

# ФРАКТАЛЫ И ХАОТИЧЕСКОЕ РАССЕЙАНИЕ АТОМОВ В ПОЛЕ СТАЦИОНАРНОЙ СТОЯЧЕЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ

*В. Ю. Аргонов, С. В. Пранц\**

*Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева  
Дальневосточного отделения Российской академии наук  
690041, Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 25 ноября 2002 г.

Движение двухуровневого атома с внутренней степенью свободы, взаимодействующего с одноименным полем стоячей световой волны в высокочастотном резонаторе, рассматривается как проблема рассеяния. Показано, что для тех значений расстройки резонанса атома и поля,  $\delta$ , частоты отдачи атома,  $\alpha$ , его начального импульса  $\rho_0$  и числа возбуждений  $N$ , при которых полуклассические уравнения движения сильно связанной атомно-полевой системы имеют хаотические решения (в смысле экспоненциальной чувствительности к малым изменениям начальных условий), рассеяние атомов является фрактальным с ярко выраженным самоподобием в зависимости времени выхода атома,  $T$ , из резонатора от его начального импульса с фрактальной размерностью этой кривой, равной 1.84. В режиме хаоса имеются два бесконечных множества начальных импульсов атома, для которых  $T = \infty$  (в идеализированном случае отсутствия каких-либо потерь). Они соответствуют сепаратрисоподобным траекториям асимптотического приближения атома к некоторым точкам конфигурационного пространства и траекториям бесконечно долгого блуждания атома в резонаторе и составляют, соответственно, счетный и несчетный фракталы. Корреляции атомных осцилляций Раби с движением атома могут привести к резонансу Доплера–Раби — глубоким осцилляциям внутренней энергии атома для больших значений расстройки  $\delta$  при выполнении условия  $|\alpha\rho_0| \approx |\delta|$ .

PACS: 42.50.Vk, 05.45.Df

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Динамический хаос в классических системах заключается, как известно, в экспоненциально быстром разбегании изначально близких траекторий в ограниченной области фазового пространства. Такая возможность существует из-за непрерывности классического фазового пространства, точки которого, а значит, и состояния классической системы, могут быть сколь угодно близки. В квантовой механике отсутствует понятие траектории и фазовое пространство не является непрерывным в силу соотношения неопределенности Гейзенберга. Эволюция изолированной квантовой системы унитарна и никакого хаоса в смысле экспоненциальной неустойчивости, например, ее состояний быть не может. То, что обычно понимают под словами «квантовый хаос» — это, в сущности, особенности унитарной эволюции

изолированной квантовой системы (какой бы она ни была) в той области значений ее параметров и начальных условий, в которых ее классический аналог хаотичен [1]. Однако реальные квантовые системы не изолированы, они взаимодействуют со своим окружением, а при попытке измерения их состояния — с классическим прибором, который в силу своего назначения должен находиться в неустойчивом состоянии. Потеря когерентности вследствие неустраняемого взаимодействия с окружением (декогерентность) нарушает квантовую унитарность, подавляя квантовые свойства движения и проявляя классические. Хрестоматийным примером является квантовый ротор с периодическими толчками, учет тепловой «бани» в квантовых уравнениях движения которого приводит к линейной диффузии энергии, характерной для классического аналога этой системы [2]. Унитарная эволюция квантового ротора без «бани», как известно, подавляет диффузию энергии

\*E-mail: prants@poi.dvo.ru

и приводит к динамической локализации [3]. Моделирование такой ситуации возможно с помощью квантово-классического гибрида — системы с квантовыми и классическими степенями свободы, взаимодействующими друг с другом. Такие гибриды возникают, например, если внутренняя степень свободы частицы описывается квантовым уравнением движения (Шредингера или Гейзенберга), а динамически согласованная с ней степень свободы — уравнениями Гамильтона в механике или Максвелла в электродинамике. Полуклассические и полуквантовые уравнения движения появляются также вследствие редукции уравнений Гейзенберга, при которой частично сохраняются квантовые корреляции и флуктуации (см., например, метод  $1/N$ -разложения [4]). Квантово-классические гибриды интересны не только сами по себе, но и как прототипы взаимодействия квантовых объектов с макроскопическим окружением.

Настоящая работа вдохновлена впечатляющими успехами резонаторной квантовой электродинамики и атомной оптики в искусстве манипулирования отдельными атомами и фотонами в высокочастотных резонаторах (см., например, [5–8]), которые, в свою очередь, были бы невозможны без работ по изучению механического действия света на атомы, лазерному охлаждению атомов и т. п. (см., например, [9, 10]). В процессе обмена возбуждениями между атомом и выделенной модой поля изменяются не только электронное состояние атома и состояние поля в резонаторе, но также скорость и положение центра масс атома. В режиме сильной связи ( $\Omega_0 \sqrt{N} \gg \max(T_a^{-1}, T_f^{-1})$ , где  $T_{a,f}$  — времена релаксации соответственно атома и моды,  $\Omega_0$  — амплитуда коэффициента атомно-полевой связи,  $N$  — число возбуждений) соответствующий гамильтониан (1) включает в себя три степени свободы (трансляционную, электронную и полевую) и их взаимодействие. Порожденные им полуклассические уравнения движения, как было показано в наших работах [11, 12], могут приводить к гамильтонову хаосу. Хаос возникает из-за взаимодействия нелинейных резонансов [13] и проявляется, вообще говоря, в таком движении атома в резонаторе, когда случайное блуждание прерывается регулярными колебаниями вблизи дна оптического потенциала и длительными перелетами с практически постоянной скоростью (полеты Леви) [14]. Режим сильной связи экспериментально реализован для ридберговских атомов в микроволновых резонаторах [5] и для обычных атомов в оптических микрорезонаторах [6, 7].

В этой работе та же атомно-полевая система рассматривается в контексте проблемы хаотического

рассеяния атомов в поле стоячей световой волны. Проблема заключается в том, чтобы описать динамически и статистически рассеяние частиц, попадающих извне в ограниченную область некоего нелинейного детерминированного «потенциала». Такие задачи возникают в биллиардах [15], в адвекции пассивных примесей в простых гидродинамических потоках [16], при ионизации атомов [17] и т. д. Мы показываем, что хаотическое движение атомов обладает фрактальными свойствами, а именно, зависимость времени выхода атомов из резонатора от их начального импульса является фрактальной с ярко выраженным самоподобием. Другой темой этой статьи, не затронутой в [11–14], является исследование корреляций осцилляций Раби (осцилляций внутренней энергии атома) с движением атома. Здесь рассмотрены резонанс Доплера–Раби, глубокие низкочастотные осцилляции Раби практически при любых соотношениях частот атомного перехода и моды резонатора (при условии  $|\alpha\rho_0| \approx |\delta|$ ), обусловленные эффектом Доплера. В Приложении мы доказываем, что уравнения движения для электронно-полевой подсистемы, полученные в результате факторизации операторных уравнений Гейзенберга, полностью эквивалентны квантовым уравнениям для соответствующих амплитуд вероятностей внутреннего состояния атома и фоковского состояния полевой моды. Следовательно, мы действительно имеем дело с квантово-классическим гибридом, по крайней мере, для поля в фоковском состоянии.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Двухуровневый атом с массой  $m_a$  и частотой рабочего перехода  $\omega_a$  находится в высокочастотном одномодовом резонаторе, поле в котором имеет вид стоячей волны вдоль оси  $x$  с частотой  $\omega_f$  и волновым вектором  $k_f$ . При движении атома вдоль этой оси меняется коэффициент его связи с полем, а при поглощении и испускании фотонов изменяются не только внутреннее состояние атома и состояние поля, но и скорость атома. В пределе сильной связи динамика взаимодействия всех трех степеней свободы (трансляционной, электронной и полевой) является гамильтоновой с соответствующим оператором

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_f\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) - \hbar\Omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+)\cos(k_f\hat{x}), \quad (1)$$

слагаемые которого описывают, соответственно, кинетическую, внутриатомную, полевую энергии и

энергию взаимодействия атома с полем стоячей волны. Операторы координаты и импульса атома  $\hat{x}$  и  $\hat{p}$ , операторы рождения и уничтожения фотонов,  $\hat{a}^\dagger$  и  $\hat{a}$ , и спиновые операторы Паули  $\hat{\sigma}$  удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,$$

$$[\hat{\sigma}_\pm, \hat{\sigma}_z] = \mp 2\hat{\sigma}_\pm, \quad [\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z.$$

При выводе уравнений движения сильно связанной атомно-полевой системы мы частично упрощаем задачу, полагая атом точечной частицей (что допустимо для атома, импульс которого много больше импульса фотона). Благодаря сохранению в процессе эволюции оператора числа возбуждений

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{\sigma}_z + 1}{2}$$

из гамильтониана (1) можно вывести замкнутую систему уравнений Гейзенберга для следующих операторов:  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{\sigma}_z$ ,  $\hat{u} = \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+$  и  $\hat{v} = i(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- - \hat{a} \hat{\sigma}_+)$ . Переходя в этих уравнениях к ожидаемым значениям

$$\begin{aligned} \xi &= k_f \langle \hat{x} \rangle, & \rho &= \frac{p}{\hbar k_f} \langle \hat{p} \rangle, \\ u &= \langle \hat{u} \rangle, & v &= \langle \hat{v} \rangle, & z &= \langle \hat{\sigma}_z \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

и факторизуя произведение операторов  $\langle \hat{N} \hat{\sigma}_z \rangle = \langle \hat{N} \rangle \langle \hat{\sigma}_z \rangle = Nz$ , получим искомые полуклассические уравнения движения [12]

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \alpha \rho, & \dot{\rho} &= -u \sin \xi, & \dot{u} &= \delta v, \\ \dot{v} &= -\delta u + 2Nz \cos \xi, & \dot{z} &= -2v \cos \xi, \end{aligned} \quad (3)$$

где точкой обозначено дифференцирование по нормированному времени  $\tau = \Omega_0 t$ . Число возбуждений  $N = n + (1 + z)/2$  (где  $n$  — среднее число фотонов в моде), нормированная расстройка  $\delta = (\omega_f - \omega_a)/\Omega_0$  и нормированная частота оптической отдачи  $\alpha = \hbar k_f^2 / m_a \Omega_0$  (характеризующая изменение кинетической энергии атома при испускании и поглощении фотона) являются управляющими параметрами нелинейной динамической системы (3), которая имеет два интеграла движения:

$$W = \frac{\alpha}{2} \rho^2 + U, \quad (4)$$

$$R = u^2 + v^2 + Nz^2. \quad (5)$$

В выражении для полной энергии системы  $W$  выделен член

$$U = -u \cos \xi - \frac{\delta}{2} z, \quad (6)$$

имеющий смысл эффективной потенциальной энергии, поскольку величина  $-\partial U / \partial \xi = -u \sin \xi$  является силой, действующей на атом. В силу соотношения [18]  $u^2 + v^2 = n(x^2 + y^2)$ , в пределе большого числа квантов  $n \gg 1$  величина  $R/N$  есть сохраняющаяся длина вектора Блоха  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , где  $x = \langle \hat{\sigma}_x \rangle$  и  $y = \langle \hat{\sigma}_y \rangle$ .

Полуклассическое приближение, использованное при выводе уравнений движения (3), заключается, как известно, в пренебрежении эффектами квантовых корреляций и флуктуаций. В зависимости от того, для каких операторов записываются исходные уравнения Гейзенберга и какие операторные произведения факторизуются, в рамках полуклассического приближения можно получить разные уравнения движения для одних и тех же квантовых средних. Эти уравнения, разумеется, переходят друг в друга в пределе большого числа квантов. В работах [13, 14] для гамильтониана (1) в представлении Гейзенберга факторизовывались операторные произведения операторов  $\hat{\sigma}_{x,y,z}$  и  $(\hat{a}^\dagger \pm \hat{a})$ . Полученные в результате полуклассические уравнения для тех же средних (2) отличаются от уравнений (3) тем, что в уравнение для  $\dot{v}$  входит квадратный трехчлен  $(2N-1)z - 3z^2/2 + 1/2$  (в работе [14] к тому же использовалась другая нормировка). Уравнения (3) привлекательны тем, что по форме близки к квантовым уравнениям движения для электронно-полевого взаимодействия (доказательство см. в Приложении). Более того, они совпадают с квантовыми уравнениями для поля в резонаторе, приготовленного в фоковском состоянии с заданным числом квантов, и атома в одном из своих энергетических состояний. Все результаты настоящей работы получены с помощью системы уравнений (3).

### 3. ХАОТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ АТОМА И ЕГО СТАТИСТИЧЕСКИЕ АНОМАЛИИ

В случае точного совпадения частот моды  $\omega_f$  и атомного перехода  $\omega_a$ , т. е. при  $\delta = 0$ , система уравнений (3) интегрируется в квадратурах, так как возникает дополнительный закон сохранения  $u = u_0$  ( $u_0$  — начальное значение  $u$ ). Эффективная потенциальная энергия (6) становится однозначной функ-

цией координаты  $U = -u_0 \cos \xi$ , полностью повторяя структуру стоячей волны. Движение в стационарном потенциальном поле описывается уравнением физического маятника

$$\ddot{\xi} + \alpha u_0 \sin \xi = 0, \quad (7)$$

которое очевидным образом следует из двух первых уравнений системы и имеет известные решения в терминах эллиптических функций Якоби [12]. Из выражения для энергии (4) следует аналитическая зависимость импульса от координаты:

$$\rho = \pm \sqrt{\frac{2}{\alpha}(W + u_0 \cos \xi)}. \quad (8)$$

В зависимости от значения начального импульса  $\rho_0$  возможны два типа движения: инфинитный пролет атома сквозь резонатор при  $\rho_0 > \rho_{cr}$  и финитные колебания в потенциальной яме при  $\rho_0 < \rho_{cr}$ . Промежуточный случай,  $\rho_0 = \rho_{cr}$ , соответствует асимптотическому приближению атома к точке, соответствующей максимуму потенциальной энергии (движение по сепаратрисе на фазовом портрете, который может быть построен непосредственно из (8)). Здесь  $\rho_{cr}$  — критический импульс, определенный из условия  $\xi = (2k + 1)\pi$ ,  $\rho = 0$ , где  $k$  — произвольное целое число. Нетрудно показать, что  $\rho_{cr} = 2\sqrt{u_0/\alpha}$ . В размерных единицах это соответствует скорости атома  $v_{cr} = 2\sqrt{\hbar\Omega_0 u_0/m_a}$ . Таким образом, при условии точного атомно-полевого резонанса трансляционное движение атома не зависит от динамики электронной и полевой подсистем, а зависит только от начального значения энергии электронно-полевого взаимодействия  $u_0$ , которое задает глубину оптического потенциала  $U$ . Инверсия населенности  $z$  представляет собой регулярный сигнал осцилляций Раби, модулированный стоячей волной, что подробно анализируется в разд. 5.1.

Уравнения (3) с двумя интегралами движения (5) являются гамильтоновой автономной системой с двумя степенями свободы с движением на трехмерной гиперповерхности с заданным значением энергии  $W$ . У такой системы, вообще говоря, имеются положительный показатель Ляпунова  $\lambda$ , равный ему по модулю отрицательный и два нулевых. Сумма всех показателей Ляпунова гамильтоновой системы равна нулю [19]. Максимальный показатель Ляпунова характеризует среднюю скорость экспоненциального разбегания изначальной близких траекторий,

$$\lambda = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda(\tau), \quad \lambda = \lim_{\Delta(0) \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \ln \frac{\Delta(\tau)}{\Delta(0)}, \quad (9)$$

и служит количественной мерой динамического хаоса в системе. Здесь  $\Delta(\tau)$  — расстояние (в евклидовом смысле) в момент времени  $\tau$  между двумя траекториями, близкими в начальный момент времени  $\tau = 0$ . В работах [11, 12] вычислялась зависимость  $\lambda$  от управляющих параметров и начальных условий и было показано, что динамический хаос в сильно связанной атомно-полевого системе существует в широком диапазоне значений  $N$ ,  $\alpha$  и начальных импульсов атома  $\rho_0$ . Зависимость  $\lambda(\delta)$  представляет собой функцию с нулевым значением при  $\delta = 0$  и двумя почти симметричными относительно нулевой расстройки максимумами, довольно быстро стремящуюся к нулю с увеличением  $|\delta|$  [11]. Так, для разумных значений частоты отдачи  $\alpha = 10^{-3}$ , числа возбуждений  $N = 10$  и начального импульса  $50 \lesssim \rho_0 \lesssim 100$  нулевые (в пределах точности вычислений) значения  $\lambda$  обнаружены при  $|\delta| \gtrsim 1.7$ .

Из уравнений (3) следует, что трансляционное движение атома при  $\delta \neq 0$  описывается уравнением нелинейного физического маятника с частотной модуляцией

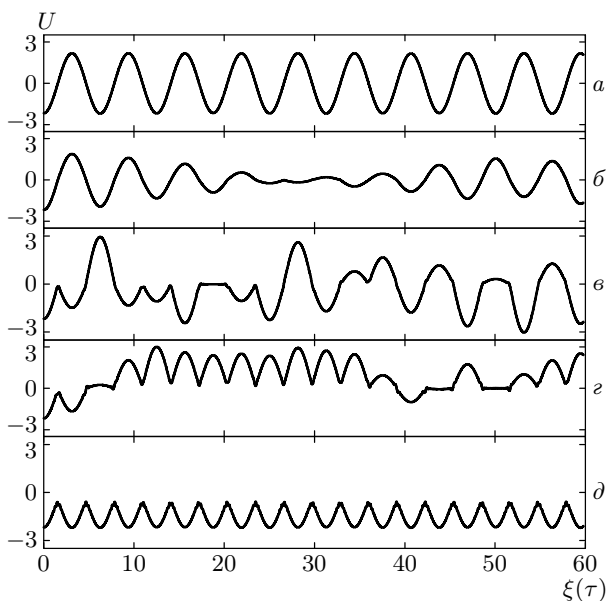
$$\ddot{\xi} + \alpha u(\tau) \sin \xi = 0, \quad (10)$$

в котором  $u$  является функцией времени и всех остальных динамических переменных. С учетом того, что нормированная частота осцилляций Раби есть величина порядка  $\Omega = \sqrt{\delta^2 + 4N} > 1$ , значительно превышающая частоту малых трансляционных колебаний  $\sqrt{\alpha u_0} \ll 1$ , в работе [13] был выявлен механизм возникновения хаоса в атомно-полевого системе и получена следующая оценка ширины стохастического слоя<sup>1)</sup>:

$$\Delta \approx 8\pi \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^3 \exp\left(-\frac{\pi\Omega}{2\omega}\right), \quad (11)$$

где  $\omega = \sqrt{2\alpha N|\delta|}/\Omega$  и  $\Omega/\omega \gg 1$ . Величина  $\Delta$  есть нормированное на сепаратрисное значение энергии маятника  $\omega^2$  изменение энергии в окрестности невозмущенной сепаратрисы. Малые изменения энергии приводят к относительно малым изменениям частоты колебаний. Для значений энергии движения, сильно отличающихся от сепаратрисного, т. е. вблизи дна потенциальных ям и высоко над вершинами

<sup>1)</sup> Уравнение для  $\dot{v}$  в цитируемой работе записано в виде, оговоренном в конце предыдущего раздела. Однако весь анализ основан на линеаризации упомянутого трехчлена.



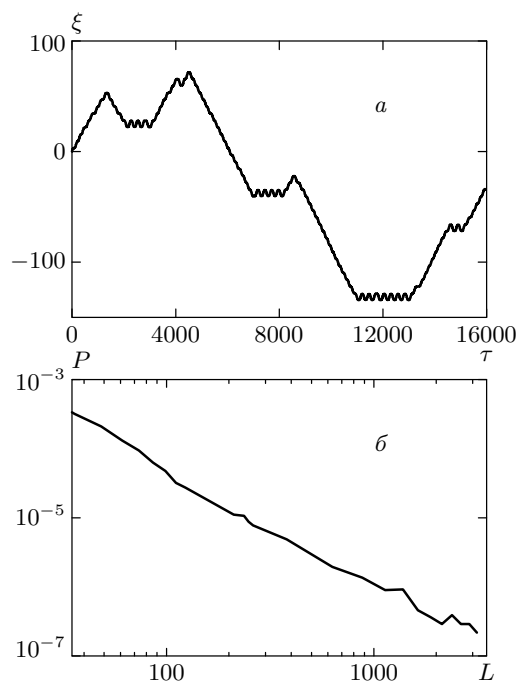
**Рис. 1.** Зависимость потенциальной энергии атома от координаты для различных значений расстройки  $\delta = 0.002$  (а),  $0.04$  (б),  $0.4$  (в),  $0.9$  (г),  $2$  (д);  $\rho_0 = 110$

ми холмов оптического потенциала  $U$ , малые изменения частоты приводят к малым изменениям фазы за период трансляционных колебаний. Однако вблизи невозмущенной сепаратрисы, на которой период колебаний стремится к бесконечности, даже малые изменения частоты могут привести к значительным изменениям фазы. Это является причиной экспоненциальной неустойчивости движения параметрического нелинейного осциллятора (10) и хаотического движения атома в поле периодической стоячей волны.

Наглядное представление о характере хаотического блуждания можно получить с помощью модели «двух потенциалов», заключающейся в следующем. Вблизи резонанса оптический потенциал  $U$  повторяет структуру стоячей волны в резонаторе с периодом  $2\pi$ , а его амплитуда равна  $u_0$  (см. рис. 1а). Вдали от резонанса, при  $|\delta| \gtrsim 1.7$ , потенциал имеет период  $\pi$ , и при  $|\delta| \gg 1$  приближенно описывается функцией (25) (см. рис. 1д). Будем называть эти потенциалы, соответственно, резонансным и нерезонансным. Все численные расчеты в этой работе выполнены для числа возбуждений  $N = 10$ , частоты отдачи  $\alpha = 10^{-3}$  и начальных условий  $\xi_0 = 0, z_0 = 0, u_0 = v_0 = \sqrt{4.5}$  (за исключением одного специально оговоренного в разд. 5 случая). Вычисляя динамические переменные  $u, \xi$  и  $z$  в каждый момент време-

ни  $\tau$ , по формуле (6) можно построить зависимость  $U$  от  $\xi(\tau)$  для любого значения расстройки. Однако для тех значений  $\delta$ , при которых максимальный показатель Ляпунова больше нуля, полученная функция  $U[\xi(\tau)]$  аperiodична (рис. 1б, в, г) и, вообще говоря, неоднозначна для определенных значений  $\rho_0$ , так как зависит не только от положения атома, но от всех динамических переменных задачи. Можно сказать, что при хаотическом движении в резонаторе в каждый момент времени «виртуально» сосуществуют резонансный и нерезонансный потенциалы, показанные на рис. 1а и 1д. Глубина ям в обеих структурах со временем эволюционирует, а атом при каждом пересечении узла стоячей световой волны случайным образом попадает то в одну, то в другую структуру. Вероятность попадания в области резонансного или нерезонансного потенциалов зависит от расстройки. В частности, на рис. 1б и 1г атом почти все время находится в одном и том же потенциале, лишь изредка на короткое время попадая в другой. Необходимо, однако, отметить, что такая модель является только упрощением, введенным из соображений наглядности. Реальная динамика описывается системой (3), которая лишь в частных случаях строго соответствует какому-либо наглядному образу.

Пример типичной хаотической траектории атома в резонаторе приведен на рис. 2а. Атом меняет направление движения, попеременно осциллируя в малых областях пространства и совершая длинные полеты с практически постоянной скоростью. Эти так называемые полеты Леви типичны для гамильтоновых систем с неоднородным фазовым пространством, в котором сосуществуют области регулярного движения (КАМ-торы) со сложной иерархической структурой, стохастические слои, полуразрушенные торы (канторы) и проч. [15, 19, 20]. При приближении хаотической траектории к границе внешнего КАМ-тора, где располагаются канторы, изображающая точка может надолго застрять там, имитируя регулярное движение. Времена так называемого «прилипания» к границам КАМ-торов могут быть сколь угодно велики, поскольку канторы препятствуют выходу траектории в стохастическое «море». В нашем случае эффект «прилипания» проявляется в длинных баллистических полетах атомов в резонаторе, существование которых приводит к аномальной гамильтоновой кинетике — перемежаемости нормальной диффузии с полетами Леви. Определим длину полета как расстояние, пролетаемое атомом между двумя точками обращения знака его скорости. На рис. 2б в двойном логарифми-



**Рис. 2.** *a* — Хаотическая траектория атома с полями Леви, *б* — функция распределения  $P$  по длинам полетов  $L$  в дважды логарифмическом масштабе для  $\delta = 0.01$

ческом масштабе представлена функция распределения по длинам полетов  $P(L)$ , построенная по результатам вычислений с 21 траекторией в диапазоне  $93 \leq \rho_0 \leq 94$  со временем интегрирования  $3.2 \cdot 10^6$  безразмерных единиц для каждой траектории. Экспоненциальный спад на начальном участке функции распределения (до  $L \approx 100$ ) — вклад нормальной диффузии атома. Четко выраженный степенной закон  $P(L) \propto L^{-1.5 \pm 0.1}$  на остальной части этой функции является результатом баллистических полетов Леви, зарегистрированная длина которых достигает  $2 \cdot 10^4$  безразмерных единиц длины. Для степенной функции распределения ожидается степенная зависимость среднеквадратичного смещения атома от времени  $\langle \xi^2 \rangle \propto \tau^\gamma$  с показателем степени  $\gamma > 1$ , характерным для супердиффузии. Следует отметить, что приведенный результат получен для относительно слабого хаоса, наблюдающегося при  $\delta = 0.01$ . Аналогичные расчеты, выполненные для  $\delta = 0.4$  (сильный хаос), приводят к практически нормальному распределению длин полетов.

В работе [14] были обнаружены полеты Леви при движении атома в поле стоячей световой волны и проведено подробное исследование статистических свойств атомно-полевого взаимодействия, в

частности, вычислялись распределения времен возвратов Пуанкаре и эволюция моментов положения атома. Были выявлены различные режимы движения от практически нормальной (гауссовой) диффузии атома до супердиффузии, соответствующей баллистическому движению атома с ускорением. В работе [14] численные эксперименты проводились с нелинейной по  $z$  версией полуклассических уравнений движения при достаточно большом числе возбуждений  $N = 10$ , т.е. член  $2Nz$  являлся доминирующим в уравнении для  $\dot{v}$ . Следовательно, распределение времен возвратов Пуанкаре и эволюция моментов положения атома для наших уравнений (3) должны быть похожими при прочих равных условиях на вычисленные в работе [14] статистические характеристики.

#### 4. ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ АТОМА

##### 4.1. Хаотическое рассеяние атомов

Рассмотрим мысленный эксперимент с установкой, состоящей из одномодового резонатора Фабри–Перо и двух детекторов, способных регистрировать соударение атома с каждым из его зеркал (рис. 3*a*). Длина резонатора такова, что оптическая стоячая волна имеет две пучности. Выберем центр левой пучности за начало координат. Последовательно помещаем в точку  $\xi = 0$  поодиночке атомы с различными начальными импульсами  $\rho_0$ , направленными вдоль оси резонатора. Регистрируя соударение атома с зеркалом, измеряем время его выхода из резонатора  $T$ . При прочих равных условиях исследуем зависимость времени выхода от начального импульса  $\rho_0$ .

В случае точного атомно-полевого резонанса возможны три сценария. Атом с начальным импульсом  $\rho_0 < \rho_{cr}/\sqrt{2}$  не сможет достигнуть даже узла стоячей волны, и будет захвачен полем. Если  $\rho_{cr}/\sqrt{2} \leq \rho_0 < \rho_{cr}$ , то атом пересечет узел, но не сможет достичь вершины барьера, изменит направление движения и будет зарегистрирован левым детектором. Наконец, при  $\rho_0 > \rho_{cr}$  атом преодолеет потенциальный барьер и будет зарегистрирован правым детектором. Используя аналитическое выражение зависимости  $\xi(\tau)$ , полученное в работе [12], и учитывая безразмерные координаты зеркал  $-\pi/2$  и  $3\pi/2$ , получим интересующую нас зависимость

$$T(\rho_0) = \begin{cases} \infty, & \rho_0 < \frac{\rho_{cr}}{\sqrt{2}}, \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha u_0}} F \left[ \arcsin \left( -\frac{1}{K\sqrt{2}} \right), K \right], & \frac{\rho_{cr}}{\sqrt{2}} \leq \rho_0 < \rho_{cr}, \\ \infty, & \rho_0 = \rho_{cr}, \\ \frac{2}{\alpha \rho_0} F \left[ \frac{3\pi}{4}, K \right], & \rho_0 > \rho_{cr}, \end{cases} \quad (12)$$

где  $F$  — неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $K = \rho_0 \sqrt{\alpha/u_0}/2$ .

При расстройках  $|\delta| \gtrsim 1.7$  медленные атомы захватываются полем, быстрые пролетают, не испытывая заметного влияния поля. Однако существует также достаточно широкий диапазон начальных импульсов  $\rho_0$ , для которых эффект хаотического блуждания проявляется в том, что до момента детектирования атом совершает некоторое число колебаний внутри резонатора. На рис. 3б приведены некоторые возможные фазовые траектории атома в плоскости  $(\xi, \rho)$ . Несмотря на стохастические свойства движения атома, конкретный вид траектории однозначно определяется начальными условиями и параметрами системы. В частности, при прочих равных условиях реализация (конкретно, время выхода  $T$ ) будет определяться только начальным значением импульса  $\rho_0$ . Численное исследование зависимости  $T(\rho_0)$  показывает, что она имеет иерархическую структуру, типичную для процесса хаотического рассеяния. На рис. 4а изображена зависимость времени выхода от начального импульса для широкого диапазона значений  $\rho_0$ . Как видно из рисунка, для малых начальных импульсов  $\rho_0 \lesssim 63$  атом не достигает зеркала, так как захватывается полем стоячей волны. Для больших значений  $\rho_0$  наблюдается чередование гладких и плохо разрешимых участков функции. Увеличение одного из таких участков показывает, что он сам имеет аналогичную структуру (рис. 4б). В связи с этим будем называть неразрешимые участки функции ее подструктурами. Еще более впечатляющая картина наблюдается при сравнении рис. 4б и 4в. Здесь многократное увеличение показывает полное самоподобие структур. При дальнейшем повторении этой операции самоподобие сохраняется, по-видимому, для любого числа шагов. Будем называть структуру, изображенную на рис. 4а, структурой первого порядка, ее подструктуру (рис. 4б) — структурой второго порядка и т.д. Регулярные участки структур более высокого порядка соответствуют большим временам выхода  $T$ , при этом с каждым увеличением порядка структуры ха-

рактерное увеличение  $T$  примерно одинаково. С увеличением разрешения (порядка структуры) постоянно увеличиваются и значения времени выхода на нерегулярных участках. Это означает, что существуют атомы, колеблющиеся в резонаторе до момента детектирования сколь угодно долго. Множество значений начальных импульсов  $\rho_0$ , соответствующих  $T = \infty$ , представляет собой одномерный фрактал — подмножество фрактала, изображенного на рис. 4. Как будет показано ниже, фрактал с  $T = \infty$  является суммой двух физически различных множеств, одно из которых счетно, а другое несчетно.

Рассматриваемый фрактал представляет собой набор точек с координатами

$$\left( \rho_0^{(j)} = \rho_0^{(min)} + \frac{j}{j_{max}} (\rho_0^{(max)} - \rho_0^{(min)}), T^{(j)} \right),$$

$$0 \leq j \leq j_{max},$$

где  $j_{max}$  мы будем называть числом разбиений отрезка начальных импульсов  $\rho_0^{(min)} \leq \rho_0 \leq \rho_0^{(max)}$ . Введем величину

$$l = \sum_{j=1}^{j_{max}} |T^{(j)} - T^{(j-1)}|, \quad (13)$$

являющуюся своего рода «вертикальной проекцией» длины кривой (в этом смысле «горизонтальная проекция» всегда равна  $\rho_0^{(max)} - \rho_0^{(min)}$ ). Эта величина всегда конечна для гладких кривых, для фрактальных же с увеличением числа разбиений  $j_{max}$  стремится к бесконечности. Фрактальная размерность по Хаусдорфу–Безиковичу,  $D_F$ , есть [21]

$$D_F = \lim_{j_{max} \rightarrow \infty} \frac{\ln l}{\ln j_{max}} + 1. \quad (14)$$

Вычисленная таким образом фрактальная размерность для нашей задачи дает величину  $D_F = 1.84 \pm 0.02$ .

### 4.2. Физический механизм образования фрактальной структуры

Движение атома существенно неустойчиво вблизи узлов стоячей волны, где обращается в нуль коэффициент атомно-полевого взаимодействия. Вдали от них атом движется практически регулярно. Пересекая узел, атом может выбрать один из двух сценариев: продолжить движение до следующего узла (а, следовательно, и до детектора) или, пролетев еще немного, изменить направление движения. Это позволяет классифицировать все возможные траектории атома по единственному параметру  $m$  — числу пересечений атомом узла стоячей волны до момента детектирования. На фазовой плоскости  $(\xi, \rho)$  это эквивалентно числу полуоборотов вокруг точки  $(\pi, 0)$ . Именно по такому принципу пронумерованы траектории на рис. 3б. Будем называть траектории, пересекающие узел один раз, траекториями первого типа, два раза — второго и т.д. Столь простая классификация траекторий возможна лишь благодаря единственности «свободного» (не связанного с

зеркалами) узла в резонаторе. Обратим внимание на траектории особого типа, подобные «1S» на рис. 3б. При точном резонансе такие траектории представляют собой сепаратрисы, разделяющие на фазовой плоскости области финитного и инфинитного движений. Вне резонанса описание динамики атома с помощью двумерной фазовой плоскости становится существенно неполным, и эти траектории уже не могут называться сепаратрисами в строгом смысле этого слова. Однако движение по ним, так же как и при резонансе, представляет собой асимптотическое приближение к некоторой точке конфигурационного пространства. Существенная особенность хаотического движения заключается в том, что атом может выйти на асимптотическую траекторию, уже совершив до этого некоторое число колебаний (что абсолютно невозможно при регулярном движении). Введем классификацию таких траекторий следующим образом: будем обозначать траектории, перешедшие на асимптотический режим после однократного пересечения узла стоячей волны, как «1S», после двукратного — как «2S» и т.д. Несмотря на то, что при пересечении узла выбор дальнейшего сценария движения выглядит случайным, он однозначно определяется начальными условиями. Расчеты показывают, что гладкие участки крупномасштабной структуры, изображенной на рис. 4а, соответствуют траекториям первого типа. Зрительно неразрешимые участки порождаются всеми остальными траекториями. Сингулярные точки на границах между регулярными и нерегулярными областями (соответствующие  $T = \infty$ ) порождаются траекториями типа 1S. Совершенно аналогичным образом в структуре второго порядка (рис. 4б) регулярные участки соответствуют траекториям второго типа, нерегулярные — всем остальным, исключая первый тип (траектории первого типа в структуре второго порядка отсутствуют), а сингулярные границы областей — траекториям типа 2S. Таким же является принцип образования структур высших порядков. Следует отметить, что относительная простота фрактальной структуры связана с выбранной нами простейшей конфигурацией поля. Фрактал существенно усложнился бы с увеличением длины резонатора.

Имеются два существенно различных механизма появления бесконечных времен выхода: бесконечно долгое колебание атома в резонаторе ( $m = \infty$ ) и его попадание на асимптотическую траекторию ( $m \neq \infty$ ). Множество начальных импульсов  $\rho_0$ , соответствующих асимптотическим траекториям, представляет собой счетный фрактал, каждая точка которого может быть задана вектором в гильберто-

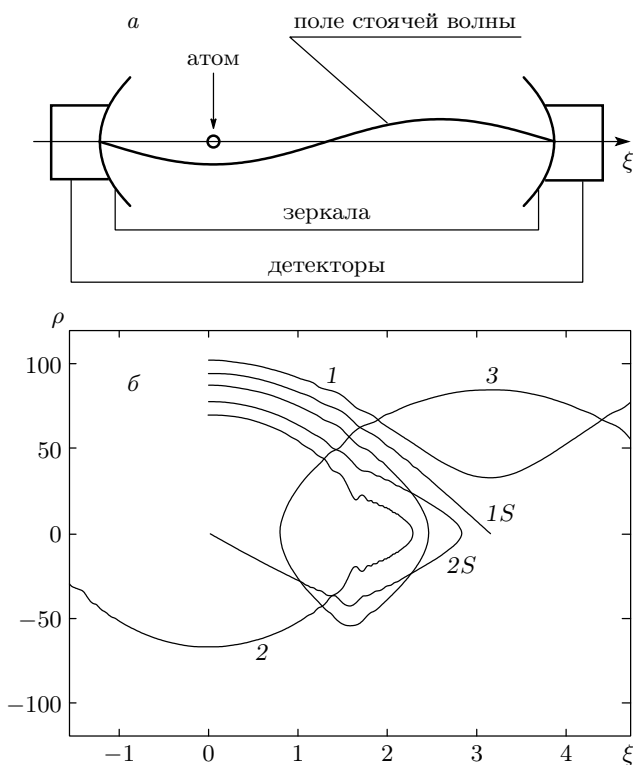


Рис. 3. а — Схема мысленного эксперимента, включающая микрорезонатор со стоячей световой волной и детекторы; б — примеры фазовых траекторий хаотических атомов с различными начальными импульсами  $\rho_0$



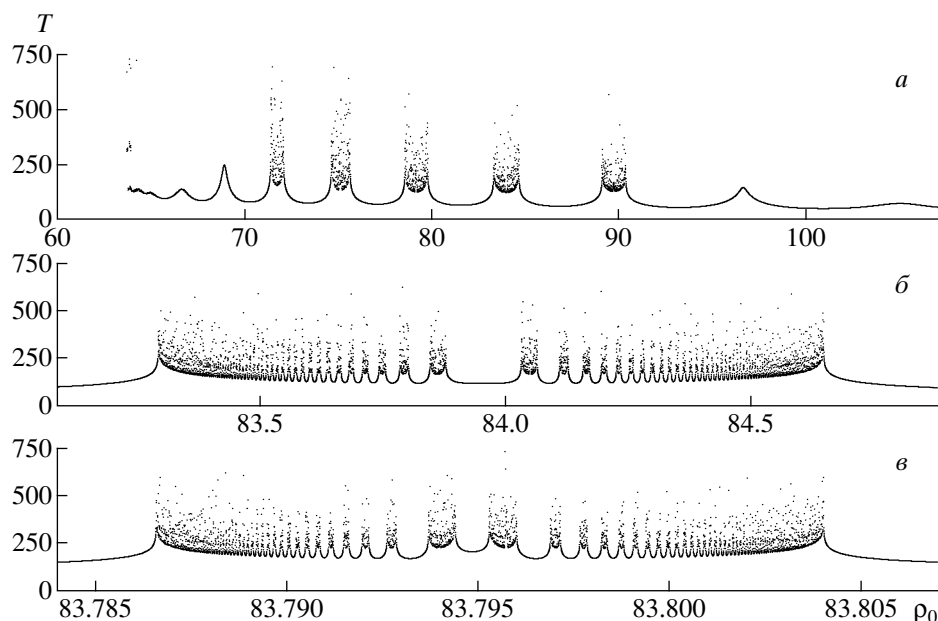


Рис. 4. Фрактальная зависимость времени выхода атома из резонатора,  $T$ , от его начального импульса  $\rho_0$  для  $\delta = 0.4$

вом пространстве. Каждый вектор имеет  $m$  целочисленных компонент и нулевые остальные. Установим это соответствие следующим образом. В структуре первого порядка (рис. 4а) пронумеруем подструктуры, начиная с крайней правой. Внутри каждой из них содержится бесконечно большое число подструктур следующего порядка. Введем независимую нумерацию для последних, начиная с центра структуры второго порядка (рис. 4б). Здесь, в отличие от структуры первого порядка, номера подструктур будут как положительными, так и отрицательными. Считаем положительными номера подструктур, находящихся слева от центральной регулярной области, а отрицательными — находящиеся справа. Номер «0» не присваиваем ни одной подструктуре. Аналогично поступаем со структурами всех остальных порядков. Такой алгоритм позволяет каждой подструктуре структуры порядка  $m$  поставить в соответствие последовательность из  $m$  целых чисел, из которых первое будет номером структуры второго порядка, которой принадлежит (или совпадает с ней для  $m = 1$ ) интересующая нас подструктура в структуре первого порядка, второе — соответствующим номером структуры третьего порядка в структуре второго порядка и т. д. Такая последовательность чисел подобна электронному адресу подкаталога по принципу «(подкаталог корневого каталога)/(подкаталог второго уровня)/(подкаталог

третьего уровня) . . . ». Следует отметить, что первое число последовательности всегда будет положительным, а все остальные могут принимать любые значения. Каждой подструктуре структуры  $m$ -го порядка соответствуют две асимптотические траектории типа  $mS$ , являющиеся ее границами. Поставим правой границе каждой подструктуры в соответствие последовательность чисел, которая задает саму подструктуру, а левой — ту же последовательность, но с измененным знаком первого числа. Таким образом, каждому значению  $\rho_0$ , соответствующему асимптотическому движению атома после  $m$  пересечений узла, мы поставили в соответствие последовательность из  $m$  целых чисел, задающую в гильбертовом пространстве некоторый вектор с  $m$  ненулевыми целочисленными компонентами.

В отличие от асимптотических траекторий, множество траекторий с  $m = \infty$  (и соответствующих им начальных значений  $\rho_0$ ), по-видимому, несчетно. Каждой из них соответствует подструктура бесконечного порядка, которой можно поставить в соответствие лишь бесконечную числовую последовательность. Несмотря на различную мощность, оба этих фрактальных множества имеют одинаковую размерность, которая на единицу меньше рассмотренной выше для фрактала на плоскости и составляет  $0.84 \pm 0.02$ .

Так же, как и полеты Леви, фракталы порож-

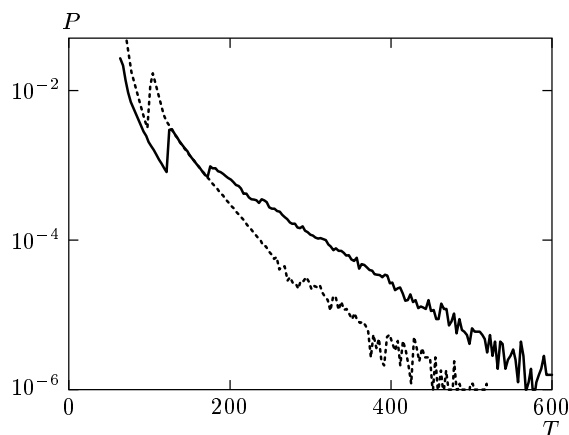


Рис. 5. Распределение вероятности времен выхода  $P(T)$  в логарифмическом масштабе;  $\delta = 0.4$  (сплошная линия),  $\delta = 0.2$  (пунктирная)

дают аномальные статистические свойства атомно-полевого взаимодействия. Распределение вероятности значений времени выхода,  $P(T)$ , приведенное на рис. 5 для двух различных значений расстройки, обнаруживает отклонения от пуассоновской статистики. Для более сильного хаоса с  $\delta = 0.4$  на начальном участке функции распределения наблюдается несколько локальных максимумов, соответствующих различным значениям числа пересечений узла  $m$ . Так, первому максимуму при  $T \approx 60$  соответствует  $m = 1$ , второму при  $T \approx 130$  соответствует  $m = 2$ , третьему —  $m = 3$ . Соответствующие значения  $T$  можно грубо оценить по величине начальной скорости атомов  $\alpha\rho_0 \approx 0.08$ , использованной в расчетах. Атомы с  $m = 1$  пролетают расстояние  $3\pi/2$  и регистрируются правым детектором за время  $T = 3\pi/0.16 \approx 60$ . Для атомов с  $m = 2$ , дважды пересекших узел и зарегистрированных левым детектором, оценка по средней скорости, равной начальной, дает заниженную величину  $T \approx 100$ , так как фактически атом замедляется вблизи вершины потенциального холма (см. траекторию второго типа на рис. 3б). На «хвосте» функции распределения спад примерно экспоненциальный. Для более слабого хаоса при  $\delta = 0.2$  спад на среднем участке функции распределения также экспоненциальный. На «хвосте» наблюдается заметное отклонение от этого закона, однако здесь слишком мало событий, чтобы аппроксимировать его какой-либо простой зависимостью. Первые локальные максимумы при  $\delta = 0.2$  наблюдаются на временах, меньших соответствующих значений для сильного хаоса, поскольку для расчета выбиралось меньшее значение начальной скорости

атомов. Вероятность появления событий с  $m \geq 3$  здесь крайне мала, и почти все атомы движутся по траекториям первого и второго типов.

В заключение этого раздела мы хотим подчеркнуть, что атомные фракталы рассмотренного типа присущи и другим моделям атомно-полевого взаимодействия с динамическим хаосом. Представим себе атом, приготовленный в основном состоянии и помещенный в резонатор, стоячая волна в котором имеет частоту, значительно отличающуюся от частоты атомного перехода, т. е.  $|\delta| \gg 1$ . В таком случае спонтанное излучение не играет практически никакой роли. Амплитудная (или фазовая) модуляция стоячей волны может вызвать хаотическое движение атома [22], квантовые свойства которого исследованы в ряде экспериментов (см., например, [23]). Адиабатически исключая амплитуду вероятности заселения верхнего уровня, получим эффективный гамильтониан трансляционного движения атома в поле амплитудно-модулированной стоячей волны

$$H_{eff} = \frac{\alpha\rho^2}{2} - \epsilon[1 - \sin(\beta\tau)] \sin^2 \xi, \quad (15)$$

где  $\epsilon$  и  $\beta$  — нормированные, соответственно, глубина и частоты модуляции. В этой гамильтоновой системе с полутора степенями свободы мы обнаружили фрактал, [24] подобный тому, что изображен на рис. 4.

С экспериментальной точки зрения более удобной представляется не схема на рис. 3а, а схема стандартных экспериментов по дифракции атомов на стационарной стоячей волне [10, 25], в которых монокинетический атомный пучок распространяется почти под прямым углом к оси стоячей волны  $\xi$ . Мы рассчитывали положение  $\xi_{out}$  и поперечный импульс  $\rho_{out}$  атомов в некоторый фиксированный момент времени после прохождения пучком зоны взаимодействия с полем. Функции рассеяния  $\xi_{out}(\xi_0)$  и  $\rho_{out}(\xi_0)$  демонстрируют самоподобие для систем как с тремя степенями свободы (3), так и с полутора (15), хотя, строго говоря, у этих функций по понятной причине не может быть сингулярностей.

## 5. КОРРЕЛЯЦИИ ОСЦИЛЛЯЦИЙ РАБИ С ДВИЖЕНИЕМ АТОМА

### 5.1. Резонансные осцилляции Раби

Изменение внутренней энергии атома со временем (осцилляции Раби) зависит не только от состояния моды в резонаторе, но и от координаты и импульса атома в поле стоячей световой волны. Из основных уравнений (3) с учетом интеграла движе-

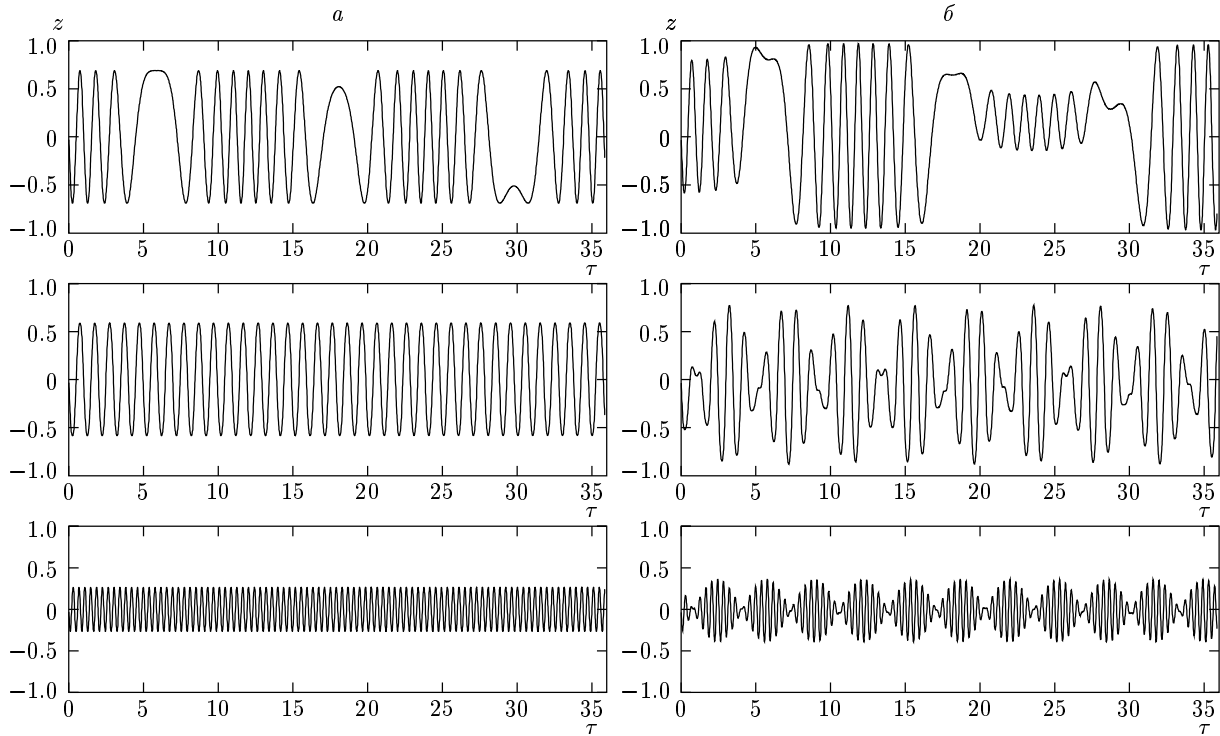


Рис. 6. Резонансные и нерезонансные осцилляции Раби для различных значений начального импульса  $\rho_0 = 270, 6300, 16000$  (сверху вниз) и расстройки  $\delta = 0$  (а), 1 (б)

ния  $R$  нетрудно получить уравнение для инверсии заселенности в случае точного резонанса ( $\delta = 0$ ):

$$\dot{z} = \mp 2\sqrt{R - Nz^2 - u_0^2} \cos[\xi(\tau)], \quad (16)$$

где  $\xi(\tau)$  — известное решение для физического маятника (7), приведенное для поставленной задачи в нашей работе [12]. Считая  $\cos[\xi(\tau)]$  известной функцией времени, запишем решение уравнения (16) в виде

$$z(\tau) = \mp \sqrt{\frac{R - u_0^2}{N}} \sin \left[ \int_0^\tau \Omega_r[\xi(\tau)] d\tau + \psi_0 \right], \quad (17)$$

где

$$\psi_0 = \mp \arcsin \left[ \sqrt{\frac{N}{R - u_0^2}} z_0 \right]$$

— начальная фаза, а абсолютная величина переменной

$$\Omega_r(\xi) = 2\sqrt{N} \cos \xi \quad (18)$$

имеет смысл мгновенной частоты Раби. Из решения (17) следует, что при  $\delta = 0$  осцилляции Раби в общем случае представляют собой частотно-модулированный сигнал с постоянной амплитудой и переменной частотой модуляции равной  $\alpha\rho(\tau)$ .

В зависимости от соотношения частоты модуляции и амплитудного значения мгновенной частоты Раби  $2\sqrt{N}$  характер осцилляций различен. Для медленных атомов при выполнении условия  $|\alpha\rho_0| \ll 2\sqrt{N}$  осцилляции Раби являются сигналом с четко выраженной частотной модуляцией (рис. 6а, верхний фрагмент). Если скорость атома настолько велика ( $\rho_0 \gg \rho_{cr}$ ), что ее изменениями можно пренебречь (приближение Рамана–Ната), т. е. положить  $\xi \approx \alpha\rho_0\tau$ , то осцилляции Раби имеют постоянную частоту модуляции  $\alpha\rho_0$ :

$$z(\tau) \approx \mp \sqrt{\frac{R - u_0^2}{N}} \sin \left[ \frac{2\sqrt{N}}{\alpha\rho_0} \sin(\alpha\rho_0\tau) + \psi_0 \right]. \quad (19)$$

По мере приближения частоты модуляции  $\alpha\rho \approx \alpha\rho_0$  к амплитудному значению частоты Раби  $2\sqrt{N}$  сигнал постепенно утрачивает характерный для медленных атомов вид, и при совпадении этих величин (для  $\alpha = 0.001$  это происходит при  $\rho_0 = 2000\sqrt{10}$ ) в нем отсутствует какая-либо модуляция (рис. 6а, средний фрагмент). При дальнейшем увеличении  $\rho_0$  частота осцилляций растет, а амплитуда уменьшается. Модуляция здесь также отсутствует. В пределе  $|\alpha\rho_0| \gg 2\sqrt{N}$  выражение (19) можно упростить, при-

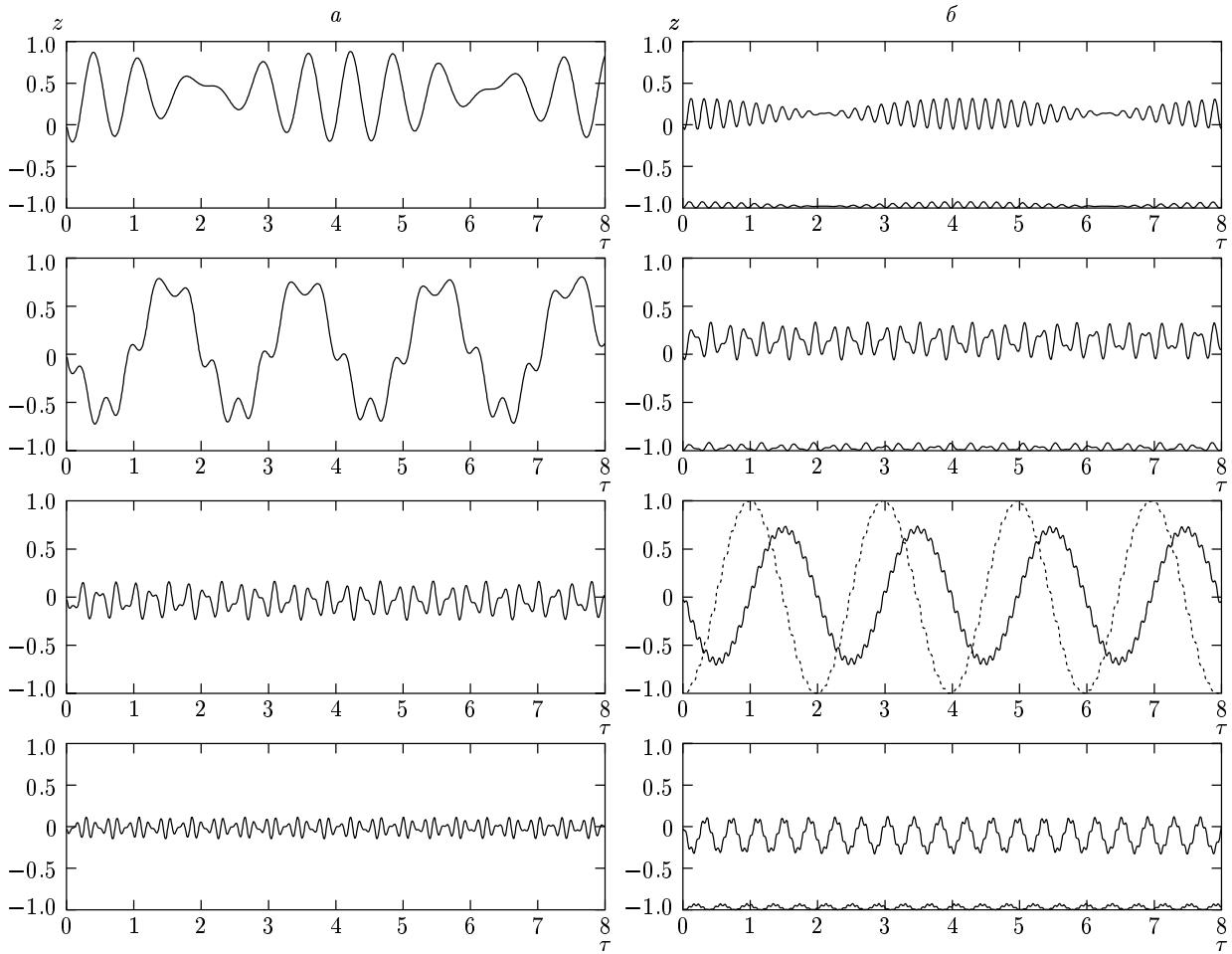


Рис. 7. Резонанс Доплера–Раби для различных значений начального импульса  $\rho_0 = 750, 8000, 32000, 48000$  (сверху вниз) и расстройки  $\delta = 8$  (а), 32 (б)

нимая во внимание малость величины  $2\sqrt{N}/\alpha\rho_0$ , и записать в виде

$$z(\tau) \approx z_0 - \frac{2v_0}{\alpha\rho_0} \sin(\alpha\rho_0\tau) - \frac{4Nz_0}{\alpha^2\rho_0^2} \sin^2(\alpha\rho_0\tau). \quad (20)$$

Следовательно, при резонансе осцилляции Раби сверхбыстрых атомов представляют собой сигнал, состоящий из двух гармонических компонент с частотами  $\alpha\rho_0$  и  $2\alpha\rho_0$  и амплитудами, убывающими с увеличением  $\rho_0$ , соответственно, как  $1/\rho_0$  и  $1/\rho_0^2$ . В наиболее простых случаях,  $z_0 = 0$  (рис. 6а, нижний фрагмент) и  $z_0 = \pm 1$ , сигнал содержит только одну гармонику.

### 5.2. Нерезонансные осцилляции Раби

При умеренных расстройках в атомно-полевой системе (3) может возникнуть хаос. Типичный хаотический сигнал осцилляций Раби приведен на

рис. 6б (верхний фрагмент). Характер частотной модуляции хаотического сигнала сходен с резонансным (рис. 6а), но амплитуда примерно постоянна лишь при движении между соседними узлами. При пересечении атомом узла она изменяется случайным образом. В этом проявляется неустойчивость решения системы (3) для внутренней степени свободы атома. Для медленных атомов ( $|\alpha\rho| \ll \max(|\delta|, 2\sqrt{N})$ ), в отличие от резонансного случая, в осцилляциях Раби присутствуют как частотная, так и амплитудная модуляции (см. верхние фрагменты рис. 6б и 7). Амплитуда осцилляций так же, как и частота, коррелирует со структурой стоячей волны и периодического потенциала. С увеличением расстройки максимальная амплитуда осцилляций уменьшается, а средняя частота растет (рис. 7). Частотная модуляция постепен-

но исчезает, а амплитудная стремится к закону  $\cos \xi$ . Для быстрых атомов (средний и нижний фрагменты рис. 6б) осцилляции Раби практически регулярны, однако сигналы при  $\delta = 1$  существенно отличаются от соответствующих резонансных осцилляций Раби, изображенных на рис. 6а. В контексте предложенного в предыдущем разделе эксперимента по обнаружению фракталов такая связь внутренней энергии атома со структурой стоячей волны позволяет легко определить число пересечений  $m$  узла по виду

$$z \approx \begin{cases} z_0 - \frac{2\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{\delta} \cos \xi \sin(\delta\tau + \varphi_0), & |\delta| \gg \max(|\alpha\rho|, 2N), \\ z_0 + \frac{2\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{\alpha\rho_0} \cos(\delta\tau + \varphi_0) \sin \xi, & |\alpha\rho_0| \gg \max(|\delta|, 2N), \alpha\rho_0^2 \gg 2\sqrt{N}, \end{cases} \quad (21)$$

где  $\varphi_0 = \arcsin(u_0/\sqrt{u_0^2 + v_0^2})$ . В обоих случаях осцилляции Раби представляют собой амплитудно-модулированные сигналы, где из двух характерных частот  $|\alpha\rho|$  и  $|\delta|$  большая выступает в качестве частоты Раби, а меньшая — в качестве частоты модуляции. В решении для быстрого атома, кроме условия  $|\alpha\rho| \gg |\delta|$ , было использовано также приближение Рамана–Ната, которое в общем случае выполняется, когда начальное значение кинетической энергии  $\alpha\rho_0^2/2$  значительно превышает удвоенную амплитуду колебаний потенциальной. Вне резонанса последняя определяется максимальным значением переменной  $u$ , которое достигается при  $z = v = 0$ , и равно  $u_{max} = \sqrt{R} \approx \sqrt{N}$ . При  $\delta = 0$  решение для быстрых атомов переходит в выражение (20). Приближенные решения (21) согласуются с результатами численных экспериментов (рис. 6, 7а).

Следует отметить, что приближения, сделанные при выводе (21), являются достаточно грубыми, так как дают тривиальные гармонические решения для переменных  $u$  и  $v$ . Более точное решение для  $u$  можно получить в приближении  $z_{max} - z_{min} \ll |z_0|$ , которое выполняется как для достаточно больших расстроек  $|\delta| \gg |\alpha\rho|$ , так и для сверхбыстрых атомов  $|\alpha\rho| \gg |\delta|$ , исключая случай  $z_0 = 0$ . Тогда справедливо приближенное уравнение, полученное из третьего и четвертого уравнений системы (3),

$$\ddot{u} + \delta^2 u \approx 2Nz_0\delta \cos \xi. \quad (22)$$

Это уравнение линейного осциллятора с заданной

сигнала осцилляций Раби.

Для внутренней энергии атома  $z$  в двух важных предельных случаях можно получить приближенные решения. Для больших расстроек,  $|\delta| \gg \gg \max(|\alpha\rho|, 2N)$ , можно в четвертом уравнении системы (3) пренебречь вторым членом, а для сверхбыстрых атомов,  $|\alpha\rho| \gg \max(|\delta|, 2N)$ , — интегралом от этого члена. В обоих случаях переменные  $u$  и  $v$  приближенно дают гармонические решения с частотой  $\delta$ , а для внутренней энергии мы имеем

вынуждающей силой и решением

$$u(\tau) \approx 2Nz_0 \sin(\delta\tau) \times \\ \times \int d\tau \cos(\delta\tau) \cos \xi - 2Nz_0 \cos(\delta\tau) \times \\ \times \int d\tau \sin(\delta\tau) \cos \xi + u_0 \cos(\delta\tau) + v_0 \sin(\delta\tau). \quad (23)$$

Для медленного атома с  $|\alpha\rho| \ll |\delta|$  решение (23) приближенно записывается в виде

$$u \approx \frac{2Nz_0}{\delta} \cos \xi + \sqrt{u_0^2 + v_0^2} \sin(\delta\tau + \varphi_0), \quad (24)$$

что позволяет аналитически подтвердить упомянутый в третьем разделе эффект дискретного изменения пространственной периодичности эффективной потенциальной энергии (рис. 1д):

$$U \approx \frac{2Nz_0}{\delta} \cos^2 \xi. \quad (25)$$

### 5.3. Резонанс Доплера–Раби

Интересный эффект, резонанс Доплера–Раби, практически не проявляющийся при малых расстройках, наблюдается вдали от атомно-полевого резонанса при импульсах атомов, удовлетворяющих условию  $|\alpha\rho| \approx |\delta|$ . Физика эффекта заключается в следующем. Представим стоячую волну в виде суммы двух бегущих навстречу волн. В системе отсчета, связанной с движущимся атомом, их частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  из-за эффекта Доплера будут различны

$$\omega_1 = \omega_f - \frac{v_a}{c}\omega_f, \quad \omega_2 = \omega_f + \frac{v_a}{c}\omega_f, \quad (26)$$

где  $v_a$  — скорость атома,  $c$  — скорость света. В связи с малостью скорости атома в сравнении со скоростью света релятивистские эффекты мы не учитываем. Считаем при этом, что начальный импульс атома достаточно велик, чтобы выполнялось приближение Рамана–Ната  $\rho \approx \rho_0$ . Перенормировав все частоты на  $\Omega_0$ , определим безразмерные расстройки частоты межуровневого перехода атома относительно каждой из бегущих волн как

$$\delta_1 = \frac{\omega_1 - \omega_a}{\Omega_0} = \delta - \alpha\rho_0, \quad \delta_2 = \frac{\omega_2 - \omega_a}{\Omega_0} = \delta + \alpha\rho_0. \quad (27)$$

Тогда, как нетрудно заметить, условие  $|\delta| = |\alpha\rho_0|$  приводит к резонансу атома с одной из бегущих волн. Если при этом  $|\delta| \gg 1$ , то взаимодействием со второй волной можно пренебречь и рассматривать атом так, как если бы он находился в поле одной бегущей волны с частотой  $\omega_1$  или  $\omega_2$ . Для определенности будем считать, что знаки перед  $\delta$  и  $\alpha\rho_0$  совпадают и резонанс наблюдается с волной, идущей в направлении движения атома, которая имеет частоту  $\omega_1$ . В поле одной бегущей волны электроно-полевая динамика атома описывается уравнениями типа Блоха [13]:

$$\dot{u} = \delta_1 v, \quad \dot{v} = -\delta_1 u + Nz, \quad \dot{z} = -v, \quad (28)$$

которые отличаются от соответствующих уравнений в (3) тем, что амплитуда бегущей волны в два раза меньше стоячей и энергия взаимодействия с ней не зависит от координаты. Решение уравнений (28) для инверсии населенности имеет вид

$$z = \frac{u_0 \delta_1}{\Omega_N^2} (1 - \cos(\Omega_N \tau)) - \frac{v_0}{\Omega_N} \sin(\Omega_N \tau) + z_0 \left( \frac{\delta_1^2}{\Omega_N^2} + \frac{N}{\Omega_N^2} \cos(\Omega_N \tau) \right), \quad (29)$$

где

$$\Omega_N = \sqrt{\delta_1^2 + N} = \sqrt{(\delta - \alpha\rho_0)^2 + N}.$$

В частности, при точном резонансе Доплера–Раби внутренняя энергия атома колеблется с частотой  $\sqrt{N}$ , а амплитуда осцилляций достигает своего наибольшего возможного значения. Численные расчеты с полными уравнениями (3) хорошо согласуются с приближенным решением (29). На втором и третьем сверху фрагментах рис. 7а и 7б, соответственно, показаны осцилляции Раби с частотой  $\sqrt{N}$  при  $\alpha\rho_0 = \delta$  для  $N = 10$  и двух значений расстройки. При удалении от резонанса частота осцилляций, как и ожидалось, возрастает. На фоне сравнительно медленных осцилляций с частотой Раби,

соответствующей взаимодействию атома с одной бегущей волной, наблюдаются быстрые осцилляции малой амплитуды, уменьшающиеся с увеличением  $\delta$ . Их наличие вызвано взаимодействием атома со второй волной, по отношению к которой расстройка  $\delta_2$  велика. Из (29) следует, что для начальных значений  $z_0 = \pm 1$ ,  $u_0 = v_0 = 0$  при резонансе Доплера–Раби внутренняя энергия осциллирует между своими максимальными значениями  $\pm 1$ , и это действительно подтверждается численными экспериментами с уравнениями (3). На рис. 7б наряду с  $z_0 = 0$  приведен также случай  $z_0 = -1$ , для которого резонансные осцилляции Раби (третий сверху фрагмент) показаны пунктирной линией. Таким образом, для движущегося атома возможны глубокие осцилляции Раби при сколь угодно большой расстройке  $\delta$  для соответствующей скорости атома.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Мы исследовали гамильтонову нелинейную динамику взаимодействия движущегося двухуровневого атома с выделенной модой высокодобротного резонатора при условии сильной атомно-полевой связи. Для тех значений расстройки, частоты отдачи атома, его начальной скорости и числа возбуждений, при которых полуклассические уравнения движения имеют хаотические решения с положительным максимальным показателем Ляпунова, рассеяние атомов в поле стоячей световой волны является фрактальным. Численно обнаружено ярко выраженное самоподобие в зависимости времени выхода атомов из резонатора от их начального импульса с фрактальной размерностью этой кривой, равной 1.8. Даже в резонаторе минимального размера (один значимый узел стоячей волны в наших численных экспериментах) имеется бесконечное множество траекторий движения атома с бесконечным временем выхода из резонатора двух типов: сепаратрисоподобные траектории, движение по которым представляет собой асимптотическое приближение к некоторым точкам конфигурационного пространства, и траектории бесконечно долгого блуждания (в нашем простейшем случае — колебания) атома в резонаторе. Появление последних связано не с очевидными ограничениями по энергии атома, в силу которых он не может преодолеть барьеры оптического потенциала, а с хаотическим обменом энергией между различными степенями свободы атомно-полевой системы. Множества значений начальных импуль-

сов атомов, порождающих асимптотические и блуждающие траектории, представляют собой соответственно счетный и несчетный фракталы.

Осцилляции Раби атома коррелируют с его движением. В случае точного атомно-полевого резонанса оптический потенциал постоянен и повторяет форму стоячей световой волны. Движение атома и осцилляции внутренней энергии атома регулярны. Для медленных атомов осцилляции Раби являются частотно-модулированным сигналом с постоянной амплитудой и выраженным уменьшением скорости изменения инверсии заселенности вблизи узлов стоячей волны. Для сверхбыстрых ( $|\alpha\rho_0| \gg \max(|\delta|, 2\sqrt{N})$ ) и далеких от резонанса, медленных ( $|\delta| \gg (|\alpha\rho_0|, 2\sqrt{N})$ ) атомов осцилляции Раби, напротив, содержат амплитудную модуляцию при примерно постоянной частоте. Вдали от резонанса при соблюдении условия  $|\alpha\rho_0| = |\delta|$  возникает резонанс Доплера–Раби — глубокие осцилляции внутренней энергии движущегося атома, обусловленные эффектом Доплера.

В заключение кратко остановимся на перспективах дальнейшего исследования сильно связанной атомно-полевого системы с гамильтонианом (1). В Приложении выведены уравнения движения Гамильтона–Шредингера (П.3) для амплитуд вероятности электронной атомной и полевой степеней свободы, связанных с классической трансляционной степенью свободы атома. Это, вообще говоря, бесконечномерная нелинейная динамическая система уравнений с бесконечным числом интегралов движения. Для фоковского состояния моды квантованного поля при  $\tau = 0$  и атома, приготовленного в произвольной суперпозиции его энергетических состояний, бесконечномерная система (П.3) редуцируется к восьми уравнениям. А для атома, приготовленного при  $\tau = 0$  в одном из энергетических состояний, система (П.3) редуцируется к полуклассическим уравнениям (3), и для такого начального состояния полностью квантованной электронно-полевого подсистемы справедливы все результаты, полученные в этой статье.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 02-02-17796, 03-02-06895, 03-02-06896).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Уравнения Гамильтона–Шредингера

Представим нашу атомно-полевою систему как гибрид, состоящий из классической подсистемы

трансляционного движения атома и полностью квантовой электронно-полевого подсистемы. Последняя в представлении Шредингера описывается вектором чистого состояния

$$|\psi(\tau)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\tau)|2, n\rangle + y_n(\tau)|1, n\rangle, \quad (\text{П.1})$$

разложенным по фоковскому базису поля  $|n\rangle$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) и базису электронных состояний атома, верхнего  $|2\rangle$  и нижнего  $|1\rangle$ . Из нестационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом (1), в котором  $\hat{x}$  и  $\hat{p}$  заменены их классическими нормированными средними  $\xi$  и  $\rho$ , нетрудно получить квантовые уравнения для следующих комбинаций комплекснозначных амплитуд вероятности обнаружения атома на верхнем уровне и  $n$  квантов в поле  $x_n$  и атома на нижнем уровне и  $n + 1$  квантов в поле:

$$\begin{aligned} u_n &= 2 \operatorname{Re}(x_n y_{n+1}^*), & v_n &= 2 \operatorname{Im}(x_n y_{n+1}^*), \\ z_n &= |x_n|^2 - |y_{n+1}|^2. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Добавив к ним классические уравнения Гамильтона для координаты и импульса атома,

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \langle \hat{H} \rangle}{\partial \rho}, \quad \dot{\rho} = -\frac{\partial \langle \hat{H} \rangle}{\partial \xi},$$

получим систему уравнений Гамильтона–Шредингера, описывающую динамику атомно-полевого гибрида:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \alpha\rho, & \dot{\rho} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} u_n \sin \xi, \\ \dot{u}_n &= \delta v_n, & \dot{v}_n &= -\delta u_n + 2\sqrt{n+1} z_n \cos \xi, \\ \dot{z}_n &= -2\sqrt{n+1} v_n \cos \xi. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Это, вообще говоря, бесконечномерная система с бесконечным числом интегралов движения  $R_n = u_n^2 + v_n^2 + z_n^2$ . Ожидаемые средние значения интересующих нас операторов выражаются через амплитуды следующим образом:

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \langle \psi(\tau) | \hat{u}(0) | \psi(\tau) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} u_n, \\ v &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} v_n, & z &= \sum_{n=0}^{\infty} z_n. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Если при  $\tau = 0$  поле в резонаторе приготовлено в фоковском состоянии с заданным числом квантов  $n$ , а атом находится в одном из своих энергетических состояний, то бесконечномерная система (П.3) редуцируется к пяти уравнениям, которые после перенормировки  $u_n$  и  $v_n$  на  $\sqrt{n+1}$  имеют тот же вид, что

и система (3), полученная формально для классического поля. Таким образом, результаты, полученные в этой работе на основе решения уравнения (3), справедливы и для полностью квантованных электронной и фоковой полевой степеней свободы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979); G. M. Zaslavsky, Phys. Rep. **80**, 157 (1981).
2. F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, Springer-Verlag, Berlin (1991).
3. G. Casati, B. V. Chirikov, J. Ford et al., Lecture Notes in Phys. **93**, 334 (1979).
4. A. Heidmann, J. M. Raimond, S. Reynaud et al., Opt. Comm. **54**, 189 (1985).
5. J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).
6. C. J. Hood, T. W. Lynn, A. C. Doherty et al., Science **287**, 1447 (2000).
7. P. Münstermann, T. Fischer, P. Maunz et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 3791 (1999).
8. *Cavity Quantum Electrodynamics*, ed. by P. R. Verma, Academ. Press, New York (1994).
9. В. Г. Миногин, В. С. Летохов, *Давление лазерного излучения на атомы*, Наука, Москва (1986).
10. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, В. П. Яковлев, *Механическое действие света на атомы*, Наука, Москва (1991).
11. С. В. Пранц, Л. Е. Коньков, Письма в ЖЭТФ **73**, 200 (2001).
12. S. V. Prants and V. Yu. Sirotkin, Phys. Rev. A **64**, 033412 (2001).
13. С. В. Пранц, Письма в ЖЭТФ **75**, 71 (2002).
14. S. V. Prants, M. Edelman, and G. M. Zaslavsky, Phys. Rev. E **66**, 046222 (2002).
15. E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).
16. М. В. Будянский, М. Ю. Улейский, С. В. Пранц, ДАН **386**, № 5, 686 (2002).
17. R. Blümel and W. P. Reinhardt, *Chaos in Atomic Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997).
18. V. Yu. Sirotkin and S. V. Prants, J. Rus. Laser Res. **21**, 585 (2000).
19. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярное и стохастическое движение*, Мир, Москва (1984).
20. G. M. Zaslavsky, *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*, Imperial Colledge Press, London (1998).
21. M. Schroeder, *Fractals, Chaos, Power Laws*, W. H. Freeman & Comp., New York (1990).
22. R. Graham, M. Schlautmann, and P. Zoller, Phys. Rev. A **45**, 19 (1992).
23. F. L. Moore, J. C. Robinson, C. Bharucha et al., Phys. Rev. Lett. **73**, 2974 (1994); H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 4111 (1998).
24. S. V. Prants and V. Yu. Argonov, E-print archives, physics/0206005.
25. P. L. Gould, G. A. Ruff, and D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **56**, 827 (1986); T. Sleator, T. Pfau, V. Balykin et al., Phys. Rev. Lett. **68**, 1996 (1992).