ЖЭТФ, 2003, том 124, вып. 4 (10), стр. 723–732

СТРУКТУРА СИНГУЛЯРНОСТИ В МОДЕЛИ ВЕНЕЦИАНО

*Д. И. Подольский**

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 апреля 2003 г.

Рассматривается структура космологической сингулярности в инфляционной модели Венециано. Показано, что проблема выбора начальных данных в модели не решена — пространство-время в асимптотически плоском пределе может быть заполнено произвольным числом квантов гравитационного и скалярного полей. Вследствие этого в окрестности сингулярности Вселенная приобретает доменную структуру, причем в каждом из доменов реализуется свой анизотропный режим расширения.

PACS: 04.20.Dw, 04.60.-m, 04.62.+v

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что построение эффективной инфляционной модели в рамках низкоэнергетического приближения теории струн является весьма сложной задачей [1]. Оказывается, что возникающие при попытке решить задачу эффективные потенциалы скалярного поля, отвечающего за инфляционный характер космологической динамики, не обеспечивают выполнение условия «медленного скатывания» $|\dot{H}| \ll H^2$. Тем самым, типичным в такой эффективной теории гравитации даже при наличии скалярного поля является режим фридмановского замедляющегося расширения.

Фактически это означает, что задачу невозможно решить методом «грубой силы»: для получения инфляционного сценария в рамках теории струн необходимо привлекать новые идеи, основанные на нетривиальности низкоэнергетического спектра теории струн или на непертурбативных эффектах, возникающих в рамках этой теории. Вероятно, следует ожидать, что динамика полей на инфляционной стадии также будет устроена нетривиально.

Моментом рождения одного из таких нетривиальных сценариев можно считать появление работы Венециано [2], основная идея которой состоит в следующем.

Рассмотрим низкоэнергетическое эффективное действие произвольной теории замкнутых суперструн [3], причем будем ограничиваться рассмотрением полевой задачи, для которой вакуумные средние фермионных полей, полей R–R-сектора и антисимметричного поля $B_{\mu\nu}$ равны нулю. Оставшийся после такой проекции сектор для любой из теорий суперструн[1)] устроен одинаково, и соответствующее ему эффективное действие (в безразмерных единицах) имеет следующий вид:

$$S = -\int \sqrt{-g} d^{d+1}x e^{-\phi} \left(R + g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right). \quad (1)$$

Здесь d — размерность пространства. Будем искать однородное по пространственным координатам классическое решение уравнений движения, получающихся варьированием этого действия. Для этого, как обычно, следует положить

$$g_{\mu\nu} = (1, -a^2(t)\delta_{ij}), \quad (2)$$

$$\phi = \phi(t). \quad (3)$$

Подставляя выражения (2), (3) в (1), мы легко найдем, что

$$S = -\int d^{d+1}x a^d e^{-\phi} \left(\dot{\phi}^2 - 2dH\dot{\phi} + d(d-1)H^2\right). \quad (4)$$

Как легко видеть, это действие инвариантно относительно следующего преобразования полей:

$$a(t) \to \frac{1}{a(t)}, \quad (5)$$

*E-mail: podolsky@itp.ac.ru

[1)] Напомним, что в десятимерии имеются четыре различные теории замкнутых суперструн: IIA, IIB, гетеротическая $SO(32)$ и гетеротическая E_8.

$$\phi \to \phi - 2d \ln a, \tag{6}$$

$$t \to -t. \tag{7}$$

Поэтому существует такое классическое решение следующих из (4) уравнений движения, что при $-\infty < t < 0$ оно описывает ускоренный режим расширения, соответствующий инфляции, а при $0 < t < \infty$ — режим, соответствующий фридмановскому замедляющемуся расширению:

$$\begin{gathered} a_+(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/\sqrt{d}}, \\ \phi = \left(\sqrt{d}-1\right) \ln \frac{t}{t_0}, \quad t > 0, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} a_-(-t) = \left(-\frac{t}{t_0}\right)^{-1/\sqrt{d}}, \\ \phi = -\left(\sqrt{d}+1\right) \ln \left(-\frac{t}{t_0}\right), \quad t < 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Физический смысл этого решения состоит в следующем. Вселенная в начальном состоянии представляет собой асимптотически плоский мир в том смысле, что компоненты тензора Римана при $t \to -\infty$ стремятся к нулю. Такой мир, кроме того, является абсолютно холодным — в нем нет никакой кластеризованной материи. Стартуя из такого максимально симметричного состояния, Вселенная при $-\infty < t < 0$ претерпевает суперинфляцию (приставка «супер» означает, что $\dot{H} > 0$), которая при $t > 0$ сменяется замедляющимся фридмановским расширением, что соответствует переходу с суперинфляционной ветки на дуальную.

Существенно, что при приближении к $t \to -0$ кривизна пространства-времени стремится к бесконечности, и поэтому рано или поздно мы в рамках данного решения выходим за область применимости низкоэнергетического приближения теории струн и действия (1).

Инвариантность действия (4) относительно преобразований (5)–(7) получила название SF-дуальности[2]. Если она имеет место не только для низкоэнергетического приближения теории струн, но и для полного непертурбативного действия Грина–Шварца, решение типа (8), (9) в самом деле соответствует точке перевала в полной полевой задаче, т. е. описывает космологическую динамику в такой теории. Однако, поскольку сама SF-дуальность является существенно непертурбативным эффектом, невозможно выяснить, оставаясь в рамках низкоэнергетического приближения, существует ли она в непертурбативной теории струн. В работе Гасперини и Венециано [4] были приведены некоторые соображения в пользу того, что непертурбативная SF-дуальность действительно имеет место.

Наиболее интересной и критичной с точки зрения сценария на оси времени является точка $t = 0$, в которой достигается космологическая сингулярность[3].

Наша задача будет состоять в том, чтобы, оставаясь в рамках низкоэнергетического приближения, выяснить, как устроена полевая динамика в окрестности сингулярности и приводит ли учет флуктуаций над классической траекторией (8), (9) к общему смягчению сингулярности.

2. АНИЗОТРОПНОЕ РЕШЕНИЕ В МОДЕЛИ ВЕНЕЦИАНО

Уравнения движения, следующие из четырехмерной теории с действием

$$S = -\frac{1}{\lambda_s^2} \int \sqrt{-g} d^4x e^{-\phi} \left(R + (\partial\phi)^2\right) \tag{10}$$

(здесь мы ввели константу λ_s, чтобы действие привести к безразмерному виду), имеют следующий вид:

$$-D_\mu D_\nu \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (D\phi)^2 = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{11}$$

$$D_\mu D^\mu \phi = (\partial\phi)^2. \tag{12}$$

Анализ этих уравнений можно сильно упростить, если заметить, что теория, которую описывает действие (10) конформно-эквивалентна общей теории относительности со скалярным полем

$$S = -\frac{1}{\lambda_s^2} \int \sqrt{-g}\, d^4x \left(R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2\right). \tag{13}$$

В самом деле, если метрика $g_{\mu\nu(E)}$ является решением уравнений Эйнштейна, то $g_{\mu\nu(S)} = g_{\mu\nu(E)} e^{\phi}$ является решением уравнений (11), (12). Также верно обратное (в дальнейшем мы будем называть $g_{\mu\nu(E)}$

[2] SF означает «scale factor».

[3] Возможно, в непертурбативной теории струн сингулярность сглаживается. Справедливость этого предположения тесно связана с возможностью решить проблему перехода через сингулярность от суперинфляции к замедляющемуся расширению [5] (см. также [4]).

метрикой в эйнштейновском фрейме, а $g_{\mu\nu(S)}$ — метрикой в струнном фрейме).

Попробуем выйти за рамки однородной задачи и построить точное решение, отвечающее в эйнштейновском фрейме классической сильной гравитационной волне, распространяющейся на некотором однородном фоне, и сильным неоднородным возмущениям скалярного поля. Очевидно, что в общем случае найти такое решение невозможно, поэтому ограничимся исследованием квазидвумерной задачи. Пусть все компоненты метрики и скалярное поле будут зависеть только от координат t и x. Оказывается, что такая задача решается до конца (см., например, [6]), и ответом является аксиально-симметричная метрика Эйнштейна–Розена.

Будем искать соответствующее решение в виде

$$ds^2_{(E)} = e^{2A}dt^2 - e^{2C}dx^2 - e^{2B}(e^{\gamma}dy^2 + e^{-\gamma}dz^2), \quad (14)$$

где A, B, C, γ, ϕ — функции только t и x. Поскольку уравнения Эйнштейна инвариантны относительно калибровочных преобразований $\tilde{t} = \tilde{t}(t, x)$, $\tilde{x} = \tilde{x}(t, x)$, можно положить $g_{00} = -g_{11}, g_{01} = 0$, т. е. $A(t, x) = C(t, x)$.

Уравнения Эйнштейна накладывают на функции A, B, γ, ϕ следующие ограничения:

$$A'' - \ddot{A} - 2\ddot{B} + 2\dot{A}\dot{B} + 2A'B' - 2(\dot{B})^2 - \frac{(\dot{\gamma})^2}{2} = = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2, \quad (15)$$

$$-2\dot{B}' + 2A'\dot{B} + 2B'\dot{A} - 2B'\dot{B} - \frac{\dot{\gamma}\gamma'}{2} = \frac{1}{2}\phi'\dot{\phi}, \quad (16)$$

$$\ddot{A} - A'' - 2B'' + 2A'B' + 2\dot{A}\dot{B} - 2(B')^2 - - \frac{(\gamma')^2}{2} = \frac{1}{2}(\phi')^2, \quad (17)$$

$$\ddot{B} + 2(\dot{B})^2 = B'' + 2(B')^2, \quad (18)$$

$$\ddot{\gamma} + 2\dot{B}\dot{\gamma} = \gamma'' + 2B'\gamma'. \quad (19)$$

Наконец, уравнение движения поля ϕ выглядит следующим образом:

$$\ddot{\phi} + 2\dot{B}\dot{\phi} = \phi'' + 2B'\phi'. \quad (20)$$

Из (18) легко найти, что

$$B = \frac{1}{2}\ln(f_1(\xi) + f_2(\eta)), \quad (21)$$

где $\xi = t - x$, $\eta = t + x$, а $f_{1,2}$ — произвольные функции своего аргумента. Теперь воспользуемся оставшейся калибровочной инвариантностью относительно преобразований $\tilde{\xi} = H_1(\xi), \tilde{\eta} = H_2(\eta)$ и положим

$$B = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{t}{t_i}\right),$$

после чего уравнения (19) и (20) легко решаются:

$$\phi = \psi\ln\left(-\frac{t}{t_i}\right) + + \sum_k \left[c_{1k}J_0(kt) + c_{2k}N_0(kt)\right]e^{ikx} + \text{c.c.}, \quad (22)$$

$$\gamma = \beta\ln\left(-\frac{t}{t_i}\right) + + \sum_k \left[c_{3k}J_0(kt) + c_{4k}N_0(kt)\right]e^{ikx} + \text{c.c.} \quad (23)$$

Выражение для $A(t, x)$ можно найти, воспользовавшись уравнениями

$$\dot{A} = \frac{t}{4}\left((\phi')^2 + (\dot{\phi})^2 + (\gamma')^2 + (\dot{\gamma})^2 - \frac{1}{t^2}\right), \quad (24)$$

$$A' = \frac{t}{2}(\phi'\dot{\phi} + \gamma'\dot{\gamma}). \quad (25)$$

Удобно разделить функцию $A(t, x)$ на однородную и неоднородную части. Первая легко находится из уравнения (24) и оказывается равной

$$\begin{aligned}A_{hom} = {} & \frac{1}{4}(\psi^2 + \beta^2 - 1)\ln(-t/t_i) + \\ & + \frac{1}{4}\sum_k \left\{c_{1k}c_{1k}^{+}\frac{(kt)^2}{2}[J_1^2(-kt) - \right. \\ & - J_0(-kt)J_2(-kt)] + (c_{2k}c_{1k}^{+} + c_{1k}c_{2k}^{+}) \times \\ & \times \frac{(kt)^2}{4}[2J_1(-kt)N_1(-kt) - \\ & - J_2(-kt)N_0(-kt) - J_0(-kt)N_2(-kt)] + \\ & \left. + c_{2k}c_{2k}^{+}\frac{(kt)^2}{2}[N_1^2(-kt) - N_0(-kt)N_2(-kt)]\right\} + \\ & + \frac{1}{4}\sum_k \left\{c_{1k}c_{1k}^{+}\frac{(kt)^2}{2}[J_0^2(-kt) + J_1^2(-kt)] + \right. \\ & + c_{2k}c_{2k}^{+}\frac{(kt)^2}{2}[J_0^2(-kt) - J_1^2(-kt)] + \\ & + (c_{1k}c_{2k}^{+} + c_{2k}c_{1k}^{+})\frac{(kt)^2}{4} \times \\ & \times [2J_0(-kt)N_0(-kt) - J_1(-kt)N_{-1}(-kt) - \\ & \left. - J_{-1}(-kt)N_1(-kt)]\right\} + (1,2) \to (3,4). \quad (26)\end{aligned}$$

Неоднородный вклад в функцию $A(t,x)$ проще найти из уравнения (25):

$$A_{inh} = \psi \sum_k [c_{1k} J_0(-kt) + c_{2k} N_0(-kt)] e^{ikx} + \\ + \sum_{k,l} \frac{klt}{k+l} e^{i(k+l)x} [c_{1k} J_1(-kt) + c_{2k} N_1(-kt)] \times \\ \times (c_{1l} J_0(-lt) + c_{2l} N_0(lt)) + \\ + \sum_{k,l,k\neq l} \frac{klt}{k-l} [c_{1k} J_1(-kt) + c_{2k} N_1(-kt)] \times \\ \times [c_{1l} J_0(-lt) + c_{2l} N_0(-lt)] + \text{c.c.} + \\ + (1,2,\psi) \to (3,4,\beta). \quad (27)$$

Прежде всего рассмотрим однородный предел ($c_{\alpha k} = 0$, $\forall \alpha, k$). В струнном фрейме метрика пространства-времени имеет вид

$$ds^2 = \left(-\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}(\psi^2+\beta^2-1)+\psi_1} (dt^2 - dx^2) - \\ - \left(-\frac{t}{t_i}\right)^{1+\psi_1+\gamma_1} dy^2 - \left(-\frac{t}{t_i}\right)^{1+\psi_1-\gamma_1} dz^2. \quad (28)$$

Соответствующая этой метрике скалярная кривизна равна

$$R = -\frac{\psi^2}{t^2} \left(-\frac{t}{t_i}\right)^{(1-\beta^2-2\psi-\psi^2)/2}. \quad (29)$$

Она стремится к нулю при $t \to -\infty$ для любой точки в параметрическом пространстве (ψ, β). Если $\beta = 0$, $\psi^2 = 3$, пространство-время (в неоднородной задаче — фоновое пространство-время) является изотропным. В этом случае метрика (14) совпадает с решением Венециано, при $t \to -\infty$ асимптотически эквивалентным плоской вселенной Минковского. В дальнейшем нас особенно будет интересовать именно такой выбор параметров.

3. ПРЕДЕЛ АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЛОСКОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ. КВАНТОВАНИЕ

Ниже мы увидим, что моды в выражениях (22) и (23) можно интерпретировать как дилатоны и гравитоны, распространяющиеся на фоне искривленного пространства-времени. Выберем начальные условия следующим образом: зададим некоторый достаточно ранний момент времени t_i (именно это время фигурирует в (22), (23), (26)) и выбросим все моды, не удовлетворяющие условию $k|t_i| \gg 1$. Это соответствует тому, что мы пренебрегаем в начальном состоянии модами с длиной волны большей, чем космологический горизонт. Однако, существование таких мод противоречит причинности, если только таким образом определенное «начальное» состояние само не возникло в результате инфляции. Далее, под пределом $t \to -\infty$ будем понимать все t, такие что $|t| \gg |t_i|$. В этом случае для всех без исключения мод возможна асимптотика

$$J_0(-kt) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi(-kt)}} \cos\left(-kt - \frac{\pi}{4}\right), \\ N_0(-kt) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi(-kt)}} \sin\left(-kt - \frac{\pi}{4}\right). \quad (30)$$

Отсюда следует, что «правильными»[4)] являются моды

$$\frac{1}{2} e^{i\pi/4} H_0^{(1)}(-kt) e^{-ikx}$$

и

$$\frac{1}{2} e^{i\pi/4} H_0^{(1)+}(-kt) e^{ikx},$$

что соответствует замене

$$b_{1k} = e^{i\pi/4}(c_{1k} - ic_{2k}), \quad b_{2k} = e^{i\pi/4}(c_{1k}^+ - ic_{2k}^+). \quad (31)$$

Займемся теперь квантованием. Построим скалярное произведение $\langle \phi, \phi \rangle$ (для отвечающего гравитону поля γ процедура аналогична). Для этого введем абелево калибровочное поле так, чтобы лагранжиан теории имел вид

$$\sqrt{-g} L = \frac{1}{\lambda_s^2} \int dV \sqrt{-g} e^{-\phi} \times \\ \times [g^{\mu\nu}(\partial_\mu - iA_\mu)\phi(\partial_\nu - iA_\nu)\phi] \quad (32)$$

и затем вычислим $\sqrt{-g}\delta L/\delta A_0$. (Здесь интегрирование dV ведется по некоторой пространственноподобной гиперповерхности, от которой вследствие справедливости теоремы Гаусса результат не зависит; будем считать, что в $\sqrt{-g}e^{-\phi}$ вклад дает только фон — это соответствует предположению о том, что кванты распространяются на однородном фоне, а обратным их влиянием на фоновую метрику можно пренебречь.) Отсюда легко найти, что

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = -\frac{i}{\lambda_s^2} \times \\ \times \int (\phi_1 \partial_\mu \phi_2^+ - \phi_2^+ \partial_\mu \phi_1) n^\mu e^{-\phi} \sqrt{-g}\, dV. \quad (33)$$

4) Т. е. соответствующими положительно-частотным решениям.

В качестве гиперповерхности, по которой проводится интегрирование, удобно взять $t = \mathrm{const}$. Тогда

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = -i \frac{L^2}{\lambda_s^2} \int (\phi_1 \partial_\mu \phi_2^+ - \phi_2^+ \partial_\mu \phi_1) \times \\ \times n^\mu \left(-\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{1}{2}(\psi^2+\beta^2+1)+\psi} dx, \quad (34)$$

где L — линейный размер пространства. Чтобы правильно нормировать моды

$$u_k = \frac{1}{2} e^{i\pi/4} H_0^{(1)}(-kt) e^{ikx},$$

вычислим коммутатор $[b_k, b_{k'}^+]$. При $t \to -\infty$ имеем

$$\langle u_k, u_{k'} \rangle = \frac{2}{t} e^{2A+2B+\phi} \delta_{kk'} = F(k,t) \delta_{kk'}. \quad (35)$$

Отсюда, полагая, что

$$[\phi(t,x), \phi(t,x')] = 0, \quad [\pi(t,x), \pi(t,x')] = 0, \quad (36)$$

$$[\phi(t,x), \pi(t,x')] = -\frac{i}{L^2} \delta(x - x'), \quad (37)$$

где

$$\pi(t,x) = \frac{\delta \sqrt{-g} L}{\delta \dot{\phi}} = -\frac{2}{\lambda_s^2} \sqrt{-g} e^{-\phi} g^{00} \dot{\phi},$$

легко найти, что

$$[b_k, b_{k'}^+] = \frac{\pi \lambda_s^2 t_i}{2L^3} \delta_{kk'} \quad (38)$$

и правильно (на полкванта) нормированные моды при $t \to -\infty$ имеют вид

$$u_k = \sqrt{\frac{-\lambda_s^2 t_i}{L^3 k t}} e^{-ik(x-t)}.$$

Чтобы физически интерпретировать эти квантовые моды, вычислим $\langle T_{00} \rangle$. В уравнениях Эйнштейна $(0,0)$-компонента имеет вид

$$4\dot{A}\dot{B} - 2\ddot{B} - 2\dot{B}^2 = \\ = \frac{1}{2}[(\dot{\phi})^2 + (\phi')^2 + (\dot{\gamma})^2 + (\gamma')^2] = T_{00} \quad (39)$$

(мы перенесли γ направо и теперь интерпретируем эту часть метрики как вклад гравитонов). Если принять (причем в этом случае не важно, считаем ли мы амплитуды мод $b_{\alpha k}$ классическими, но случайно распределенными гауссовыми величинами, или же операторами), что парные корреляторы равны

$$\langle b_{\alpha k} b_{\beta l}^+ \rangle = n_\alpha(k) \delta_{\alpha\beta} \delta_{kl}, \quad \langle b_{\alpha k} b_{\beta l} \rangle = 0, \quad (40)$$

$$n_1(k) = n_2(k), \quad n_3(k) = n_4(k) \quad (41)$$

(физический смысл последнего условия состоит в том, что поток квантов, летящих вправо, равен потоку квантов, летящих влево), то

$$\langle T_{00} \rangle = \langle \hat{H} \rangle = \sum_k \frac{\lambda_s^2 k t_i}{L^3 t} (n_1(k) + n_3(k)). \quad (42)$$

Таким образом, мы видим, что при $t \to -\infty$ асимптотически плоский мир наполнен квантами гравитационного и скалярного полей, которые естественно называть гравитонами и дилатонами. Их плотность энергии при $t \to -\infty$ стремится к нулю, что соответствует обычному красному смещению.

Наконец, выясним, что будет видеть наблюдатель, движущийся инерциально относительно космологически выделенной системы отсчета (в которой фоновое пространство-время однородно и изотропно) [7]. В качестве детектора квантов поля ϕ будем рассматривать некоторый тип материи, для которой поле ϕ входит в эффективную гравитационную постоянную. Пусть $|E_0\rangle$ и $|E\rangle$ — квантовомеханические состояния детектора до и после того, как детектор провзаимодействовал с полем ϕ. Соответствующее этому взаимодействию возмущение гамильтониана детектора имеет вид

$$V = \lambda d(\tau) \phi[x(\tau)] \left(-\frac{t}{t_i} \right)^\psi, \quad (43)$$

где $x(\tau)$ — траектория, вдоль которой движется детектор, $d(\tau)$ — оператор монопольного момента детектора. Тогда легко видеть, что вероятность перехода детектора, возбуждаемого квантами поля ϕ, из исходного состояния во все возможные состояния равна

$$w = \lambda^2 \left(-\frac{t}{t_i} \right)^{2\psi} \sum_E |\langle E | d(0) | E_0 \rangle|^2 F(E - E_0). \quad (44)$$

Первый множитель под знаком суммы описывает избирательность детектора, второй — функцию отклика, которая и должна нас интересовать. Вычислим ее, предполагая, что детектор движется инерциально относительно космологически выделенной системы отсчета (т. е. $x = vt/\sqrt{1 - v^2}$):

$$F(E)=\int_a^b d\tau\int_a^b d\tau'\exp[iE(\tau-\tau')]G(x(\tau),x(\tau'))=$$

$$=\frac{\lambda_s^2}{L^3}\sqrt{1-v^2}\tau_i^{1/\kappa}\int_{1/t_i}^{\infty}\frac{dk}{k}n_1(k)\int_a^b\frac{d\tau}{\tau^{1/2\kappa}}\times$$

$$\times\exp\left\{-ik\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}t_i\left(\frac{\tau}{\tau_i}\right)^{1/\kappa}+iE\tau\right\}\times$$

$$\times\int_a^b\frac{d\tau'}{(\tau')^{1/2\kappa}}\exp\left\{ik\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}t_i\left(\frac{\tau'}{\tau_i}\right)^{1/\kappa}-iE\tau'\right\}+$$

$$+\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\to\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}. \quad (45)$$

Здесь мы ввели следующие обозначения:

$$\kappa=\frac{1}{4}(\psi^2+\beta^2+3)+\psi,\quad \tau_i=\frac{t_i}{\kappa},$$

$$t=\frac{t_i}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\tau}{\tau_i}\right)^{1/\kappa},$$

t имеет смысл мирового времени, а τ — собственного времени детектора.

Таким образом, вычисление функции отклика $F(E)$ сводится к нахождению значения интеграла

$$I(k,E)=\int_a^b\frac{d\tau}{(\tau')^{1/2\kappa}}\times$$

$$\times\exp\left\{-ik\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}t_i\left(\frac{\tau}{\tau_i}\right)^{1/\kappa}+iE\tau\right\}. \quad (46)$$

Если детектор движется не слишком быстро и выполняется условие $a,b\gg\tau_i$, то интеграл (46) можно взять методом стационарной фазы:

$$I(k,E)\approx\frac{i\kappa E^{1/2\kappa-1}}{kt_i}\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}\times$$

$$\times\left\{\frac{\exp(iEb)}{(Eb)^{1/2\kappa}}\frac{\exp\left\{-ikt_i\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\left(\frac{b}{\tau_i}\right)^{1/\kappa}\right\}}{(b/\tau_i)^{1/\kappa-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\exp(iEa)}{(Ea)^{1/2\kappa}}\frac{\exp\left\{-ikt_i\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\left(\frac{a}{\tau_i}\right)^{1/\kappa}\right\}}{(a/\tau_i)^{1/\kappa-1}}\right\}. \quad (47)$$

Окончательный вид функции отклика детектора $F(E)$ оказывается следующим:

$$F(E)=\frac{\lambda_s^2}{L^3}\sqrt{1-v^2}\tau_i^{1/\kappa}\int_{1/t_i}^{\infty}\frac{dkn_1(k)}{k^3E^2}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{\kappa\cos\left(Eb-\xi k(Eb)^{1/\kappa}\right)}{\xi(Eb)^{1/\kappa-1}b^{1/2\kappa}}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\kappa\cos\left(Ea-\xi k(Ea)^{1/\kappa}\right)}{\xi(Ea)^{1/\kappa-1}a^{1/2\kappa}}\right]^2+$$

$$+\left[\frac{\kappa\sin\left(Eb-\xi k(Eb)^{1/\kappa}\right)}{\xi(Eb)^{1/\kappa-1}b^{1/2\kappa}}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\kappa\sin\left(Ea-\xi k(Ea)^{1/\kappa}\right)}{\xi(Ea)^{1/\kappa-1}a^{1/2\kappa}}\right]^2\right\}+$$

$$+\frac{1-v}{1+v}\to\frac{1+v}{1-v}, \quad (48)$$

где

$$\xi=\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\frac{t_i}{(E\tau_i)^{1/\kappa}}.$$

Мы видим, что если детектор находится во включенном состоянии при $\tau\in(a,b)$, его возбуждают кванты с импульсами k, принадлежащими интервалу

$$\left(E\left(\frac{a}{t_i}\right)^{1/\kappa}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}},E\left(\frac{b}{t_i}\right)^{1/\kappa}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\right).$$

Итак, при $t\to-\infty$ асимптотически плоское пространство-время (энергия, связанная с фоном, уменьшается как $1/t^2$) заполнено частицами, плотностью энергии которых нельзя пренебречь (она уменьшается как $1/t$). Космологические решения, характеризующиеся равенством нулю чисел заполнения, имеют в функциональном пространстве задачи меру нуль и в этом смысле являются нетипичными. Таким образом, для модели Венециано существует бесконечный произвол в выборе начального состояния и проблема начальных данных остается нерешенной (см. в этой связи [8]).

4. СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В ОКРЕСТНОСТИ СИНГУЛЯРНОСТИ

В пределе $t\to-0$ метрика пространства-времени в струнном фрейме асимптотически эквивалентна казнеровской с показателями

$$p_1=\frac{[(\beta+\beta_1)^2+(\psi+\psi_1)^2-1]/2+\psi+\psi_1}{[(\beta+\beta_1)^2+(\psi+\psi_1)^2+3]/2+\psi+\psi_1}, \quad (49)$$

$$p_2 = \frac{1+\psi+\psi_1+\beta+\beta_1}{[(\beta+\beta_1)^2+(\psi+\psi_1)^2+3]/2+\psi+\psi_1}, \quad (50)$$

$$p_3 = \frac{1+\psi+\psi_1-\beta-\beta_1}{[(\beta+\beta_1)^2+(\psi+\psi_1)^2+3]/2+\psi+\psi_1}, \quad (51)$$

где

$$\psi_1 = \sum_k \frac{2}{\pi} N \left[e^{i\pi/4}(b_{1k}e^{ikx}+b_{2k}e^{-ikx}) + \text{c.c.}\right], \quad (52)$$

$$\beta_1 = \sum_k \frac{2}{\pi} N \left[e^{i\pi/4}(b_{3k}e^{ikx}+b_{4k}e^{-ikx}) + \text{c.c.}\right], \quad (53)$$

а $N = \sqrt{\pi\lambda_s^2 t_i/2L^3}$ — нормировочная константа для мод, вычисленная в предыдущем разделе.

Вклад в действие дилатона ϕ от части классической траектории (22), соответствующей окрестности космологической сингулярности ΔS_{sing} логарифмически расходится — он пропорционален $\ln(\Lambda/t_0)$, где Λ — начало казнеровской эпохи, $t_0 \to 0$ — некоторое малое время. В то же время оставшийся вклад в действие конечен. Это можно интерпретировать как разрушение квантовой когерентности [9] между модами c_{1k} и c_{2k} (c_{3k} и c_{4k}), для которых выполнено условие $|kt| \ll 1$. Благодаря этому разрушению моды с длиной волны, большей, чем космологический горизонт, «замерзают» — их амплитуды можно считать не операторами, а классическими случайно распределенными величинами[5]. Именно эти моды дают вклад в казнеровские показатели. Физической причиной такого эффекта является то, что радиус космологического горизонта H^{-1} задает масштаб причинной связности в теории; соответственно, корреляции квантовых величин могут иметь место лишь на масштабах, меньших, чем H^{-1}. «Замерзание» амплитуд означает, что наблюдатель, живущий в казнеровскую эпоху, будет всякий раз регистрировать одни и те же значения казнеровских показателей вне зависимости от числа экспериментов, которые он проводит. Тем не менее до наступления времени, когда становится справедливой казнеровская асимптотика, невозможно с уверенностью предсказать, какие именно значения казнеровских показателей он будет регистрировать — в этом смысле казнеровские показатели являются случайными величинами. Таким образом, структура пространства-времени при $t \to -0$ становится стохастической и имеет смысл обсуждать поведение разнообразных корреляционных функций казнеровских показателей. При этом везде в дальнейшем мы будем отвлекаться от вкладов в метрику, не зависящих от t, поскольку они не имеют отношения к характеру особенности метрики при $t \to -0$.

[5] Строго говоря, это можно сделать, если эффективные числа заполнения $\langle n_k\rangle \gg 1$. При этом некоммутативностью координат и импульсов можно пренебречь. Более детальное обсуждение см. в работе [10].

Технически оказывается более удобным не переходить к мировому времени, а работать с метрикой вида

$$ds^2 = t^{q_1}(dt^2 - dx^2) - t^{q_2}dy^2 - t^{q_3}dz^2.$$

Величины q_1, q_2, q_3 связаны с казнеровскими показателями следующим образом:

$$q_1 = \frac{2p_1}{1-p_1}, \quad q_2 = \frac{2p_2}{1-p_1}, \quad q_3 = \frac{2p_3}{1-p_1}. \quad (54)$$

Благодаря тому, что в струнном фрейме имеет место тождество $p_1^2+p_2^2+p_3^2 = 1$, также справедливо соотношение

$$q_2^2 + q_3^2 = 4(q_1+1). \quad (55)$$

Определить полным образом стохастическую структуру пространства-времени можно, вычислив функцию распределения

$$F(\lambda,\mu) = \langle \delta(q_2-\lambda)\delta(q_3-\mu)\rangle = \\ = \int dx\,dy\, e^{-i(\lambda x+\mu y)}\langle e^{i(q_2x+q_3y)}\rangle.$$

Благодаря тому, что q_1 однозначно определяется по известным величинам q_2 и q_3, такая функция распределения позволяет находить выражения для любых корреляторов показателей q_i. После несложных вычислений получим

$$F(\lambda,\mu) = \frac{\pi}{\sqrt{N_1N_3}} \times \\ \times \exp\left\{ -\frac{\left(1+\psi-\frac{\lambda+\mu}{2}\right)^2}{2N_1} - \frac{\left(\beta-\frac{\lambda-\mu}{2}\right)^2}{2N_3}\right\}, \quad (56)$$

где

$$N_1 = \sum_k \frac{n_{1k}N^2}{\pi^2}, \quad N_3 = \sum_k \frac{n_{3k}N^2}{\pi^2}.$$

Эта функция характеризует пространство-время «в бесконечно малом». Ввиду того что задача трансляционно инвариантна, все точки в пространстве равноправны: локально измеренные казнеровские показатели являются случайными величинами, описываемыми функцией распределения (56). Однако вероятность того, что в данной точке пространства казнеровские показатели очень малы, а в бесконечно близкой к ней точке велики, стремится к нулю. Нелокальные корреляционные свойства казнеровских показателей отчасти задаются двухточечными корреляционными функциями[6)]

$$\langle q_2(x)q_2(x')\rangle = (1+\psi+\beta)^2 + \\ + \sum_k \frac{16N^2(n_{1k}+n_{3k})}{\pi^2}\cos[k(x-x')], \quad (57)$$

$$\langle q_3(x)q_3(x')\rangle = (1+\psi-\beta)^2 + \\ + \sum_k \frac{16N^2(n_{1k}+n_{3k})}{\pi^2}\cos[k(x-x')], \quad (58)$$

$$\langle q_2(x)q_3(x')\rangle = (1+\psi)^2 - \beta^2 + \\ + \sum_k \frac{16N^2(n_{1k}-n_{3k})}{\pi^2}\cos[k(x-x')]. \quad (59)$$

Можно видеть, что корреляция носит осциллирующий характер, что является артефактом способа задания начальных условий при $t \to -\infty$.

В заключение рассмотрим вопрос о возможности смены при приближении к космологической сингулярности суперинфляционного расширения Вселенной сжатием.

Если метрика пространства-времени является изотропной и однородной, мы говорим, что Вселенная претерпевает суперинфляционное расширение, когда выполнено условие

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 > 0,$$

где a — масштабный фактор. Если он меняется со временем по закону $a = (-t)^p$, неравенство выполняется при $p < 0$. На анизотропный случай этот критерий можно обобщить двумя способами (как мы увидим ниже, от выбора критерия результаты зависят в малой степени):

а) ввести не один, а три масштабных фактора и потребовать выполнения неравенств $p_1 < 0$, $p_2 < 0$, $p_3 < 0$,

б) потребовать выполнения неравенства $p_1 + p_2 + p_3 < 0$, характеризующего поведение сопутствующего элемента 4-объема.

[6)] Остальные парные корреляционные функции легко вычислить, воспользовавшись уравнением (55), связывающим казнеровские показатели. Ввиду громоздкости соответствующих выражений мы не будем их здесь приводить.

Поскольку при приближении к сингулярности пространство-время приобретает стохастическую структуру, локально характеризующуюся распределением (56), существует ненулевая вероятность того, что суперинфляция остановится и сменится сжатием. Легко видеть, что обратная в некотором смысле величина — вероятность того, что суперинфляция продолжается до падения Вселенной в сингулярность второго типа, — согласно критерию (а) равна

$$w(\forall p_i < 0) = w(\forall q_i < 0) = \\ = \frac{1}{2\pi\sqrt{N_1N_3}} \int_0^{\sqrt{2}} \rho\, d\rho \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} d\phi \ \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(1+\psi-\rho\cos\phi)^2}{2N_1} - \frac{(\beta-\rho\cos\phi)^2}{2N_3}\right\}. \quad (60)$$

В физически интересном случае при $N_1, N_3 \to \infty$, $\psi, \beta \sim 1$ имеем

$$w(\forall p_i < 0) \approx \frac{1}{8\sqrt{N_1N_3}}. \quad (61)$$

Вероятность того, что суперинфляционное расширение сменится сжатием по всем направлениям, в том же пределе ведет себя как

$$w(\forall p_i > 0) \approx \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{N_1}{N_3}} - \frac{1}{8\sqrt{N_1N_3}}. \quad (62)$$

Если же исходить из критерия (б), то вероятность максимальной длительности суперинфляции оказывается равной

$$w\left(\sum p_i < 0\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{N_1N_3}} \ \times \\ \times \int_0^{\sqrt{6}} \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \exp\left\{-\frac{(3+\psi-\rho\cos\phi)^2}{2N_1} - \right. \\ \left. -\frac{(\beta-\rho\sin\phi)^2}{2N_3}\right\} \approx \frac{3}{\sqrt{N_1N_3}}, \\ N_1, N_3 \to \infty, \quad \psi, \beta \sim 1. \quad (63)$$

Ввиду фактической независимости асимптотик (60) и (63) от выбора критерия длительности суперинфляции можно говорить о том, что при подходе к космологической сингулярности суперинфляционное расширение обязательно сменяется сжатием.

На рис. 1 представлено поведение вероятности максимальной длительности суперинфляции $w\left(\sum p_i < 0\right)$ как функции N_1 и N_3 при $\psi = -\sqrt{3}$,

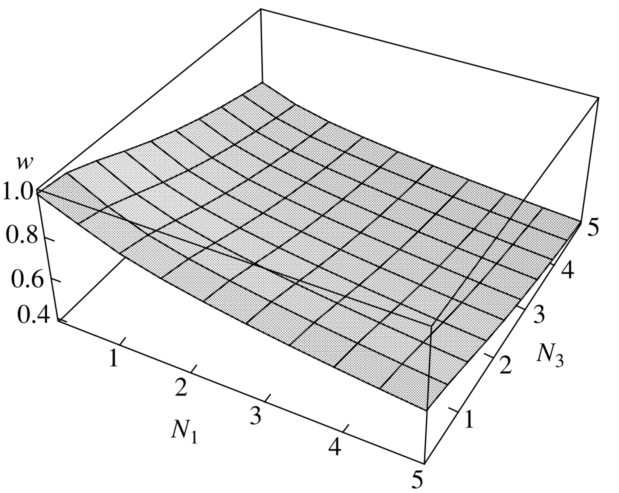

Рис. 1. Поведение вероятности максимальной длительности суперинфляции $w\left(\sum p_i < 0\right)$ как функции N_1 и N_3 при $\psi = -\sqrt{3}$, $\beta = 0$ при относительно малой концентрации гравитонов и дилатонов в начальном состоянии

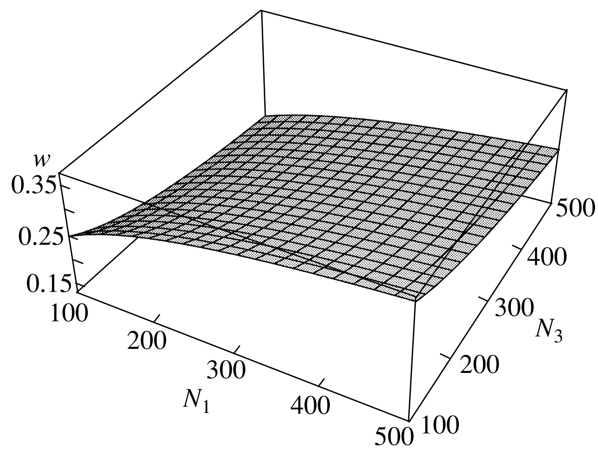

Рис. 2. Поведение вероятности смены суперинфляции сжатием по всем направлениям $w(\forall p_i > 0)$ как функции N_1 и N_3 при $\psi = -\sqrt{3}$, $\beta = 0$ и больших плотностях энергий гравитонов N_1 и дилатонов N_3 в начальном состоянии

$\beta = 0$, что соответствует отсутствию затравочной анизотропии, т. е. вселенной Венециано. Интересно, что при не слишком больших N_1, N_3 повышение плотности энергии гравитонов по отношению к плотности энергии дилатонов, вообще говоря, приводит к уменьшению такой вероятности. Тем не менее при больших N_1 и N_3 плотности энергий гравитонов и дилатонов имеют одинаковый вес с точки зрения влияния на вероятность максимальной длительности суперинфляции — увеличение числа гравитонов и дилатонов в начальном состоянии всегда приводит к уменьшению этой вероятности.

При рассмотрении асимптотики вероятности смены суперинфляции сжатием по всем направлениям $w(\forall p_i > 0)$ при больших N_1, N_3 мы приходим к похожей картине (см. рис. 2): увеличение числа гравитонов в начальном состоянии в общем случае приводит к уменьшению этой вероятности, а увеличение числа дилатонов — к ее росту. Это означает, что большим становится статистический вес состояний, описывающих анизотропное расширение (когда по двум из трех направлений в пространстве имеет место расширение, а по третьему направлению — сжатие и т. д.), причем, чем больше плотность энергии гравитонов в начальном состоянии, тем большим оказывается этот вес.

5. ВЫВОДЫ

В данной работе рассматривалась структура космологической сингулярности в модели Венециано. Как было показано, проблема единственности выбора начальных данных в сценарии Венециано остается нерешенной — асимптотически плоский мир, который соответствует начальному состоянию в сценарии, может быть наполнен квантами гравитационного и скалярного полей. Для того чтобы понять, какое влияние оказывают вариации начальных данных на структуру пространства-времени возле сингулярности, нами было построено точное решение, описывающее в пределе $t \to -\infty$ кванты гравитационного и скалярного полей, распространяющиеся на фоне асимптотически плоского пространства-времени. Было показано, что в окрестности сингулярности пространство-время описывается метрикой Казнера с показателями, являющимися случайными классическими величинами. Результаты вычисления функции распределения казнеровских показателей, а также вероятностей максимальной длительности суперинфляции и смены суперинфляции сжатием по всем направлениям (что соответствует переходу от сингулярности, характеризующейся обращением в бесконечность эффективной гравитационной постоянной, к обычной сингулярности, соответствующей обращению в бесконечность инвариантов тензора кривизны) указывают на то, что увеличение числа гравитонов в начальном состоянии приводит к росту статистического веса эволюций, соответствующих анизотропному режиму расширения.

С физической точки зрения это означает, что пространство-время в окрестности сингулярности приобретает доменную структуру, причем в каждом из доменов реализуется свой режим анизотропного расширения.

Таким образом, можно говорить о том, что квантование сценария Венециано в рамках низкоэнергетического приближения теории струн не приводит к общему смягчению сингулярности, и для решения проблемы перехода от стадии инфляции к замедляющемуся фридмановскому расширению необходимо привлекать идеи непертурбативной теории струн.

Автор признателен А. А. Старобинскому за полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 02-02-16817, МАС 02-02-06914) и Программ фундаментальных исследований РАН «Нестационарные явления в астрономии» и «Физика элементарных частиц и фундаментальная ядерная физика».

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Campbell, A. Linde, and K. Olive, Nucl. Phys. B **355**, 146 (1991).

2. G. Veneziano, Phys. Lett. **B265**, 287 (1991).

3. М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен, *Теория суперструн*, т. 2, Мир, Москва (1990).

4. M. Gasperini and G. Veneziano, Phys. Rep. **373**, 1 (2003).

5. M. Gasperini, J. Maharana, and G. Veneziano, Nucl. Phys. B **472**, 349 (1996).

6. J. Barrow and K. Kunze, Phys. Rev. D **56**, 2 (1997).

7. Н. Бирелл, П. Девис, *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*, Мир, Москва (1984).

8. N. Kaloper, A. Linde, and R. Bousso, Phys. Rev. D **59**, 043508 (1999).

9. A. Starobinsky, in *Field Theory, Quantum Gravity and Strings*, ed. by H. J. de Vega and N. Sanchez, Springer-Verlag, New-York (1986).

10. D. Polarski and A. Starobinsky, Class. Quant. Grav. **13**, 377 (1996).