стороны, во многих случаях, особенно в области биологии, температура (а значит, и мощность внутреннего шума) фиксирована внутри узкого интервала. Зато амплитуду внешнего шума и сигнала можно менять в широких пределах. Именно такой подход к задаче мы применили в настоящей работе; варьируемыми параметрами у нас являются отношения амплитуд управляющего шума и сигнала к интенсивности внутреннего шума.

Мы изучаем теоретически и экспериментально динамическую двухъямную систему с периодическим прямоугольным сигналом и двумя источниками шума — белым (внутренним) и цветным дихотомическим (внешним). Мы будем решать нашу задачу в двух предельных случаях — медленного и быстрого цветного шума при произвольных значениях сигнала. В принципе можно решить задачу в промежуточной области при малых сигналах, пользуясь теорией линейного отклика [29–33]. Однако выбор именно прямоугольного сигнала и цветного дихотомического шума позволяет решить задачу при произвольных амплитудах сигнала и шума, не ограничиваясь теорией возмущений.

Основным результатом работы является обнаружение резонансного или сильно немонотонного поведения мощности сигнала и шума и отношения сигнал/шум (SNR) в случае, когда вероятности перехода из одного состояния в другое становятся равными. Этот результат отличается от обычного стохастического резонанса и связан с тем, что при совпадении указанных вероятностей в системе появляется дополнительная симметрия. В области существования такой симметрии все характеристики ведут себя немонотонно.

2. ТЕОРИЯ

Рассмотрим уравнение передемпфированного крамерсовского осциллятора с двумя источниками шума:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x) + F + \Delta S(t) + \sigma \xi(t) + AR(t), \\ f(x) &= ax - bx^3, \quad S(t) = \pm 1, \\ \langle S(t)S(t') \rangle &= e^{-\gamma|t-t'|}, \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= \delta(t-t'), \\ R(t+T) &= R(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq T/2, \\ -1, & T/2 < t \leq T. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\xi(t)$ — белый шум, $S(t)$ — дихотомический (телеграфный) шум, $R(t)$ — прямоугольный сигнал, $a, b, F, \sigma, \Delta, A$ — константы.

Заметим, что выбор функции $f(x)$ в виде (1) совершенно необязателен. Как будет видно далее, нам важно, чтобы $f(x)$ имела лишь одну неустойчивую фиксированную точку и две устойчивых при $\pm x_0$ и была нечетной функцией. В экспериментальной части $f(x)$ будет иметь другой вид, удовлетворяющий нашим условиям.

В уравнении (1) очень важна иерархия характерных времен. Обозначая время корреляции (реального) белого шума через τ и предполагая, что $a \sim b$, примем в нашей задаче следующую иерархию времен:

$$T \gg \gamma^{-1}, \quad w_0^{-1} \gg a^{-1} \gg \tau \rightarrow 0, \quad (2)$$

где w_0 — характерная частота переключений под действием белого шума (см. (6)). Отметим, что в некоторых формулах мы будем сохранять обозначение времени корреляции шума τ , при этом имея в виду, что белому шуму соответствует предел $\tau \rightarrow 0$, поскольку это, во-первых, подчеркивает необходимость выполнения обязательного условия $a^{-1} \gg \tau$, а во-вторых, важно для сравнения с экспериментом, где время τ всегда конечно.

Перейдем от (1) к модели двух состояний, между которыми и происходят скачкообразные переходы. Удобно определить энергию $U_0(x)$:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4, \\ \delta U_0 &= U_0(0) - U_0(\pm x_0) = \frac{a^2}{4b}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\pm x_0$ — устойчивые фиксированные точки уравнения (1) при $F = \Delta = A = \sigma = 0$, δU_0 — высота потенциального барьера.

Пусть выполнены следующие априорные соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma^2 \ll \delta U_0, \quad \Delta x_0, F x_0 \ll \delta U_0, \\ \frac{(\Delta x_0)^2}{\sigma^2 \delta U_0}, \frac{(F x_0)^2}{\sigma^2 \delta U_0} \ll 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Первое из них означает, что большую часть времени система находится в одной из устойчивых фиксированных точек (потенциальных ям), второе и третье условия означают, что фиксированные точки не сдвигаются при воздействии на систему.

Таким образом, динамическую переменную $x(t)$ можно аппроксимировать при помощи дихотомического сигнала:

$$x(t) = x_0 d(t), \quad d(t) = \pm 1. \quad (5)$$

То есть $x(t)$ принимает только два значения, и мы имеем модель двух состояний. Те же условия (4) определяют область применимости крамеровского приближения для вероятностей переходов между этими двумя состояниями, т.е. экспоненциальную зависимость этих вероятностей от отношения зависящей от времени потенциальной энергии системы к интенсивности шума:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= w_{-1 \rightarrow 1} = w_0 \exp[p + uS(t) + vR(t)], \\ \beta(t) &= w_{1 \rightarrow -1} = w_0 \exp[-p - uS(t) - vR(t)], \\ p &= \frac{2x_0 F}{\sigma^2}, \quad u = \frac{2x_0 \Delta}{\sigma^2}, \quad v = \frac{2x_0 A}{\sigma^2}, \\ w_0 &= \frac{a}{\pi\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2b\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Управляющее уравнение для плотности распределения нестационарного процесса $d(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dP(1,t)}{dt} &= \alpha(t)P(-1,t) - \beta(t)P(1,t), \\ \frac{dP(-1,t)}{dt} &= \beta(t)P(1,t) - \alpha(t)P(-1,t). \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть сначала $\Delta = A = 0$ (внешнее воздействие отсутствует). Тогда α и β в (6) не зависят от времени и ненулевые собственные значения уравнения (7) имеют вид

$$\lambda_0 = \alpha + \beta = 2w_0 \operatorname{ch} p. \quad (8)$$

Ясно, что равновесие в системе устанавливается за время $1/\lambda_0$.

2.1. Медленный внешний шум

Включим теперь внешнее воздействие ($A, \Delta \neq 0$) и предположим, что выполняется условие адиабатичности не только по периоду сигнала T , но и по времени корреляции дихотомического шума $1/\gamma$:

$$T, \gamma^{-1} \gg w_0^{-1} \gg a^{-1} \gg \tau \rightarrow 0. \quad (9)$$

Поскольку $w_0 \sim \lambda_0$, а равновесие устанавливается за время $1/\lambda_0$, то $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ медленно меняются за времена порядка T и $1/\gamma$, и можно говорить о локальном равновесии и решать уравнения (7) в адиабатическом приближении. Решение имеет вид

$$P(1,t) = \frac{\alpha(t)}{\alpha(t) + \beta(t)}, \quad P(-1,t) = \frac{\beta(t)}{\alpha(t) + \beta(t)}. \quad (10)$$

Легко вычислить и переходную вероятность для процесса $d(t)$ из состояния m в момент t_2 в состояние n в момент $t_1 > t_2$:

$$\begin{aligned} P(n, t_1 | m, t_2) &= P(n, t_1) + \\ &+ \frac{\phi(n, t_1)\phi(m, t_1)}{P(m, t_1)} e^{-(t_1 - t_2)\lambda_0(t_1)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\lambda_0(t) = \alpha(t) + \beta(t),$$

$$\phi(1,t) = -\phi(-1,t) = \frac{\sqrt{\alpha(t)\beta(t)}}{\alpha(t) + \beta(t)}.$$

В последнем уравнении $\lambda_0(t)$ и $\phi(n,t)$ — это меняющиеся адиабатически медленно ненулевое собственное значение и соответствующая ему собственная функция уравнения (7).

Вычислим теперь двухчастичную функцию распределения $P_2(n, t_1; m, t_2)$. Согласно общей теории марковских процессов, она равна

$$\begin{aligned} P_2(n, t_1; m, t_2) &= P(n, t_1 | m, t_2)P(m, t_2) = \\ &= P(n, t_1)P(m, t_2) + \frac{\phi(n, t_1)\phi(m, t_1)}{P(m, t_1)}P(m, t_2) \times \\ &\times \exp\{-(t_1 - t_2)\lambda_0(t_1)\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Нас интересуют следующие времена:

$$\frac{1}{\lambda_0} \ll T, \quad \frac{1}{\gamma} \sim |t_1 - t_2|. \quad (13)$$

Тогда экспоненту в (11) можно заменить δ -функцией и получить следующее выражение для двухчастичной функции распределения:

$$\begin{aligned} P_2(n, t_1 | m, t_2) &= P(n, t_1)P(m, t_2) + \\ &+ \frac{2\delta(t_1 - t_2)}{\lambda_0(t_1)}\phi(n, t_1)\phi(m, t_1), \end{aligned} \quad (14)$$

где $P(n, t)$, $\lambda_0(t)$ и $\phi(n, t)$ определены в (10) и (11). Учитывая эти определения, легко получить корреляционную функцию

$$D(t_1, t_2) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle_\sigma = y(t_1)y(t_2) + \frac{8\alpha(t_1)\beta(t_1)x_0^2}{[\alpha(t_1) + \beta(t_1)]^3} \delta(t_1 - t_2), \quad (15)$$

$$y(t) = \langle x(t) \rangle_\sigma = x_0 \frac{\alpha(t) - \beta(t)}{\alpha(t) + \beta(t)}.$$

Знак « σ » при угловых скобках означает усреднение по белому шуму.

Теперь усредним (15) по стохастическому процессу $S(t)$ и по фазе периодического сигнала $R(t)$. Будем вычислять неприводимый коррелятор

$$K(t_1 - t_2) = \langle D(t_1, t_2) \rangle_{S,R} - \langle y(t_1) \rangle_{S,R} \langle y(t_2) \rangle_{S,R}. \quad (16)$$

Из (15) и (16) получим

$$K(t_1 - t_2) = \langle y(t_1)y(t_2) \rangle_{S,R} - \langle y(t) \rangle_{S,R}^2 + \frac{x_0^2}{w_0} \langle \text{ch}^{-3}[p + uS(t) + vR(t)] \rangle_{S,R} \delta(t_1 - t_2), \quad (17)$$

$$y(t) = x_0 \cdot \text{th}[p + uS(t) + vR(t)].$$

Коррелятор в (17) легко вычисляется в общем случае. Учитывая, что $S(t) = \pm 1$, $R(t) = \pm 1$, получим для произвольной функции $f(x)$ следующее соотношение:

$$f(\Delta S(t) + AR(t)) = \frac{1 + S(t)}{2} \frac{1 + R(t)}{2} f(\Delta + A) + \frac{1 - S(t)}{2} \frac{1 - R(t)}{2} f(-\Delta - A) + \frac{1 + S(t)}{2} \frac{1 - R(t)}{2} f(\Delta - A) + \frac{1 - S(t)}{2} \frac{1 + R(t)}{2} f(-\Delta + A). \quad (18)$$

Тогда легко получить выражение для коррелятора:

$$K(t) = K^{(0)}(t) + C(p, u, v)\delta(t),$$

$$C(p, u, v) = \frac{x_0^2}{4w_0} \times$$

$$\times [\text{ch}^{-3}(p + u + v) + \text{ch}^{-3}(p - u - v) + \text{ch}^{-3}(p + u - v) + \text{ch}^{-3}(p - u + v)],$$

$$K^{(0)}(t) = B_1(p, u, v)e^{-\gamma|t|} + B_2(p, u, v)\phi_0(t) + B_3(p, u, v)e^{-\gamma|t|}\phi_0(t),$$

$$\phi_0(t) = \langle R(t)R(0) \rangle_R, \quad (19)$$

$$B_1(p, u, v) = \frac{x_0^2}{16} [\text{th}(p+u+v) - \text{th}(p-u-v) + \text{th}(p+u-v) - \text{th}(p-u+v)]^2,$$

$$B_2(p, u, v) = \frac{x_0^2}{16} [\text{th}(p+u+v) - \text{th}(p-u-v) - \text{th}(p+u-v) + \text{th}(p-u+v)]^2,$$

$$B_3(p, u, v) = \frac{x_0^2}{16} [\text{th}(p+u+v) + \text{th}(p-u-v) - \text{th}(p+u-v) - \text{th}(p-u+v)]^2.$$

Определенные в (19) коэффициенты $B_i(p, u, v)$ обладают следующей симметрией:

$$B_1(p, 0, v) = B_2(p, u, 0) = B_3(p, 0, v) = B_3(p, u, 0) = 0. \quad (20)$$

Вычислим теперь спектральную плотность

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{i\omega t} dt. \quad (21)$$

Поскольку

$$\phi_0(t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(2k+1)\Omega t}}{(2k+1)^2}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (22)$$

из (19) получим

$$S(\omega) = C(p, u, v) + \frac{2\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} B_1(p, u, v) + \frac{8}{\pi} B_2(p, u, v) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega - (2k+1)\Omega)}{(2k+1)^2} + \frac{8\gamma}{\pi} B_3(p, u, v) \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[(2k+1)^2 \left((\omega - (2k+1)\Omega)^2 + \gamma^2 \right) \right]^{-1}. \quad (23)$$

Если $\omega, \Omega \ll \gamma$, то выражение (23) упрощается:

$$S(\omega) = C(p, u, v) + \frac{2}{\gamma} (B_1(p, u, v) + B_3(p, u, v)) + \frac{8}{\pi} B_2(p, u, v) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega - (2k+1)\Omega)}{(2k+1)^2}. \quad (24)$$

Отсюда получаем выражение для отношения сигнал/шум SNR, определенного как отношение мощности первой гармоники процесса $x(t)$ к шумовому фону:

$$\text{SNR} = \frac{8}{\pi} \times \frac{B_2(p, u, v)}{C(p, u, v) + \frac{2}{\gamma} (B_1(p, u, v) + B_3(p, u, v))}. \quad (25)$$

2.2. Быстрый внешний шум

Рассмотрим теперь случай для внешнего шума, быстрого по сравнению со временем переброса w_0^{-1} , т. е. вместо (2) положим не (9), а соотношение

$$T \gg w_0^{-1} \gg \gamma^{-1} \gg a^{-1} \gg \tau \rightarrow 0. \quad (26)$$

В этом случае можно усреднить по $S(t)$ непосредственно $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, заменив их в уравнении (7) на средние значения:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \langle \alpha(t) \rangle_S = w_0 e^{p+vR(t)} \text{ch } u, \\ \beta_1(t) &= \langle \beta(t) \rangle_S = w_0 e^{-p-vR(t)} \text{ch } u. \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда, учитывая, что сигнал по-прежнему носит адиабатический характер, получим вместо (19), (24) и (25):

$$\begin{aligned} K(t) &= C\delta(t) + B_2\phi_0(t), \\ C &= \frac{x_0^2}{2w_0 \text{ch } u} (\text{ch}^{-3}(p+v) + \text{ch}^{-3}(p-v)), \\ B_2 &= \frac{x_0^2}{4} (\text{th}(p+v) - \text{th}(p-v))^2, \\ S(\omega) &= C + \frac{8}{\pi} B_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega - (2k+1)\Omega)}{(2k+1)^2}, \\ \text{SNR} &= \frac{8}{\pi} \frac{B_2}{C} = \\ &= \frac{4w_0}{\pi} \text{ch } u \frac{(\text{th}(p+v) - \text{th}(p-v))^2}{\text{ch}^{-3}(p+v) + \text{ch}^{-3}(p-v)}. \end{aligned} \quad (28)$$

2.3. Случай малого сигнала $v \ll 1$

Проанализируем полученные результаты подробнее. Рассмотрим область

$$v \ll 1; \quad p, u \gg 1. \quad (29)$$

Тогда для адиабатического случая из (19), (24) и (25) с учетом того, что при $v \ll 1$ имеем $B_3 \ll B_1$,

получим выражения для полного шума $S(0)$, мощности сигнала B_2 и отношения сигнал/шум:

$$\begin{aligned} S(0) &= C(p, u, 0) + \frac{2}{\gamma} B_1(p, u, 0) = \\ &= \frac{x_0^2}{2w_0} (\text{ch}^{-3}(p+u) + \text{ch}^{-3}(p-u)) + \\ &+ \frac{x_0^2}{2\gamma} (\text{th}(p+u) - \text{th}(p-u))^2, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} B_2(p, u, v \ll 1) &= \\ &= \frac{x_0^2 v^2}{4} (\text{ch}^{-2}(p+u) + \text{ch}^{-2}(p-u))^2, \end{aligned}$$

$$\text{SNR} = \frac{8}{\pi} \frac{B_2}{C + 2B_1/\gamma}.$$

На рис. 1 изображены зависимости C , B_1 , B_2 и SNR, вычисленные из формулы (30). На нем отчетливо видны резонансы при $p = \pm u$. Таким образом, при $p = \pm u$ во всех интересующих нас величинах возникает сильная немонотонность. С другой стороны, из (6) видно, что при $v \ll 1$ точки $p = \pm u$ соответствуют тому, что при $S = \pm 1$ имеется равенство

$$\alpha(t) = \beta(t). \quad (31)$$

Нетрудно показать, что при произвольных, а не только экспоненциальных, как в (6), зависимостях α и β от внешнего сигнала во всех величинах возникают особенности при выполнении условия (31). Это предмет отдельного рассмотрения.

Выпишем еще асимптотику выражений (30) в области $p > 0$, $p, u, p-u \gg 1$. Из (30) имеем

$$\begin{aligned} B_1 &= x_0^2 \exp(-4(p-u)), \\ B_2 &= 4x_0^2 v^2 \exp(-4(p-u)), \\ C &= \frac{4x_0^2}{w_0} \exp(-3(p-u)), \\ \text{SNR} &= \frac{8v^2 w_0}{\pi} \exp(-(p-u)). \end{aligned} \quad (32)$$

Для быстрого шума при $v \ll 1$ из (28) получаем

$$\begin{aligned} S(0) &= C = \frac{x_0^2}{w_0 \text{ch } u \text{ch}^3 p}, \quad B_2 = \frac{x_0^2 v^2}{\text{ch}^4 p}, \\ \text{SNR} &= \frac{8w_0 v^2 \text{ch } u}{\pi \text{ch } p}. \end{aligned} \quad (33)$$

Из выражения (33) видно явление подавления шума шумом, когда добавление быстрого внешнего шума u приводит к уменьшению полного шума $S(0)$ [34, 35].

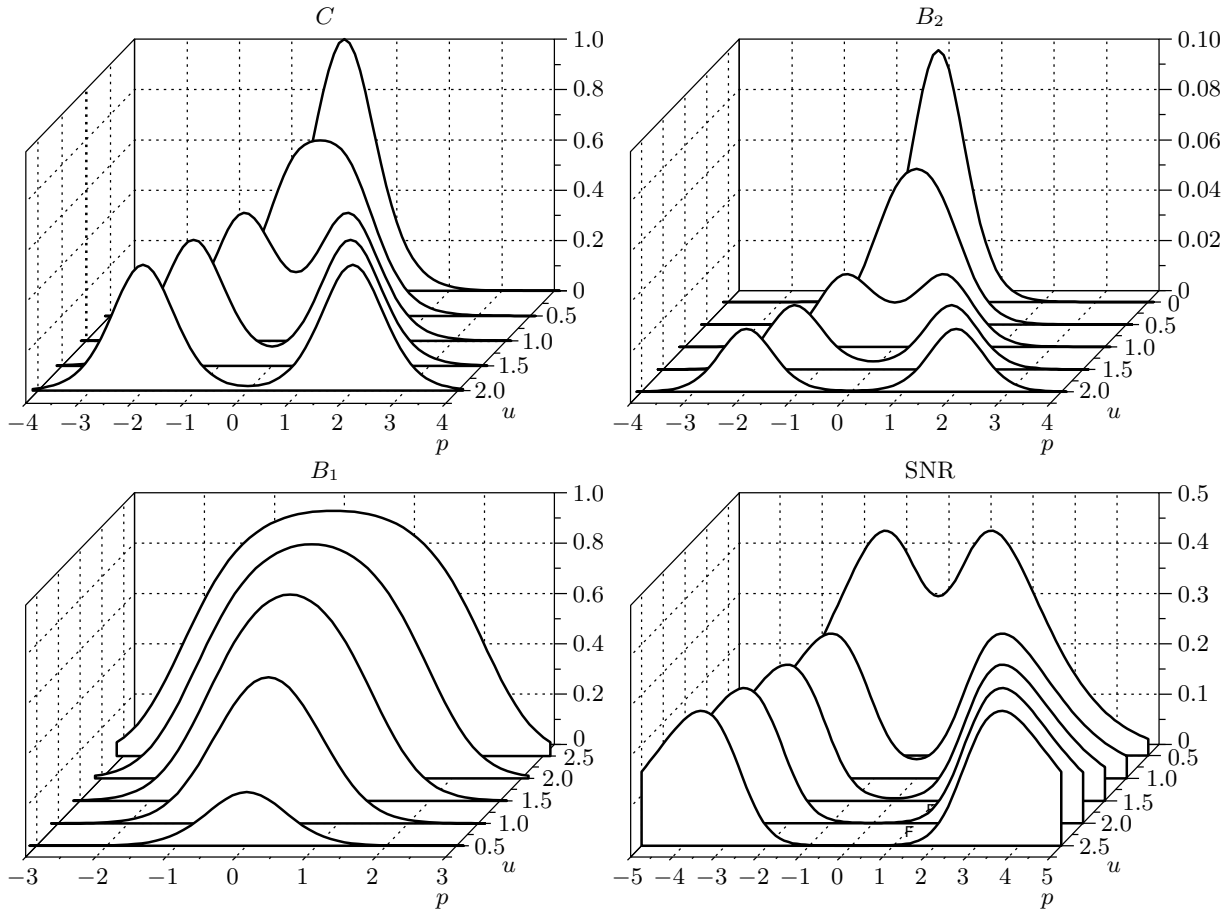


Рис. 1. Теоретические зависимости (30) для адиабатически медленного дихотомического шума, где принято $x_0 = 1$, $v^2 = 0.1$, $\gamma = 0.1 \ll w_0 = 1$

3. АНАЛОГОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для проверки полученных выводов мы провели аналоговое моделирование нашей стохастической системы на электронной модели двухуровневой нелинейной системы: передемпфированном осцилляторе с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой $I(x)$ (см. рис. 2), аналогичном использованному в работах [36, 37]. Запишем уравнение для нашей схемы:

$$\begin{aligned} \frac{V(t) - x(t)}{R} &= C \frac{dx}{dt} + I_N(x), \\ RC \frac{dx}{dt} &= -RI(x) + V(t), \quad I(x) = I_N(x) + \frac{x}{R}. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь $V(t)$ — подаваемое извне напряжение, $I_N(x)$, $I(x)$ — вольт-амперные характеристики соответственно нелинейного элемента и всей схемы в целом, $x(t)$ — исследуемое напряжение. Введем безразмер-

ное время заменой $t \rightarrow t/RC$ и получим уравнение, полностью аналогичное уравнению (1):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x) + V(t), \\ V(t) &= F + \Delta S(t) + AR(t) + \sigma \xi(T). \end{aligned} \quad (35)$$

$$f(x) = \begin{cases} -a(x + x_0), & x < -x_1, \\ \lambda x, & |x| < x_1 = ax_0/(a + \lambda), \\ -a(x - x_0), & x > x_1. \end{cases} \quad (36)$$

Из ВАХ для нашей схемы можно определить величины $x_1 \approx 2.4$ В, $x_0 \approx 2x_1 \approx 4.7$ В, а выраженная в вольтах высота потенциального барьера $\delta U_0 \approx 11$ В². Подаваемое на схему напряжение $V(t)$ является суммой гауссова шума $\xi(t)$ с функцией корреляции вида $(\sigma^2/2\tau) \exp(-|t|/\tau)$ (см. (1), (2)), где характерная частота отсечки $1/2\pi\tau \approx 30$ кГц много больше всех характерных частот в системе (фи-

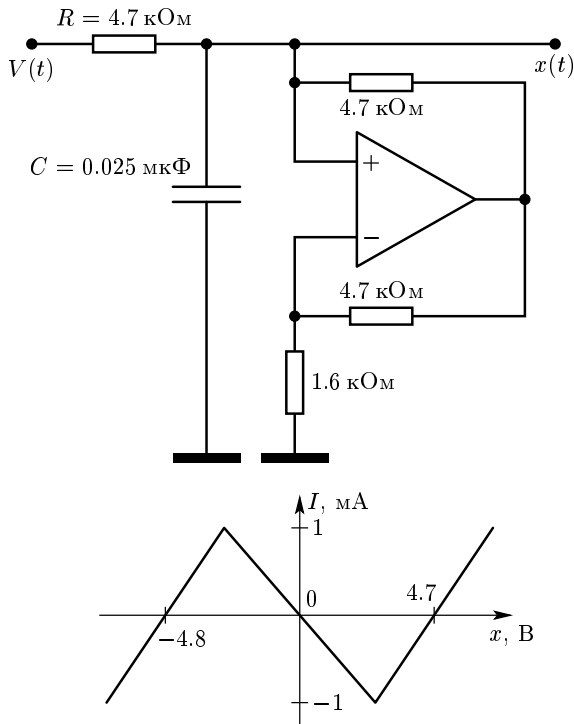


Рис. 2. Принципиальная схема и вольт-амперная характеристика аналоговой модели передемпфированного осциллятора: $V(t)$ — подаваемое напряжение (сумма прямоугольного сигнала, белого и дихотомического шумов), $x(t)$ — исследуемый сигнал. Операционный усилитель — КР544УД1

зический белый шум), дихотомического шума с амплитудой $0 \leq \Delta \leq 10 \text{ В}$ и характерной частотой $0 \leq \gamma/2\pi \leq 2000 \text{ Гц}$ и переменного прямоугольного сигнала с амплитудой A и частотой $f_s = \Omega/2\pi$. Характерная частота (обратное время релаксации) нелинейной системы $1/2\pi RC = 1400 \text{ Гц}$. Изменяя интенсивность гауссова шума, мы могли изменять частоту переключений ω_0 между двумя состояниями в системе.

В эксперименте были измерены величины спектральной плотности мощности выходного сигнала $x(t)$ на нулевой частоте $S(0)$, на частоте прямоугольного сигнала $S(\Omega)$ и отношение сигнал/шум SNR (25):

$$S(\Omega) = \frac{4}{\pi^2} \frac{B_2}{\Delta f}, \quad \text{SNR} = \frac{2\pi\Delta f S(\Omega)}{S(0)}, \quad (37)$$

где $\Delta f \approx 0.16 \text{ Гц}$ — частотный интервал при измерении спектральной плотности мощности $S(\omega)$ для двух предельных случаев по времени корреляции управляющего дихотомического шума: быстрого шума (рис. 3–5), адиабатического медленного шу-

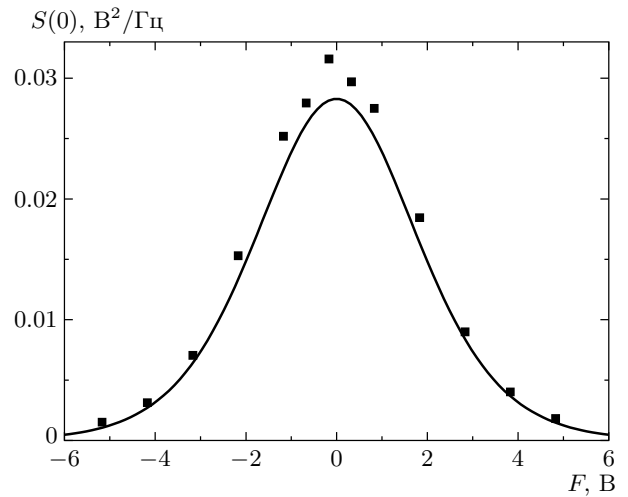


Рис. 3. Спектральная плотность шумового фона $S(0)$ в зависимости от величины напряжения смещения F для быстрого дихотомического шума $\omega_0/2\pi = 40 \text{ Гц} \ll \gamma/2\pi = 560 \text{ Гц}$. Сплошная линия — зависимость $C(p, u, v)$ из (33), построенная по экспериментальным значениям параметров $x_0 = 4.7 \text{ В}$, $2x_0/\sigma^2 = 0.34 \text{ В}^{-1}$, $\Delta = 2.5 \text{ В}$, $v \approx 0.7 \text{ В}$

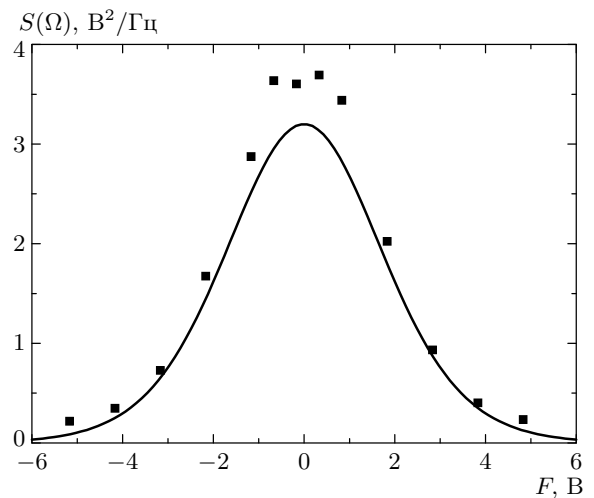


Рис. 4. Спектральная плотность на первой гармонике выходного сигнала $S(\Omega)$, где $\Omega = 2\pi f_s$, $f_s = 0.5 \text{ Гц}$ для быстрого дихотомического шума (см. рис. 3) и зависимость $S(\Omega) = (4/\pi^2)B_2(p, u, v)/\Delta f$ (см. (37) и (33))

ма (рис. 6–8) в зависимости от величины постоянного смещения F . Кривые строились по зависимостям (33) для быстрого шума и (30) для медленного. Отметим, что поскольку использование выражения (30) для SNR правильно описывает только об-

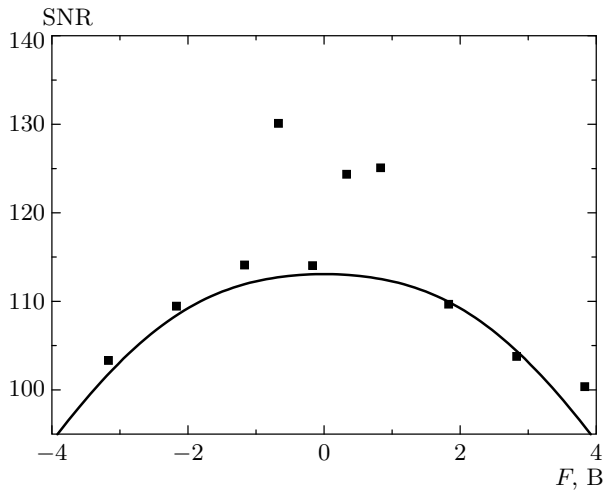


Рис. 5. Отношения сигнал/шум SNR в зависимости от величины напряжения смещения F для быстрого дихотомического шума. Сплошная линия построена по экспериментальным значениям параметров, $\Delta f = 0.16$ Гц (см. (30) и (37))

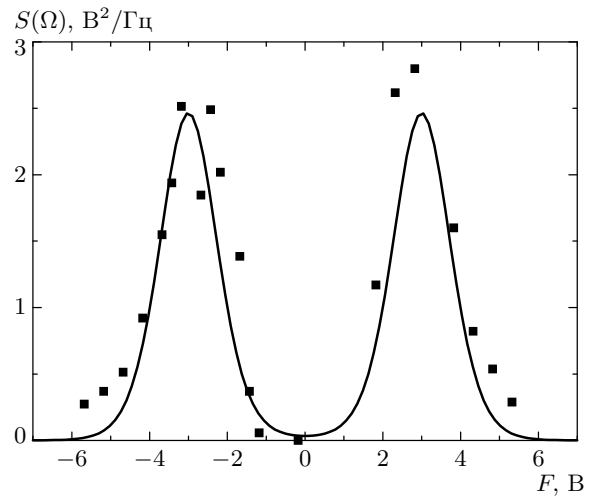


Рис. 7. Зависимость $S(\Omega)$ для медленного дихотомического шума. Сплошная линия представляет зависимость $S(\Omega) = (4/\pi^2)B_2(p, u, v)/\Delta f$ (см. (37) и (33)) с параметрами, как на рис. 6

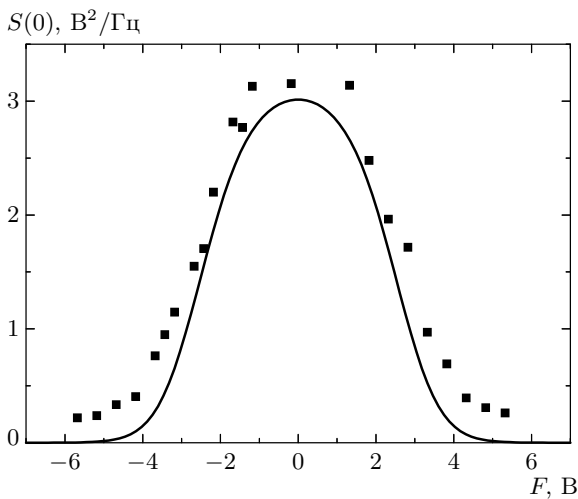


Рис. 6. Шумовой фон $S(0)$ для медленного дихотомического шума $\gamma/2\pi = 2.2$ Гц $\ll w_0/2\pi = 40$ Гц. Сплошная линия — зависимость $S(0)(p, u, v)$ из (30), $\Delta \approx 2.6$ В, $2x_0/\sigma^2 = 0.74$ В $^{-1}$, $A = 0.6$ В

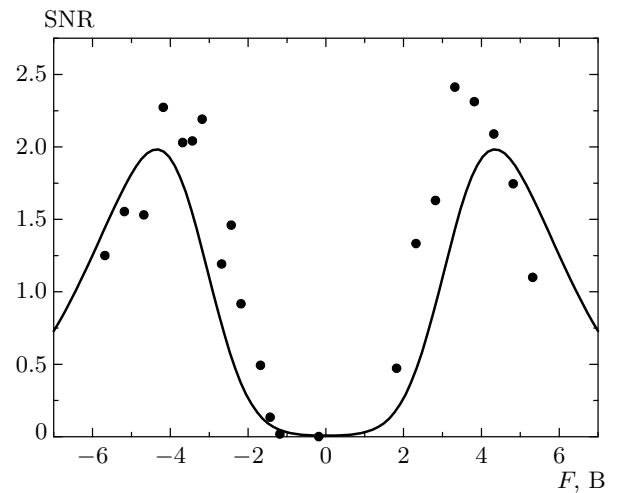


Рис. 8. Отношение сигнал/шум для медленного дихотомического шума (см. (19) и (30))

ласть малых значений A , на рис. 8 мы использовали точную формулу (19) для величины B_2 . Видно, что имеется хорошее согласие между экспериментальными данными и теоретическими зависимостями.

Представляет интерес поведение исследуемых величин в переходной области, когда частота перескоков порядка обратного времени корреляции управляющего шума, т. е. $w_0 \sim \gamma$. Поскольку эту область

невозможно исследовать теоретически, мы провели моделирование, которое показало, что результаты, полученные в адиабатическом пределе $\gamma \ll w_0$, применимы даже в случае $\gamma \sim w_0$. На рис. 9 приведено отношение сигнал/шум для этого случая.

Как следует из предыдущего раздела, управляющий дихотомический шум с амплитудой Δ , равной величине постоянного смещения F (дающей статическую асимметрию потенциала), приводит к восстановлению симметрии потенциальной ямы при $\Delta S(t) = -F$, т. е. происходит динамическое восста-

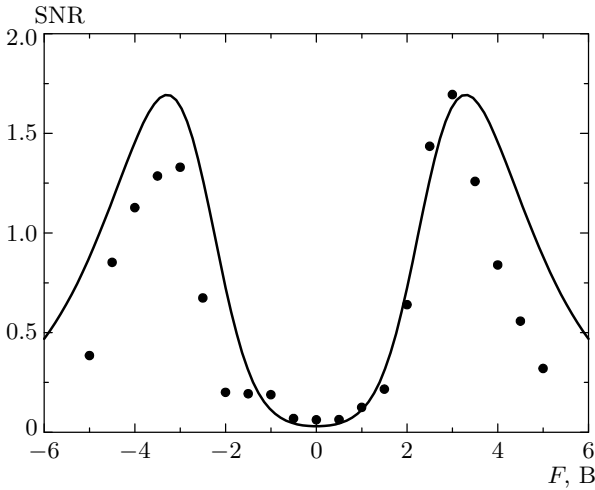


Рис. 9. Отношение сигнал/шум SNR для промежуточного случая, когда время корреляции дихотомического шума порядка крамерсовской частоты переключений $w_0/2\pi \sim \gamma/2\pi \approx 10$ Гц

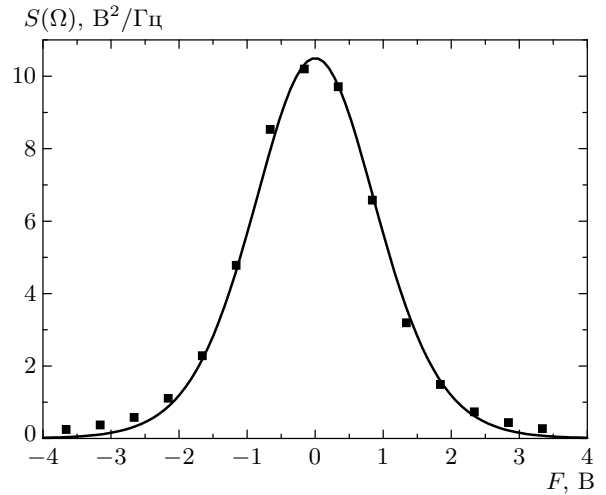


Рис. 10. Спектральная плотность $S(\Omega)$ выходного сигнала $x(t)$ на частоте $f_s = \Omega/2\pi = 3.05$ Гц (первый низкочастотный прямоугольный сигнал) для случая двух прямоугольных сигналов, когда частота второго прямоугольного сигнала $f_1 = \Omega_1/2\pi = 180$ Гц $\gg w_0/2\pi = 18$ Гц

новление симметрии. С другой стороны, известно, что отношение сигнал/шум также максимально для случая симметричного потенциала, что и приводит к наличию двух максимумов на кривых SNR на рис. 8, 9. Естественно предположить, что такое же явление возникает и в том случае, когда имеется не дихотомический шум и сигнал, а два прямоугольных сигнала. Поэтому было проведено исследование с заменой в (1) дихотомического шума на второй прямоугольный сигнал с периодом $T_1 = 2\pi/\Omega_1$. Таким образом, получим

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + F + \Delta R_1(t) + \sigma \xi(t) + AR(t), \quad (38)$$

$$R_1(t + T_1) = R_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq T_1/2, \\ -1, & T_1/2 < t \leq T_1. \end{cases} \quad (39)$$

Условие адиабатичности, аналогичное (9), имеет вид

$$T, T_1 \gg w_0^{-1} \gg a^{-1} \gg \tau \rightarrow 0, \quad (40)$$

а аналогом условия быстрого шума (26) является быстрый сигнал:

$$T \gg w_0^{-1} \gg T_1 \gg a^{-1} \gg \tau \rightarrow 0. \quad (41)$$

В случае (40) получим вместо (19)

$$K(t) = B_1(p, u, v)\phi_1(t) + B_2(p, u, v)\phi_0(t) + B_3(p, u, v)\phi_0(t)\phi_1(t), \quad (42)$$

$$\phi_1(t) = \langle R_1(t)R_1(0) \rangle_R = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(2k+1)\Omega_1 t}}{(2k+1)^2},$$

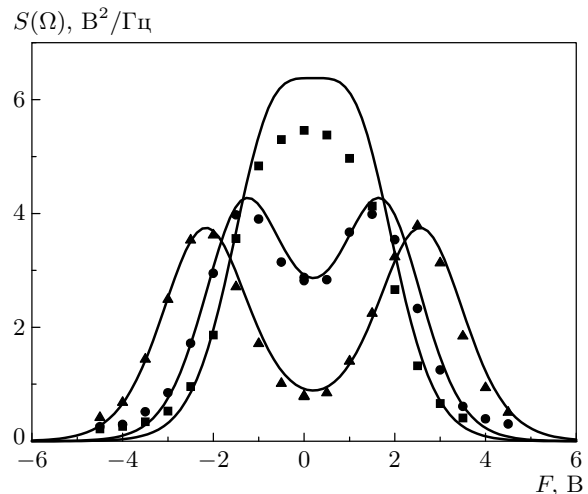


Рис. 11. Спектральная плотность $S(\Omega)$ выходного сигнала $x(t)$ на частоте $f_s = \Omega/2\pi = 3.05$ Гц (первый низкочастотный прямоугольный сигнал с амплитудой 0.6 В) для случая двух прямоугольных сигналов, когда частота второго прямоугольного сигнала $f_1 = \Omega_1/2\pi = 18$ Гц $< w_0/2\pi = 50$ Гц и при различных его амплитудах: 1.06 В, 1.45 В, 2.27 В (сверху вниз)

Остальные величины те же, что и в (19). Тогда вместо (24) мы получим

$$\begin{aligned}
S(\omega) = & C(p, u, v) + \frac{8}{\pi} B_1(p, u, v) \times \\
& \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega - (2k+1)\Omega_1)}{(2k+1)^2} + \\
& + \frac{8}{\pi} B_2(p, u, v) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega - (2k+1)\Omega)}{(2k+1)^2} + \\
& + \frac{32}{\pi^3} B_3(p, u, v) \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 (2n+1)^2} \times \\
& \times \delta(\omega - (2k+1)\Omega - (2n+1)\Omega_1). \quad (43)
\end{aligned}$$

Сравнивая (24) и (43), мы видим, что, хотя коэффициенты C и B_i в этих формулах одинаковые, спектры совершенно разные. В частности, выделяя разные гармоники в (43), можно измерить по отдельности все величины C и B_i , тогда как в (24) мы имеем лишь комбинацию $C + 2(B_1 + B_3)/\gamma$.

Рассмотрим теперь случай, когда второй сигнал $\Delta R_1(t)$ является быстрым, т.е. выполняется условие (41). Нетрудно видеть, что в этом случае, так же как и для быстрого шума, можно усреднить по быстрому сигналу. При этом все формулы (27), (28) полностью сохраняются. Таким образом, случаи быстрого шума и быстрого сигнала полностью эквивалентны в нулевом порядке по параметру быстроты.

Проведенное экспериментальное моделирование двух прямоугольных сигналов, быстрого ($\Omega_1/2\pi = 180$ Гц $\gg w_0/2\pi \approx 18$ Гц) и медленного ($\Omega_1/2\pi = 18$ Гц $< w_0/2\pi \approx 50$ Гц) второго, также подтвердило теоретические выводы. На рис. 10 показана величина $S(\Omega)$ для случая быстрого второго сигнала, а на рис. 11 — для медленного второго сигнала. Полученные результаты полностью аналогичны результатам для дихотомического шума.

4. ВЫВОДЫ

Таким образом, мы теоретически и экспериментально исследовали нелинейную двухъямную систему со статической асимметрией потенциала и с двойной стохастичностью, т.е. при некотором постоянном смещении и одновременном воздействии двух шумов: белого и дихотомического. При этом было обнаружено, что стохастический резонанс наблюдается в том случае, когда управляющий дихотомический шум является медленным по сравнению с кramerсовским временем перескоков в нелинейной системе, а амплитуда шума сравнима с величиной постоянного смещения.

Это связано с тем, что внешнее управляющее воздействие, в частности, дихотомический шум или прямоугольный сигнал с амплитудой, равной величине постоянного смещения (статическая асимметрия потенциала), приводит к восстановлению симметрии потенциальной ямы, когда величина воздействия имеет знак, противоположный знаку смещения (динамическое восстановление симметрии).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-02-16979) и в рамках государственных программ «Квантовая макрофизика» и «Исследование коллективных и квантовых эффектов в конденсированных средах».

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Ланда, А. А. Заикин, ЖЭТФ **111**, 358 (1997).
2. В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы*, Мир, Москва (1987). [W. Horsthemke and R. Lefever, *Noise-Induced Phase Transitions*, Springer, New York (1984).]
3. В. McNamara, К. Wiesenfeld, and R. Roy, Phys. Rev. Lett. **60**, 2626 (1988).
4. М. И. Дыкман, А. Л. Великович, Г. П. Голубев и др., Письма в ЖЭТФ **53**, 182 (1991).
5. L. Gammaitoni, M. Martinelli, L. Pardi, and S. Santucci, Phys. Rev. Lett. **67**, 1799 (1991).
6. A. Simon and A. Libchaber, Phys. Rev. Lett. **68**, 3375 (1992).
7. R. N. Mantegna and B. Spagnolo, Phys. Rev. E **49**, R1792 (1994).
8. A. D. Hibbs, A. L. Singasaas, E. W. Jacobs et al., J. Appl. Phys. **77**, 2582 (1995).
9. A. Perez-Madrid and J. M. Rubi, Phys. Rev. E **51**, 4159 (1995).
10. Z. Neda, Phys. Lett. A **210**, 125 (1996).
11. А. Е. Дубинов, К. Е. Михеев, Ю. Б. Нижегородцев, В. Д. Селемир, Изв. РАН, сер. физ. **60** (10), 76 (1996).
12. S. Fauve and F. Heslot, Phys. Lett. A **97**, 5 (1983).
13. G. Debnath, T. Zhou, and F. Moss, Phys. Rev. A **39**, 4323 (1989).
14. L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saeta, and S. Santucci, Phys. Rev. Lett. **62**, 349 (1989).

15. G. Vemuri and R. Roy, *Phys. Rev. A* **39**, 4668 (1989).
16. M. I. Dykman, R. Mannella, P. V. E. McClintock, and N. G. Stocks, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2606 (1990).
17. L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saeta, and S. Santucci, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2607 (1990).
18. C. Presilla, F. Marchesoni, and L. Gammaitoni, *Phys. Rev. A* **40**, 2105 (1989).
19. L. Gammaitoni, E. Menichella-Saeta, S. Santucci et al., *Phys. Rev. A* **40**, 2114 (1989).
20. О. В. Геращенко, *ПЖТФ* **29**, 82 (2003).
21. D. S. Leonard and L. E. Reichl, *Phys. Rev. E* **49**, 1734 (1994).
22. M. I. Dykman, T. Horita, and J. Ross, *J. Chem. Phys.* **103**, 966 (1995).
23. W. Hohmann, J. Muller, and F. W. Schneider, *J. Chem. Phys.* **100**, 5388 (1996).
24. P. Babinec, *Phys. Lett. A* **225**, 179 (1997).
25. L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).
26. В. С. Анищенко, А. В. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шимански-Гейер, *УФН* **169**, 7 (1999).
27. A. Neiman, L. Schimansky-Geier, F. Moss et al., *Phys. Rev. E* **60**, 284 (1999).
28. R. Rosenfeld, A. Neiman, and L. Schimansky-Geier, *Phys. Rev. E* **62**, R3031 (2000).
29. P. Jung, *Phys. Rep.* **234**, 175 (1993).
30. M. I. Dykman, D. G. Luchinsky, R. Mannella et al., *J. Stat. Phys.* **70**, 463 (1993).
31. M. I. Dykman, D. G. Luchinsky, R. Mannella et al., *J. Stat. Phys.* **70**, 479 (1993).
32. M. I. Dykman, R. Mannella, P. V. E. McClintock, and N. G. Stocks, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2985 (1992).
33. M. I. Dykman, H. Haken, Gang Hu et al., *Phys. Lett. A* **180**, 332 (1993).
34. С. Л. Гинзбург, М. А. Пустовойт, О. В. Геращенко, *Письма в ЖЭТФ* **73**, 672 (2001).
35. S. L. Ginzburg, M. A. Pustovoit, and O. V. Gerashchenko, *Fluctuation Noise Lett.* **1**, L131 (2001).
36. О. В. Геращенко, *ЖЭТФ* **116**, 1477 (1999).
37. O. V. Gerashchenko, S. L. Ginzburg, and M. A. Pustovoit, *Eur. Phys. J. B* **19**, 101 (2001).