

# ЛАЗЕР НА «ШТАРКОВСКОЙ ЛЕСТНИЦЕ» С КОГЕРЕНТНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДСИСТЕМОЙ

*В. Ф. Елесин<sup>\*а</sup>, Ю. В. Копаев<sup>б</sup>*

<sup>а</sup> *Московский государственный инженерно-физический институт  
115409, Москва, Россия*

<sup>б</sup> *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 6 февраля 2003 г.

Развита теория генерации на двухподзонной «штарковской лестнице» с когерентной электронной подсистемой. Рассматривается модель, в которой электроны за счет резонансного туннелирования поступают на верхний уровень квантовой ямы, переходят на нижний уровень этой ямы (вертикальные переходы), излучая фотон  $\hbar\omega$ , затем резонансно туннелируют на верхний уровень соседней ямы, совершают излучательный переход и т. д. вплоть до ухода с нижнего уровня последней ямы. Приложенное к сверхрешетке постоянное электрическое поле смещает уровни так, что нижний уровень  $n$ -й ямы совпадает с верхним уровнем  $(n + 1)$ -й. Найдены аналитические выражения для волновых функций и токов поляризации  $N$ -ямной структуры. Показано, что возможна объемная генерация  $N$ -ямной структуры в оптимальном режиме с КПД близким к единице, с малым отражением и линейной зависимостью мощности от тока накачки. Полная мощность генерации пропорциональна числу ям. Для структур с четным числом ям энергия электронов эмиттера должна просто совпадать с резонансной энергией при любых полях лазера. То есть подстройка энергии, необходимая в структуре на одной яме, не требуется. Найдены универсальные соотношения для параметров  $N$ -ямной структуры, обеспечивающие выполнение условий резонанса одновременно во всех ямах. Отмечается, что возможна когерентная генерация и на одноподзонной «штарковской лестнице», но с меньшим усилением.

PACS: 42.55.Ah, 73.21.Cd

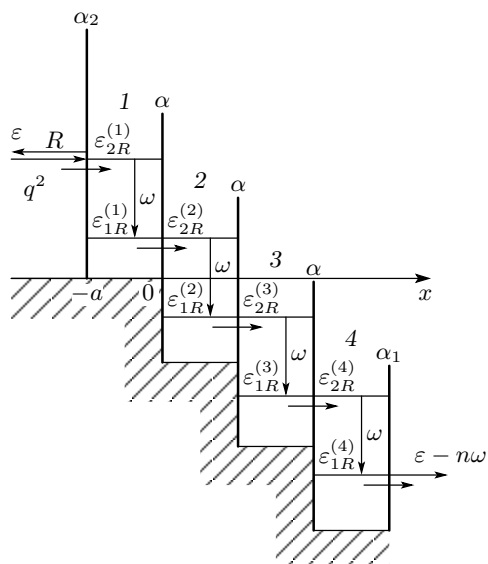
## 1. ВВЕДЕНИЕ

В 1972 г. Казаринов и Сурис [1] предложили новый тип полупроводникового лазера, в котором излучательные переходы происходят между уровнями (подзонами) размерного квантования. Это предложение было реализовано в 1994 г. в наноструктурах (так называемые каскадные лазеры) [2, 3], где основными элементами являются две квантовые ямы с рабочими уровнями в каждой из них [2] («диагональные переходы») или одна квантовая яма с двумя рабочими уровнями [3, 4] («вертикальные переходы»).

Главное преимущество каскадных лазеров заключается в возможности перестройки длины волны от инфракрасного до субмиллиметрового диапазона.

Особенностями каскадных лазеров являются униполярность, одинаковые массы подзон и др. Еще одна принципиальная особенность состоит в когерентном характере резонансного туннелирования, обеспечивающего накачку. Поэтому появляется возможность генерации без участия диссипативных процессов. Действительно, электрон поступает на верхний уровень за счет когерентного резонансного туннелирования, переходит на нижний уровень, излучая фотон, и покидает яму, прерывая процесс взаимодействия с электромагнитным полем (в обычных лазерах прерывание осуществляется за счет диссипационных процессов, например, излучения фонона [5]). Такой лазер на одной квантовой яме (названный когерентным) был предложен и теоретически исследован в работе [6]. Было показано, что возможна генерация сильного поля в отсутствие инверсной насе-

\*E-mail: VEF@supercon.mephi.ru



Схематическое изображение структуры четырех ям, N = 4

ленности. Найдены условия оптимального режима, при котором КПД близок к единице [6, 7], отражение от структуры равно нулю и отсутствует уширение линии усиления за счет поля.

Возникает естественный вопрос — возможна ли эффективная генерация для структуры из N туннельно связанных ям? Эта задача тесно связана с задачей генерации на «штарковской лестнице», в которой существует известная проблема. Согласно Бастарду и др. [8], генерация на «штарковской лестнице» является поверхностным эффектом. Причина заключается в том, что излучательные переходы внутри образца компенсируются и усиление определяется инверсной населенностью между уровнями на левой и правой границах.

Однако такой вывод справедлив, если электронная подсистема некогерентна и применимо понятие вероятности излучательного перехода в единицу времени. В когерентной системе ситуация принципиально иная. При определенных условиях электрон, подводимый к яме, когерентно совершает излучательные переходы вне зависимости от разности населенности между уровнями [6]. Поэтому можно ожидать, что генерация может проходить во всем объеме N-ямной структуры.

Следует отметить, что в одноподзонной модели излучательные переходы идут между уровнями Штарка в соседних ямах (диагональные переходы). Как показано в работах [4, 9], диагональные переходы обеспечивают гораздо меньшее усиление, чем пе-

реходы между двумя уровнями в одной яме (вертикальные переходы). Поэтому в данной работе мы рассматриваем сверхрешетку с вертикальными излучательными переходами (см. рисунок). После перехода электрона с верхнего на нижний уровень n-й ямы с излучением фотона электрон резонансно туннелирует на верхний уровень соседней ямы и т.д. Рассматриваемая модель представляет когерентный лазер, в которой электрон проходит N ям, излучая фотоны в каждой яме. Как известно, в каскадном лазере [2, 3] после каждого излучательного перехода электрон попадает в область релаксации, где готовится его состояние для следующего излучательного перехода.

Целью настоящей работы является разработка теории когерентного лазера для N ям с вертикальными переходами. Следует отметить, что некоторые предварительные результаты были получены в работах [10]. Однако используемый в них формализм решения системы алгебраических уравнений  $4N \times 4N$  был очень громоздок, что не позволило провести полный анализ и выявить условия оптимальной генерации.

В настоящей работе удалось получить точные аналитические решения этой системы для 2, 3, 4 и N ям. Показано, что возможна объемная оптимальная генерация структуры из N ям с КПД близким к единице, малым отражением и линейной зависимостью мощности от тока накачки. Для структур с четным числом ям энергия поступающих электронов должна просто совпадать с резонансной при любых полях, т.е. подстройка энергии, необходимая в структуре из одной ямы [6, 7], не требуется. Найдены универсальные соотношения для параметров N-ямной структуры, обеспечивающие выполнение условий резонанса одновременно во всех ямах.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 дано описание модели, приведено установившееся решение нестационарного уравнения Шредингера, а также выведены граничные условия и выражения для токов. Раздел 3 посвящен одноямной структуре, в нем получены результаты, используемые в дальнейшем. В разд. 4 найдены волновые функции N-ямной структуры, справедливые как для слабых, так и для сильных полей. Детальный анализ двухъямной структуры выполнен в разд. 5, 6, а трехъямной — в разд. 7. Структуры с четным числом ям  $N \geq 4$  анализируются в разд. 8. Анализ условий резонанса посвящено Приложение.

**2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Рассмотрим следующую модель одномерной  $N$ -ямной структуры (см. рисунок), являющуюся обобщением моделей, описанных в работах [7, 10]. На рисунке приведена схема структуры, представляющей набор  $\delta$ -функциональных барьеров, расположенных в точках  $x = an, n = -1, 0, 1, \dots, N - 1$ . Параметры квантовых ям выбраны так, что энергии двух нижних уровней изолированной ямы,  $\varepsilon_{2R}$  и  $\varepsilon_{1R}$ , различаются на величину, примерно равную частоте электромагнитного поля  $\omega$  ( $\hbar = 1$ ), т. е.  $\varepsilon_{2R} - \varepsilon_{1R} = \omega$ . Энергия  $n$ -й ямы сдвинута за счет внешнего постоянного электрического поля относительно соседней  $(n - 1)$ -й ямы на величину  $E_0$ , равную  $\omega$ . При этом энергия нижнего уровня  $(n - 1)$ -й ямы,  $\varepsilon_{1R}^{(n-1)}$ , совпадает с энергией верхнего уровня  $n$ -й ямы,  $\varepsilon_{2R}^{(n)}$ . Стационарный поток электронов с плотностью, пропорциональной  $q^2$ , и энергией  $\varepsilon$ , примерно равной  $\varepsilon_{2R}^{(1)}$ , подводится к системе слева ( $x = -\infty$ ).

Электромагнитное поле, которое предполагается классическим,

$$E_x(z, t) = E \sin(kz) \cos(\omega t + \varphi),$$

излучается при переходах электронов с уровней «2» на уровни «1» квантовых ям. Мы предполагаем, что поле поляризовано перпендикулярно плоскости ямы (т. е. вдоль оси  $x$ ), в то время как волновой вектор направлен в плоскости (вдоль оси  $z$ ). Оптический резонатор длиной  $L$  выделяет моды. Здесь мы ограничимся рассмотрением одномодовой генерации. Уравнения для стационарных амплитуды  $E$  и фазы  $\varphi$  (частоты  $\omega$ ) могут быть записаны в форме [5]

$$\frac{E}{2\tau_0} = -\frac{2\pi}{\kappa} J_c^{(N)}, \tag{1}$$

$$(\omega - \Omega)E = -\frac{2\pi}{\kappa} J_s(N), \tag{2}$$

$$J_{c,s}^{(N)} = \frac{1}{Na} \int_{-a}^{(N-1)a} dx J_{c,s}(x), \tag{3}$$

где  $J_c$  и  $J_s$  — приведенные токи поляризации (совпадающий по фазе с полем,  $J_c$ , и сдвинутый на  $\pi/2$  по отношению к полю,  $J_s$ ). Токи  $J_c$  и  $J_s$  описывают переходы между уровнями. Здесь  $\tau_0$  — время жизни фотона в резонаторе,  $\kappa$  — диэлектрическая постоянная,  $\Omega$  — собственная частота резонатора,  $c$  — скорость света (далее  $c = 1$ ).

Токи  $J_c(x)$  и  $J_s(x)$  находятся с помощью известного выражения

$$J(x, t) = -ie \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \text{c.c.} \right), \tag{4}$$

где волновая функция системы  $\Psi(x, t)$  подчиняется уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x)\Psi + \hat{V}(x, t)\Psi. \tag{5}$$

Здесь

$$U(x) = \alpha_2 \delta(x + a) + \sum_{n=0}^N \alpha \delta(x - an) + \alpha_1 \delta(x - a(N - 1)) - E_0 \varphi(x), \tag{6}$$

$$\varphi(x) = \sum_n \Theta(x - (n - 1)a), \tag{7}$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$\alpha_j$  — мощности барьеров, причем  $\alpha_2$  — левой ямы,  $\alpha_1$  — крайней правой,  $\alpha$  — внутренних ям,  $2m = \hbar = 1$ . Последний член в уравнении (5),

$$\hat{V}(x, t) = 2eiA_x \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

описывает взаимодействие электронов с электромагнитным полем,  $A_x$  — вектор-потенциал в кулоновской калибровке, который отличен от нуля в области наноструктуры. Выражая  $A_x$  через амплитуду поля, перепишем последний член в форме

$$\hat{V}\Psi = V(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad V = -\frac{eE}{\omega}. \tag{8}$$

Следует отметить, что в выражении (8) мы опустили квадратичное по  $A_x$  слагаемое. Это приближение, которое обычно используется в теории лазеров, справедливо также и здесь, если мал параметр

$$\frac{V}{p} = \frac{eE}{p\omega} \ll 1,$$

где  $p$  — импульс электрона. Уравнение (5) необходимо дополнить граничными условиями. Конкретный вид граничных условий будет дан ниже после отыскания решения для  $\Psi(x, t)$ .

Следуя [6], ищем установившееся стационарное решение уравнения (5) в форме

$$\Psi(x, t) = \sum_n \sum_m \exp[-it(\varepsilon + m\omega - E_0(n + 1))] \times \psi_{nm}(N, x), \tag{9}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Функции  $\psi_{nm}(x, N)$  описывают состояния с квазиэнергиями  $\varepsilon + m\omega$  в  $n$ -й яме и удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$[\varepsilon + m\omega - E_0(n + 1)] \psi_{nm} + \frac{d^2\psi_m}{dx^2} = = V \left[ \frac{d\psi_{n,m-1}}{dx} - \frac{d\psi_{n,m+1}}{dx} \right]. \quad (10)$$

Хорошо известно, что основной вклад в генерацию лазера вносят два резонансных уровня, разность энергий которых равна частоте  $\omega$ . В рассматриваемом случае для  $n$ -й ямы это верхний уровень с энергией  $\varepsilon_{2R}^{(n)}$  и нижний уровень с энергией  $\varepsilon_{1R}^{(n)}$ . Им соответствуют волновые функции  $\psi_{n2}(x)$  и  $\psi_{n1}(x)$ , так что волновая функция (9) сводится к двум слагаемым в каждой яме:

$$\Psi(x, t) = \psi_{n2}(x) \exp[-it(\varepsilon - E_0(n - 1))] + + \psi_{n1}(x) \exp[-it(\varepsilon - \omega - E_0(n - 1))], \quad (11)$$

$(n - 2)a \leq x \leq (n - 1)a, \quad 1 \leq n \leq N.$

Функции  $\psi_{n2}$  и  $\psi_{n1}$  удовлетворяют системе уравнений

$$[\varepsilon - E_0(n - 1)] \psi_{n2} + \frac{d^2\psi_{n2}}{dx^2} = V \frac{d\psi_{n1}}{dx}, \quad (12)$$

$$[\varepsilon - \omega - E_0(n - 1)] \psi_{n1} + \frac{d^2\psi_{n1}}{dx^2} = -V \frac{d\psi_{n2}}{dx} \quad (13)$$

со следующими граничными условиями (см. [6]):

$$\psi_{12}(-a) \left( 1 - \frac{\alpha_2}{ip_2} \right) + \frac{1}{ip_2} \frac{d\psi_{12}(-a)}{dx} = q,$$

$$\psi_{12}(0) = 0, \quad \psi_{11}(-a) = 0, \quad \psi_{22}(a) = 0,$$

$$\frac{d\psi_{22}(0)}{dx} - \frac{d\psi_{11}(0)}{dx} = \alpha\psi_{11}(0),$$

.....

$$\psi_{N1}((N - 2)a) = 0, \quad \psi_{N2}((N - 1)a) = 0, \quad (14)$$

$$\psi_{N1}((N - 1)a) \left( 1 - \frac{\alpha_1}{ip_1} \right) - - \frac{1}{ip_1} \frac{d\psi_{N1}((N - 1)a)}{dx} = 0,$$

$$\frac{d\psi_{N2}((N - 2)a)}{dx} - \frac{d\psi_{N-1,1}((N - 2)a)}{dx} = = \alpha\psi_{N-1,1}((N - 2)a).$$

Граничные условия описывают поток электронов из  $x = -\infty$ , их отражение, уход на  $x = \infty$ , а также условия непрерывности волновых функций и скачок их производных на границах квантовых ям.

Уравнения (12), (13) и граничные условия (14) при  $N = 1$  переходят в соответствующие для одной ямы [7]. Заметим, что граничные условия запрещают уход электронов с уровней внутренних ям, нижнего уровня первой ямы и верхнего уровня последней ямы. Такая ситуация оптимизирует генерацию и реализуется на практике.

Используя вид волновой функции (11), ток (4) можно выразить через функции  $\psi_{nm}(x)$ :

$$J_c(N, x) = \sum_{n=1}^N J_{nc}(x), \quad (15)$$

$$J_{nc}(x) = -ie \left[ \left( \psi_{n2}^* \frac{d\psi_{n1}}{dx} + \psi_{n1}^* \frac{d\psi_{n2}}{dx} \right) - \text{c.c.} \right].$$

### 3. ОДНОЯМНАЯ СТРУКТУРА

Общая система уравнений и граничных условий, приведенная в разд. 2, при  $N = 1$  переходит в систему для одной ямы:

$$\varepsilon\psi_2 + \psi_2'' = V\psi_1', \quad (\varepsilon - \omega)\psi_1 + \psi_1'' = -V\psi_2', \quad (16)$$

$$\psi_2 \equiv \psi_{12}, \quad \psi_1 \equiv \psi_{11}, \quad \psi' \equiv \frac{d\psi}{dx},$$

$$\psi_2(-a) \left( 1 - \frac{\alpha_2}{ip_2} \right) + \frac{\psi_2'(-a)}{ip_2} = q, \quad \psi_2(0) = 0, \quad (17)$$

$$\psi_1(-a) = 0, \quad \psi_1(0) \left( 1 - \frac{\alpha_1}{ip_1} \right) - \frac{\psi_1'(0)}{ip_1} = 0.$$

Следуя [6], найдем точное решение системы (16), (17) без теории возмущений по полю. Параметр сильного поля будет выяснен ниже.

Решение (16) ищем в форме

$$\psi_1 = A_1 e^{\gamma x}, \quad \psi_2 = A_2 e^{\gamma x}. \quad (18)$$

Собственные значения  $\gamma$  удовлетворяют уравнению

$$\gamma^4 + 2\gamma^2 \left( \varepsilon + \frac{V^2 - \omega}{2} \right) + \varepsilon^2 - \omega\varepsilon = 0$$

и равны

$$\gamma_{1,2} = \pm i \sqrt{\varepsilon + \frac{V^2 - \omega}{2} - \sqrt{\left( \frac{V^2 - \omega}{2} \right)^2 + \varepsilon V^2}}, \quad (19)$$

$$\gamma_{3,4} = \pm i \sqrt{\varepsilon + \frac{V^2 - \omega}{2} + \sqrt{\left( \frac{V^2 - \omega}{2} \right)^2 + \varepsilon V^2}}.$$

Общее решение уравнений (16) имеет вид

$$\psi_l(x) = \sum_{j=1}^4 A_l^j \exp(\gamma_j x), \quad l = 1, 2. \quad (20)$$

Коэффициенты  $A_1^j$  и  $A_2^j$  связаны соотношением, которое следует из уравнения (16),

$$A_1^j = \varepsilon_j A_2^j, \quad \varepsilon_j = -\frac{\gamma_j V}{\varepsilon - \omega + \gamma_j^2}. \quad (21)$$

Подставляя  $\psi_l$  из (20) и  $A_1^j$  из (21) в граничные условия (17), приходим к системе алгебраических уравнений для коэффициентов:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N A_2^j \exp(-\gamma_j a)(1 - \beta_j) &= q, & \sum_{j=1}^4 A_2^j &= 0, \\ \sum_{j=1}^N \varepsilon_j A_2^j \exp(-\gamma_j a) &= 0, & & \\ \sum_{j=1}^4 \varepsilon_j A_2^j (1 - \tilde{\beta}_j) &= 0, & & \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_j &= \frac{\alpha_2 - \gamma_j}{ip_2}, & \tilde{\beta}_j &= \frac{\alpha_1 + \gamma_j}{ip_1}, \\ p_2^2 &= \varepsilon, & p_1^2 &= \varepsilon - \omega. \end{aligned}$$

Решение системы (22) может быть записано в форме

$$A_2^{(j)} = \frac{2q}{\Delta_1(1)} \sum_{k \neq l \neq j} (-1)^{k+l+1} \varepsilon_k \varepsilon_l \tilde{\Delta}_{kl}. \quad (23)$$

Здесь  $\Delta_1(1)$  — определитель системы (22),

$$\Delta_1(1) = \sum_{i \neq j \neq k \neq l} (-1)^{i+j} \tilde{\Delta}_{ij} \Delta_{kl}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{ij} &= \exp(\gamma_j a) (1 - \tilde{\beta}_j) - \exp(\gamma_i a) (1 - \tilde{\beta}_i), \\ \Delta_{ij} &= \exp(-\gamma_j a) (1 - \beta_j) - \exp(-\gamma_i a) (1 - \beta_i). \end{aligned} \quad (25)$$

Выражения для  $\gamma_j$  и  $\varepsilon_j$  можно упростить, если учесть малость отношения  $V/p$ :

$$\gamma_{1,2} \approx \pm ip_2 \left(1 + \frac{V^2}{2\omega}\right), \quad \gamma_{3,4} \approx \pm ip_1 \left(1 - \frac{V^2}{2\omega}\right), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &\approx \mp \frac{i\omega}{Vp_1}, & \varepsilon_{3,4} &\approx \pm \frac{iVp_2}{\omega}, & \varepsilon_1 \varepsilon_2 &= \frac{2}{\tilde{V}^2}, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_3 &\approx \frac{p_2}{p_1}, & \tilde{V}^2 &= \frac{2V^2 p_1^2}{\omega^2} \ll 1. \end{aligned} \quad (27)$$

Эти результаты справедливы также для  $N$ -ямной структуры и будут использоваться в дальнейшем. Еще одно общее для любых  $N$  неравенство далее будет предполагаться выполненным:

$$\frac{\alpha_j}{p_j} \gg 1. \quad (28)$$

Оно соответствует малости ширины резонансного уровня  $\Gamma_j$  по сравнению с резонансной энергией  $\varepsilon_{jR}$ . Известно, что именно при выполнении неравенств (28) резонансное туннелирование наиболее ярко проявляет свои замечательные свойства.

Как показано в работе [6], определитель (24) и коэффициенты  $A_m^j$  (23) можно представить в виде разложения по  $\tilde{V}^2$ . Опуская члены порядка  $\tilde{V} \ll 1$ ,  $\tilde{V}^2 \alpha/p \ll 1$ , приходим для  $\Delta_1(1)$  к выражению

$$\begin{aligned} \Delta_1(1) &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \left( \tilde{\Delta}_{12} \Delta_{34} - \tilde{V}^2 \frac{8\alpha_1 \alpha_2}{p_1^2} \right) = \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(p_1 p_2)^2} \tilde{\Delta}_1(1), \\ \tilde{\Delta}_1(1) &= \lambda^2 - (\xi + i\Gamma_1)(\xi + i\Gamma_2), \\ \lambda^2 &= \frac{16p_1 p_2 \tilde{V}^2}{a^2}, \quad \Gamma_j = \frac{2p_j^3}{a\alpha_j^2}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\varepsilon_{jR} = p_{jR}^2, \quad \xi = \varepsilon - \varepsilon_{2R},$$

$$p_{1R} = \frac{\pi\alpha_1}{1 + \alpha_1 a}, \quad p_{2R} = \frac{2\pi\alpha_2}{1 + \alpha_2 a}.$$

Легко видеть из (29), что электромагнитное поле начинает существенно влиять на резонансное туннелирование, если

$$\lambda^2 > \Gamma_1 \Gamma_2 \quad \text{или} \quad \tilde{V}^2 > \frac{p_1^2 p_2^2}{2\alpha_1^2 \alpha_2^2}. \quad (30)$$

Так как  $\alpha/p \gg 1$ , условие (30) выполняется одновременно с неравенством  $\tilde{V} \ll 1$ . Мы будем называть поле, которое удовлетворяет условию (30), сильным полем.

Полагая малым отношение  $\tilde{V}^2 \alpha/p$ , получим из (23) коэффициенты  $A_2^{(j)}$ :

$$\begin{aligned} A_2^{(3)} &= -A_2^{(4)} = \frac{2q}{\Delta_1(1)} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \tilde{\Delta}_{12}, \\ A_2^{(1)} &= A_2^{(2)} = \frac{8qp_2 i\alpha_1}{\Delta_1(1)p_1^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

С помощью (32), (20) и (15) найдем ток (3):

$$\begin{aligned} J_c(1) &= -4ie\varepsilon_1 M_{12} K(1), \\ K(1) &= \left[ A_2^{(1)}(1) A_2^{(3)}(1) + \text{c.c.} \right] = \\ &= \frac{(4q)^2 p_2 \alpha_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 2 \operatorname{Im} \tilde{\Delta}_{12}}{p_1^2 |\Delta_1(1)|^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{1}{a} \int_0^a dx [p_1 \sin(p_2 x) \cos(p_1 x) - \\ &\quad - p_2 \sin(p_1 x) \cos(p_2 x)] = \frac{8}{3a}. \end{aligned}$$



$$\Delta(N) = -\Delta(1)D(N) + \underline{\Delta}(1)\Pi(N). \quad (44)$$

$$\Pi(n) = -\tilde{\Delta}D(n-1) + \tilde{\underline{\Delta}}\Pi(n-1), \quad n \geq 3. \quad (46)$$

Определители  $D(N)$  и  $\Pi(N)$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

Остальные «элементарные» определители имеют вид

$$D(n) = -\Delta D(n-1) + \underline{\Delta}\Pi(n-1), \quad (45)$$

$$\Delta(1) = \begin{vmatrix} m_1 e^{-\gamma_1 a} & m_2 e^{-\gamma_2 a} & m_3 e^{-\gamma_3 a} & m_4 e^{-\gamma_4 a} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1 e^{-\gamma_1 a} & \varepsilon_2 e^{-\gamma_2 a} & \varepsilon_3 e^{-\gamma_3 a} & \varepsilon_4 e^{-\gamma_4 a} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{vmatrix}, \quad (47)$$

$$\underline{\Delta}(1) = \begin{vmatrix} m_1 e^{-\gamma_1 a} & m_2 e^{-\gamma_2 a} & m_3 e^{-\gamma_3 a} & m_4 e^{-\gamma_4 a} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1 e^{-\gamma_1 a} & \varepsilon_2 e^{-\gamma_2 a} & \varepsilon_3 e^{-\gamma_3 a} & \varepsilon_4 e^{-\gamma_4 a} \\ \varepsilon_1 n_1 & \varepsilon_2 n_2 & \varepsilon_3 n_3 & \varepsilon_4 n_4 \end{vmatrix}, \quad (48)$$

$$\Delta(2) = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ e^{\gamma_1 a} & e^{\gamma_2 a} & e^{\gamma_3 a} & e^{\gamma_4 a} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_1 e^{\gamma_1 a} & \varepsilon_2 e^{\gamma_2 a} & \varepsilon_3 e^{\gamma_3 a} & \varepsilon_4 e^{\gamma_4 a} \end{vmatrix}, \quad (49)$$

$$\underline{\Delta}(2) = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ e^{\gamma_1 a} & e^{\gamma_2 a} & e^{\gamma_3 a} & e^{\gamma_4 a} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_1 n_1 e^{\gamma_1 a} & \varepsilon_2 n_2 e^{\gamma_2 a} & \varepsilon_3 n_3 e^{\gamma_3 a} & \varepsilon_4 n_4 e^{\gamma_4 a} \end{vmatrix}, \quad (50)$$

$$\tilde{\underline{\Delta}}(2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\gamma_1 a} & e^{\gamma_2 a} & e^{\gamma_3 a} & e^{\gamma_4 a} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_1 n_1 e^{\gamma_1 a} & \varepsilon_2 n_2 e^{\gamma_2 a} & \varepsilon_3 n_3 e^{\gamma_3 a} & \varepsilon_4 n_4 e^{\gamma_4 a} \end{vmatrix}, \quad (51)$$

$$\tilde{\Delta}(2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\gamma_1 a} & e^{\gamma_2 a} & e^{\gamma_3 a} & e^{\gamma_4 a} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_1 e^{\gamma_1 a} & \varepsilon_2 e^{\gamma_2 a} & \varepsilon_3 e^{\gamma_3 a} & \varepsilon_4 e^{\gamma_4 a} \end{vmatrix}, \quad (52)$$

$$D(2) \equiv D = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ e^{\gamma_1 a} & e^{\gamma_2 a} & e^{\gamma_3 a} & e^{\gamma_4 a} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \tilde{\varepsilon}_1 & \tilde{\varepsilon}_2 & \tilde{\varepsilon}_3 & \tilde{\varepsilon}_4 \end{vmatrix}, \quad (53)$$

$$\Pi(2) \equiv \Pi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\gamma_1 a} & e^{\gamma_2 a} & e^{\gamma_3 a} & e^{\gamma_4 a} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \tilde{\varepsilon}_1 & \tilde{\varepsilon}_2 & \tilde{\varepsilon}_3 & \tilde{\varepsilon}_4 \end{vmatrix}. \quad (54)$$

Здесь введены следующие обозначения для определителей:  $\Delta(1)$  — для первой ямы,  $\underline{\Delta}(1)$  — с другой нижней строкой;  $\Delta(2) = \Delta(3) = \dots \Delta(n) = \Delta$  — определители внутренних ям ( $2 < n \leq N$ ), причем  $\underline{\Delta}$ ,  $\tilde{\Delta}$ ,  $\tilde{\tilde{\Delta}}$  — с другими, соответственно, нижней, верхней, нижней и верхней строками. Определители  $D(2)$  и  $\Pi(2)$  относятся к последней яме структуры. Мы привели  $A_{12}^j(N)$  только для первой ямы и в предположении одинаковых внутренних ям, чтобы избежать громоздких формул. Этих коэффициентов достаточно для вычисления приведенного тока в первой яме. Находить токи в остальных ямах нет необходимости, так как в рассматриваемой модели и для установившегося решения (9) они равны. Тем не менее для двухъямной структуры доказательство будет проведено непосредственным расчетом.

Выражения для определителей и коэффициентов можно упростить, если учесть малость параметров  $\tilde{V}$ ,  $p/\alpha$  и  $\tilde{V}^2\alpha/p$ :

$$\begin{aligned} D(2) &\equiv D = \varepsilon_1\varepsilon_2\tilde{\Delta}_{12}\delta_{34}, \\ \Pi(2) &\equiv \Pi \approx \varepsilon_1\varepsilon_2 \left( \tilde{\Delta}_{34}\tilde{\Gamma}_{12} - i\tilde{V}^2\frac{8\alpha_2}{p_1} \right), \\ \Delta(1) &\approx \varepsilon_1\varepsilon_2 \left( \Delta_{34}\Gamma_{12} - i\tilde{V}^2\frac{8\alpha_2}{p_1} \right), \\ \underline{\Delta}(1) &\approx \varepsilon_1\varepsilon_2 \left( \Delta_{34}\Delta_{12}^\alpha - i\tilde{V}^2\frac{8\alpha\alpha_2}{p_1} \right), \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} \Delta &\approx \varepsilon_1\varepsilon_2\tilde{\Gamma}_{12}\delta_{34}, \\ \tilde{\Delta} &\approx \varepsilon_1\varepsilon_2 \left( \tilde{\Gamma}_{12}\tilde{\Gamma}_{34} - \tilde{V}^2\frac{8p_2}{p_1} \right), \\ \underline{\Delta} &\approx \varepsilon_1\varepsilon_2\tilde{\Delta}_{12}^\alpha\delta_{34}, \\ \tilde{\tilde{\Delta}} &\approx \varepsilon_1\varepsilon_2 \left( \tilde{\Delta}_{12}^\alpha\tilde{\Gamma}_{34} - \tilde{V}^2\frac{8\alpha p_2}{p_1} \right), \\ d_{1,2} &= \mp\frac{4p_2}{p_1}, \quad P_{1,2} = \mp\frac{4\alpha p_2}{p_1}, \\ d_{3,4} &= \varepsilon_1\varepsilon_2 \left( \Gamma_{12} \pm \tilde{V}^2\frac{2p_2}{p_1} \right), \\ P_{3,4} &= \varepsilon_1\varepsilon_2 \left( \tilde{\Delta}_{12}^\alpha \pm \tilde{V}^2\frac{2\alpha p_2}{p_1} \right). \end{aligned} \tag{56}$$

Здесь введены следующие определения:

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}^\alpha &= n_i \exp(-\gamma_j a) - n_j \exp(-\gamma_i a), \\ \tilde{\Delta}_{ij}^\alpha &= n_j \exp(\gamma_j a) - n_i \exp(\gamma_i a), \\ \delta_{ij} &= \gamma_i \exp(\gamma_j a) - \gamma_j \exp(\gamma_i a), \\ \Gamma_{ij} &= \exp(-\gamma_j a) - \exp(-\gamma_i a) = \tilde{\Gamma}_{ij}^*, \\ \tilde{\varepsilon}_j &= \varepsilon_j \tilde{m}_j \exp(\gamma_j a), \\ m_j &= 1 - \beta_j, \quad \tilde{m}_j = 1 - \tilde{\beta}_j, \\ n_j &= \alpha + \gamma_j. \end{aligned} \tag{57}$$

Используя формулы (55), (56), можно получить упрощенные выражения для остальных определителей и коэффициентов  $A_{mn}^j$   $N$ -ямной структуры.

### 5. ДВУХЪЯМНАЯ СТРУКТУРА

Многие принципиальные особенности многоямной структуры проявляются уже при  $N = 2$ . Ввиду относительной простоты проанализируем ее детально. Волновые функции (38) для  $N = 2$  принимают вид

$$\begin{aligned} \psi_{k2}(2) &= \sum_{j=1}^4 A_{k2}^j(2) \exp(\gamma_j x), \\ \psi_{k1}(2) &= \sum_{j=1}^4 A_{k2}^j(2) \varepsilon_j \exp(\gamma_j x), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{58}$$

Здесь  $\psi_{k2}(2)$  ( $\psi_{k1}(2)$ ) — волновая функция  $k$ -й ямы ( $k = 1, 2$ ) верхнего уровня (нижнего уровня) двухъямной структуры. Соответствующие коэффициенты  $A_{12}^j(2)$  и определитель  $\Delta(2)$  согласно (41)–(44) равны

$$A_{12}^j(2) = (-1)^{1+j} \frac{2q}{\Delta(2)} (d_j D - P_j \Pi), \tag{59}$$

$$\Delta(2) = -\Delta(1)D + \underline{\Delta}(1)\Pi. \tag{60}$$

Используя приближенные выражения для  $D$ ,  $\Pi$ ,  $\Delta(1)$  и  $\underline{\Delta}(1)$  (см. (55), (56)), получаем

$$A_{12}^{(1)}(2) = A_{12}^{(2)}(2) = -\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{2q}{\Delta(2)} \frac{8ip_2}{p_1} \tilde{\Delta}_{12}\Phi_2, \tag{61}$$

$$\begin{aligned} A_{12}^{(3)}(2) &= -A_{12}^{(4)}(2) = \\ &= -(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 \frac{2q}{\Delta(2)} \left( \Phi_0 \tilde{\Delta}_{12} + \tilde{V}^2 \frac{16p_2\alpha_1}{p_1^2} \Phi_1 \right), \end{aligned} \tag{62}$$

$$\Delta(2) = (\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 \left( \tilde{\Delta}_{12}\Delta_{34}\Phi_0 - \tilde{V}^2 \frac{16p_2}{p_1} \Phi_4 \right). \tag{63}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \Delta_{12}^\alpha \tilde{\Gamma}_{34} - \delta_{34}\Gamma_{12} = 4 [\alpha \sin(p_1 a) \cos(p_2 a) + \\ &+ p_1 \cos(p_1 a) \sin(p_2 a) + p_2 \cos(p_2 a) \sin(p_1 a)], \end{aligned} \tag{64}$$



$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \alpha \sin(p_1 a) + p_1 \cos(p_1 a), \\ \Phi_2 &= \alpha \sin(p_2 a) + p_2 \cos(p_2 a), \\ \Phi_4 &= \frac{\alpha_2}{p_2} \tilde{\Delta}_{12} \Phi_2 - \frac{\alpha_1}{p_1} \Delta_{34} \Phi_1.\end{aligned}\quad (65)$$

Волновые функции первой ямы с учетом (61) и (62) принимают вид

$$\begin{aligned}\psi_{12}(2) &= 2i A_{12}^{(3)}(2) \sin(p_2 x), \\ \psi_{11}(2) &= 2i \varepsilon_1 A_{12}^{(1)}(2) \sin(p_1 x).\end{aligned}\quad (66)$$

Подставляя их в (15), найдем приведенный ток первой ямы:

$$\begin{aligned}J_{1c}(2) &= \frac{1}{a} \int_{-a}^0 J_{1c}(2, x) dx = \\ &= -4i \varepsilon_1 M_{12} \left[ A_{12}^{(1)*}(2) A_{12}^{(3)}(2) + \text{c.c.} \right].\end{aligned}\quad (67)$$

Учитывая (61) и (62), приходим к выражению

$$\begin{aligned}J_{1c}(2) &= 4i \varepsilon_1 M_{12} (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^3 \frac{8Q \Phi_2}{|\Delta(2)|^2 p_1} \times \\ &\times \left[ \left( i \left| \tilde{\Delta}_{12} \right| \Phi_0 + \tilde{V}^2 \frac{16 \alpha_1 p_2 \Phi_1 i \tilde{\Delta}_{12}^*}{p_1} \right) + \text{c.c.} \right].\end{aligned}\quad (68)$$

Нетрудно видеть, что первое слагаемое в (68) исчезает и вклад вносит только второе, которое пропорционально квадрату поля  $\tilde{V}^2$  и мнимой части  $\tilde{\Delta}_{12}$ ,

$$\begin{aligned}J_{1c}(2) &= \\ &= - \frac{\varepsilon \varepsilon_1 M_{12} (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 16 \alpha_1 Q \tilde{\Phi} \left( \tilde{\Delta}_{12}^* - \tilde{\Delta}_{12} \right)}{p_1 |\Delta(2)|^2}, \\ &\quad \tilde{\Phi} = \frac{64 p_2}{p_1} \Phi_1 \Phi_2.\end{aligned}\quad (69)$$

Этот принципиально важный результат означает, что затухание, вызывающее излучательные междуровневые переходы в первой яме, наводится током второй (правой) ямы и пропорционально  $\tilde{V}^2$ . Результат сохранится для любого числа ям  $N \geq 2$ , только затухание будет пропорционально  $\tilde{V}^{2(N-1)}$ . Поскольку в когерентной системе отсутствуют диссипативные процессы, затухание крайней правой ямы, «переносимое» током, является причиной генерации. Именно поэтому для описания когерентных систем требуется корректный учет граничных условий.

Приступим к анализу тока  $J_{c1}(2)$  первой ямы двухъямной структуры. Ключевой величиной является резонансный определитель  $\Delta(2)$ , определяемый (63). Принципиальное отличие  $\Delta(2)$  от  $\Delta(1)$

(см. (29)) состоит в появлении нового элементарного резонансного определителя  $\Phi_0$  (64).

Равенство

$$\Phi_0 = 0 \quad (70)$$

дает уравнение для спектра двух туннельно связанных квантовых ям. Уравнение (70) имеет два решения: антисимметричное, с энергией, не испытывающей сдвига, и симметричное. Энергия последнего сдвигается вниз и уровни расщепляются (см. Приложение). Верхний уровень в первой яме и нижний во второй также смещаются вниз по энергии из-за конечности мощности крайних барьеров  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$ . Их сдвиг определяется уравнениями

$$\text{Re } \tilde{\Delta}_{12} = 0, \quad \text{Re } \Delta_{34} = 0. \quad (71)$$

Очевидно, что для выполнения условий резонанса,

$$\varepsilon_{2R}^{(1)} - \varepsilon_{1R}^{(1)} = \omega, \quad \varepsilon_{2R}^{(2)} - \varepsilon_{1R}^{(2)} = \omega, \quad (72)$$

необходимо, чтобы уровни сдвигались одинаково. Отсюда, в частности, следует, что строгий резонанс возможен только на симметричном решении уравнения (70). Как будет показано ниже (см. Приложение), можно добиться одновременного выполнения условий резонанса (72) и уравнений (70), (71), если удовлетворяются следующие соотношения:

$$\alpha_2 = \frac{4\alpha}{5}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{5}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \quad (73)$$

при любых  $\alpha$ . Соотношения сохраняются для многоямных структур, причем в этом случае  $\alpha_2$  — мощность первой ямы,  $\alpha_1$  — последней.

Считая соотношения (73) и (72) выполненными, а энергию  $\varepsilon$  подводимых электронов близкой к резонансной  $\varepsilon_{2R}$ , можно представить резонансные определители и  $\Phi_k$  в виде

$$\tilde{\Delta}_{12} = -\frac{a\alpha_1}{p_1^2} (\xi + i\Gamma_1), \quad \Delta_{34} = -\frac{a\alpha_2}{p_2^2} (\xi + i\Gamma_2), \quad (74)$$

$$\Phi_0 \approx 5\xi, \quad \xi = \varepsilon - \varepsilon_{2R}, \quad (75)$$

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= 2p_2, \quad \Phi_2 = -\frac{p_1}{2}, \\ \Phi_4 &= \frac{5\alpha_1^2}{p_1^2} \left( \xi + \frac{3}{5}\Gamma_1 \right),\end{aligned}\quad (76)$$

$$\Gamma_j = \frac{2p_j^3}{a\alpha_j^2}, \quad \Gamma_2 \approx \frac{\Gamma_1}{2}.$$

В (75), (76) были опущены члены порядка  $\xi/\delta\varepsilon$ ;  $\delta\varepsilon \approx p^2/\alpha a$  — сдвиг энергии, значительно превосходящий ширину уровня  $\Gamma$ . Таким образом, формулы

(74)–(76) справедливы для  $\xi$ , находящихся в интервале  $0 < \xi < \delta\varepsilon$ .

В этом приближении ток первой ямы (69) принимает вид

$$J_{1c}(2) = \tilde{V}^3 \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 Q \eta(2)}{\left| \tilde{\Delta}(2, \xi) \right|^2}, \quad (77)$$

$$\eta(2) = 4e\sqrt{2} M_{12} \frac{64p_2^3}{25},$$

$$\Delta(2, \xi) = \frac{5(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 \alpha_1 \alpha_2}{p_1^2 p_2^2} \tilde{\Delta}(2, \xi),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(2, \xi) = & \\ = & \left[ \xi \left( \xi^2 - \lambda^2 - \frac{\Gamma_1^2}{2} \right) + i \frac{3\Gamma_1}{2} \left( \xi^2 - \frac{2}{5} \lambda^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (78)$$

Как следует из (77), зависимость тока от энергии электронов  $\xi$  (а следовательно, и поля лазера) определяется только квадратом модуля приведенного определителя  $\left| \tilde{\Delta}(2, \xi) \right|^2$ :

$$\begin{aligned} f(2, \xi) = \left| \tilde{\Delta}(2, \xi) \right|^2 = & \xi^2 \left( \xi^2 - \lambda^2 - \frac{\Gamma_1^2}{2} \right)^2 + \\ & + \frac{9\Gamma_1^2}{4} \left( \xi^2 - \frac{2}{5} \lambda^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (79)$$

Оптимальные значения энергии подводимых электронов  $\xi$  находятся из условия минимальности  $f(2, \xi)$  (или максимальной  $\lambda^2(\xi)$ ):

$$\begin{aligned} \frac{df(2, \xi)}{d\xi} = & \\ = 2\xi \left[ \left( \xi^2 - \lambda^2 - \frac{\Gamma_1^2}{2} \right)^2 + 2\xi^2 \left( \xi^2 - \lambda^2 - \frac{\Gamma_1^2}{2} \right) + \right. & \\ \left. + \frac{9}{2} \Gamma_1^2 \left( \xi^2 - \frac{2}{5} \lambda^2 \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (80)$$

Уравнение (80) имеет три решения:

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \xi_{2,3}^2 = \frac{1}{3} \left[ \left( 2\lambda^2 - \frac{5\Gamma_1^2}{4} \right) \mp \right. & \\ \left. \mp \sqrt{\lambda^4 - \frac{13\lambda^2 \Gamma_1^2}{5} + \frac{13\Gamma_1^4}{16}} \right], \end{aligned} \quad (81)$$

$$\xi_2^2 \approx \frac{\lambda^2}{3}, \quad \xi_3^2 \approx \lambda^2, \quad \lambda \gg \Gamma_1.$$

Решения  $\xi_1$  и  $\xi_3$  соответствуют минимуму  $f(2, \xi)$ , а  $\xi_2$  — максимуму  $f$ , причем

$$\begin{aligned} f(0) = \frac{9}{25} \Gamma_1^2 \lambda^4, \quad f(\lambda^2) = \frac{81}{100} \Gamma_1^2 \lambda^4, & \\ f\left(\frac{\lambda^2}{3}\right) \approx \frac{4}{27} \lambda^6. \end{aligned} \quad (82)$$

В отличие от одноямной структуры минимум  $f(2)$  при  $\xi_1 = 0$  реализуется при любых  $\lambda$ . Отметим, что этот минимум ниже, чем при  $\xi_3 \approx \lambda$ . Кроме того, он более удобен, так как не требует подстройки энергии электронов. Именно решение  $\xi_1 = 0$  и представляет наибольший интерес.

Соответствующие значения тока  $J_{1c}(2)$  для  $\xi_1 = 0$  и  $\xi_3 \approx \lambda$  равны

$$J_{1c}(2, \xi_1 = 0) = \frac{Qe2\sqrt{2} M_{12}}{9\tilde{V}} = \frac{9}{4} J_{1c}(2, \lambda). \quad (83)$$

Сравнивая ток первой ямы  $J_{1c}(2, 0)$  (83) с током одноямной структуры  $J_{1c}(1, \lambda)$  (33), видим, что они практически совпадают:

$$J_{1c}(2, 0) = \frac{8}{9} J_{1c}(1, \lambda). \quad (84)$$

Отметим, что решения  $\xi_1$  и  $\xi_3$  приводят к линейной зависимости мощности генерации от тока накачки, в то время как  $\xi_2$  — к корневой.

Найдем теперь волновые функции и ток второй ямы, что позволит доказать равенство токов первой и второй ям и рассчитать населенности уровней.

Коэффициенты  $A_{21}^{(j)}$  и  $A_{22}^{(j)}$  волновых функций  $\psi_{22}(2)$  и  $\psi_{21}(2)$  находим из уравнений (40) для  $N = 2$ . Приведем приближенные выражения с принятой выше точностью:

$$\begin{aligned} A_{22}^{(1)} = A_{22}^{(2)} \approx \frac{i(2q)D_2}{\Delta(2)} \frac{4\alpha_1 p_2}{p_1}, & \\ A_{22}^{(3,4)} = & \\ = -\frac{2qD_2}{\Delta(2)} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left\{ \tilde{\Delta}_{12} \exp(\gamma_{4,3} a) \pm i\tilde{V}^2 \frac{2\alpha_1 p_2}{p_1^2} \right\}, \end{aligned} \quad (85)$$

где матрица

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1 e^{\gamma_1 a} & \varepsilon_2 e^{\gamma_2 a} & \varepsilon_3 e^{\gamma_3 a} & \varepsilon_4 e^{\gamma_4 a} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_1 n_1 & \varepsilon_2 n_2 & \varepsilon_3 n_3 & \varepsilon_4 n_4 \end{vmatrix}. \quad (86)$$

Соответственно, волновые функции принимают вид

$$\begin{aligned} \psi_{22}(2, x) = -i \frac{8qD_2 \tilde{\Delta}_{12}}{\tilde{V}^2 \Delta(2)} \sin[p_2(x - a)], & \\ \psi_{21}(2, x) = -i \frac{8\alpha_1 p_2 2qD_2 \sqrt{2}}{\tilde{V} p_1^2 \Delta(2)} \sin(p_1 x). \end{aligned} \quad (87)$$

С их помощью находим приведенный ток во второй яме:

$$J_{2c}(2) = \frac{1}{a} \int_0^a dx J_{2c}(2, x) = -ie \frac{(2q)^2}{|\Delta(2)|^2} \times \frac{4\sqrt{2}|D_2|^2 8\alpha_1 p_2}{\tilde{V}^3 p_1^2} M_{12} (\tilde{\Delta}_{12}^* - \tilde{\Delta}_{12}). \quad (88)$$

Подставляя приближенное значение

$$D_2 \approx -\frac{8\sqrt{2}p_2}{\tilde{V}} \quad (89)$$

в (88), видим, что  $J_{2c}(2)$  совпадает с током в первой яме  $J_{1c}(2)$  (83). Таким образом, приведенный ток (3) двухъямной структуры равен приведенному току первой ямы  $J_c(2) = J_{1c}(2)$ . Поскольку согласно (84) токи  $J_{1c}(2, 0)$  и  $J_c(1, \lambda)$  совпадают (с точностью до множителя 8/9), поле, генерируемое двухъямной структурой при  $\xi = 0$ , дается формулой (36) (с  $\tilde{Q} \rightarrow (8/9)\tilde{Q}$ ). Полная мощность  $P(2)$ , естественно, удваивается:

$$P(2) = 2 \frac{2\tilde{Q}}{9}. \quad (90)$$

### 6. НАСЕЛЕННОСТИ УРОВНЕЙ И КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУХЪЯМНОЙ СТРУКТУРЫ

Представляет интерес сравнить населенности уровней  $n_{ij}$ ,

$$n_{ij} = \frac{1}{a} \int_0^a dx |\psi_{ij}|^2. \quad (91)$$

Вычисления дают для  $\xi_1 = 0$  следующие результаты:

$$n_{12} = \left(\frac{4\lambda}{\Gamma_1}\right)^2 n_{11}, \quad n_{22} = \left(\frac{\Gamma_1}{\lambda}\right)^2 n_{21}, \quad (92)$$

$$n_{12} = 4n_{21}, \quad n_{22} = 4n_{11}.$$

Видно, что взаимная населенность уровней в одной яме меняется с ростом поля длины волны  $\lambda$ . В то же время отношение населенностей верхнего уровня первой ямы и нижнего уровня второй ямы сохраняется. При  $\lambda \gg \Gamma_1$  имеем  $n_{12} \gg n_{11}$ , а  $n_{22} \ll n_{21}$ , т. е. в первой яме есть «инверсная» населенность, а во второй ситуация обратная. Отсюда следует, что для когерентной генерации не требуется условие инверсной населенности. Этот вывод подтверждается и при  $\xi_3 = \lambda$ . Действительно, в случае подстройки  $\xi = \lambda \gg \Gamma$  имеем равенство населенностей в каждой яме:

$$n_{12} = n_{11}, \quad n_{22} = n_{21}, \quad 4n_{11} = n_{22}. \quad (93)$$

Следует отметить, что двухъямная структура ведет себя при  $\xi = 0$  и  $\xi = \lambda$  аналогично одноямной при  $\xi = \lambda$  в том смысле, что отношение населенностей «крайних уровней» (верхнего уровня первой ямы и нижнего уровня второй ямы) не зависит от поля.

Ранее было показано для  $N = 1$  [7] (см. разд. 3), что оптимальные значения энергии  $\xi$  соответствуют резонансу наноструктуры в поле, при котором отражение от структуры становится минимальным. Найдем отражение от двухъямной структуры. Коэффициент отражения дается следующим выражением:

$$R = \left| \frac{\psi_{12}(2, -a)}{q} - 1 \right|^2. \quad (94)$$

Воспользовавшись для  $\psi_{12}(2, x)$  формулой (66), найдем коэффициент

$$R = \left| \frac{i\Gamma_1 \Phi_3}{5\tilde{\Delta}(2)} - 1 \right|^2, \quad (95)$$

$$\Phi_3 = -\frac{p_1^2}{\alpha_1} \left( \Phi_0 \tilde{\Delta}_{12} + \tilde{V}^2 \frac{64p_2}{p_1^2} \Phi_1 \right) = 5\xi(\xi + i\Gamma_1) - 4\lambda^2.$$

Коэффициент отражения в режимах  $\xi = 0$  и  $\xi^2 = \lambda^2$  равен, соответственно,

$$R(2, 0) = \frac{1}{9}, \quad R(2, \lambda) = \frac{49}{81}. \quad (96)$$

Отсюда следует, что режим с  $\xi = 0$  гораздо более эффективен (90%), чем режим с  $\xi = \lambda$  (40%).

Покажем, что закон сохранения числа прошедших и отраженных электронов соблюдается. Для этого найдем число электронов, совершающих межуровневый переход в первой яме:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^a dx \int_0^{2\pi/\omega} dt J_{1c}(2, x, t) E(t).$$

Оно оказывается при  $\xi = 0$  равным 8/9 подводимого к структуре потока, что вместе с отраженной долей (1/9) составляет единицу. Аналогичный закон сохранения имеет место и для  $\xi = \lambda$ .

### 7. ТРЕХЪЯМНАЯ СТРУКТУРА

Как будет показано ниже, свойства структур с четным и нечетным числом ям существенно различаются. В качестве простейшего примера нечетных  $N$  рассмотрим трехъямную структуру. Выражения

для коэффициентов первой ямы трехъямной структуры получаем из общих формул (41)–(44):

$$A_{12}^j(3) = (-1)^{1+j} \frac{2q}{\Delta(3)} [d_j D(3) - P_j \Pi(3)], \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \Delta(3) &= -\Delta(1)D(3) + \tilde{\Delta}(1)\Pi(3), \\ D(3) &= -\Delta D + \tilde{\Delta}\Pi, \quad \Pi(3) = -\tilde{\Delta}D + \tilde{\Delta}\Pi. \end{aligned} \quad (98)$$

Используя малость параметров  $\tilde{V}$ ,  $p/\alpha$  и  $\tilde{V}^2\alpha/p$  и приближенные выражения для  $\Delta$ ,  $D$ ,  $\Pi$ , получаем

$$\begin{aligned} D(3) &\approx -(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2\delta_{34} \left\{ \tilde{\Delta}_{12}\Phi_0 + \tilde{V}^2\tilde{\Delta}_{12}^{\alpha} \frac{8i\alpha_1 p_2}{p_1^2} \right\}, \\ \Pi(3) &\approx -(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 \left\{ \tilde{\Delta}_{12}\tilde{\Gamma}_{34}\Phi_0 + \tilde{V}^2 \frac{8ip_2}{p_1} \times \right. \\ &\times \left[ -2\tilde{\Delta}_{12}\Phi_2 + \frac{\alpha_1}{p_1}\tilde{\Delta}_{12}^{\alpha}\tilde{\Gamma}_{34} \right] - \tilde{V}^4 \frac{64i\alpha\alpha_1 p_2^2}{p_1^3} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (99)$$

С помощью этих выражений находим из (97)

$$\begin{aligned} A_{12}^{(3)}(3) &= -A_{12}^{(4)}(3) = \\ &= \frac{2q}{\Delta(3)} (\varepsilon_1\varepsilon_2)^3 \left\{ \tilde{\Delta}_{12}\Phi_0^2 + \tilde{V}^2 \frac{8ip_2}{p_1} \times \right. \\ &\times \left[ \tilde{\Delta}_{12}^{\alpha} \frac{\alpha_1\Phi_0}{p_1} - 2\tilde{\Delta}_{12}^{\alpha}\tilde{\Delta}_{12}\Phi_2 \right] - \tilde{V}^4 \frac{64i\alpha\alpha_1 p_2^2}{p_1^3} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} A_{12}^{(1)}(3) &= A_{12}^{(2)}(3) = \frac{2q}{\Delta(3)} (\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 \frac{4p_2}{p_1} \times \\ &\times \left\{ 2i\tilde{\Delta}_{12}\Phi_0\Phi_2 - \tilde{V}^2 \frac{16ip_2}{p_1}\Phi_2 \left[ \frac{2\alpha_1\Phi_1}{p_1} - \alpha\tilde{\Delta}_{12} \right] + \right. \\ &\left. + \tilde{V}^4 \frac{64i\alpha^2\alpha_1 p_2^2}{p_1^3} \right\}, \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \Delta(3) &= (\varepsilon_1\varepsilon_2)^3 \left\{ -\tilde{\Delta}_{12}\Delta_{34}\Phi_0^2 + \tilde{V}^2 \frac{16p_2}{p_1} \times \right. \\ &\times \left[ \Phi_0\Phi_4 - 2\tilde{\Delta}_{12}\Delta_{34}\Phi_1\Phi_2 \right] + \tilde{V}^4 \frac{4\alpha_1\alpha_2\tilde{\Phi}}{p_1^2} \left. \right\} = \\ &= (\varepsilon_1\varepsilon_2)^3 \frac{25\alpha_1\alpha_2}{p_1^2 p_2^2} \tilde{\Delta}(3), \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(3) &= -\xi^2(\xi + i\Gamma_1)(\xi + i\Gamma_2) + \\ &+ \lambda^2 \left( \frac{29}{25}\xi^2 + i\xi\tilde{\Gamma} \right) - \frac{4}{25}\lambda^4, \\ \tilde{\Gamma} &= \frac{3}{5}\Gamma_1 + \frac{4}{25}(\Gamma_1 + \Gamma_2). \end{aligned}$$

Отметим, что для трехъямной структуры необходимо удержать в  $\tilde{\Delta}(3)$  член четвертого порядка  $\tilde{V}^4$ .

Начнем с анализа резонансного определителя  $f(3) = \left| \tilde{\Delta}(3) \right|^2$ . Нетрудно показать, что  $f(3)$  имеет четыре экстремума  $\xi_i$  (приводим  $\xi_i$  для больших  $\xi$ ,  $\lambda \gg \Gamma$ ):

$$\xi_1^2 = 0, \quad \xi_2^2 = \frac{4}{25}\lambda^2, \quad \xi_3^2 = \frac{29}{50}\lambda^2, \quad \xi_4^2 = \lambda^2, \quad (103)$$

которые соответствуют максимумам при  $\xi_1$  и  $\xi_3$  и минимумам при  $\xi_2$  и  $\xi_4$ .

Таким образом, в трехъямной структуре решение  $\xi_1 = 0$  соответствует максимуму  $f(3)$ , а решение  $\xi_4 = \lambda$  — минимуму. Следовательно, трехъямная структура представляет собой комбинацию одноямной и двухъямной структур. Она ведет себя аналогично структуре с  $N = 1$  при  $\xi_1 = 0$  и  $\xi = \lambda$  и структуре с  $N = 2$  при  $\xi = \lambda$ .

Найдем ток первой ямы трехъямной структуры

$$\begin{aligned} J_{1c}(3) &= \frac{(2q)^2(\varepsilon_1\varepsilon_2)^5}{|\Delta(3)|^2 p_1} \left( 2i \left| \tilde{\Delta}_{12} \right|^2 \Phi_0^3 \Phi_2 + \text{c.c.} \right) + \\ &+ \tilde{V}^2 \Phi_0^2 \frac{32p_2\alpha_1\Phi_1\Phi_2}{p_1^2} i \left( \tilde{\Delta}_{12} - \tilde{\Delta}_{12}^* \right) + \\ &+ \tilde{V}^4 \Phi_2^2 \Phi_1^2 \alpha_1 i \left( \tilde{\Delta}_{12} - \tilde{\Delta}_{12}^* \right). \end{aligned} \quad (104)$$

Последнее слагаемое в (104) приведено при  $\xi = 0$ , так как при  $\xi \sim \lambda$  отброшенные члены пропорциональны  $\tilde{V}^6$ .

Как видно из (104), первое слагаемое равно нулю, как и для структуры с  $N = 2$ . Два последних пропорциональны  $\tilde{V}^4 \text{Im} \tilde{\Delta}_{12}$  (см. (68)). Действительно, при  $\xi = 0$ ,  $\Phi_0 = 0$  второе слагаемое равно нулю, а при  $\xi \sim \lambda$  оно дает  $\tilde{V}^4$ .

Решение  $\xi_1 = 0$ , соответствующее максимуму  $f(3)$ , не является оптимальным для  $N = 3$ . Действительно, подставляя  $\xi_1 = 0$  в выражение для тока (104), получаем

$$J_{1c}(3) \propto \frac{1}{\tilde{V}^3} \quad (105)$$

и, следовательно, корневую зависимость  $\tilde{V}^2 \propto Q^{1/2}$  (см. разд. 3), как и для одной ямы.

Оптимальным является решение  $\xi_4 = \lambda$ , при котором  $J_{1c}(3) \propto 1/\tilde{V}$  и  $\tilde{V}^2 \propto Q$ , что аналогично одноямной структуре. Поскольку решение с  $\xi = \lambda$  детально изучено на примере  $N = 1$  [6, 7] (см. разд. 3), далее мы рассмотрим только четные структуры. Это тем более оправдано, что в них оптимальна ситуация с  $\xi = 0$ , которую легче реализовать экспериментально.

### 8. ЧЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ С $N \geq 4$

Начнем с четырехъямной структуры. Для нахождения определителя  $\Delta(4)$ , а также  $D(4)$  и  $\Pi(4)$ ,

$$\begin{aligned} \Delta(4) &= -\Delta(1)D(4) + \tilde{\Delta}(1)\Pi(4), \\ D(4) &= -\Delta D(3) + \tilde{\Delta}\Pi(3), \\ \Pi(4) &= -\tilde{\Delta}D(3) + \tilde{\tilde{\Delta}}\Pi(3), \end{aligned} \quad (106)$$

воспользуемся формулой (99). В принятом приближении имеем

$$\begin{aligned} \Delta(4) &= -(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 \left\{ \tilde{\Delta}_{12}\Delta_{34}\Phi_0^3 + \right. \\ &+ \tilde{V}^2 \frac{16p_2}{p_1} \left[ \Phi_0^2\Phi_4 - 4\Phi_0\tilde{\Delta}_{12}\Phi_1\Phi_2 \right] + \tilde{V}^4 \frac{64p_2^2}{p_1^2} \times \\ &\left. \times 2 \left[ \Phi_0 \left( \alpha\Phi_4 + 2\frac{\alpha_1\alpha_2}{p_1p_2}\Phi_1\Phi_2 \right) + 4\Phi_1\Phi_2\Phi_4 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (107)$$

Структура определителя имеет ясный физический смысл. Первое слагаемое представляет собой произведение определителей крайних ям и трех определителей коллективизированных уровней внутренних ям. Принципиальным является то, что второе слагаемое при  $\tilde{V}^2$  также содержит определитель  $\Phi_0$ . Кроме того, необходимо удержать, как и в  $\Delta(3)$ , слагаемые  $\tilde{V}^4$ .

Можно показать, что решение  $\xi_1 = 0$  соответствует минимуму  $|\Delta(4)|^2$  и является оптимальным. Указанное свойство является общим для структур с четным  $N$ , в частности, для  $N = 2$ .

Для оптимального решения  $\xi_1 = 0$ ,  $\Phi_0 = 0$  определитель  $\Delta(4)$  и коэффициенты  $A_{12}^j(4)$  принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta(4) &= -(\varepsilon_1\varepsilon_2)^4 \tilde{V}^4 \frac{8p_2}{p_1} \Phi_4 \tilde{\Phi}, \quad (108) \\ A_{12}^{(3)}(4) &= -\frac{2q(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2}{\Delta(4)} \frac{8p_2}{p_1^2} 4\alpha_1\Phi_1\tilde{\Phi}, \\ A_{12}^{(1)}(4) &= -\frac{2q(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2}{\Delta(4)} \frac{8ip_2}{p_1^2} \tilde{\Delta}_{12}\Phi_2\tilde{\Phi}. \end{aligned} \quad (109)$$

Заметим, что в выражении для  $A_{12}^3(4)$  опущено слагаемое, пропорциональное  $i\tilde{\Delta}_{12}$ , которое компенсируется в токе аналогично структурам с  $N = 2, 3$ . Если сравнить (108), (109) с соответствующими формулами (при  $\Phi_0 = 0$ ) для двухъямной структуры (61)–(63), можно получить следующие соотношения:

$$\Delta(4) = \Delta(2)(\varepsilon_1\varepsilon_2)\tilde{\Phi}, \quad (110)$$

$$A_{12}^{(1)}(4) = A_{12}^{(1)}(2), \quad A_{12}^{(3)}(4) = A_{12}^{(3)}(2). \quad (111)$$

Таким образом, коэффициенты первой ямы четырехъямной структуры совпадают с коэффициентами двухъямной структуры. Следовательно, приведенный ток структуры с  $N = 4$  равен

$$J_c(4, 0) = J_{1c}(2, 0). \quad (112)$$

Свойство (111) сохраняется для любых четных  $N$ , так что приведенный ток (3) такой структуры имеет вид

$$J_c(N, 0) = J_{1c}(2, 0). \quad (113)$$

Обобщая (90), получаем, что полная мощность  $N$ -ямной структуры равна

$$P(N) = N \frac{2\tilde{Q}}{9}, \quad (114)$$

т. е. пропорциональна числу ям  $N$ .

Очевидно, что коэффициент отражения остается прежним ( $R = 1/9$ ) и не зависит от  $N$ , поскольку отражение определяется волновой функцией первой ямы.

### 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказана возможность когерентной генерации структуры из любого количества ям при отсутствии диссипационных процессов. Как известно (см., например, [5]), для излучения фотона необходимо затухание, обусловленное в объемных системах взаимодействием с фононами. В изученной нами структуре затухание связано с уходом электронов с нижнего уровня крайней правой ямы. Стационарный межподзонный ток «переносит» это затухание ко всем ямам и вызывает излучение фотонов в каждой яме. Электроны, поступающие за счет резонансного туннелирования, совершают  $N$  переходов с верхних уровней на нижние, сохраняя фазу, и этот процесс не зависит от населенности уровней. Следовательно, усиление и генерация в такой структуре являются объемными явлениями, в отличие от некогерентного случая [8]. Полная мощность генерации пропорциональна числу ям  $N$ .

Таким образом, можно считать, что генерация на вертикальных переходах (см. Введение) в сверхрешетке с сильным постоянным полем («штарковской лестнице») возможна. Опираясь на результаты работы [9], следует ожидать генерацию на «штарковской» лестнице и с диагональными переходами.

Как выяснено в настоящей работе, для эффективной генерации необходимо выполнение ряда требований: удовлетворения условий резонанса в каж-

дой яме, выбора оптимальной энергии подводимых электронов, достаточной узости энергетического распределения электронов  $\Delta\varepsilon$  и, наконец, выполнения условий когерентности электронной подсистемы.

Мы показали, что условия резонанса можно выполнить, подбирая параметры барьеров (см. Приложение). В случае структур с четными  $N$  довольно легко решается проблема выбора энергии: энергия должна быть резонансной ( $\varepsilon = \varepsilon_{2R}$ ) для любых полей.

Что касается ширины  $\Delta\varepsilon$ , то оптимальная ситуация достигается при  $\Delta\varepsilon \leq \Gamma$ . Если  $\Delta\varepsilon > \Gamma$ , параметры генерации (кпд, отражение, ток), конечно, уменьшаются. Но равенство  $\Delta\varepsilon \approx \Gamma$  можно достичь различными способами, например, применением энергетических фильтров на квантовых ямах.

Конечно, наиболее жестким является требование когерентности, т. е. чтобы время разрушения когерентности  $\tau_\varphi$  было больше, чем время прохождения через структуру  $T_N$ . Это время можно оценить как  $T_N = N\Gamma^{-1}$ , если  $\lambda < \Gamma$ , или  $T_N = N\lambda^{-1}$ , если  $\lambda > \Gamma$ . Во всех случаях длина структуры будет конечной:

$$N_{max} < \tau_{ph}\Gamma, \tau_{ph}\lambda. \quad (115)$$

В принципе, для высококачественных квантовых ям параметр  $\tau_{ph}\Gamma$  может значительно превосходить единицу. Например, в работе [11] наблюдали когерентное явление — сверхизлучение на десяти ямах, т. е.  $\Gamma\tau_\varphi > 10$ .

Условие (115) становится более мягким, если учесть, что генерируемые поля могут быть сильными, т. е.  $\lambda \gg \Gamma$ . Использование квантовых проволок и точек еще более ослабляет условие (115). Технологический прорыв по созданию ансамблей квантовых точек исключительно высокого качества [12] делает их весьма перспективными для создания на них лазеров с когерентной подсистемой.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы (проект № А0133) и при поддержке Минпромнауки, программы «Физика твердотельных наноструктур» (проект № 99-1140) и проекта «Построение теории взаимодействия сильных электромагнитных полей с электронной системой резонансно-туннельных диодов и лазеров».

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Для выполнения условия резонанса в многоямной структуре необходимо, чтобы разница энергий

между резонансными уровнями ям была одинакова и равнялась частоте  $\omega$  электромагнитного поля. Если бы ямы были изолированными, то условия выполнялись бы при выборе одинаковых ям. Однако, чтобы обеспечить протекание тока, барьеры должны иметь конечные значения  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha$ . Это приводит к расщеплению вырожденных уровней и сдвигу уровней в крайних ямах, описываемому уравнениями (70), (71). Прежде всего покажем, что эти уравнения удовлетворяются одновременно при соблюдении последнего равенства в (73). Из (71) следует, что

$$\begin{aligned} p_1 \cos(p_1 a) &= -\alpha_1 \sin(p_1 a), \\ p_2 \cos(p_2 a) &= -\alpha_2 \sin(p_2 a). \end{aligned} \quad (П.1)$$

Подставляя (П.1) в (70), получаем

$$\Phi_0 = 4 \sin(p_1 a) \sin(p_2 a) (\alpha - \alpha_1 - \alpha_2) = 0. \quad (П.2)$$

Отсюда следует последнее равенство в (73).

Далее, найдем резонансные значения энергии уравнения (70):

$$\varepsilon_{1R}^{AS} = \pi^2/a^2, \quad \varepsilon_{1R}^S = \frac{\pi^2}{a^2} \left(1 - \frac{10}{\alpha a}\right). \quad (П.3)$$

Энергия  $\varepsilon_{1R}^{AS}$  отвечает антисимметричному решению, а  $\varepsilon_{1R}^S$  — симметричному. Энергия верхнего уровня первой ямы равна (см. разд. 3)

$$\varepsilon_{2R}^{(1)} = \frac{4\pi^2}{a^2} \left(1 - \frac{2}{\alpha_2 a}\right). \quad (П.4)$$

Условие резонанса (72)

$$\varepsilon_{2R} - \varepsilon_{1R} = \omega = \frac{3\pi^2}{a^2} \quad (П.5)$$

вместе с (П.2)–(П.4) приводит к соотношениям

$$\alpha_2 = \frac{4\alpha}{5}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{5}. \quad (П.6)$$

Нетрудно показать, что условие резонанса во второй яме (72) также соблюдается, если выполнено соотношение (П.6), причем  $\alpha$  может быть любым. Отметим, что если выбрать

$$\alpha_2 = \frac{4\alpha}{5} + \frac{9}{10}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{5} - \frac{9}{10}, \quad (П.7)$$

то условия резонанса соблюдаются с точностью до квадратичных по  $1/\alpha$  членов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Казаринов, Р. А. Сулис, ФТП 6, 135 (1972).

2. J. Fainst, F. Capasso et al., *Science* **264**, 553 (1994).
3. J. Fainst, F. Capasso, et al., *Appl. Phys. Lett.* **66**, 538 (1995).
4. V. F. Elesin and Yu. V. Kopaev, *Sol. St. Comm.* **96**, 987 (1995); В. Ф. Елесин, Ю. В. Копаев, *ЖЭТФ* **108**, 2186 (1995).
5. В. М. Галицкий, В. Ф. Елесин, *Резонансное взаимодействие электромагнитных полей с полупроводниками*, Энергоатомиздат, Москва (1986).
6. В. Ф. Елесин, *ЖЭТФ* **112**, 483 (1997).
7. В. Ф. Елесин, *ЖЭТФ* **122**, 131 (2002).
8. G. Bastard, Y. A. Brum, and R. Rerrera, *Sol. St. Phys.* **44**, 229 (1991).
9. В. Ф. Елесин, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, А. В. Цуканов, *Письма в ЖЭТФ* **66**, 709 (1997).
10. В. Ф. Елесин, А. В. Цуканов, *ФТП* **34**, 1404 (2000); V. F. Elesin and A. V. Tsukanov, *Phys. Low-Dim. Struct.* **11/12**, 125 (2000).
11. S. Haas et al., *Phys. Rev. B* **57**, 14860 (1998).
12. D. Bimberg, Zh. I. Alferov et al., *Thin Solid Films* **367**, 235 (2000).