

ДИНАМИКА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ, ПРОИСХОДЯЩИХ В СИЛЬНОШУНТИРОВАННОМ ПЕРЕХОДЕ ДЖОЗЕФСОНА ПРИ ЕГО СМЕЩЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ ТОКА С УПРАВЛЯЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный*

*Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений
141570, пос. Менделеево, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 19 августа 2002 г.

Развит предложенный ранее авторами метод исследования динамики сильношунтированного перехода Джозефсона, смещенного внешним периодическим током с управляемыми параметрами. Результаты работы позволяют объяснить ряд известных экспериментальных фактов. Получены аналитические выражения для скорости затухания переходных процессов и энергетических затрат, необходимых для переключения перехода Джозефсона из одного квантового состояния в другое. Обсуждаются вопросы взаимодействия тока смещения со сверхтоком, влияние члена типа $\cos \varphi$ на скорости затухания переходных процессов и трансформации энергии. Для случая смещения перехода короткими (одно- или биполярными) импульсами в виде δ -функции результаты представлены в виде точных аналитических выражений. Приведены графические диаграммы, иллюстрирующие зависимость ширины ступеньки Шапиро от формы импульса смещения.

PACS: 74.50.+r

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время важным практическим применением эффекта Джозефсона является его использование в эталонах напряжения постоянного тока. Сегодня практически во всех странах мира, имеющих национальные метрологические центры, размер единицы вольт воспроизводится аппаратурой на основе этого эффекта. Успех в создании и широком практическом использовании эталонов вольт постоянного напряжения стимулировал работы по созданию квантовых синтезаторов напряжения переменного тока [1–4].

Как известно [5, 6], мгновенное электрическое напряжение $V(\theta)$, возникающее на переходе Джозефсона, связано с изменением функции $\varphi(\theta)$ следующим соотношением Джозефсона:

$$V(\theta) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\varphi}{d\theta}, \quad (1)$$

где $\varphi(\theta)$ — разность фаз функций параметра по-

рядка в слабосвязанных сверхпроводниках джозефсоновского перехода (в дальнейшем функция фазы или фаза перехода), θ — текущее размерное время, $\Phi_0 = h/2e$ — квант магнитного потока, h — постоянная Планка, e — заряд электрона. Следует отметить, что в метрологии для воспроизведения размера единицы электрического напряжения вместо константы Φ_0 , которая может уточняться по мере накопления новых знаний, используют константу Джозефсона $K_{J-90} \equiv K_J = 483597.9 \text{ ГГц/В} \approx \Phi_0^{-1}$ [7, 8].

Принцип генерации (синтеза) переменного напряжения с использованием эффекта Джозефсона основан на управлении динамикой фазы $\varphi(\theta)$ таким образом, чтобы переменное «ступенчатое» напряжение (1) имело желаемую форму с фундаментальной точностью. Динамика фазы $\varphi \equiv \varphi(\theta)$ джозефсоновского перехода с конечной электрической емкостью C при смещении его внешним током описывается решением дифференциального уравнения второго порядка (см., например, формулу (2.42) в [5]). При наличии условий захвата фазы φ внешним периодическим током смещения с частотой f

*E-mail: mera@vniiftri.ru

на вольт-амперной характеристике (ВАХ) джозефсоновского перехода появляются участки постоянного напряжения, так называемые ступеньки Шапиро [5], а воспроизводимое (наблюдаемое) напряжение, определяемое формулой

$$U(\theta) = \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta}^{\theta+\Delta\theta} V(\theta') d\theta' = \frac{1}{2\pi K_J} \frac{\varphi(\theta + \Delta\theta) - \varphi(\theta)}{\Delta\theta}, \quad (1')$$

через некоторое время становится, в пределах ширины этих ступенек, равным kf/K_J , где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ — порядковый номер ступеньки Шапиро, а $\Delta\theta \gg f^{-1}$.

Наличие ненулевой емкости C приводит к гистерезису ВАХ перехода [6] и, как следствие, к неоднозначной зависимости функции $U(\theta)$ от параметров тока смещения. В частности, при одних и тех же параметрах тока смещения в зависимости от предыстории эволюции фазы напряжение $U(\theta)$ может принимать значения, соответствующие разным номерам k . Последнее обстоятельство делает практически невозможным использование таких джозефсоновских структур для целей синтеза переменного напряжения.

Для минимизации влияния емкости C на динамику фазы джозефсоновского перехода необходимо, чтобы выполнялось условие [5, 6]

$$\omega_c \ll (R_N C)^{-1}, \quad (2)$$

где R_N — нормальное сопротивление, $\omega_c = 2\pi I_c R_N K_J$ — критическая частота и I_c — критический ток перехода. Это условие реализуется в так называемых сильношунтированных джозефсоновских структурах. В этих структурах динамика фазы $\varphi(\theta)$ может быть описана дифференциальным уравнением первого порядка [6], которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\dot{\varphi}(t) + \sin \varphi(t) = i(t). \quad (3)$$

Здесь $t = \omega_c \theta$ — безразмерное текущее время, $i(t) = i_0 + i_1(t)$ — безразмерный внешний ток смещения с $\langle i_1(t) \rangle = 0$, $i_0 = I_0/I_c$ и I_0 — соответственно безразмерная и размерная постоянные составляющие тока смещения, $i_1(t) = I_1(t)/I_c$ и $I_1(t)$ — соответственно безразмерная и размерная высокочастотные (ВЧ) составляющие тока смещения, а точка означает дифференцирование по времени.

Уравнение (3) получено на основе резистивной модели джозефсоновского перехода в предположении $\omega_c R_N C \ll 1$. До настоящего времени, насколько нам известно, отсутствует строгое теоретическое обоснование применимости данной модели к реальным джозефсоновским структурам. Однако многочисленные экспериментальные исследования сильношунтированных переходов Джозефсона [6], в том числе исследования ВАХ двухбарьерных SINIS-структур [9–11], показали хорошее согласие с теоретическими результатами. Более того, в настоящее время в некоторых случаях качество джозефсоновских структур типа SINIS и SNS оценивается по соответствию их ВАХ модели (3).

На сегодняшний день существует несколько конкурирующих научно-технических подходов к созданию квантовых синтезаторов переменного напряжения на основе модели (3). Один из них — управление динамикой фазы джозефсоновского перехода путем его смещения ВЧ-током синусоидальной формы [1, 12–14] либо в форме коротких импульсов [2, 15–17] с варьируемыми параметрами (амплитудой и частотой следования).

В наших работах [16, 17] на основе модели (3) перехода Джозефсона, в частности, показано, что для случая смещения током вида

$$i(t) = i_0^* + 2\pi i_{01} \sum_n \delta(t - nT) \quad (4a)$$

(однополярные импульсы) или

$$i(t) = i_0 + 2\pi i_{01} \times \sum_n \left\{ \delta\left(t - \frac{T+\tau}{2} - nT\right) - \delta\left(t - \frac{T-\tau}{2} - nT\right) \right\} \quad (4б)$$

(биполярные импульсы) [17] условие захвата фазы φ может быть записано как неравенство $|D| > 1$, где $\delta(t)$ — δ -функция Дирака, $T = \omega_c f^{-1}$ — безразмерный период следования импульсов, τ — безразмерный временной сдвиг между импульсами разной полярности в пределах одного периода ($0 < \tau \leq T/2$), $i_0^* = i_0 - 2\pi i_{01} T^{-1}$, $i_{01} = I_c^{-1} \langle I_1(t) \rangle$ — безразмерная «интегральная» амплитуда одиночного импульса. Функция $D \equiv D(i_0, i_{01}, T)$ определяется выражением

$$D = \text{ch} \left(\frac{T}{2} \sqrt{1 - i_0^{*2}} \right) \cos(\pi i_{01}) - \frac{i_0^*}{\sqrt{1 - i_0^{*2}}} \text{sh} \left(\frac{T}{2} \sqrt{1 - i_0^{*2}} \right) \sin(\pi i_{01}) \quad (5a)$$

в случае смещения током вида (4а) при $|i_0^*| < 1$ и выражением

$$D = \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} T \sqrt{1 - i_0^2} \right) - \frac{\sin^2(\pi i_{01})}{1 - i_0^2} \times \left[\operatorname{ch} \left(\frac{T}{2} \sqrt{1 - i_0^2} \right) - \operatorname{ch} \left(\left(\frac{T}{2} - \tau \right) \sqrt{1 - i_0^2} \right) \right] \quad (56)$$

в случае смещения током вида (4б) при $|i_0| < 1$. (При $|i_0^*| > 1$ в формуле (5а) или $|i_0| > 1$ в формуле (5б) необходимо использовать аналитическое продолжение гиперболических функций в тригонометрические, соответствующее замене $\sqrt{1 - i_0^2} \rightarrow j \sqrt{i_0^2 - 1}$.) Отметим, что использование δ -функций в качестве математической модели импульса ВЧ-тока смещения перехода допустимо при условии, когда ширина импульса много меньше времени ω_c^{-1} (короткий импульс или ударное импульсное возбуждение).

Выражения (5) определяют диапазон изменения значений параметров i_0 , i_{01} и T тока смещения, в котором реализуются условия захвата фазы. Однако для полного описания функции $U(t)$ необходимо знать эволюцию разности фаз, представленную последним сомножителем в правой части выражения (1'). Известно [16], что в случае захвата фазы выражение (1') для разности фаз может быть записано в безразмерном виде как

$$\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) = 2\pi k \frac{\Delta t}{T} + \mu(t, \Delta t), \quad (6)$$

где $\Delta t = NT$, $N = 1, 2, 3, \dots$, член $\mu(t, \Delta t)$ описывает дополнительный набег фазы, связанный с переходными процессами, и при фиксированных параметрах тока смещения и $t \rightarrow \infty$ выполняется условие $\mu(t, \Delta t) \rightarrow 0$.

Для иллюстрации изложенного выше на рис. 1 приведены в относительных единицах графики функций $U(t)$ и $\varphi(t)$ (кривые 1 и 3). Эти зависимости получены прямым численным интегрированием уравнения (3) с правой частью (4а) для $T = 5.3$. Ток смещения $i(t)$ определялся следующим образом: при $t < 0$ ток $i(t) = 0.6$, $\varphi(t) = \text{const}$; при $0 \leq t < 5T$ (реализованы условия захвата фазы для нулевой ступеньки)

$$i(t) = 0.6 + 0.22 \cdot 2\pi \sum_{n=0}^4 \delta(t - 0.5T - nT),$$

при $t \geq 5T$ (реализованы условия захвата фазы для первой ступеньки)

$$i(t) = 0.6 + (0.22 + 0.9) \cdot 2\pi \sum_{n=5}^{10} \delta(t - 0.5T - nT).$$

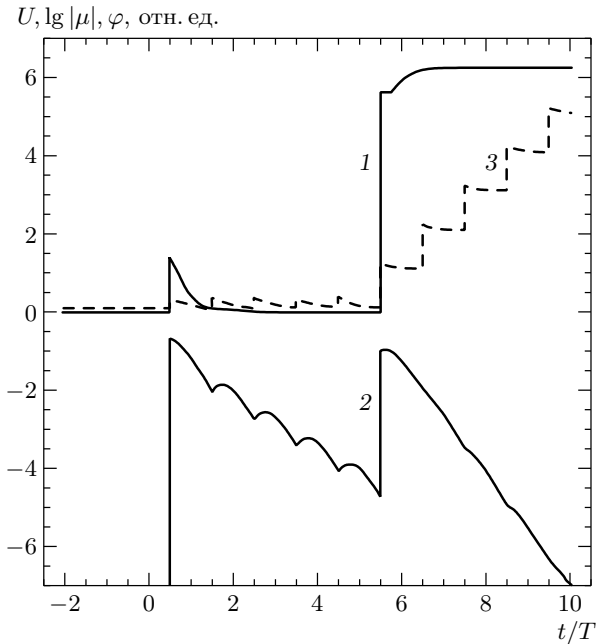


Рис. 1. Графики функций: 1 — $U(t)$; 2 — $\lg |\mu(t, T)|$; 3 — $\varphi(t)$

На рис. 1 также приведен график функции $\lg |\mu(t, T)|$ (кривая 2), которая характеризует точность воспроизводимого напряжения в зависимости от параметра t . Видно, что для интервалов изменения параметра t порядка нескольких периодов T значение функции $\mu(t, T)$ может быть относительно большим.

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие метода исследования [16, 17] динамики фазы и переходных процессов в сильношунтированном джозефсоновском переходе на основе модели (3), вывод новых и обоснование наиболее важных и принципиальных известных результатов, а также получение конкретных аналитических зависимостей для случая точно решаемых моделей тока смещения (4).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

2.1. Постановка задачи

Для исследования динамики переходных процессов, возникающих в сильношунтированном джозефсоновском переходе, воспользуемся методом, предложенным нами ранее [17]. Введем вместо функции

фазы $\varphi(t)$ две действительные неизвестные функции, $x(t)$ и $y(t)$, с помощью соотношения

$$e^{j\varphi} = \frac{x - jy}{x + jy}. \quad (7)$$

Этим соотношением функции $x(t)$ и $y(t)$ определены с точностью до некоторого множителя — ненулевой вещественной функции. Эта функция может быть выбрана так, чтобы $x(t)$ и $y(t)$, связанные с функцией $\varphi(t)$, удовлетворяющей уравнению (3), являлись решением следующей системы уравнений [17]:

$$\begin{aligned} 2\dot{x}(t) &= x(t) + i(t)y(t), \\ -2\dot{y}(t) &= i(t)x(t) + y(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что любое ненулевое решение системы (8) определяет решение уравнения (3) (см. ниже разд. 3) с точностью до слагаемого кратного 2π .

Сделаем два замечания. Во-первых, при условии периодичности функции $i(t)$ система уравнений (8) может быть сведена к уравнению второго порядка типа уравнения Хилла. Решения таких уравнений во многих практически важных приложениях хорошо изучены. В частности, решение уравнения Шредингера, определяющее вид разрешенных энергетических зон для электрона в прямоугольном периодическом поле [18], приводит к зависимости, формально схожей с формулой (5).

Во-вторых, система уравнений (8) при замене $t \rightarrow j\omega_c t$ становится формально схожей с системой квантовомеханических уравнений, впервые использованных Джозефсоном для описания одноименного эффекта. Мы надеемся, что этот факт может быть положен в основу подхода к строгому обоснованию математической модели (3) некоторых сильношунтированных джозефсоновских структур.

Теперь заметим, что в случае периодической функции $i(t) = i_0 + i_1(t)$ система линейных дифференциальных уравнений (8) удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова [19]. В соответствии с утверждением этой теоремы при выполнении критерия захвата фазы φ периодическим внешним током $i(t)$ всякое решение системы (8) может быть представлено в виде

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = L(t) \begin{bmatrix} x_1(t - t_0) \\ y_1(t - t_0) \end{bmatrix}, \quad (9a)$$

где $L(t)$ обозначает периодическую матрицу 2×2 , т. е.

$$L_{p,q}(t + T) = L_{p,q}(t), \quad p = 1, 2, \quad q = 1, 2,$$

а функции $x_1(t)$ и $y_1(t)$ имеют в общем случае вид $x_1(t) = \exp(\lambda_1 t)$ и $y_1(t) = \exp(\lambda_2 t)$, а в вырожденном

случае $x_1(t) = [t + x_1(t_0)] \exp(\lambda t)$ и $y_1(t) = \exp(\lambda t)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, x_1(t_0)$ — некоторые вещественные постоянные, t_0 — некоторый начальный момент времени. Отметим, что вырожденный случай реализуется только на границе областей значений параметров i_0, i_{01} и T , внутри которых удовлетворяются условия захвата фазы, и не соответствует режиму захваченной фазы.

Более того, можно показать, что $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_0$, так как след матрицы системы уравнений (8) равен нулю. В режиме захвата фазы $\lambda_0 \neq 0$; далее, для определенности, положим $\lambda_0 > 0$. При таких условиях выражение (9a) упрощается и его можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= L_{11}(t) \exp[\lambda_0(t - t_0)] + \\ &\quad + L_{12}(t) \exp[-\lambda_0(t - t_0)], \\ y(t) &= L_{21}(t) \exp[\lambda_0(t - t_0)] + \\ &\quad + L_{22}(t) \exp[-\lambda_0(t - t_0)]. \end{aligned} \quad (9б)$$

2.2. Области захвата фазы. Точно решаемые модели

В случае смещения сильношунтированного джозефсоновского перехода внешним током $i(t)$ в виде (4a) или (4б) значение λ_0 может быть найдено из следующего соотношения [17]:

$$\kappa = 2\lambda_0 T = 2 \ln \left(|D| + \sqrt{D^2 - 1} \right), \quad (10)$$

где $D \equiv D(i_0, i_{01}, T)$, как и ранее, определяется формулами (5).

Примеры областей наличия (отсутствия) захвата фазы, рассчитанные из условия $|D| > 1$ ($|D| \leq 1$) по формулам (5), показаны на рис. 2. Там же приведены уровни одинаковых значений κ , изображенные внутри областей (зон) захвата фазы тонкими линиями. На основе подобных графических зависимостей можно построить любую ВАХ сильношунтированного джозефсоновского перехода, соответствующую фиксированным значениям i_0, i_{01} и T тока смещения (4).

В частности, отметим, что ВАХ джозефсоновского перехода, смещенного однополярными импульсами (4a), является асимметричной относительно оси постоянной составляющей тока смещения i_0 . Это связано с наличием в токе смещения (4a) дополнительной постоянной составляющей, равной $2\pi i_{01} T^{-1}$.

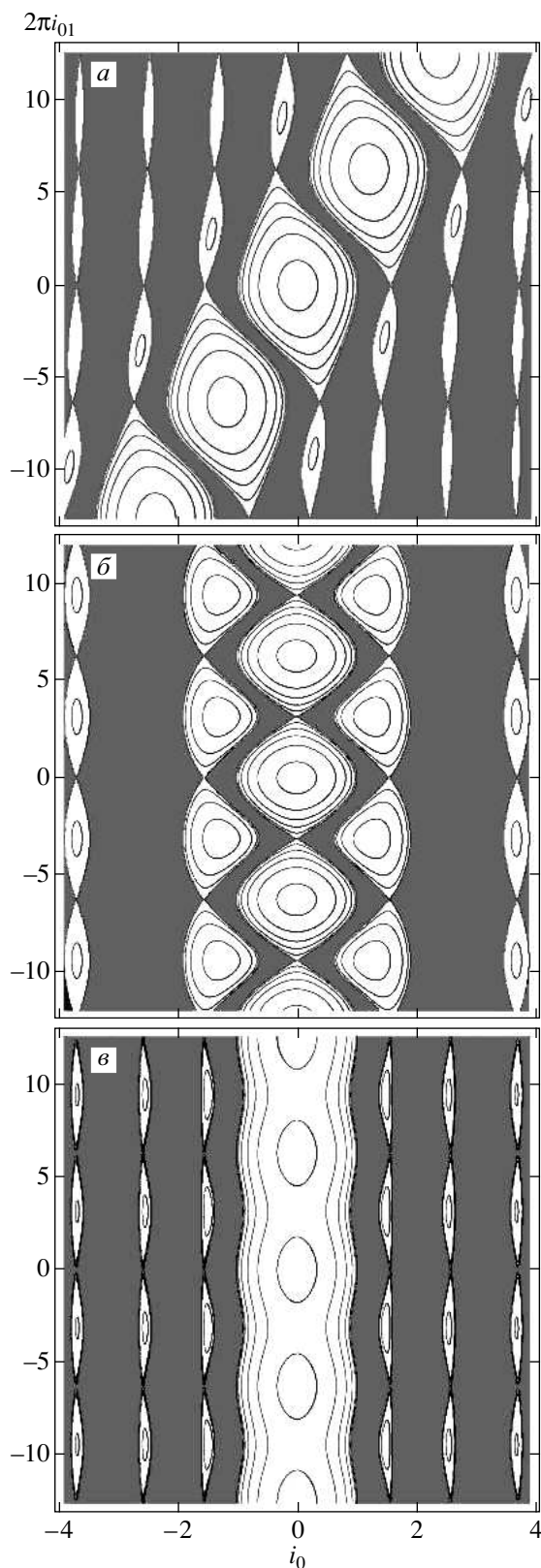


Рис. 2

При смещении джозефсоновского перехода биполярными импульсами (4б) становится важным параметр τ . Проекции области захвата фазы φ уравнения (3) на плоскость «постоянный ток смещения i_0 — ВЧ-ток смещения $2\pi i_{01}$ » приведены на рис. 2б и 2в соответственно для $\tau = T/2$ и $\tau/T \ll 1$ при $T = 5.3$. Серия графических зависимостей на рис. 2 демонстрирует зависимость конфигурации зон захвата фазы системы (3) от формы импульса ВЧ-тока смещения.

2.3. Аналитическое решение

Уравнение (7) определяет функции $x(t)$ и $y(t)$, входящие в систему линейных уравнений (8), с точностью до некоторого множителя — ненулевой вещественной функции. Теперь доопределим эти функции, для чего представим их в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp \left[\lambda_0 t + \frac{1}{2} \rho(t) \right] \cos \frac{\varphi(t)}{2}, \\ -y(t) &= \exp \left[\lambda_0 t + \frac{1}{2} \rho(t) \right] \sin \frac{\varphi(t)}{2}. \end{aligned} \tag{11a}$$

Здесь и далее функция $\rho(t) \equiv \rho(t, \lambda_0)$ определена соотношением

$$\begin{aligned} \exp [\rho(t)] &= \left\{ [L_{11}(t) + L_{12}(t) \exp(-2\lambda_0 t)]^2 + \right. \\ &\quad \left. + [L_{21}(t) + L_{22}(t) \exp(-2\lambda_0 t)]^2 \right\}, \end{aligned} \tag{11б}$$

а функция фазы $\varphi(t)$ определена выражением (7).

Подставляя (11а) в (8) и проводя некоторые преобразования, получим систему линейных однородных уравнений для функций $\sin(\varphi(t)/2)$ и $\cos(\varphi(t)/2)$ следующего вида:

$$\begin{aligned} [1 - 2\lambda_0 - \dot{\rho}(t)] \cos \frac{\varphi}{2} + [i(t) - \dot{\varphi}(t)] \sin \frac{\varphi}{2} &= 0, \\ [i - \dot{\varphi}(t)] \cos \frac{\varphi}{2} + [1 + 2\lambda_0 + \dot{\rho}(t)] \sin \frac{\varphi}{2} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Условие совместности системы (12) запишем в виде

$$1 - [2\lambda_0 + \dot{\rho}(t)]^2 - [i(t) - \dot{\varphi}(t)]^2 = 0, \tag{13a}$$

Подпись к рис. 2. Зависимость конфигурации зон захвата фазы от формы импульса ВЧ-тока смещения. Области захвата фазы изображены светлыми участками, области отсутствия захвата фазы зачернены. Линиями изображены уровни постоянного значения $\kappa = 1, 2, 3, 4, 5$ (κ растет от границ к центру): *a* — однополярный импульс; *b* — биполярный «центрированный» ($\tau = 0.5T$); *v* — биполярный «нецентрированный» ($\tau = 0.005T$)

или с учетом исходного уравнения (3), т.е. $i(t) - \dot{\varphi}(t) = \sin \varphi(t)$, в виде двух уравнений:

$$\sin \varphi(t) = i(t) - \dot{\varphi}(t), \quad \cos \varphi(t) = 2\lambda_0 + \dot{\rho}(t). \quad (13б)$$

Здесь сделаем два замечания. Во-первых, перед $\cos \varphi$ во втором выражении (13б) выбран знак «+», так как выражение с членом $-\cos \varphi(t)$ не соответствует решению системы (8). Во-вторых, условия совместности уравнений (13) означают, что константу λ_0 и «новую» функцию $\dot{\rho}(t)$ можно использовать для описания динамики фазы φ уравнения (3), если дать им явную физическую интерпретацию. Вместе с тем следует подчеркнуть, что в задаче (3) величины λ_0 и $\dot{\rho}(t)$ не являются независимыми параметрами.

Теперь заметим, что в случае захвата фазы при $N \rightarrow \infty$ функция $\rho(t + NT)$ в выражении (13б) становится периодической функцией времени t , поэтому $\lim_{N \rightarrow \pm\infty} \langle \dot{\rho}(t + NT) \rangle = 0$, где угловые скобки обозначают операцию усреднения по интервалу времени T . Учитывая это, а также (13б), получаем равенство

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \cos[\varphi(t + NT)] \rangle$$

и, следовательно, $\lambda \leq 1/2$. Аналогично получим

$$-\lambda_0 = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \cos[\varphi(t - NT)] \rangle.$$

Далее, выражая $\cos[\varphi(t \pm NT)]$ через функции

$L_{p,q}(t \pm NT)$, получим следующие выражения для λ_0 :

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \frac{L_{11}^2 - L_{21}^2}{L_{11}^2 + L_{21}^2} \right\rangle = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow -\infty} \left\langle \frac{L_{22}^2 - L_{12}^2}{L_{22}^2 + L_{12}^2} \right\rangle. \quad (14)$$

3. ДИНАМИКА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ФАЗЫ

3.1. Динамика фазы

Хотя формулы (9)–(14) не являются полным аналитическим решением системы линейных дифференциальных уравнений (8), тем не менее в случае наличия условий захвата фазы $\varphi(t)$ периодическим внешним током смещения $i(t)$ они дают возможность рассмотрения эволюции фазы $\varphi(t)$, определяемой уравнением (3), и, тем самым, анализа переходных процессов. Действительно, используя обратное (7) преобразование

$$\varphi(t) = -2 \arctg \frac{y(t)}{x(t)} + 2\pi\chi(t) \quad (15)$$

и решение системы (8) в виде выражений (9б), получим

$$\varphi(t) = -2 \arctg \frac{L_{21}(t) \exp[\lambda_0(t-t_0)] + L_{22}(t) \exp[-\lambda_0(t-t_0)]}{L_{11}(t) \exp[\lambda_0(t-t_0)] + L_{12}(t) \exp[-\lambda_0(t-t_0)]} + 2\pi\chi(t), \quad (16)$$

где функция $\chi(t)$ в выражении (15) — некоторая ступенчатая функция, испытывающая скачок, равный ± 1 , в точках, где знаменатель $x(t)$ равен нулю. Как и ранее, функции $L_{p,q}(t) \equiv L_{p,q}(t; t_0, T, i_0, i_{01})$ в (16) — периодические функции времени t , зависящие от параметра t_0 и тока смещения $i(t)$.

При изменении t в интервале $-\infty < t < \infty$ функция фазы $\varphi(t)$ в выражении (16) изменяется от функции вида

$$\varphi_{-\infty}(t) = -2 \arctg \frac{L_{22}(t)}{L_{12}(t)} + 2\pi\chi(t) \quad (17)$$

до функции вида

$$\varphi_{\infty}(t) = -2 \arctg \frac{L_{21}(t)}{L_{11}(t)} + 2\pi\chi(t). \quad (18)$$

Таким образом, при $-\infty < t < \infty$ решение

(16) описывает процесс естественного, т.е. с учетом предьстории, перехода системы (3) в единственно возможное «устойчивое» асимптотическое состояние (18) [20]. Скорость перехода системы (3) из одного состояния в другое и скорость затухания переходных процессов в выражении (16) характеризуются значением показателя λ_0 . Это означает, что независимо от начальных условий в момент времени $t = t_0$ для фазы $0 \leq \varphi(t_0) < 2\pi$ система (3) рано или поздно, в зависимости от значения $\lambda_0 \neq 0$, перейдет в устойчивое состояние с заранее известными свойствами, определяемыми исключительно значениями параметров тока смещения.

До сих пор полагалось, что

$$\lambda_0 \equiv \lambda_0(t_0; T, i_0, i_{01}) > 0.$$

В случае $\lambda_0 < 0$ аналогично получим второе решение уравнения (3), которому при $t \rightarrow \infty$ будет соответствовать выражение (17). В этих условиях формула (16) на интервале $-\infty < t_0 \leq t < \infty$ будет описывать процесс «естественного» перехода системы (3) в единственно возможное устойчивое асимптотическое состояние (17).

3.2. Асимптотические свойства функции фазы

Рассмотрим поведение функции $\langle \dot{\varphi}(t + NT) \rangle$ при $N \rightarrow \infty$. Учитывая периодичность функций $L_{p,q}(t)$ и свойства функции $2\pi\chi(t)$ в выражении (16), можно записать

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \dot{\varphi}(t + NT) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t + (N+1)T) - \varphi(t + NT)}{T} = \frac{2\pi k}{T}, \quad (19)$$

где, как и ранее, $k \equiv k(i_0, i_{01}, T)$ — номер ступеньки Шапиро.

Далее, используя результат (19) и уравнение (3), можно показать, что в устоявшемся (асимптотическом) состоянии справедливо соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \sin[\varphi(t + NT)] \rangle = i_2 = i_0 - \frac{2\pi}{T}k. \quad (20)$$

По своему физическому смыслу $i_2 \equiv i_2(k, \varphi_0)$ соответствует среднему значению сверхпроводящего тока (сверхтока), протекающего через переход Джозефсона.

Действительно, используя выражения (13б), получим

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\langle \sin[\varphi_\infty(t)] \rangle}{\langle \cos[\varphi_\infty(t)] \rangle} = \frac{i_2}{2\lambda_0} = \frac{i_0 - 2\pi k T^{-1}}{2\lambda_0}, \quad (21a)$$

где для функции фазы в виде $\varphi_\infty(t) = \varphi_1(t) + \varphi_0$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \sin[\varphi_1(t + NT)] \rangle &= 0, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \cos[\varphi_1(t + NT)] \rangle &= \Delta i_{Sh}(k). \end{aligned} \quad (21б)$$

Тогда $i_2 = \Delta i_{Sh}(k) \sin \varphi_0$. Здесь и далее φ_0 — некоторая константа, определенная только в режиме захвата фазы, характеризующая состояние системы (3) и равная разности фаз между фазами внешнего тока смещения с частотой $f\omega_c^{-1}$ и сверхтока со средней частотой $\langle \dot{\varphi}(t) \rangle$. В случае $|i_0| < 1$ и $i_{01} = 0$ получаем $k = 0$, $\Delta i_{Sh}(k) = 1$ и приходим к известному соотношению Джозефсона $i_2 = \sin \varphi_0$ [5, 6].

4. ТРАНСФОРМАЦИЯ И БАЛАНС ЭНЕРГИИ

Сопоставим функциям $\dot{\varphi}(t)$, $\dot{\rho}(t)$, $\sin[\varphi(t)]$, $\cos[\varphi(t)]$ и постоянной λ_0 реальные физические величины. Для этого воспользуемся резистивной моделью джозефсоновского перехода [5, 6]. В соответствии с этой моделью сильношунтированный джозефсоновский переход может быть представлен двумя функциональными элементами. Первый элемент — генератор сверхтока; сила и направление сверхтока генератора определяются функцией $\sin[\varphi(t)]$. Второй элемент — «омическое» нормальное сопротивление джозефсоновского перехода. Напряжение на нормальном сопротивлении джозефсоновского перехода, в соответствии с уравнением (3), а также силы тока и сверхтока, протекающего через это сопротивление, описываются функцией $\dot{\varphi}(t)$.

Далее, дифференцируя по времени второе уравнение (13б), можно получить выражение $\ddot{\rho}(t) = -\sin[\varphi(t)]\dot{\varphi}(t)$ для мощности, затрачиваемой (приобретаемой) сверхтоком единичной силы на преодоление потенциала $\dot{\varphi}(t)$ барьера перехода. Другими словами, функция $\ddot{\rho}(t)$ определяет мощность взаимодействия сверхтока единичной силы с током смещения (поглощения или излучения ВЧ-тока, преобразования тока смещения в постоянный или ВЧ-сверхток и т. д.). Тогда функция $\dot{\rho}(t) = \int \ddot{\rho}(t') dt' + \text{const}$ описывает работу, произведенную сверхтоком единичной силы за некоторый промежуток времени.

Таким образом (см. также [6, с. 31]), изменение энергии $E(\varphi)$ барьера джозефсоновского перехода, связанное с работой сверхтока единичной силы с фазой $\varphi(t)$, можно описать выражением типа

$$E(\varphi(t)) = E_0^{(1)} [2\lambda_0 - \cos \varphi(t)], \quad (22a)$$

где $E_0^{(1)} = \hbar\omega_c = 2eV_c$, $V_c = R_N I_c$ — константа, так называемое критическое напряжение барьера перехода, определяемое шириной щели сверхпроводника.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $|i_0| < 1$ и $i_{01} = 0$. В этом случае сверхток, протекающий через переход, равен $i_2 = \sin \varphi_0$, а потенциал барьера равен нулю. Тогда изменение энергии $E(\varphi)$ барьера при взаимодействии со сверхтоком также должно быть равно нулю. Действительно, учитывая, что при $|i_0| < 1$ и $i_{01} = 0$ функция $\dot{\varphi}(t) = 0$, а показатель $2\lambda_0 = +\sqrt{1 - i_0^2} = \cos \varphi_0$, из (22a) получим, что $E(\varphi_0) = 0$ для всех φ_0 , лежащих в интервале $-\pi/2 < \varphi_0 < \pi/2$.

Теперь заметим, что величина $2\lambda_0 = 2\Delta i_{Sh}(k) \cos \varphi_0$ по своему физическому смыслу (см. (20) и (21a)) соответствует протекающему через барьер току. Поэтому в (22a) лучше использовать выражение $E_0^{(2)} = hI_c/2e$ для кинетической энергии сверхтока. Учитывая это обстоятельство, перепишем (22a) в следующем виде:

$$E(\varphi(t)) = \beta E_0^{(2)} [2\lambda_0 - \cos \varphi(t)], \quad (22б)$$

где величина $\beta = E_0^{(1)}/E_0^{(2)} = R_N/(h/4e^2) = R_N/R_0$ играет роль параметра «вязкости» среды, $R_0 \approx \approx 6.4$ кОм — фундаментальная константа, так называемое квантовое сопротивление Холла [7, 8]. В нашем случае параметр β характеризует (в рамках общепринятой, но на наш взгляд, не очень удачной терминологии) степень «сильношунтирования» (или экранирования) перехода.

Таким образом, мы показали, что функция $\dot{\rho}(t)$ по своему физическому смыслу соответствует энергии $E(\varphi)$ взаимодействия барьера джозефсоновского перехода со сверхтоком. Тогда, сравнивая второе выражение (13б) с формулой (22a), получим окончательно

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{2\pi\beta}{T} \frac{E(\varphi)}{hf}. \quad (23)$$

Для реальных сильношунтированных джозефсоновских переходов, изготовленных по SNS- или SINIS-технологии, нормальное сопротивление R_N перехода лежит в пределах от 0.01 до 0.1 Ом. Поэтому $\beta \sim 10^{-6}$ – 10^{-5} . Это означает, что длительность переходных процессов, по порядку величины равная $1/2\lambda_0$, в реальных условиях работы сильношунтированного джозефсоновского перехода может составлять $(0.01$ – $0.5)f^{-1}$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе математической модели (3) сильношунтированного джозефсоновского перехода развит метод, предложенный нами ранее [16, 17], для исследования динамики фазы и переходных процессов. Полученные результаты объясняют ряд наиболее важных и принципиальных экспериментальных фактов, определяющих динамику и асимптотические свойства фазы джозефсоновского перехода, смещенного внешним током.

В частности, полученное выражение (16) позволяет описать динамику джозефсоновского перехода при переключении его внешним током смещения из одного квантового состояния в другое, а также определить скорость затухания переходных процессов

или скорость выхода на асимптотический режим. Используя одновременно выражения (16) и (23), можно определить энергетические затраты, необходимые для обеспечения такого режима работы.

Кроме того, затронуты вопросы, касающиеся взаимодействия тока смещения со сверхтоком, текущим через переход. Показано, что скорость трансформации энергии определяется потенциалом барьера перехода, который, в свою очередь, определяется (управляется) параметрами тока смещения. Однако ряд вопросов остался еще недостаточно изученным, например, влияние функции $\varphi_1(t)$ в выражении (21a) на функцию $\Delta i_{Sh}(k)$, поэтому эта тема требует дополнительного исследования.

Полученные в настоящей работе результаты могут найти применение в физике процессов, динамика которых описывается уравнением (3), а также при практическом создании джозефсоновских микросхем для квантовых синтезаторов переменного напряжения для телекоммуникационной техники и метрологии.

Авторы благодарны А. А. Рухадзе и участникам руководимого им семинара за полезное обсуждение работы, а также Ю. Немайеру (J. Niemaeyer, РТВ, Германия) за внимание к работе. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке в рамках международного контракта с РТВ (номер контракта Transform 13N7259).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Hamilton, С. J. Burroughs, and R. L. Kautz, IEEE Trans. Instr. Meas. **44**, 223 (1995).
2. J. X. Przybysz, A. H. Worshman, S. P. Benz et al., US Patent № 5.812.078 (1998).
3. J. Niemeyer, Appl. Supercond. Inst. Phys. Conf. Ser. **167**, 707 (2000).
4. European project, www.jaws-project.nl.
5. К. К. Лихарев, Б. Е. Ульрих, *Системы с джозефсоновскими контактами*, Изд-во МГУ, Москва (1978).
6. А. Бароне, Дж. Патерно, *Эффект Джозефсона. Физика и применение*, Мир, Москва, (1984).
7. B. N. Taylor and T. Y. Witt, Metrologia **26**, 47 (1989).
8. T. J. Quin, Metrologia **26**, 69 (1989).

9. J. Niemeyer, Transform Project BMBF 13N7259, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig (2000), p. 48.
10. O. V. Karpov, V. D. Koutovoi, S. V. Sherstobitov, and J. Niemeyer, *Metrologia* **38**, 471 (2001).
11. О. В. Карпов, В. Д. Кутовой, С. В. Шерстобитов, J. Niemeyer, ПТЭ № 5, 91 (2001).
12. C. A. Hamilton, S. P. Benz, C. J. Burroughs et al., *IEEE Trans. Instr. Meas.* **46**, 224 (1997).
13. О. В. Карпов, С. В. Шерстобитов, Ю. Ф. Верховых, ПТЭ № 5, 83 (2002).
14. O. V. Karpov, V. D. Koutovoi, S. V. Sherstobitov, V. N. Krutikov, and J. Niemeyer, in *Conference Digest CPEM-2002*, Ottawa, Canada (2002), p. 496.
15. S. P. Benz, C. J. Burroughs, T. E. Hawey, and C. A. Hamilton, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **9**, № 2, 3306 (1999).
16. В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный, ЖЭТФ **120**, 1478 (2001).
17. V. M. Buchstaber, O. V. Karpov, and S. I. Tertychniy, in *Conference Digest CPEM-2002*, Ottawa, Canada (2002), p. 502.
18. С. В. Вонсовский, М. И. Кацнельсон, *Квантовая физика твердого тела*, Наука, Москва (1983), с. 182.
19. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Физматгиз, Ленинград (1953), с. 375.
20. С. И. Тертычный, УМН **55**, 195 (2000).