

# ДИНАМИКА СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ АТОМОВ, РАСSEИВАЮЩИХСЯ НА РЕЗОНАНСНОЙ СТОЯЧЕЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЕ

*М. В. Федоров, М. А. Ефремов\**

*Институт общей физики Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

*В. П. Яковлев*

*Московский инженерно-физический институт  
115409, Москва, Россия*

*В. П. Шляйх\*\**

*Abteilung für Quantenphysik, Universität Ulm  
89069, Ulm, Germany*

Поступила в редакцию 28 марта 2003 г.

Рассмотрено рассеяние атомов на резонансной стоячей световой волне в условиях, когда нижний из двух резонансных уровней является метастабильным, а верхний быстро распадается, причем распад обусловлен в основном спонтанными радиационными переходами на нерезонансные уровни атома. Рассмотрен дифракционный режим рассеяния, когда частота Раби достаточно велика и в результате рассеяния образуется много дифракционных максимумов. Исследована динамика спонтанного излучения атома. Показано, что рассеяние существенно замедляет радиационный распад атома. Определены области реализации и характеристики степенного и экспоненциального распада. Исследованы адиабатический и неадиабатический режимы рассеяния. Показано, что в процессе рассеяния происходит сужение волновых пакетов атомов в метастабильном и резонансном возбужденном состояниях. Найден предельный (минимальный) реализуемый размер волновых пакетов, который, как показано, достигается в неадиабатическом режиме рассеяния при достаточно большой длительности взаимодействия.

PACS: 32.80.Qk, 32.90.+a, 42.50.-p, 32.80.-t

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассеяние атомов на резонансной стоячей световой волне исследовано достаточно широко (см., например, монографии [1–3] и ссылки в них). Особое место в этой области занимает серия работ [4–9], в которых исследовался специальный тип рассеивающихся атомов, первоначально возбужденных в одно из долгоживущих метастабильных состояний. Соответствующий метастабильный уровень  $E_m$  является нижним рабочим уровнем резонансной двухуровневой системы, в то время как ее верхний рабочий уровень,  $E_e$ , имеет большую ширину  $\Gamma$ , обусловленную

в основном спонтанным радиационным распадом в состоянии, отличное от метастабильного (рис. 1). В экспериментах, описанных в работах [6, 9], были использованы метастабильные атомы аргона  $\text{Ar}^*$  ( $E_m \equiv 1s_5$  ( $J = 2$ )). Поле стоячей волны с длиной волны равной  $\lambda = 801$  нм осуществляло резонансное взаимодействие уровня  $E_m$  с уровнем  $E_e \equiv 2p_8$  ( $J = 2$ ). Около 72 % ширины возбужденного уровня  $E_e$  было обусловлено радиационными переходами на уровни, отличные от  $E_m$ .

Предположение о большой величине ширины  $\Gamma$  уровня  $E_e$  означает, что  $\Gamma \gg \omega_r$ , где  $\omega_r = k^2/2M$  — частота, или энергия отдачи ( $\hbar = 1$ ),  $M$  — масса атома,  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ,  $\omega$  — частота поля. Типично, что  $\omega_r/\Gamma \sim 10^{-3} \ll 1$ .

\*E-mail: efremov@ran.gpi.ru

\*\*W. P. Schleich

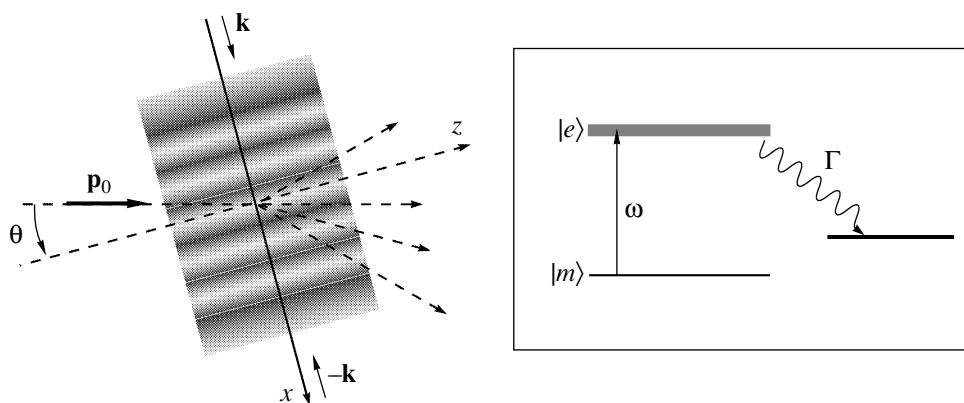


Рис. 1. Схема рассеяния атома на стоячей световой волне и структура атомных уровней

Еще один важный параметр, характеризующий взаимодействие атомов с полем, — это частота Раби  $\Omega = 2\mathbf{d}_{me} \cdot \mathbf{E}_0$ , где  $\mathbf{d}_{me} = \langle m | \mathbf{d} | e \rangle$  — матричный элемент дипольного момента перехода между резонансными уровнями,  $\mathbf{E}_0$  — амплитуда напряженности поля каждой из двух встречных бегущих световых волн, образующих стоячую волну. В зависимости от соотношения между  $\Omega$  и  $4\sqrt{\Gamma\omega_r}$  может реализоваться либо брэгговский (при  $\Omega \ll 4\sqrt{\Gamma\omega_r}$ ), либо дифракционный (при  $\Omega \gg 4\sqrt{\Gamma\omega_r}$ ) режим рассеяния (см. разд. 3). Брэгговский режим характеризуется острой зависимостью эффективности рассеяния от направления начального импульса атомов  $\mathbf{p}_0$ : рассеяние эффективно, только если угол  $\theta$  между вектором  $\mathbf{p}_0$  и перпендикуляром к направлению световых волновых векторов  $\pm\mathbf{k}$  (ось  $z$  на рис. 1) близок к брэгговскому углу  $\pm\theta_{Br}$ , где  $\theta_{Br} = k/p_0 \ll 1$ . При этом направление движения рассеянных атомов примерно соответствует зеркальному отражению от плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{k}$ , т. е. угол между направлением импульса рассеянных электронов и осью  $z$  близок к  $\mp\theta_{Br}$ . В дифракционном режиме зависимость эффективности рассеяния от угла  $\theta$  практически пропадает. Кроме того, в этом случае по причине более интенсивного взаимодействия в результате рассеяния возникает много дифракционных максимумов, направления движения метастабильных атомов в которых характеризуются углами  $\theta_n = \theta + 2n\theta_{Br}$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . В работах [4–9] в основном рассматривался брэгговский режим рассеяния. В отличие от них в настоящей работе исследован дифракционный режим, что предполагает большие значения частоты Раби  $\Omega$ . Показано, что различия между этими двумя случаями очень существенны. В частности, если в случае брэгговского

рассеяния распад атома всегда является экспоненциальным, то в дифракционном режиме, как будет показано ниже, существует возможность неэкспоненциального распада, когда зависящие от времени вероятности нахождения атома на уровнях  $E_m$  и  $E_e$  убывают по степенному закону. Также показано, что область существования неэкспоненциального распада ограничена по времени. На очень больших временах распад становится экспоненциальным. Но при этом скорость распада существенно отличается от скорости распада свободного атома,  $\Gamma$ . Найденная модифицированная константа распада  $\tilde{\Gamma}$  уменьшается с ростом  $\Gamma$ , зависит от величины и знака расстройке резонанса  $\Delta = E_e - E_m - \omega$ , а также от частоты Раби  $\Omega$  и частоты отдачи  $\omega_r$ . Наконец, исследование динамики распада населенностей оказывается тесно связанным с формированием узких волновых пакетов «центра масс» атома, находящихся в метастабильном и возбужденном состояниях. Как мы покажем ниже, существует предельный, минимальный размер пакетов, достижимый на очень больших временах взаимодействия, что может быть важно для практических целей.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Волновая функция атома, взаимодействующего со световым полем, зависит как от радиуса-вектора центра масс атома  $\mathbf{r}$ , так и от внутриатомных переменных, а также от времени  $t$  и удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left\{ -\frac{1}{2M}\nabla^2 + H_{at} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right\} \Psi, \quad (1)$$

где  $H_{at}$  — гамильтониан внутриатомного движения,  $\nabla = \partial/\partial\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  — напряженность электрического поля, в случае стоячей световой волны имеющая вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \cos(kx), \quad (2)$$

и ось  $x$  направлена вдоль  $\mathbf{k}$  (рис. 1).

В рамках приближения вращающейся волны волновая функция атома может быть представлена в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-iE_m t + i\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r} - i\frac{p_0^2 t}{2M}\right) \times [\varphi_m(x, t)|m\rangle + \exp(-i\omega t)\varphi_e(x, t)|e\rangle], \quad (3)$$

где  $\varphi_m(x, t)$  и  $\varphi_e(x, t)$  — волновые функции возмущенного движения центра масс атома, находящегося, соответственно, в состояниях  $|m\rangle$  и  $|e\rangle$ . Уравнения для  $\varphi_m(x, t)$  и  $\varphi_e(x, t)$  следуют непосредственно из уравнения Шредингера (1):

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi_m = -\frac{1}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ip_0 x \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_m - \frac{\Omega}{2}\cos(kx)\varphi_e, \quad (4)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi_e = -\left\{\frac{1}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ip_0 x \frac{\partial}{\partial x}\right) + \Delta + i\frac{\Gamma}{2}\right\}\varphi_e - \frac{\Omega^*}{2}\cos(kx)\varphi_m. \quad (5)$$

По предположению, радиационная ширина  $\Gamma$  возбужденного уровня  $E_e$  обусловлена в основном переходами на уровни, отличные от  $E_m$ , причем спонтанное излучение за счет переходов  $E_e \rightarrow E_m$  в рамках модели не учитывается вообще.

Будем полагать, что взаимодействие атома с полем включается мгновенно в момент времени  $t = 0$ , и при  $t < 0$  атом находится в метастабильном состоянии  $|m\rangle$ , а волновая функция его центра масс — это чисто плоская волна с импульсом  $\mathbf{p}_0$ , что соответствует следующим начальным условиям к системе уравнений (4), (5):

$$\varphi_m(x, t = 0) = 1, \quad \varphi_e(x, t = 0) = 0. \quad (6)$$

Квадраты модуля функций  $\varphi_{m,e}(x, t)$  определяют плотности вероятности нахождения в момент времени  $t$  в окрестности точки  $x$  атомов в состояниях  $|m\rangle$  или  $|e\rangle$ :

$$\frac{dW_{m,e}(x, t)}{dx} = \frac{k}{\pi}|\varphi_{m,e}(x, t)|^2. \quad (7)$$

Проинтегрированные по всему интервалу изменения переменной  $x$  от 0 до  $\pi/k$  плотности вероятности  $dW_{m,e}(x, t)/dx$  (7) определяют полные вероятности нахождения атома в момент времени  $t$  в метастабильном или в возбужденном состояниях:

$$W_{tot}^{(m,e)}(t) = \int_0^{\pi/k} dx \frac{dW_{m,e}(x, t)}{dx} = \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx |\varphi_{m,e}(x, t)|^2. \quad (8)$$

Альтернативный способ описания взаимодействия рассеивающихся атомов с полем основан на использовании периодичности зависимости поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  (2) от переменной  $x$ , что позволяет представить функции  $\varphi_{m,e}(x, t)$  в виде разложения в ряд Фурье с зависящими от времени коэффициентами:

$$\varphi_{m,e}(x, t) = \sum_n a_n^{(m,e)}(t) \exp(in kx), \quad (9)$$

$$a_n^{(m,e)}(t) = \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx \exp(-in kx) \varphi_{m,e}(x, t).$$

Физический смысл коэффициентов  $a_n^{(m,e)}(t)$  состоит в том, что это парциальные амплитуды вероятности нахождения в момент времени  $t$  атомов в метастабильном и возбужденном состояниях в пучках, отклоненных от первоначального направления движения на угол  $n\theta_{Br}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Функции  $a_n^{(m,e)}(t)$  удовлетворяют уравнениям, которые следуют из уравнений (4), (5) и (9):

$$i\dot{a}_n^{(m)}(t) = (n^2\omega_r + n\delta) a_n^{(m)} - \frac{\Omega}{4} (a_{n-1}^{(e)} + a_{n+1}^{(e)}), \quad (10)$$

$$i\dot{a}_n^{(e)}(t) = \left(n^2\omega_r + n\delta - \Delta - \frac{i\Gamma}{2}\right) a_n^{(e)} - \frac{\Omega^*}{4} (a_{n-1}^{(m)} + a_{n+1}^{(m)}), \quad (11)$$

где

$$\delta = \frac{kp_0x}{M} = 2\omega_r \frac{\theta}{\theta_{Br}}.$$

Очевидно, что функции  $a_n^{(m,e)}(t)$  должны удовлетворять начальным условиям

$$a_n^{(m)}(t = 0) = \delta_{n,0}, \quad a_n^{(e)}(t = 0) = 0. \quad (12)$$

Из уравнений (10)–(12) следует, в частности, что для атомов в метастабильном состоянии возможны только четные, а для атомов в состоянии  $|e\rangle$  — только нечетные значения  $n$ .

Квадраты модуля функций  $a_n^{(m,e)}(t)$  — это парциальные вероятности нахождения атомов в момент времени  $t$  в пучках, отклоненных на углы  $n\theta_{Br}$ :

$$W_n^{(m,e)}(t) = \left| a_n^{(m,e)}(t) \right|^2. \quad (13)$$

Суммы парциальных вероятностей  $W_n^{(m)}(t)$  и  $W_n^{(e)}(t)$  определяют полные вероятности нахождения атомов в метастабильном и возбужденном состояниях после рассеяния:

$$W_{tot}^{(m,e)}(t) = \sum_n W_n^{(m,e)}(t). \quad (14)$$

Определения (14) и (8) эквивалентны, так же как группы уравнений (4), (5), (6) и (10), (11), (12), отвечающие двум различным, но эквивалентным подходам к решению задачи: в координатном и импульсном представлениях.

### 3. БРЭГГОВСКИЙ РЕЖИМ РАССЕЯНИЯ И ЭФФЕКТ БОРРМАННА

Рассмотрим сначала случай брэгговского рассеяния, когда частота Раби  $|\Omega|$  достаточно мала, а ширина возбужденного уровня  $\Gamma$  велика. Пусть время взаимодействия  $t$  также велико по сравнению с  $1/\Gamma$ , так что

$$\Gamma \gg n^2\omega_r, |n\delta|, \frac{1}{t}, |\Omega|, |\Delta|. \quad (15)$$

Такой режим рассеяния теоретически исследовался в работах [7, 8] и соответствует условиям экспериментов, описанных в работах [6, 9]. Здесь данный режим рассеяния обсуждается кратко для более ясного разграничения его с рассматриваемым в дальнейшем режимом дифракционного рассеяния.

В силу условий (15) в уравнениях (11) можно опустить слагаемые  $n^2\omega_r a_n^{(e)}$ ,  $n\delta a_n^{(e)}$ ,  $\Delta a_n^{(e)}$  и  $i\dot{a}_n^{(e)}$ , что дает

$$a_n^{(e)}(t) \approx \frac{i\Omega^*}{2\Gamma} \left( a_{n+1}^{(m)}(t) + a_{n-1}^{(m)}(t) \right). \quad (16)$$

Подстановка  $a_n^{(e)}(t)$  (16) в уравнения (10) приводит последние к виду

$$i\dot{a}_n^{(m)}(t) = (n^2\omega_r + n\delta) a_n^{(m)}(t) - i \frac{|\Omega|^2}{8\Gamma} \left( a_{n-2}^{(m)}(t) + 2a_n^{(m)}(t) + a_{n+2}^{(m)}(t) \right). \quad (17)$$

При  $\delta \approx \pm 2\omega_r$ , или  $|\delta \mp 2\omega_r| \ll \omega_r$  (т.е. при выполнении условий Вульфа–Брэгга  $\theta \approx \pm\theta_{Br}$ ), сумма  $n^2\omega_r + n\delta$  равна нулю при  $n = 0$  и мала при

$n = \mp 2$ . Условие малости  $|\delta \mp 2\omega_r|$  можно рассматривать как условие брэгговского резонанса, при котором угол падения падающего пучка атомов близок к углу Вульфа–Брэгга. При малых частоте Раби  $|\Omega|$  и расстройке брэгговского резонанса  $\delta \mp 2\omega_r$  в уравнениях (17) немалыми являются только амплитуды вероятности  $a_n^{(m)}(t)$  с  $n = 0$  и  $n = \mp 2$ . Удерживая только эти слагаемые, приводим всю бесконечномерную систему уравнений (17) всего лишь к двум уравнениям

$$i\dot{a}_0^{(m)}(t) = -i \frac{|\Omega|^2}{8\Gamma} \left( a_{\mp 2}^{(m)}(t) + 2a_0^{(m)}(t) \right), \quad (18)$$

$$i\dot{a}_{\mp 2}^{(m)}(t) = (4\omega_r \mp 2\delta) a_{\mp 2}^{(m)}(t) - i \frac{|\Omega|^2}{8\Gamma} \left( 2a_{\mp 2}^{(m)}(t) + a_0^{(m)}(t) \right), \quad (19)$$

где амплитуды вероятности  $a_0^{(m)}(t)$  и  $a_{\mp 2}^{(m)}(t)$  относятся, соответственно, к нерассеянному и рассеянному пучкам атомов, движущимся под углами, примерно равными  $\pm\theta_{Br}$  и  $\mp\theta_{Br}$  к оси  $z$  (рис. 1).

Уравнения (18), (19) имеют стационарные решения вида

$$a_n^{(m)}(t) \propto \exp(-i\gamma t),$$

где  $\gamma$  — квазиэнергия, определяемая из условия равенства нулю детерминанта системы уравнений (18) и (19):

$$\begin{vmatrix} \gamma + i \frac{|\Omega|^2}{4\Gamma} & i \frac{|\Omega|^2}{8\Gamma} \\ i \frac{|\Omega|^2}{8\Gamma} & \gamma + i \frac{|\Omega|^2}{4\Gamma} - (4\omega_r \mp 2\delta) \end{vmatrix} = 0, \quad (20)$$

которое дает

$$\gamma_{\pm} = -i \frac{|\Omega|^2}{4\Gamma} + (2\omega_r \mp \delta) \pm \sqrt{(2\omega_r \mp \delta)^2 - \frac{|\Omega|^4}{64\Gamma^2}}. \quad (21)$$

Как следует из этого уравнения, вдали от резонанса, при

$$|2\omega_r \pm \delta| > \frac{|\Omega|^2}{8\Gamma},$$

скорости распада двух квазиэнергетических уровней одинаковы

$$\text{Im } \gamma_+ = \text{Im } \gamma_- = -\frac{|\Omega|^2}{4\Gamma}. \quad (22)$$

Напротив, в точном резонансе, при  $2\omega_r \mp \delta = 0$ ,

$$\text{Im } \gamma_+ = -\frac{|\Omega|^2}{8\Gamma}, \quad \text{Im } \gamma_- = -3\frac{|\Omega|^2}{8\Gamma}. \quad (23)$$

Первое из этих решений распадается медленнее ( $\propto \exp[-t|\Omega|^2/8\Gamma]$ ), а второе — быстрее ( $\propto \exp[-3t|\Omega|^2/8\Gamma]$ ), чем решения вдали от резонанса ( $\propto \exp[-t|\Omega|^2/4\Gamma]$ ). Следовательно, в резонансе (при  $\theta = \pm 2\theta_{Br}$ ) возникает решение, более долго живущее, чем вне резонанса. Если  $t|\Omega|^2/4\Gamma \gtrsim 1$ , то доля атомов, остающихся на метастабильном уровне в резонансных условиях будет больше, чем в нерезонансных условиях. Это и есть эффект, экспериментально наблюдавшийся в работах [6, 9] и интерпретированный как аномальное прохождение метастабильных атомов через стоячую световую волну в условиях брэгговского резонанса или как оптический аналог эффекта Боррманна (аномальное проникновение в кристалл рентгеновских лучей при падении под углом Вульфа–Брэгга по отношению к плоскостям кристаллической решетки) [10].

В задаче о рассеянии атомов в рассмотренных условиях распад остается экспоненциальным, что соответствует экспериментальным данным, приведенным в работах [6, 9]. При этом произведение константы распада  $|\Omega|^2/4\Gamma$  и времени взаимодействия  $t$  не может быть слишком большим. Иначе на метастабильном уровне останется столь мало атомов, что их невозможно будет обнаружить как вне резонанса, так и в резонансе. Ширина резонанса по параметру  $\delta$  равна  $|\Omega|^2/8\Gamma$ , а ширина пика населенности  $W_{tot}^{(m)}$  в зависимости от  $\theta/\theta_{Br}$  равна  $|\Omega|^2/16\Gamma\omega_r$ . Если  $|\Omega|^2/16\Gamma \ll \omega_r$ , то имеет место брэгговский режим рассеяния. В противном случае, при  $|\Omega|^2/16\Gamma \gg \omega_r$  — дифракционный.

#### 4. АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Перейдем теперь к анализу случая больших значений частоты Раби,  $|\Omega| \gg 4\sqrt{\Gamma\omega_r}$ , что соответствует дифракционному режиму рассеяния. Ввиду того что в этом режиме зависимость картины рассеяния от угла падения  $\theta$  является слабой, рассмотрим случай нормального падения,  $\theta = 0$ . Кроме того, на первом этапе рассмотрим задачу о рассеянии и радиационном распаде атомов в адиабатическом приближении. В рамках этого приближения кинетическая энергия движения центра масс атома в направлении, параллельном  $\mathbf{k}$ , предполагается настолько малой,

$$\left\langle \frac{1}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\rangle \ll \left| \Delta + i\frac{\Gamma}{2} \right|, \quad \frac{1}{t}, \quad (24)$$

что соответствующие слагаемые могут быть опущены в обоих уравнениях (4) и (5), которые в результате принимают вид

$$i \frac{d}{dt} \varphi_m(x, t) = -\frac{\Omega}{2} \cos(kx) \varphi_e, \quad (25)$$

$$i \frac{d}{dt} \varphi_e(x, t) = -\left( \Delta + i\frac{\Gamma}{2} \right) \varphi_e - \frac{\Omega^*}{2} \cos(kx) \varphi_m. \quad (26)$$

Более того, как нетрудно убедиться, эти два уравнения можно свести к одному уравнению второго порядка:

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} - i \left( \Delta + i\frac{\Gamma}{2} \right) \frac{d}{dt} + \frac{|\Omega|^2}{4} \cos^2(kx) \right\} \times \varphi_m(x, t) = 0. \quad (27)$$

Наконец, два уравнения, (25) и (26), можно записать в виде одного матричного уравнения типа уравнения Шредингера

$$i \frac{d}{dt} \Phi(x, t) = H_{ad} \Phi(x, t) \quad (28)$$

для двухкомпонентной волновой функции

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_m(x, t) \\ \varphi_e(x, t) \end{pmatrix} \quad (29)$$

с гамильтонианом

$$H_{ad} \approx \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Omega}{2} \cos(kx) \\ -\frac{\Omega^*}{2} \cos(kx) & -\Delta - \frac{i}{2}\Gamma \end{pmatrix}. \quad (30)$$

В терминах парциальных амплитуд вероятности  $a_n^{(m, e)}(t)$  (9) адиабатическое приближение эквивалентно пренебрежению слагаемыми, пропорциональными  $n^2\omega_r$  в уравнениях (10), (11), которые в случае нормального падения ( $\delta = 0$ ) принимают вид

$$i\dot{a}_n^{(m)}(t) = -\frac{\Omega}{4} \left( a_{n-1}^{(e)} + a_{n+1}^{(e)} \right), \quad (31)$$

$$i\dot{a}_n^{(e)}(t) = -\left( \Delta + i\frac{\Gamma}{2} \right) a_n^{(e)} - \frac{\Omega^*}{4} \left( a_{n-1}^{(m)} + a_{n+1}^{(m)} \right). \quad (32)$$

Аналогично переходу от (25), (26) к (27), две группы уравнений первого порядка (31) и (32) можно свести к одной группе уравнений второго порядка:

$$\left( i \frac{d}{dt} + \Delta + i\frac{\Gamma}{2} \right) i \frac{d}{dt} a_n^{(m)}(t) = \frac{|\Omega|^2}{16} \left( a_{n-2}^{(m)} + 2a_n^{(m)} + a_{n+2}^{(m)} \right). \quad (33)$$

### 5. НЕЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ РАСПАД И СУЖЕНИЕ АТОМНЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Рассмотрим прежде всего область достаточно больших значений времени взаимодействия  $t$ , вторая производная по времени в уравнении (27) мала по сравнению со слагаемым, пропорциональным первой производной:

$$\left| \frac{d^2 \varphi_m}{dt^2} \right| \ll \left| \left( \Delta + i \frac{\Gamma}{2} \right) \frac{d\varphi_m}{dt} \right|. \quad (34)$$

Реальный смысл этого предположения раскрывается ниже. Здесь же, используя условие (34), опускаем в уравнении (27) слагаемое с производной второго порядка и приходим к уравнению вида

$$i \frac{d}{dt} \varphi_m(x, t) = V_{CY}(x) \varphi_m(x, t), \quad (35)$$

где  $V_{CY}(x)$  — комплексный потенциал Чудесникова-Яковлева [4],

$$V_{CY}(x) = \frac{1}{4} \frac{|\Omega|^2}{\Delta + i\Gamma/2} \cos^2(kx). \quad (36)$$

Решение уравнения (35), очевидно, имеет вид (см. также [5])

$$\begin{aligned} \varphi_m(x, t) &= \exp \{ -itV_{CY}(x) \} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{it}{4} \frac{|\Omega|^2}{\Delta + i\Gamma/2} \cos^2(kx) \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Теперь функция  $\varphi_e(x, t)$  также легко находится с помощью уравнения (25):

$$\begin{aligned} \varphi_e(x, t) &= -\frac{1}{2} \frac{\Omega^*}{\Delta + i\Gamma/2} \cos(kx) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{it}{4} \frac{|\Omega|^2}{\Delta + i\Gamma/2} \cos^2(kx) \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Согласно определению (7), плотности вероятности нахождения атомов в метастабильном и возбужденном состояниях в окрестности точки  $x$  определяются квадратами абсолютных величин функций  $\varphi_m(x, t)$  (37) и  $\varphi_e(x, t)$  (38):

$$\frac{dW_m(x, t)}{dx} = \frac{k}{\pi} \exp \left\{ -\frac{|\Omega|^2 \Gamma t}{\Gamma^2 + 4\Delta^2} \cos^2(kx) \right\} \quad (39)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{dW_e(x, t)}{dx} &= \frac{k}{\pi} \frac{|\Omega|^2}{\Gamma^2 + 4\Delta^2} \cos^2(kx) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{|\Omega|^2 \Gamma t}{\Gamma^2 + 4\Delta^2} \cos^2(kx) \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

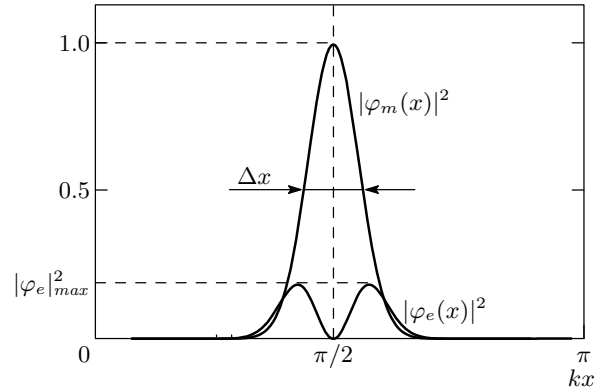


Рис. 2. Квадраты модуля функций  $\varphi_m(x, t)$  и  $\varphi_e(x, t)$ , определяемых формулами (37) и (38)

Зависимости

$$|\varphi_m(x, t)|^2 \propto \frac{dW_{m,e}(x, t)}{dx}$$

(39), (40) от координаты  $x$  при фиксированном значении времени взаимодействия  $t$  изображены на рис. 2. Ширина распределений  $dW_{m,e}(x, t)/dx$  (39), (40) по порядку величины равна

$$\Delta x = \frac{2}{k|\Omega|} \sqrt{\frac{\Delta^2 + \Gamma^2/4}{\Gamma t}} \equiv \frac{1}{k} \sqrt{\frac{t_0}{2t}}, \quad (41)$$

где

$$t_0 = 2 \frac{\Gamma^2 + 4\Delta^2}{|\Omega|^2 \Gamma}. \quad (42)$$

Уравнение (41) показывает, что при  $t > t_0$  с ростом времени взаимодействия  $t$  ширина  $\Delta x(t)$  убывает, т. е. возникающие волновые пакеты атомов в метастабильном и возбужденном состояниях сужаются и их ширина становится меньше, чем длина волны света  $\lambda = 2\pi/k$ .

Решение (37) уравнения (35) и определение ширины волновых пакетов (41) позволяют конкретизировать условие (34) перехода от уравнения второго порядка (27) к уравнению первого порядка (35). В самом деле, входящие в уравнение (34) первая и вторая производные функции  $\varphi_m(x, t)$  легко находятся из (37), причем для узких волновых пакетов величину  $\cos(kx)$  можно заменить на  $-k\Delta x$ , определяемую выражением (41), что в конечном итоге приводит условие (34) к виду

$$t > t_0 \frac{|\Omega|^2}{\Delta^2 + \Gamma^2/4} \sim \frac{1}{\Gamma}. \quad (43)$$

Уравнение (43) определяет область применимости приближения уравнения первого порядка (35). Введенное выше характерное время  $t_0$  (42) может находиться как вне, так и внутри этой области в зависимости от того, больше или меньше частота Раби  $|\Omega|$ , чем  $|\Delta + i\Gamma/2|$ . Следовательно, в общем случае момент времени  $t$ , начиная с которого возникает эффект сужения волновых пакетов, можно определить как

$$t_0^* = \max(t_0, 1/\Gamma). \quad (44)$$

Согласно (41), формально  $\Delta x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Ясно, что в действительности процесс сужения волновых пакетов должен быть как-то ограничен. Как будет показано, реальные ограничения процесса сужения возникают вне области применимости адиабатического приближения (см. ниже разд. 7).

Полные вероятности нахождения атома в метастабильном и возбужденном состояниях к моменту времени  $t$  определяются интегралами по  $x$  от плотностей вероятности  $dW_{m,e}(x, t)/dx$  (8), которые легко вычисляются:

$$W_{tot}^{(m)}(t) = \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) I_0\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad (45)$$

$$W_{tot}^{(e)}(t) = \frac{1}{\Gamma t_0} \times \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) \left\{ I_0\left(\frac{t}{t_0}\right) - I_1\left(\frac{t}{t_0}\right) \right\}, \quad (46)$$

где  $I_0$  и  $I_1$  — модифицированные функции Бесселя [11, 12]. В пределе  $t \gg t_0$  уравнения (45), (46) дают

$$W_{tot}^{(m)}(t) \approx \sqrt{\frac{t_0}{2\pi t}} = \frac{\sqrt{\Gamma}}{|\Omega|\sqrt{\pi t}} \left(1 + 4\frac{\Delta^2}{\Gamma^2}\right)^{1/2}, \quad (47)$$

$$W_{tot}^{(e)}(t) \approx \frac{\sqrt{t_0}}{\Gamma(2t)^{3/2}\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2|\Omega|\sqrt{\pi\Gamma} t^{3/2}} \left(1 + 4\frac{\Delta^2}{\Gamma^2}\right)^{1/2}. \quad (48)$$

Таким образом, в рассматриваемых условиях имеет место замедленный, неэкспоненциальный распад атомов [13]. Физическая причина замедления распада очень проста. Она состоит в том, что атом на метастабильном уровне  $E_m$  не распадается сам по себе. Для распада ему необходимо сначала перейти на возбужденный уровень, а лишь затем спонтанно излучить фотон и перейти на какие-либо другие

уровни. Вероятность такого процесса определяется произведением вероятностей возбуждения уровня  $E_e$  и его спонтанного распада. Вероятность возбуждения определяется частотой Раби. Однако, даже если частота Раби  $\Omega$  велика по сравнению с обратным временем взаимодействия  $1/t$ , локально для атомов, имеющих координату  $x$ , эффективная частота Раби  $\Omega_{eff}(x) = \Omega \cos(kx)$  может быть и небольшой (там, где  $\cos(kx)$  мал, т. е. вблизи узлов стоячей волны). Поэтому может быть малой и эффективная скорость распада  $\Gamma_{eff}(x)$ , определяемая, согласно (37), (38), как

$$\Gamma_{eff}(x) = -2 \operatorname{Im} V_{CY}(x) = \frac{1}{4} \frac{|\Omega|^2 \Gamma}{\Delta^2 + \Gamma^2/4} \cos^2(kx). \quad (49)$$

Следовательно, замедление распада по сравнению с законом  $\exp(-\Gamma t)$  определяется вкладом тех атомов (точнее, участков волновой функции атома), для которых  $\Omega_{eff}(x)$  и  $\Gamma_{eff}(x)$  относительно малы, т. е. для которых мал  $\cos(kx)$ , что имеет место вблизи узлов стоячей волны  $x \approx \pi/2k$ .

Возникновение неэкспоненциального, степенного закона распада также объясняется достаточно просто. Согласно (37), (38), для каждого данного  $x$  закон распада является экспоненциальным. Поэтому, если бы невозмущенное состояние атома характеризовалось нерасплывающимся локализованным волновым пакетом размером, много меньшим  $\Delta x$ , распад был бы чисто экспоненциальным и скорость распада такого состояния была бы равна  $\Gamma_{eff}(x)$ . Однако если начальным состоянием атома является плоская волна или широкий волновой пакет (размером много больше  $\Delta x$ ), то распад такого состояния в целом определяется суперпозицией экспонент с различными константами распада. Очевидно, что сумма экспонент — это не экспонента. Поэтому и динамика распада рассматриваемого атомного состояния характеризуется степенным, а не экспоненциальным законом.

Определение ширины, возникающей в процессе рассеяния атомных волновых пакетов,  $\Delta x$  (41), может быть использовано также для конкретизации общего формального условия применимости адиабатического приближения (24). Полагая  $\partial/\partial x \sim 1/\Delta x$ , находим, что условие (24) приводится к виду

$$\frac{t}{t_0} \ll \frac{|\Delta + i\Gamma/2|}{\omega_r}, \quad \frac{1}{\sqrt{\omega_r t_0}}, \quad (50)$$

где выражения в правой части неравенств велики в силу малости частоты отдачи.

Заметим, наконец, что аналогично переходу от уравнений (27) к (35), мы можем осуществить такое же (эквивалентное) упрощение уравнения (33) для амплитуд вероятности  $a_n^{(m)}(t)$ , опустив в (33) в пределе больших  $t$  вторую производную по времени. Тогда с помощью замены

$$a_n^{(m)}(t) = b_{n'}(t) i^{n'} \exp\left(-i \frac{|\Omega|^2}{8(\Delta + i\Gamma/2)} t\right),$$

где  $n' = n/2$  и  $n$  — четное,  $n = 2n'$ , находим из (33), что функции  $b_{n'}(t)$  удовлетворяют хорошо известному уравнению Рамана–Ната [14]

$$\frac{d}{dt} b_{n'}(t) = -\frac{|\Omega|^2}{16(\Delta + i\Gamma/2)} (b_{n'-1} - b_{n'+1}), \quad (51)$$

имеющему решение

$$b_{n'}(t) = J_{n'}\left(-\frac{|\Omega|^2 t}{8(\Delta + i\Gamma/2)}\right). \quad (52)$$

В результате отличные от нуля амплитуды вероятности  $a_{2n}^{(m)}(t)$  принимают вид (штрихи у  $n'$  опускаем)

$$a_{2n}^{(m)}(t) = (-i)^n \exp\left(-i \frac{|\Omega|^2}{8(\Delta + i\Gamma/2)} t\right) \times J_n\left(\frac{|\Omega|^2 t}{8(\Delta + i\Gamma/2)}\right). \quad (53)$$

Разумеется, этот же результат может быть получен и с помощью фурье-преобразования функции  $\varphi_m(x, t)$  (37). Аналогичным образом могут быть найдены и амплитуды вероятности  $a_{2n+1}^{(e)}(t)$  (например, с помощью фурье-преобразования функции  $\varphi_e(x, t)$  (38)):

$$a_{2n+1}^{(e)}(t) = -\frac{\Omega^*}{4(\Delta + i\Gamma/2)} \exp\left(-i \frac{|\Omega|^2}{8(\Delta + i\Gamma/2)} t\right) \times (-i)^n \left[ J_n\left(\frac{|\Omega|^2 t}{8(\Delta + i\Gamma/2)}\right) + i J_{n+1}\left(\frac{|\Omega|^2 t}{8(\Delta + i\Gamma/2)}\right) \right]. \quad (54)$$

Суммы квадратов модуля функций  $a_{2n}^{(m)}(t)$  (53) и  $a_{2n+1}^{(e)}(t)$  (54) дают те же выражения для полных вероятностей рассеяния, что и полученные ранее (45), (46).

Таким образом, общий вывод по поводу приближения Рамана–Ната в рассматриваемой проблеме состоит в том, что это приближение не тождественно и является более частным по отношению к

адиабатическому приближению. Для применимости приближения Рамана–Ната помимо адиабатического приближения необходимо еще пренебрежение вторыми производными (по времени) функций  $\varphi_m(x, t)$  и  $a_n^{(m)}(t)$ , соответственно, в уравнениях (27) и (33). Как следует из приведенного выше анализа, это последнее приближение справедливо только при достаточно большой длительности взаимодействия (43),  $t > 1/\Gamma$ . Как будет показано в следующем разделе, при  $t \lesssim 1/\Gamma$  формулы для  $W_n^{(m)}(t)$  и  $W_n^{(e)}(t)$  значительно более сложны, чем (45) и (46).

## 6. КВАЗИЭНЕРГИИ И ПОДАВЛЕНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙ РАБИ

Итак, рассмотрение, основанное на решении упрощенного уравнения первого порядка (35), вполне удовлетворительно в пределе достаточно большой длительности взаимодействия ( $t > 1/\Gamma$ ), но не может претендовать на анализ динамики населенностей уровней  $E_m$  и  $E_e$  в диапазоне меньших  $t$ . Этот диапазон времен представляет самостоятельный интерес, и для его исследования необходимо решать уравнение второго порядка (27) или эквивалентное ему двухкомпонентное уравнение (28) с матричным гамильтонианом (30). Для решения этих уравнений с теми же начальными условиями, что и раньше, необходимо предварительно найти собственные числа и собственные функции этих уравнений. В физических терминах, собственные числа и собственные функции — это квазиэнергии и квазиэнергетические волновые функции системы. Далее, поскольку в адиабатическом приближении гамильтониан (30) не содержит производных по  $x$ , координата  $x$  является параметром, или квантовым числом задачи. С учетом этих замечаний запишем выражения для квазиэнергий  $\gamma_{\pm}(x)$ , определяемых как собственные значения гамильтониана (30):

$$\gamma_{\pm}(x) = -\frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta + i\Gamma/2)^2 + |\Omega|^2 \cos^2(kx)}. \quad (55)$$

Графически удобным и наглядным является представление квазиэнергий в виде зон уширенных уровней с границами

$$\{\text{Re } \gamma_{\pm}(x) + \text{Im } \gamma_{\pm}(x), \text{Re } \gamma_{\pm}(x) - \text{Im } \gamma_{\pm}(x)\}.$$

При этом расстояние между верхней и нижней границами каждой зоны равно ширине соответ-



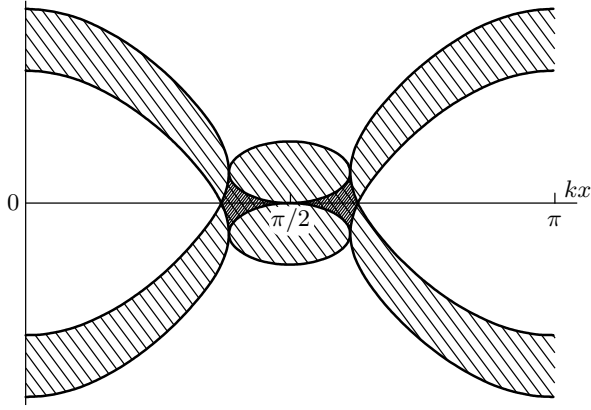


Рис. 3. Квазиэнергетические зоны атома в поле стоячей световой волны при  $\Delta = 0$  и  $|\Omega| = \sqrt{2}\Gamma$

ствующего квазиэнергетического уровня  $\Gamma_{\pm}(x) = -2 \operatorname{Im} \gamma_{\pm}(x)$ , а «центры тяжести» зон  $\operatorname{Re} \gamma_{\pm}(x)$  характеризуют сдвиг уровней в поле по сравнению с их положениями в отсутствие поля,  $\Omega = 0$ . Типичный пример структуры квазиэнергетических зон приведен на рис. 3.

Как следует из уравнения (55), одна из квазиэнергий,  $\gamma_+(x)$ , переходит в потенциал  $V_{CY}(x)$  (36) при

$$|\Omega \cos(kx)| \ll \sqrt{\Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}.$$

При этом приближенное равенство  $\gamma_+(x) \approx V_{CY}(x)$  имеет место во всем диапазоне изменения  $x$ , только если частота Раби мала,  $|\Omega| \ll \sqrt{\Delta^2 + \Gamma^2/4}$ . Если же частота Раби принимает большие значения,  $|\Omega| \gg \sqrt{\Delta^2 + \Gamma^2/4}$ , то  $\gamma_+(x) \approx V_{CY}(x)$  только в относительно малой окрестности узла стоячей волны, где малой является эффективная частота Раби  $\Omega_{eff} = \Omega \cos(kx)$ . В этом случае аппроксимация  $\gamma_+(x)$  потенциалом  $V_{CY}(x)$  является удовлетворительной для описания поведения системы при большой длительности взаимодействия, когда динамика эволюции атомных населенностей определяется областью наиболее долгоживущих квазиэнергетических состояний. На более коротких временах приближение  $\gamma_+(x) \approx V_{CY}(x)$  не является корректным и необходимо полное решение задачи с учетом всех квазиэнергетических состояний и правильных выражений для квазиэнергий и квазиэнергетических волновых функций. Последние определяются как собственные функции гамильтониана (30) и, как нетрудно проверить, имеют вид

$$\Phi_{x', \pm}(x) = \frac{1}{[\gamma_{\pm}(x') (2\gamma_{\pm}(x') + \Delta + i\Gamma/2)]^{1/2}} \times \left( \frac{-\frac{1}{2}\Omega \cos(kx')}{\gamma_{\pm}(x')} \right) \delta(x - x'), \quad (56)$$

где в данном случае  $x'$  — квантовое число, а  $x$  — динамическая переменная.

Следует заметить, что поскольку гамильтониан  $H_{ad}$  (30) неэрмитов, его собственные функции (56) не являются ортогональными и не образуют полную систему функций. Для формулировки условий ортогональности и полноты необходимо ввести дополнительно систему собственных функций эрмитово-сопряженного гамильтониана  $H_{ad}^{\dagger}$ . Собственные значения  $H_{ad}^{\dagger}$  равны  $\gamma_{\pm}^*(x)$ , а соответствующие им собственные функции  $\tilde{\Phi}_{x', \pm}(x)$  отличаются от  $\Phi_{x', \pm}(x)$  (56) только заменой  $\Gamma$  на  $-\Gamma$ . В силу этого комплексно-сопряженные функции  $\tilde{\Phi}_{x', \pm}^*(x)$  отличаются от  $\Phi_{x', \pm}(x)$  (56) только заменой  $\Omega$  на  $\Omega^*$ . Совместно функции  $\Phi_{x', \pm}(x)$  и  $\tilde{\Phi}_{x', \pm}^*(x)$  образуют систему биортогональных функций [15] и условия их ортогональности и полноты записываются в виде

$$\int_0^{\pi/k} dx \tilde{\Phi}_{x', \mp}^*(x) \Phi_{x'', \pm}(x) = 0,$$

$$\int_0^{\pi/k} dx \tilde{\Phi}_{x', \pm}^*(x) \Phi_{x'', \pm}(x) = \delta(x' - x''), \quad (57)$$

$$\int_0^{\pi/k} dx' \sum_{\pm} \Phi_{x', \pm}(x_1) \tilde{\Phi}_{x', \pm}^*(x_2) = \delta(x_1 - x_2). \quad (58)$$

Условие полноты (58) позволяет сразу же записать решение начальной задачи

$$\Phi(x, t) = \int_0^{\pi/k} dx' \int_0^{\pi/k} dx'' \exp\{-it\gamma_{\pm}(x')\} \times \sum_{\pm} \Phi_{x', \pm}(x) \tilde{\Phi}_{x', \pm}^*(x'') \Phi(x'', 0). \quad (59)$$

В рассматриваемом случае начальных условий вида (6)  $\Phi(x'', 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , и в конечном итоге уравнение (59) дает

$$\varphi_m(x, t) = \sum_{\pm} \mp \frac{\gamma_{\mp}(x) \exp\{-i\gamma_{\pm}(x)t\}}{\sqrt{(\Delta + i\Gamma/2)^2 + |\Omega|^2 \cos^2(kx)}}, \quad (60)$$

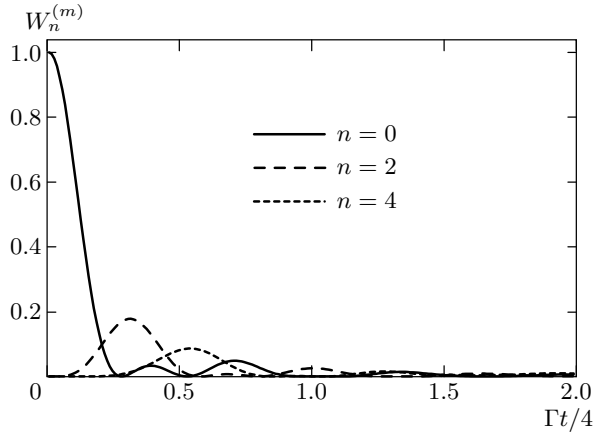


Рис. 4. Зависящие от времени  $t$  парциальные вероятности рассеяния в различные дифракционные максимумы атомов, находящиеся в метастабильном состоянии,  $W_n^{(m)}(t)$ ;  $|\Omega|/\Gamma = 5$ ,  $\Delta = 0$

$$\varphi_e(x, t) = \sum_{\pm} \mp \frac{\Omega^* \cos(kx) \exp\{-i\gamma_{\pm}(x)t\}}{2\sqrt{(\Delta + i\Gamma/2)^2 + |\Omega|^2 \cos^2(kx)}}, \quad (61)$$

$$W_{2n}^{(m)}(t) = \exp\left(-\frac{\Gamma t}{2}\right) \left| J_{2n}\left(\frac{|\Omega|t}{2}\right) - it \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} \times \int_0^1 dz J_{2n}\left(\frac{|\Omega|t}{2} z\right) \left[ J_0\left(t \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} \sqrt{1-z^2}\right) - iJ_1\left(t \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} \sqrt{1-z^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \right] \right|^2, \quad (62)$$

$$W_{2n+1}^{(e)} = \left(\frac{|\Omega|t}{4}\right)^2 \exp\left(-\frac{\Gamma t}{2}\right) \times \left| \int_0^1 dz J_0\left(t \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} \sqrt{1-z^2}\right) \times \left[ J_{2n+2}\left(\frac{|\Omega|t}{2} z\right) - J_{2n}\left(\frac{|\Omega|t}{2} z\right) \right] \right|^2, \quad (63)$$

где  $J_n$  — функции Бесселя [11, 12] (см. Приложение). В качестве примера функции  $W_{2n}^{(m)}(t)$  (62) изображены на рис. 4 в зависимости от времени взаимодействия  $t$ .

Просуммированные по  $n$  парциальные вероятности  $W_n^{(m)}(t)$  определяют зависящую от времени взаимодействия  $t$  полную остаточную вероятность нахождения атома в метастабильном состоянии  $W_{tot}^{(m)}(t)$ . Зависимость  $W_{tot}^{(m)}(t)$  представлена на

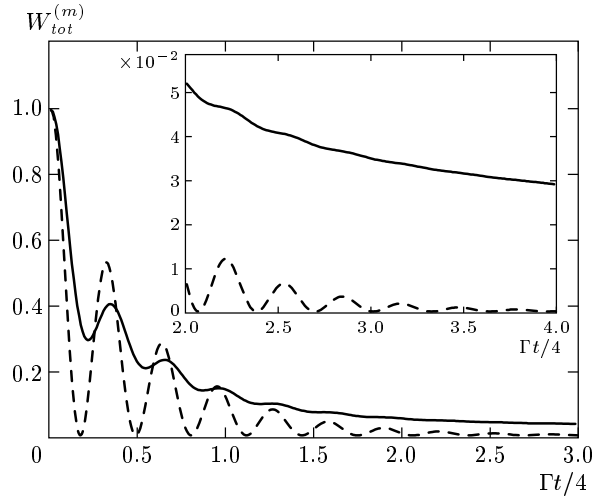


Рис. 5. Зависимость от времени взаимодействия  $t$  полной населенности метастабильного уровня;  $|\Omega|/\Gamma = 5$ ,  $\Delta = 0$ ; штриховая линия — населенность нижнего уровня двухуровневой системы в однородном резонансном поле

рис. 5. Хорошо видно, что при  $\Gamma t \lesssim 1$  функция  $W_{tot}^{(m)}(t)$  осциллирует с частотой, равной частоте Раби. Для чисто двухуровневой системы, находящейся в однородном резонансном электрическом поле с амплитудой напряженности  $2E_0$ , зависимость населенности нижнего уровня  $W^{(m)}(t)$  изображена штриховой линией. Как видно на рис. 5, в сравнении с поведением населенностей чисто двухуровневой системы, в случае рассеивающихся атомов осцилляции Раби сильно подавлены [13]. Причина этого заключается в том, что осцилляции парциальных вероятностей не являются гармоническими и положения минимумов и максимумов функций  $W_{2n}^{(m)}(t)$  (62) зависят от номера  $n$  (рис. 4). Это приводит к подавлению и сглаживанию осцилляций при суммировании по  $n$  (см. (14)). При этом, как видно на рис. 5, степень сглаживания осцилляций Раби возрастает с ростом времени взаимодействия  $t$ , и при  $\Gamma t \gg 1$  осцилляции полностью отсутствуют. Кроме того, кривые на рис. 5 ясно показывают, что в соответствии с результатами анализа в предыдущем разделе, в пределе больших  $t$  имеет место заметное замедление распада населенности  $W_{tot}^{(m)}(t)$  по сравнению с чисто экспоненциальным распадом в двухуровневой системе в однородном резонансном поле (штриховая линия). Численно найденные зависимости  $W_{2n}^{(m)}(t)$  хорошо согласуются с аналитическими асимптотическими формулами (47).

Кривые, аналогичные изображенным на рис. 4 и

5, получаются также и для парциальных и полной вероятностей нахождения атома в возбужденном состоянии,  $W_{2n+1}^{(e)}(t)$  и  $W_{tot}^{(e)}(t)$ .

## 7. ВЫХОД ЗА РАМКИ АДИАБАТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

### 7.1. Основные приближения и уравнения

В соответствии с выводом разд. 4 в адиабатическом приближении оператор кинетической энергии  $(-1/2M)\partial^2/\partial x^2$  опускается как в уравнении (4) для  $\varphi_m(x, t)$ , так и в уравнении (5) для  $\varphi_e(x, t)$ . Общее условие применимости этих упрощений записывается в виде (24). С другой стороны, уравнения (4) и (5) не симметричны: последнее из этих уравнений содержит большое слагаемое, пропорциональное  $|\Delta + i\Gamma/2|$ , в то время как первое уравнение такого слагаемого не содержит. Кроме того, в случае большой длительности взаимодействия,  $t|\Delta + i\Gamma/2| \gg 1$ , два параметра в правой части уравнения (24) имеют существенно разный порядок величины. Поэтому существует диапазон параметров, в котором кинетическая энергия мала по сравнению с  $|\Delta + i\Gamma/2|$ , но не мала по сравнению с  $1/t$ ,

$$\frac{1}{t} \lesssim \left\langle \frac{1}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\rangle \ll \left| \Delta + i\frac{\Gamma}{2} \right|. \quad (64)$$

В этих условиях вместо адиабатического приближения в формулировке разд. 4 естественно использовать альтернативное приближение, в котором оператор кинетической энергии опускается в уравнении (5), но удерживается в уравнении (4). Далее, поскольку в соответствии с анализом, проведенным в разд. 4, основной вклад в долгоживущие состояния атомов вносит область вблизи узлов стоячей волны, где  $|\cos(kx)| \ll 1$ , аппроксимируем косинус линейной функцией,  $\cos(kx) \approx -\xi$ , где  $\xi = kx - \pi/2$ . Наконец, как и прежде, ограничимся рассмотрением случая нормального падения,  $p_{0x} = 0$ . В результате находим, что уравнения (4) и (5) приобретают вид

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi_m(\xi, t) = -\omega_r \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \varphi_m(\xi, t) + \frac{1}{2} \Omega \xi \varphi_e(\xi, t) \quad (65)$$

и

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \exp(i\alpha) \left( \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right)^{1/2} \right\} \varphi_e(\xi, t) = \frac{1}{2} \Omega^* \xi \varphi_m(\xi, t), \quad (66)$$

где

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2\Delta}{\Gamma}, \quad 0 \leq \alpha < \pi. \quad (67)$$

Аналогично переходу от уравнений (25), (26) к уравнению (27), уравнения (65) и (66) могут быть заменены одним эквивалентным уравнением более высокого порядка:

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \exp(i\alpha) \left( \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right)^{1/2} \right\} i \frac{\partial}{\partial t} \varphi_m = \frac{1}{4} |\Omega|^2 \xi^2 \varphi_m - \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \exp(i\alpha) \left( \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right)^{1/2} \right\} \omega_r \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \varphi_m. \quad (68)$$

Наконец, аналогично переходу от (27) к (35), полагая  $\partial/\partial t \sim 1/t$  и учитывая малость  $1/t$  по сравнению с  $|\Delta + i\Gamma/2|$  (64), опускаем в уравнении (68) соответствующие малые слагаемые и приводим его к виду уравнения для волновой функции квантового гармонического осциллятора с комплексным потенциалом:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi_m(\xi, t) = \left\{ -\omega_r \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{|\Omega|^2 \exp(-i\alpha)}{4\sqrt{\Delta^2 + \Gamma^2/4}} \xi^2 \right\} \varphi_m(\xi, t) \quad (69)$$

при

$$\varphi_e(\xi, t) \approx \frac{1}{2} \frac{\Omega^* \exp(-i\alpha)}{\sqrt{\Delta^2 + \Gamma^2/4}} \xi \varphi_m(\xi, t). \quad (70)$$

Уравнение (69) имеет стационарные, или квазиэнергетические, решения

$$\varphi_m(\xi, t) = \exp(-i\gamma t) \varphi_m(\xi).$$

В диапазоне  $|\alpha| < \pi$  стационарные решения, удовлетворяющие условию обращения в нуль при  $|\xi| \rightarrow \infty$ , — это обычные волновые функции гармонического осциллятора, но с комплексным аргументом

$$\varphi_n^{(m)}(\xi) = \left( \frac{d\eta/d\xi}{2^n n! \sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) H_n(\eta), \quad (71)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $H_n$  — полиномы Эрмита,

$$\eta = \left( \frac{|\Omega|^2}{4\omega_r \sqrt{\Delta^2 + \Gamma^2/4}} \right)^{1/4} \exp\left(-i\frac{\alpha}{4}\right) \xi. \quad (72)$$

Собственные значения уравнения (69), т. е. комплексные квазиэнергии  $\gamma_n$ , равны

$$\gamma_n = (2n + 1)\gamma_0, \quad (73)$$

где  $\gamma_0$  — комплексная энергия основного уровня осциллятора с комплексным потенциалом

$$\gamma_0 = \left( \frac{|\Omega|^2 \omega_r}{4\sqrt{\Delta^2 + \Gamma^2/4}} \right)^{1/2} \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\right). \quad (74)$$

Функции  $\varphi_n^{(e)}(\xi)$ , соответствующие найденным функциям  $\varphi_n^{(m)}(\xi)$  (71), определяются с помощью уравнения (70).

В отличие от адиабатического приближения (разд. 4), в условиях (64) уравнением на собственные значения является уравнение для однокомпонентных функций  $\varphi_m(\xi)$  (69), для которых должны формулироваться условия нормировки и полноты. Как и прежде, система функций  $\varphi_n^{(m)}(\xi)$  (71) относится к классу биортогональных функций. Собственные значения эрмитово-сопряженного гамильтониана равны  $\gamma_n^*$ , а собственные функции  $\tilde{\varphi}_n^{(m)}(\xi)$  отличаются от  $\varphi_n^{(m)}(\xi)$  только заменой  $\alpha$  на  $-\alpha$  (67). Это значит, что функции  $[\tilde{\varphi}_n^{(m)}(\xi)]^*$  совпадают с  $\varphi_n^{(m)}(\xi)$ . Условия нормировки и полноты определяются уравнениями типа (57) и (58) и имеют вид

$$\int d\xi [\tilde{\varphi}_n^{(m)}(\xi)]^* \varphi_{n'}^{(m)}(\xi) \equiv \int d\xi \varphi_n^{(m)}(\xi) \varphi_{n'}^{(m)}(\xi) = \delta_{n,n'}, \quad (75)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(m)}(\xi) [\tilde{\varphi}_n^{(m)}(\xi')]^* \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(m)}(\xi) \varphi_n^{(m)}(\xi') = \delta(\xi - \xi'). \quad (76)$$

### 7.2. Решение начальной задачи

С помощью условия полноты (76) для начального условия  $\varphi_m(\xi, t = 0) \equiv 1$  (6) решение начальной задачи записывается в виде

$$\varphi_m(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-i\gamma_n t) \varphi_n^{(m)}(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \varphi_n^{(m)}(\xi'). \quad (77)$$

Сумма по  $n$  может быть вычислена явно с помощью формулы Мёллера [11], что дает

$$\varphi_m(\xi, t) = \left\{ \cos \left[ \tau \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\right) \right] \right\}^{-1/2} \times \exp \left\{ -i\frac{\xi^2}{2} \left( \frac{|\Omega|^2 \sin \alpha}{2\omega_r \Gamma} \right)^{1/2} \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\right) \times \operatorname{tg} \left[ \tau \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\right) \right] \right\}, \quad (78)$$

где

$$\tau = \sqrt{2} |\Omega| t \sqrt{\frac{\omega_r}{\Gamma}} \sin \alpha = \frac{|\Omega| t \sqrt{\omega_r}}{(\Delta^2 + \Gamma^2/4)^{1/4}} \equiv \frac{t}{t_1} \quad (79)$$

— безразмерное время, а  $t_1$  — новое характерное значение времени взаимодействия

$$t_1 = \left( \frac{\Gamma}{2|\Omega|^2 \omega_r \sin \alpha} \right)^{1/2} = \frac{(\Delta^2 + \Gamma^2/4)^{1/4}}{|\Omega| \sqrt{\omega_r}}. \quad (80)$$

В силу малости частоты отдачи  $\omega_r$ , как правило,  $t_1 > t_0^*$  (44), хотя интервал между  $t_0^*$  и  $t = t_1$  может быть и не слишком большим. Интересно отметить, что при очень большой величине расстройки,  $|\Delta| \gg \Gamma$ , величина параметра

$$t_0^* = t_0 \approx \frac{8\Delta^2}{\Gamma|\Omega|^2}$$

может стать сопоставимой с

$$t_1 \approx \frac{\sqrt{|\Delta|}}{|\Omega| \sqrt{\omega_r}}$$

(при  $|\Delta| \approx (\Gamma|\Omega|^2)^{2/3}/4\omega_r^{1/3}$ ).

Плотность вероятности (7), определяемая  $\varphi_m(\xi, t)$  (78), равна

$$\frac{dW_m(\xi, t)}{d\xi} = \frac{1}{\pi} |\varphi_m(\xi, t)|^2 = \frac{1}{\pi\sqrt{D}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\Delta\xi^2(t)}\right), \quad (81)$$

где

$$D = \cos^2\left(\tau \cos \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{ch}^2\left(\tau \sin \frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\tau \cos \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sh}^2\left(\tau \sin \frac{\alpha}{2}\right), \quad (82)$$

$\Delta\xi(t)$  — зависящая от времени ширина распределения  $dW_m(\xi, t)/d\xi$ ,

$$\Delta\xi^2 = 2D \left( \frac{2\omega_r \Gamma}{|\Omega|^2 \sin \alpha} \right)^{1/2} \left\{ \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(2\tau \cos \frac{\alpha}{2}\right) + \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh}\left(2\tau \sin \frac{\alpha}{2}\right) \right\}^{-1}. \quad (83)$$

Зависящая от времени  $t$  полная вероятность нахождения атома в метастабильном состоянии  $W_{tot}^{(m)}(t)$  (8) получается из (81) интегрированием по  $\xi$ :

$$W_{tot}^{(m)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{2\omega_r \Gamma}{|\Omega|^2 \sin \alpha} \right)^{1/4} \times \left\{ \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left( 2\tau \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \left( 2\tau \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right\}^{-1/2}. \quad (84)$$

В соответствии с уравнением (70) распределение плотности вероятности для атомов на возбужденном уровне связано с  $dW_m(\xi, t)/d\xi$  (81) соотношением

$$\frac{dW_e(\xi, t)}{d\xi} = \frac{|\Omega|^2}{\Delta^2 + \Gamma^2/4} \frac{\xi^2}{4} \frac{dW_m(\xi, t)}{d\xi}, \quad (85)$$

которое после интегрирования по  $\xi$  дает

$$W_{tot}^{(e)}(t) = \frac{|\Omega|^2}{\Delta^2 + \Gamma^2/4} \frac{\Delta \xi^2}{8} W_{tot}^{(m)}(t). \quad (86)$$

### 7.3. Предельные случаи и обсуждение результатов

#### 7.3.1. Адиабатический предел

В предельном случае малых  $\tau$ ,  $\tau \ll 1$ , общие формулы (81)–(86) переходят в найденные ранее в адиабатическом приближении выражения для распределений плотности вероятности, ширины распределений (41) и полных вероятностей (45) и (46). Следовательно, в силу определений (79) и (80) область существования режима степенного распада, описанного в адиабатическом приближении, ограничена условиями  $t_0^* < t < t_1$ . В силу сказанного выше при больших значениях расстройки значение  $t_0^*$  может стать больше, чем  $t_1$ , вследствие чего область существования степенного распада вообще исчезает.

Для более детального сравнения результатов, полученных в разд. 4–6 в адиабатическом приближении, с результатами данного раздела интересно сравнить соответствующие квазиэнергетические функции и квазиэнергии. Ясно, что при переходе от задачи на квазиэнергии к начальной задаче квазиэнергия  $\gamma$  заменяется на производную по времени  $\partial/\partial t$ , которая имеет порядок  $1/t$ , т. е.  $|\gamma| \sim 1/t$ . Из этого соотношения и уравнений (73), (74) следует, что характерные значения  $n$ , дающие вклад в решение начальной задачи (77), по порядку величины

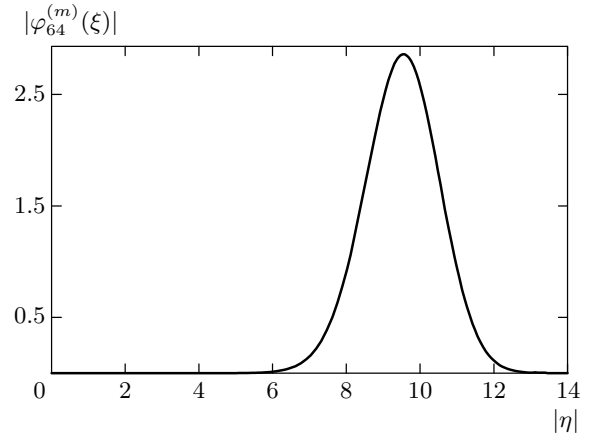


Рис. 6. Функция  $|\varphi_{64}^{(m)}(\xi)|$  (71) в единицах  $10^{11}|\Omega|^{1/4}/(2\omega_r\Gamma)^{1/8}$

равны  $n_{eff} \sim 1/\tau$ . В адиабатическом пределе, при  $\tau \ll 1$ , имеем  $n_{eff} \gg 1$ . Это значит, что существенный вклад в сумму по  $n$  (77) вносит большое число слагаемых с  $n \sim n_{eff} \gg 1$ , что позволяет заменить суммирование по  $n$  в (77) на интегрирование. Далее, волновые функции гармонического осциллятора с комплексным аргументом вида (71) обладают весьма интересными свойствами и могут достаточно заметно отличаться от волновых функций осциллятора с действительным потенциалом. На рис. 6 в качестве примера изображена функция  $|\varphi_{64}^{(m)}(\xi)|$  (71) (при  $\Delta = 0$ ), которая, как легко видеть, имеет единственный хорошо выраженный максимум. Из анализа таких кривых при произвольных  $n$  легко находим, что положения их максимумов определяются условием  $|\eta|_0(n) = 2^{1/4} \sqrt{n}$  или

$$\xi_0(n) = 2^{3/4} \sqrt{n} \frac{(\Delta^2 + \Gamma^2/4)^{1/8} \omega_r^{1/4}}{|\Omega|^{1/2}}. \quad (87)$$

Используя  $\xi_0$  (87) вместо  $n$  в качестве нового квантового числа, приводим сумму по  $n$  в уравнении (77), преобразованную в интеграл по  $dn$ , к виду интеграла по  $d\xi_0$  в полном соответствии с уравнением (59), полученным в адиабатическом приближении. Возникающий при этом степенной закон распада объясняется тем, что хотя каждое слагаемое в сумме по  $n$  (77) зависит от времени экспоненциально, их сумма (или интеграл) экспонентой не является.

В терминах  $\xi_0$  (87) при  $n \gg 1$  выражения для квазиэнергий (73), (74) принимают вид

$$\gamma(\xi_0) = \frac{\xi_0^2}{2\sqrt{2}} \frac{|\Omega|^2}{\sqrt{\Delta^2 + \Gamma^2/4}} \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\right). \quad (88)$$

При  $\Delta = 0$  уравнение (88) дает

$$\gamma(\xi_0) = (1 + i)\gamma_+(x) = (1 + i)V_{CY}(x),$$

где  $\gamma_+(x)$  и  $V_{CY}(x)$  определены уравнениями (55) и (36),  $kx \equiv \xi_0$ ,  $|\xi_0| \ll 1$ . Этот результат показывает, что в пределе  $\tau \ll 1$  при  $\Delta = 0$  мнимая часть квазиэнергии переходит в выражения, полученные в адиабатическом приближении. Но при этом остается еще и действительная часть  $\gamma(\xi_0)$ , по величине равная модулю мнимой части, которая не возникает в чисто адиабатическом приближении. Поэтому в некотором смысле нет полного предельного перехода к адиабатическому пределу при  $\tau \rightarrow 0$  или  $\omega_r \rightarrow 0$  и точка  $\omega_r = 0$  для квантового гармонического осциллятора с комплексным потенциалом (уравнение (69)) является существенно особой.

### 7.3.2. Неадиабатический режим рассеяния

Как следует из изложенного, неадиабатический режим рассеяния реализуется в случае, обратном рассмотренному выше:  $\tau \gg 1$ . Это асимптотика большой длительности взаимодействия. В соответствии с ранее полученной оценкой,  $n_{eff} \sim 1/\tau$ , в случае  $\tau \gg 1$  основной вклад в сумму по  $n$  (77) вносит единственное слагаемое с  $n = 0$ . Объясняется это тем, что в пределе  $\tau \gg 1$  все слагаемые с  $n \geq 1$  становятся экспоненциально малыми по сравнению со слагаемым с  $n = 0$ . Следовательно, при  $\tau \gg 1$  ширина распределения  $dW_m(\xi, t)/d\xi$  «выходит» на свое асимптотическое значение  $\Delta\xi_{as}$ , определяемое шириной области локализации волновой функции основного состояния осциллятора с комплексным потенциалом  $\varphi_0^{(m)}(\xi)$  (71), которая, в свою очередь, определяется условием  $\text{Re}(\eta^2) \approx 1$ , что дает

$$\begin{aligned} \Delta\xi_{as}^2 &= \left( \frac{2\omega_r\Gamma}{|\Omega|^2 \sin(\alpha)} \right)^{1/2} \frac{1}{\cos(\alpha/2)} = \\ &= \frac{2}{|\Omega|} \left[ \frac{2\omega_r (\Delta^2 + \Gamma^2/4)}{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Gamma^2/4}} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (89)$$

Разумеется, этот же результат следует и из общей формулы (83) в пределе больших  $\tau$ . Ширина  $\Delta\xi_{as}$  (89) не зависит от времени  $t$ . Следовательно, в зависимости от  $t$  волновой пакет атомов, находящийся в метастабильном состоянии, сужается по мере роста времени взаимодействия до тех пор, пока реализуется режим степенного распада ( $t < t_1$ ), и при  $t \gg t_1$  дальнейшего сужения пакета не происходит. Режим выхода ширины пакета на асимптотику большой длительности взаимодействия (см. ниже), а также асимптотическое значение ширины (89) зависят

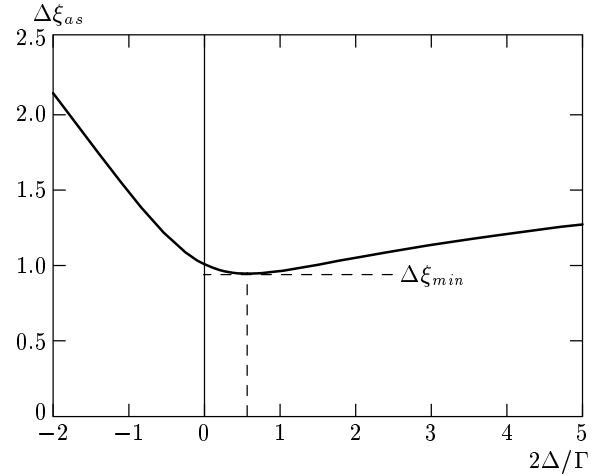


Рис. 7. Асимптотическая ширина  $\Delta\xi_{as}$  (89) волнового пакета атомов в метастабильном состоянии в зависимости от расстройки резонанса  $\Delta$ ;  $\Delta\xi_{as}$  — в единицах  $(4\omega_r\Gamma)^{1/4}|\Omega|^{-1/2}$ ,  $\Delta$  — в единицах  $\Gamma/2$

от величины и знака расстройки резонанса  $\Delta$ . Зависимость асимптотической ширины распределения  $\Delta\xi_{as}$  (89) от расстройки резонанса  $\Delta$  изображена на рис. 7. Как хорошо видно, эта зависимость несимметрична по отношению к изменению знака расстройки. При больших отрицательных значениях расстройки  $\Delta$  асимптотическая ширина распределения  $\Delta\xi$  быстро возрастает,

$$\Delta\xi_{as} \approx \frac{2\sqrt{2}\omega_r^{1/4}|\Delta|^{3/4}}{(\Gamma|\Omega|)^{1/2}}.$$

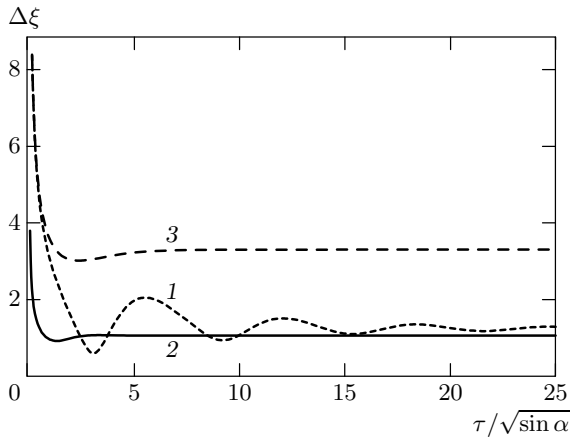
Условие малости асимптотической ширины волнового пакета по сравнению с длиной волны света,  $\Delta\xi_{as} \ll 1$ , приводит в этом случае к ограничению на величину расстройки,

$$|\Delta| \ll \frac{(\Gamma|\Omega|)^{2/3}}{\omega_r^{1/3}}.$$

Это ограничение совпадает с ранее обсуждавшимся условием существования ненулевой области адиабатического неэкспоненциального распада  $t_0 \ll t_1$ . Значение асимптотической ширины волнового пакета  $\Delta\xi_{as}$  (89), минимизированное по величине расстройки резонанса  $\Delta$ , достигается при  $2\Delta/\Gamma = 1/\sqrt{3}$  и равно

$$\Delta\xi_{min} = \left( \frac{16}{3\sqrt{3}} \frac{\omega_r\Gamma}{|\Omega|^2} \right)^{1/4} \approx 1.32 \left( \frac{\omega_r\Gamma}{|\Omega|^2} \right)^{1/4}. \quad (90)$$

С помощью найденной минимальной реализуемой ширины волнового пакета  $\Delta\xi_{min}$  (90) мы можем



**Рис. 8.** Ширина атомного волнового пакета  $\Delta\xi$  (83) в зависимости от времени взаимодействия  $t$  при  $2\Delta/\Gamma = 2 + \sqrt{3}$  (1),  $\Delta = 0$  (2),  $2\Delta/\Gamma = -2 - \sqrt{3}$  (3);  $\Delta\xi$  — в единицах  $(8\omega_r\Gamma)^{1/4}|\Omega|^{-1/2}$ , масштаб изменения  $t$  выбран не зависящим от расстройки  $\Delta$

конкретизировать ограничения на величину частоты Раби  $|\Omega|$ , при которых выполнено условие малости кинетической энергии атомов по сравнению с  $|\Delta + i\Gamma/2|$  (64). Считая, что  $\partial/\partial x \sim k/\Delta\xi_{min}$  и  $|\Delta| \sim \Gamma$ , находим, что ограничение на  $|\Omega|$ , следующее из (64), имеет вид

$$|\Omega| \ll \Gamma \sqrt{\frac{\Gamma}{\omega_r}}. \quad (91)$$

Ввиду того что  $\Gamma \gg \omega_r$  (обычно  $\Gamma \sim 10^3\omega_r$ ), ограничение (91) не противоречит предположению о реализации дифракционного, а не брэгговского режима рассеяния,  $|\Omega| \geq \sqrt{\Gamma\omega_r}$ .

Что касается режимов выхода ширины пакета  $\Delta\xi(t)$  на асимптотическое значение (89), то в общем случае они определяются уравнением (83). На рис. 8 изображена зависимость  $\Delta\xi(t)$  при различных величинах и знаках расстройки резонанса  $\Delta$ . Как видно из этого рисунка, случай положительных расстроек выделен тем, что при  $\Delta > 0$  выход зависящей от времени ширины атомного волнового пакета  $\Delta\xi(t)$  на ее асимптотическое значение (89) сопровождается хорошо выраженными осцилляциями (кривая 1 на рис. 8). Возникновение осцилляций связано с наличием в суперпозиции (77) слагаемых с разными  $n$ . Частота осцилляций равна собственной частоте осциллятора с комплексным потенциалом  $\text{Re } \gamma_0$ , где  $\gamma_0$  определяется уравнением (74). Выделенность случая достаточно больших положительных расстроек

определяется тем, что

$$\frac{\text{Re } \gamma_n}{|\text{Im } \gamma_n|} \approx \frac{\text{ctg}(\alpha/2)}{n + 1/2} \approx \frac{4\Delta}{\Gamma(n + 1/2)} \gg 1$$

(при не очень больших значениях  $n$ ). По этой причине как суперпозиция (77), так и ширина соответствующего распределения по  $\xi$  успевают совершить несколько осцилляций за время ( $\sim |\text{Im } \gamma_0|^{-1}$ ) выхода полной вероятности  $W_{tot}^{(m)}(t)$  на свое асимптотическое значение. В соответствии с тем, что в асимптотике очень большой длительности взаимодействия,  $\tau \gg 1$ , в суперпозиции квазиэнергетических волновых функций (77) выживает лишь слагаемое с  $n = 0$ , асимптотическая зависимость  $W_{tot}^{(m)}(t)$  определяется фактором

$$\exp(-2\text{Im } \gamma_0 t) \equiv \exp(-\tilde{\Gamma} t).$$

Это значит, что в неадиабатическом режиме (при  $t \gg t_1$ ) степенной режим распада, имеющий место в интервале  $t_0^* \lesssim t \lesssim t_1$ , переходит в экспоненциальный с модифицированной константой распада

$$\tilde{\Gamma} = 2 \text{Im } \gamma_0 = |\Omega| \left( \frac{\omega_r}{2} \frac{\sqrt{\Delta^2 + \Gamma^2/4} - \Delta}{\Delta^2 + \Gamma^2/4} \right)^{1/2}, \quad (92)$$

существенно отличной от константы распада  $\Gamma$  свободного атома.

Ввиду того что, как показано, в области  $t > t_1$  волновые пакеты атомов, находящихся в метастабильном и в возбужденном состояниях, не сужаются, а абсолютная величина населенностей на этих уровнях убывает, в практическом плане нецелесообразно увеличение времени взаимодействия сверх  $t_1$ . Приведем некоторые оценки. При  $t = d/v_0$ , где  $d$  и  $v_0$  — поперечный размер лазерного луча и скорость атомов,  $v_0 \sim 10^5 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $|\Omega| = 10\Gamma$ ,  $\omega_r = 10^{-3}\Gamma$  и  $\Gamma \sim 10^8 \text{ с}^{-1}$  условие  $t = t_1$  и уравнения (80) и (90) дают  $d \sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ см}$  и  $\Delta x_{min} \sim 10^{-6} \text{ см}$ .

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследована динамика спонтанного излучения атомов, рассеивающихся на резонансной стоячей световой волне в условиях, когда: (а) реализуется режим дифракционного, а не брэгговского рассеяния, (б) нижний из двух резонансных уровней атома является узким (метастабильным), а верхний — широким, (в) ширина верхнего (возбужденного) уровня определяется в основном спонтанными радиационными переходами на

уровни, отличные от метастабильного и (г) частота Раби  $\Omega$ , скорость распада возбужденного уровня  $\Gamma$  и частота отдачи  $\omega_r$  удовлетворяют условиям  $|\Omega| \geq \Gamma \gg \omega_r$ .

Показано, что при этом могут реализоваться существенно различные режимы адиабатического и неадиабатического рассеяния, условия существования которых, соответственно, имеют вид  $t < t_1$  и  $t > t_1$ , где  $t$  — время взаимодействия, а  $t_1$  определено уравнением (80).

Найдено, что в адиабатическом режиме, когда отдачей атома можно полностью пренебречь, зависимость от времени населенностей метастабильного и возбужденного уровней убывает по степенному, а не по экспоненциальному закону. Помимо этого показано, что при малых временах,  $t < 1/\Gamma < t_1$ , населенности рабочих уровней осциллируют с рабиевской частотой  $|\Omega|$ , причем осцилляции сильно подавлены по сравнению со случаем атома в однородном резонансном поле.

Кроме того, в этом режиме происходит сужение пространственной области локализации волновых пакетов атомов, остающихся в метастабильном и возбужденном состояниях, причем возникающие узкие волновые пакеты локализируются в окрестностях узлов стоячей световой волны.

Также показано, что в неадиабатическом режиме сужение волновых пакетов прекращается и их ширина достигает своего минимального значения, определяемого уравнением (89). При этом степенной закон распада населенностей атомных уровней переходит в экспоненциальный с константой распада  $\tilde{\Gamma}$  (92), которая меньше скорости распада свободного атома  $\Gamma$ , уменьшается с ростом  $\Gamma$  и зависит как от величины и знака расстройки резонанса  $\Delta$ , так и от частоты Раби  $|\Omega|$ . Мы полагаем, что обнаруженные и описанные эффекты достаточно интересны и доступны для наблюдения в эксперименте.

Настоящая работа выполнена частично при поддержке РФФИ (гранты №№ 01-02-17643, 02-02-16400, 03-02-06145), Фонда Александра фон Гумбольдта (М. В. Ф.) и Германского исследовательского центра, DFG (В. П. Ш.).

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

**Вывод формул (62), (63)**

Рассмотрим более детально вывод выражений (62) и (63) для парциальных вероятностей

$W_n^{(m,e)}(t)$ . Наиболее просто проделать это для функции  $W_n^{(e)}(t)$ . Для этого функцию  $\varphi_e(x, t)$  (61) представим в виде

$$\varphi_e(x, t) = i\Omega^* \cos(kx) \exp \left\{ i \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} t \right\} \times \sin \left( \frac{t}{2} \sqrt{\left( \Delta + \frac{i\Gamma}{2} \right)^2 + |\Omega|^2 \cos^2(kx)} \right) \times \frac{1}{\sqrt{\left( \Delta + \frac{i\Gamma}{2} \right)^2 + |\Omega|^2 \cos^2(kx)}}. \quad (\text{П.1})$$

Воспользовавшись формулой

$$\frac{\sin \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \int_0^1 dz J_0 \left( a \sqrt{1 - z^2} \right) \cos(bz), \quad (\text{П.2})$$

которая справедлива при любых комплексных  $a$  и  $b$  [16], преобразуем уравнение (П.1) к виду

$$\varphi_e(x, t) = i \frac{\Omega^* t}{2} \cos(kx) \exp \left\{ i \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} t \right\} \times \int_0^1 dz J_0 \left( t \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} \sqrt{1 - z^2} \right) \times \cos \left[ \frac{|\Omega| t}{2} \cos(kx) z \right]. \quad (\text{П.3})$$

Таким образом, вычисление амплитуды парциальной вероятности  $a_n^{(e)}(t)$  (9) свелось к вычислению фурье-преобразования произведения  $\cos(kx) \cos [ (|\Omega| t z / 2) \cos(kx) ]$  по  $x$ :

$$a_n^{(e)}(t) = i \frac{\Omega^* t}{2} \exp \left\{ i \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} t \right\} \times \int_0^1 dz J_0 \left( t \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} \sqrt{1 - z^2} \right) \times \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\pi} \cos \varphi \cos \left( \frac{|\Omega| t}{2} z \cos \varphi \right) \exp(-in\varphi). \quad (\text{П.4})$$

Интеграл по переменной  $\varphi$  в правой части уравнения (П.4) вычисляется с помощью подстановки хорошо известного выражения для суммы, содержащей функции Бесселя  $J_{2n}$  [12, 16]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_{2n}(\eta) \cos(2n\varphi) = \cos(\eta \cos \varphi), \quad (\text{П.5})$$

под знак интеграла, что дает



$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \cos \varphi \cos \left( \frac{|\Omega|t}{2} z \cos \varphi \right) \exp(-in\varphi) = \\ = \frac{(-1)^{m+1}}{2} \left\{ J_{2m+2} \left( \frac{|\Omega|t}{2} z \right) - \right. \\ \left. - J_{2m} \left( \frac{|\Omega|t}{2} z \right) \right\} \delta_{n, 2m+1}. \quad (\text{П.6}) \end{aligned}$$

Здесь  $\delta_{n, 2m+1}$  — символ Кронекера, а  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Подставляя выражение (П.6) в уравнение (П.4) для амплитуды  $a_n^{(e)}(t)$ , приходим к выражению (63) для вероятности  $W_{2n+1}^{(e)}(t)$ .

Для вычисления фурье-компонент от функции  $\varphi_m(x, t)$  преобразуем уравнение (60) к виду

$$\begin{aligned} \varphi_m(x, t) = \exp \left\{ i \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} t \right\} \times \\ \times \left\{ \cos \left( \frac{t}{2} \sqrt{\left( \Delta + \frac{i\Gamma}{2} \right)^2 + |\Omega|^2 \cos^2(kx)} \right) - \right. \\ \left. - i \left( \Delta + \frac{i\Gamma}{2} \right) \sin \left( \frac{t}{2} \sqrt{\left( \Delta + \frac{i\Gamma}{2} \right)^2 + |\Omega|^2 \cos^2(kx)} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\sqrt{\left( \Delta + \frac{i\Gamma}{2} \right)^2 + |\Omega|^2 \cos^2(kx)}} \right\}. \quad (\text{П.7}) \end{aligned}$$

Вычисление фурье-преобразования от первого слагаемого в правой части уравнения (П.7) осуществляется с помощью применения аналогичной формулы [16]

$$\begin{aligned} \cos \sqrt{a^2 + b^2} = \\ = \cos b - a \int_0^1 dz J_1(az) \frac{\cos(b\sqrt{1-z^2})}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (\text{П.8}) \end{aligned}$$

где в качестве параметров  $a$  и  $b$ , как и ранее, выступают, соответственно, величины  $t(\Delta + i\Gamma/2)/2$  и  $|\Omega|t \cos(kx)/2$ . Используя уравнения (П.2) и (П.8), запишем функцию  $\varphi_m(x, t)$  (П.7) в виде

$$\begin{aligned} \varphi_m(x, t) = \exp \left\{ i \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} t \right\} \times \\ \times \left\{ \cos \left[ \frac{|\Omega|t}{2} \cos(kx) \right] - it \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} \times \right. \\ \times \int_0^1 dz \cos \left[ \frac{|\Omega|t}{2} \cos(kx) z \right] \left[ J_0 \left( t \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} \sqrt{1-z^2} \right) - \right. \\ \left. - i \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} J_1 \left( t \frac{\Delta + i\Gamma/2}{2} \sqrt{1-z^2} \right) \right] \right\}. \quad (\text{П.9}) \end{aligned}$$

Следовательно, задача о вычислении амплитуды парциальной вероятности  $a_n^{(m)}(t)$  (9) сводится к вычислению фурье-преобразования по  $x$  от функции  $\cos [(|\Omega|t z/2) \cos(kx)]$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \cos \left( \frac{|\Omega|t}{2} z \cos \varphi \right) \exp(-in\varphi). \quad (\text{П.10})$$

Выражение (П.10) вычисляется подстановкой уравнения (П.5) под знак интеграла, что дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \cos \left( \frac{|\Omega|t}{2} z \cos \varphi \right) \exp(-in\varphi) = \\ = (-1)^m J_{2m} \left( \frac{|\Omega|t}{2} z \right) \delta_{n, 2m}. \quad (\text{П.11}) \end{aligned}$$

Подставляя выражение (П.9) в определение (9) парциальной амплитуды  $a_n^{(m)}(t)$  и учитывая уравнение (П.11), приходим к выражению (62) для вероятности  $W_{2n}^{(m)}(t)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, В. П. Яковлев, *Механическое действие света на атомы*, Наука, Москва (1991).
2. V. I. Balykin and V. S. Letokhov, *Atom Optics with Laser Light*, Harwood Academ., Chur, Switzerland (1995).
3. W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, Wiley, New York (2001).
4. D. O. Chudesnikov and V. P. Yakovlev, *Laser Phys.* **1**, 110 (1991).
5. D. S. Krähmer, A. M. Herkommer, E. Mayr et al., in *Quantum Optics VI, Springer Proc. in Physics* ed. by D. F. Walls & J. D. Harvey, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1994), Vol. 77, p. 87.
6. M. K. Oberthaler, R. Abfalterer, S. Bernet, J. Schmiedmayer, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4980 (1996).

7. H. Batelaan, E. M. Rasel, M. K. Oberthaler, J. Schmiedmayer, and A. Zeilinger, *J. Mod. Opt.* **44**, 2629 (1997).
8. M. V. Berry and D. H. J. O'Dell, *J. Phys A: Math. Gen.* **31**, 2093 (1998).
9. M. K. Oberthaler, R. Abfalterer, S. Bernet, J. Schmiedmayer, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. A* **60**, 456 (1999).
10. G. Borrmann, *Phys. Z.* **42**, 157 (1941).
11. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции* т. 2, Наука, Москва (1974).
12. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
13. M. A. Efremov, M. V. Fedorov, V. P. Yakovlev, and W. P. Schleich, *Laser Phys.* **13**, 6 (2003).
14. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970).
15. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва (1966), гл. 9, § 8.
16. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, Москва (1983).