

# ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ МИЛНА ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА С УЧЕТОМ ПОЛЯРИЗАЦИИ

*В. Л. Кузьмин<sup>a\*</sup>, Е. В. Аксенова<sup>b</sup>*

<sup>a</sup> *Санкт-Петербургский торгово-экономический институт  
194021, Санкт-Петербург, Россия*

<sup>b</sup> *Институт высокопроизводительных вычислений и баз данных  
198005, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 25 октября 2002 г.

В рамках метода Винера–Хопфа получено обобщенное решение Милна для скалярного и электромагнитного полей с учетом анизотропии однократного рассеяния. Для скалярного поля найденное решение для временной корреляционной функции и интерференционной составляющей обратного рассеяния находится в хорошем согласии с известными экспериментальными данными. Построено решение задачи Милна для электромагнитного поля. С учетом анизотропии в  $P_1$ -приближении решено обобщенное уравнение Милна для величины, описывающей степень деполяризации рассеянного излучения. Показано, что деполяризация рассеянного излучения при больших значениях анизотропии может менять знак.

PACS: 42.25.Bs, 42.25.Dd, 42.25.Ja

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании когерентных и корреляционных эффектов в сильно неоднородных средах важную роль играет, во-первых, ограниченность среды, так как рассеянное излучение в основном формируется в приграничном слое, и, во-вторых, пространственный размер неоднородностей, так как для возникновения режима многократного рассеяния в ограниченном диэлектрике размер неоднородностей, на которых происходит рассеяние, должен быть сравним с длиной волны (см. обзор [1]). Теоретической основой описания эффектов многократного рассеяния является представление о диффузионном механизме переноса излучения в среде со случайной диэлектрической проницаемостью [2]. Диффузионное приближение качественно воспроизводит картину: оно дает треугольную форму угловой зависимости пика обратного когерентного рассеяния [3, 4], уменьшение ширины пика с ростом анизотропии однократного рассеяния [5, 6], линейную зависимость временной корреляционной функ-

ции от корня квадратного времени [7, 8]. Однако использование диффузионного приближения, справедливое вдали от границы, по крайней мере на самой границе, где оно дополняется граничными условиями типа смешанных условий Дирихле [2], не является оправданным (см. [1]).

В случае анизотропной индикатрисы однократного рассеяния для учета конечности размеров рассеивателей проводят разложение по сферическим функциям. В этом отношении диффузионное приближение является  $P_1$ -приближением, так как оно соответствует учету полиномов Лежандра первого порядка. Такой учет анизотропии приводит к тому, что характерным пространственным масштабом становится транспортная длина,  $l^* = l_{sc}(1 - \overline{\cos\theta})^{-1}$ , вместо длины свободного пробега фотона, или длины рассеяния  $l_{sc}$ . Здесь  $\overline{\cos\theta}$  — среднее значение косинуса угла рассеяния, которое является основным параметром, описывающим анизотропию однократного рассеяния.

В работах [9–12] решение Милна было обобщено для описания обратного когерентного рассеяния для случая изотропной индикатрисы, или фазовой функции. В работе [13] проблема много-

\*E-mail: vladimir.kuzmin@paloma.spbu.ru

кратного рассеяния от полупространства решалась в пределе сильно вытянутой вперед индикатрисы,  $1 - \cos \theta \ll 1$ . Отметим, что результат не содержит, кроме  $\cos \theta$ , других параметров анизотропии вида  $\cos^n \theta$ , независимо от формы индикатрисы. В работах [14, 15] в рамках метода Винера–Хопфа было получено решение для анизотропного однократного рассеяния для временной корреляционной функции в  $P_2$ -приближении и для когерентного обратного рассеяния в  $P_1$ -приближении. Сравнение полученных результатов с известными данными по измерению временной корреляционной функции свидетельствует о хорошем согласии с экспериментом.

В указанных работах рассматривалось скалярное поле в предположении, что многократное рассеяние полностью деполаризует падающий свет и поляризационные эффекты можно не учитывать. Однако экспериментально поляризационная зависимость сохраняется [3, 4]; так, пик обратного рассеяния для деполаризованной компоненты в несколько раз меньше пика поляризованной компоненты и не имеет треугольной формы. Когерентные эффекты в жидких кристаллах [16] также сильно зависят от поляризации падающего и рассеянного света.

Впервые эффект когерентного обратного рассеяния для электромагнитного поля рассматривался в работе [17] для изотропных рассеивателей при учете границы методом зеркальных отображений. В работах [18–22] были получены точные решения граничной задачи для многократного рэлеевского рассеяния электромагнитного поля. В работах [18, 19] векторное уравнение переноса было решено для рассеяния строго назад, с учетом интерференционной составляющей, а в работах [20, 21] были рассчитаны угловые зависимости пика обратного рассеяния с учетом поляризации. В работе [22] также для случая рэлеевских рассеивателей была решена задача для временной корреляционной функции.

В настоящей работе метод Винера–Хопфа применен для решения задачи о многократном рассеянии от полупространства для электромагнитного поля. Получено решение для поляризованной и деполаризованной компонент временной корреляционной функции для изотропной индикатрисы. В случае неполяризованного падающего излучения результат для электромагнитного поля, как и предполагается, незначительно отличается от результата, полученного в рамках скалярной теории. Однако в случае поляризованного света поведение поляризованной компоненты значительно отличается от поведения деполаризованной. Найдено точное решение для разности поляризованной и деполаризованной компонент,

описывающей степень деполаризации при учете анизотропии однократного рассеяния. Временная зависимость оказывается достаточно сильной, несмотря на ее линейный характер. В рамках полученного точного решения удалось описать зависимость компонент рассеянного света от угла падения.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 приведено уравнение Бете–Солпитера для парных корреляций полей при рассеянии средой, занимающей полупространство, а также приведены лестничный и интерференционный вклады в корреляционную функцию. В разд. 3 получено решение в  $P_1$ -приближении для скалярного поля и на его основе исследована временная зависимость корреляционной функции. В разд. 4 это решение применено для исследования угловой зависимости обратного когерентного рассеяния. В разд. 5 получено решение для поляризованной и деполаризованной компонент временной корреляционной функции для изотропной индикатрисы. В разд. 6 найдено решение для разности поляризованной и деполаризованной компонент в случае анизотропной индикатрисы.

## 2. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Перенос электромагнитного излучения в случайной среде описывается интегральным уравнением, известным как уравнение Бете–Солпитера,

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t | \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = & k_0^4 \tilde{G}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i, t) \delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \hat{I} + \\ & + k_0^4 \int d\mathbf{R}_3 \tilde{G}(-\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_{23}, t) \hat{\Lambda}(R_{23}) \times \\ & \times \hat{\Gamma}(\mathbf{R}_3, \mathbf{R}_1, t | \mathbf{k}_{23}, \mathbf{k}_i). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь тензорная функция  $\hat{\Gamma}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t | \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$ , или пропагатор уравнения Бете–Солпитера, описывает перенос пары плоских комплексно-сопряженных полей с волновым вектором  $\mathbf{k}_i$ , сдвинутых по времени на интервал  $t$ , из точки  $\mathbf{R}_1$  в точку  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{k}_{23} = k_0 \mathbf{R}_{23} / R_{23}$ ,  $\mathbf{R}_{23} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3$ . В результате многократного рассеяния в точке  $\mathbf{R}_2$  возникает пара комплексно-сопряженных полей с волновым вектором  $\mathbf{k}_f$ . Волновое число  $k_0 = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны,  $k_f = k_i = k = nk_0$  — волновое число в среде,  $n$  — показатель преломления среды:  $n = n_1 + in_2$ ,  $n_1$  и  $n_2$  — соответственно, вещественная и мнимая части  $n$ ,  $(2n_2k_0)^{-1} = l$ , где  $l$  — общая длина экстинкции. Величина  $\tilde{G}(\mathbf{q}, t)$  представляет собой фурье-образ парного коррелятора флуктуаций диэлек-

трической проницаемости  $\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}, t) - \langle \varepsilon(\mathbf{r}, t) \rangle$ , на которых и происходит рассеяние

$$\tilde{G}(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{(4\pi)^2} \times \int d\mathbf{r} \langle \delta\varepsilon(0, 0) \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) \rangle \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}). \quad (2.2)$$

При  $t = 0$  величина  $\tilde{G}(\mathbf{q}, 0) = G_0(\mathbf{q})$  описывает сечение однократного рассеяния, или фазовую функцию, с передачей импульса  $q = 2k \sin(\theta/2)$ , где  $\theta$  — угол рассеяния. Будем рассматривать экспоненциальную форму распада флуктуаций диэлектрической проницаемости

$$\tilde{G}(\mathbf{q}, t) = \tilde{G}_0(\mathbf{q}) \exp(-\gamma_q t).$$

В случае броуновской диффузии

$$\gamma_q = Dq^2 = \frac{2(1 - \cos \theta)}{\tau},$$

$\tau = (Dk^2)^{-1}$  — характерное время диффузии броуновской частицы на расстоянии порядка  $\lambda$ .

Тензор четвертого ранга  $\hat{\Lambda}(\mathbf{R})$

$$\Lambda_{\alpha\beta\mu\nu} = \left( \hat{\Gamma} - \frac{\mathbf{R} \otimes \mathbf{R}}{R^2} \right)_{\alpha\mu} \otimes \left( \hat{\Gamma} - \frac{\mathbf{R} \otimes \mathbf{R}}{R^2} \right)_{\beta\nu} \frac{\exp(-R/l)}{R^2} \quad (2.3)$$

представляет собой прямое произведение комплексно-сопряженной пары функций Грина волнового уравнения Максвелла в дальней зоне и описывает преобразование пары полей с поляризациями  $\mu$  и  $\nu$  в пару с поляризациями  $\alpha$  и  $\beta$  в результате одного акта рассеяния. Оптическая теорема связывает сечение рассеяния и длину рассеяния, или длину свободного пробега фотона между двумя актами упругого рассеяния,

$$\frac{2}{3} k_0^4 \int d\Omega_f \tilde{G}_0(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) = \frac{1}{l_{sc}}. \quad (2.4)$$

Общая длина экстинкции  $l$  и длина рассеяния  $l_{sc}$  связаны соотношением  $l^{-1} = l_{sc}^{-1} + l_a^{-1}$ , где  $l_a$  — характерная длина поглощения, обусловленная неупругим рассеянием. Для рассматриваемых сред  $l_a \gg l$  и отношение  $l/l_{sc}$  близко к единице.

Уравнение (2.1) записано в приближении слабого рассеяния,  $\lambda \ll l$ . Приближение слабого рассеяния называют также лестничным приближением, поскольку формально оно возникает в результате суммирования ряда по кратностям рассеяния в виде суммы лестничных фейнмановских диаграмм. В

связи с этим функцию  $\hat{\Gamma}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  называют лестничным пропагатором.

Наблюдаемые величины — это корреляторы, или моменты поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и его флуктуаций  $\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle$ . Первый момент представляет собой среднее макроскопическое поле  $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle$ ; второй момент, или функция когерентности, определяет корреляционную функцию поля  $\langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$ ; четвертый момент — корреляционную функцию интенсивности рассеянного излучения

$$\langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \cdot \delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle.$$

Основной вклад в корреляционную функцию интенсивности описывается гауссовым приближением [23], в котором коррелятор четвертого порядка представляется в виде произведений парных корреляторов:

$$\begin{aligned} & \langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \cdot \delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \\ & = \langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \cdot \delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle + \\ & + |\langle \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle|^2. \quad (2.5) \end{aligned}$$

В обычной геометрии эксперимента, когда на систему падает плоская волна вида

$$\mathbf{E}_{in}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^0 \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t),$$

а рассеянное излучение наблюдается на большом расстоянии  $r$  от рассеивающей системы, каждая пара полей дает множитель  $r^{-2} E_{\alpha_1}^0 E_{\alpha_2}^0$ , где  $E_{\alpha}^0$  — амплитуда падающей волны с поляризацией  $\alpha$ .

Определим временную корреляционную функцию поля, наблюдаемую на большом расстоянии  $r$  от рассеивающей среды, в виде

$$\begin{aligned} & \langle \delta E_{\phi}(\mathbf{r}, t) \delta E_{\phi}^*(\mathbf{r}, 0) \rangle = \\ & = (1/r^2) T_{\phi\beta_1} T_{\phi\beta_2} C_{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2}^{(E)}(t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) E_{\alpha_1}^0 E_{\alpha_2}^0, \quad (2.6) \end{aligned}$$

где  $\phi$  и  $\alpha$  — поляризации рассеянного и падающего света, соответственно, с волновыми векторами  $\mathbf{k}_f$  и  $\mathbf{k}_i$ , оператор  $\hat{T} = \hat{\Gamma} - \mathbf{k}_f \otimes \mathbf{k}_f k^{-2}$  обеспечивает поперечность рассеянной волны.

При  $t = 0$  эта функция описывает интенсивность рассеянного излучения. В общем случае, при  $t \neq 0$ , квадратичная форма этой функции описывает корреляционную функцию интенсивности. Заметим, что в функции  $\hat{C}^{(E)}(t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  опущен множитель  $\exp(-i\omega t)$ , где  $\omega$  — частота падающей монохроматической волны, исчезающий при составлении квадратичной формы (2.5).

Основной вклад в рассеянное излучение, как уже отмечалось, дают лестничные диаграммы. Физически они описывают две последовательные цепочки процессов рассеяния, одинаковые для обоих полей  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$  и  $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)$ . В силу тождественности этих двух последовательностей рассеяния фазовые соотношения между полями не изменяются и, таким образом, лестничные диаграммы описывают некогерентную составляющую. При углах рассеяния, близких к  $180^\circ$ , становится сравнимой с основной, лестничной, интерференционная составляющая, обусловленная циклическими, или веерными [24, 25], диаграммами. Обозначая их вклады соответственно верхними индексами  $L$  и  $V$ , имеем

$$\widehat{C}^{(E)}(t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \widehat{C}^{(L)}(t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) + \widehat{C}^{(V)}(t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i). \quad (2.7)$$

Пусть рассеивающая среда занимает полупространство  $z > 0$ , где  $z$  — декартова координата, нормальная к границе среды. В этом случае лестничная и интерференционная составляющие функции когерентности имеют, соответственно, вид [5, 6, 26]

$$C_{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2}^{(L)}(t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \Gamma_{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \times \exp\left(-\frac{z_1}{l \cos \theta_i} - \frac{z_2}{l \cos \theta_f}\right), \quad (2.8)$$

$$C_{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2}^{(V)}(t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \left[ \Gamma_{\beta_1\alpha_2\alpha_1\beta_2} \left( \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t \left| \frac{\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i}{2}, \frac{\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f}{2} \right. \right) - k_0^4 \tilde{G}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i, t) \delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \delta_{\alpha_1\beta_1} \delta_{\alpha_2\beta_2} \right] \times \exp \left[ -\frac{z_1 + z_2}{2l} \left( \frac{1}{\cos \theta_i} + \frac{1}{\cos \theta_f} \right) + in_1 k_0 (z_1 - z_2) (\cos \theta_i - \cos \theta_f) + in_1 k_0 (x_1 - x_2) (\sin \theta_i - \sin \theta_f) \right], \quad (2.9)$$

где  $\theta_i$  — угол падения,  $\theta_f$  — угол рассеяния, отсчитываемый от направления, обратного оси  $z$ . Падающий и рассеянный лучи лежат в плоскости  $xz$ .

Поскольку однократное рассеяние не дает вклада в интерференционную составляющую обратного рассеяния, в подынтегральном выражении (2.9) соответствующий ему член вычитается. Легко видеть,

что при рассеянии строго назад, при  $\mathbf{k}_f = -\mathbf{k}_i$ , поляризованная составляющая интерференционного вклада  $\widehat{C}^{(V)}(t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  в точности совпадает с поляризованной составляющей лестничного вклада  $\widehat{C}^{(L)}(t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  до вычитания вклада однократного рассеяния; деполаризованные же компоненты не совпадают.

### 3. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ: ВРЕМЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ В $P_1$ -ПРИБЛИЖЕНИИ

Полагая, что в результате многократного рассеяния происходит полная деполаризация излучения, задачу о векторном электромагнитном поле заменяют на более простую задачу о скалярном поле. В этом случае тензорные величины в уравнении (2.1) заменяются на скаляры, тензорные диады в (2.3) на единицу, а оптическая теорема принимает вид

$$k_0^4 \int d\Omega_f \tilde{G}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i, 0) = l_{sc}^{-1}. \quad (3.1)$$

Принимая во внимание цилиндрическую симметрию рассматриваемой задачи, определим двумерное фурье-преобразование по поперечным переменным  $\mathbf{R}_\perp = (x, y)$  и преобразование Лапласа по переменным  $z_1$  и  $z_2$  как

$$\tilde{\Gamma}_{\mathbf{q}}(s_f, s_i, t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \int d\mathbf{R}_{2\perp} \int_0^\infty dz_2 \int_0^\infty dz_1 \Gamma(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \times \exp \left[ -i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)_\perp - \frac{s_f z_2 + s_i z_1}{l} \right]. \quad (3.2)$$

Поскольку вектор входящей волны  $\mathbf{k}_i$  сохраняется в правой и левой частях (2.1), достаточно учесть явно зависимость только от выходящей волны  $\mathbf{k}_f$  в левой части и  $\mathbf{k}_{23}$  в правой части скалярного аналога уравнения Бете–Солпитера. Ограничиваясь в разложении по сферическим функциям полиномами Лежандра первого порядка, т. е.  $P_1$ -приближением, представим функцию (3.2) в виде

$$\tilde{\Gamma}_{\mathbf{q}}(s_f, s_i, t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \approx \frac{1}{4\pi} \left[ \gamma_{\mathbf{q}}^{(0)}(s_f, s_i, t) + \gamma_{\mathbf{q}}^{(1)}(s_f, s_i, t) \cos \theta + \tilde{q} \gamma_{\mathbf{q}}^{(11)}(s_f, s_i, t) \cos \theta_t \right], \quad (3.3)$$

где  $\cos \theta = (\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{e}_3) k^{-1} = -\cos \theta_f$ ,  $\mathbf{e}_3$  — единичный орт вдоль оси  $z$ ,  $\cos \theta_t = (\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{q})(kq)^{-1}$ ,  $\tilde{q} = ql$ .

Здесь  $\cos \theta$  и  $\cos \theta_i$  являются, соответственно, полиномом и присоединенным полиномом Лежандра первого порядка. Проводя преобразование (3.2), подставляя разложение (3.3) в скалярный аналог уравнения Бете–Солпитера и используя условие ортогональности полиномов Лежандра, получим систему уравнений при малых значениях поперечной составляющей волнового вектора  $\tilde{q}$ :

$$\left[ 1 - g_0 \frac{l}{l_{sc}} m_0(w) \right] \gamma_{\mathbf{q}}^{(0)}(s, s_i, t) + g_0 s m_1(w) \gamma_{\mathbf{q}}^{(1)}(s, s_i, t) - g_0 \tilde{q}^2 m_1(w) \gamma_{\mathbf{q}}^{(11)}(s, s_i, t) = g_0 a_0(\mathbf{q}, s, s_i, t), \quad (3.4)$$

$$3g_1 s m_1(w) \gamma_{\mathbf{q}}^{(0)}(s, s_i, t) + \left\{ 1 - 3g_1 \left[ m_1(w) - \frac{\tilde{q}^2}{2} (m_1(w) - 3m_2(w)) \right] \right\} \times \gamma_{\mathbf{q}}^{(1)}(s, s_i, t) - 3g_1 s \tilde{q}^2 [m_1(w) - 3m_2(w)] \gamma_{\mathbf{q}}^{(11)}(s, s_i, t) = 3g_1 a_1(\mathbf{q}, s, s_i, t), \quad (3.5)$$

$$3g_1 m_1(w) \gamma_{\mathbf{q}}^{(0)}(s, s_i, t) + 3g_1 s [m_1(w) - 3m_2(w)] \gamma_{\mathbf{q}}^{(1)}(s, s_i, t) + \left\{ 1 - 3g_1 m_1(w) - \frac{3}{2} g_1 s^2 [m_1(w) - 3m_2(w)] \right\} \times \gamma_{\mathbf{q}}^{(11)}(s, s_i, t) = 3g_1 a_{11}(\mathbf{q}, s, s_i, t), \quad (3.6)$$

где

$$m_0(w) = \frac{1}{2w} \ln \frac{1+w}{1-w}, \quad m_1(w) = \frac{1}{w^2} (m_0(w) - 1), \\ m_2(w) = \frac{1}{w^2} \left( m_1(w) - \frac{1}{3} \right), \quad w^2 = s^2 - \tilde{q}^2.$$

Параметры  $g_0$  и  $g_1$  описывают временную эволюцию флуктуаций диэлектрической постоянной. В случае диффузионного механизма затухания случайных неоднородностей среды для временных интервалов  $t$ , значительно меньших характерного времени диффузии,  $t \ll \tau$ , имеем

$$g_0 = g_0(t) \approx 1 - 2 \frac{t}{\tau} (1 - \overline{\cos \theta}), \quad (3.7)$$

$$g_1 = g_1(t) \approx \overline{\cos \theta} - 2 \frac{t}{\tau} (\overline{\cos \theta} - \overline{\cos^2 \theta}), \quad (3.8)$$

где  $\overline{\cos^n \theta}$  —  $n$ -й момент косинуса угла рассеяния, усредненный по индикатрисе,

$$\overline{\cos^n \theta} = \frac{\int \tilde{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i, 0) \cos^n \theta d\Omega_{\mathbf{k}}}{\int \tilde{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i, 0) d\Omega_{\mathbf{k}}}. \quad (3.9)$$

Эти величины характеризуют степень анизотропии однократного рассеяния. Из выражений (3.7) и (3.8) видно, что малым параметром вместо величины  $t/\tau$  является величина  $(t/\tau)(1 - \overline{\cos \theta})$ , что позволяет использовать полученные результаты в расширенном временном интервале. В  $P_1$ -приближении ограничиваются учетом только  $\overline{\cos \theta}$  — среднего косинуса угла рассеяния. Правые части системы (3.4)–(3.6) представляют собой интегралы от искомым функций. Отбрасывая члены порядка  $\tilde{q}^2$ , имеем

$$a_0(\mathbf{q}, s, s_i, t) = \frac{1}{s + s_i} - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{ds'}{s'(s' - s)} \gamma_{\mathbf{q}}(s', s_i, t), \quad (3.10)$$

$$a_1(\mathbf{q}, s, s_i, t) = \frac{1}{s_i(s + s_i)} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{ds'}{s'^2(s' - s)} \gamma_{\mathbf{q}}(s', s_i, t), \quad (3.11)$$

$$a_{11}(\mathbf{q}, s, s_i, t) = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{ds'}{s'^3(s' - s)} \left[ \gamma_{\mathbf{q}}(s', s_i, t) + \frac{1}{2} (s'^2 - 1) (\gamma_{\mathbf{q}}^{(1)}(s', s_i, t) - \gamma_{\mathbf{q}}^{(11)}(s', s_i, t)) \right], \quad (3.12)$$

где

$$\gamma_{\mathbf{q}}(s, s_i, t) = \gamma_{\mathbf{q}}^{(0)}(s, s_i, t) - \frac{1}{s} \gamma_{\mathbf{q}}^{(1)}(s, s_i, t). \quad (3.13)$$

При написании системы уравнений (3.4)–(3.6) мы пренебрегли собственным поглощением, полагая  $l/l_{sc} \approx 1$ , за исключением первого слагаемого в (3.5), где малым является весь коэффициент при величине  $\gamma_{\mathbf{q}}^{(0)}(s, s_i, t)$ , при  $w \rightarrow 0$ .

Перейдем к рассмотрению случая  $\mathbf{q} = 0$ ,  $t \neq 0$ , что дает решение для временной корреляционной функции. Временная корреляционная функция изучается вне узкого, в несколько миллирадиан, конуса обратного когерентного рассеяния, где можно не учитывать интерференционную составляющую  $C^{(V)}(t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$ . В этом случае функция (3.13) при  $\mathbf{q} = 0$  определяет временную корреляционную функцию

$$C^{(E)}(t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \frac{S}{4\pi} \gamma_{\mathbf{q}=0}(s_f, s_i, t),$$

где  $S$  — площадь освещенной поверхности. Составляя линейную комбинацию уравнений (3.10)

и (3.11), получаем замкнутое уравнение относительно функции  $\gamma_0(s, s_i, t) = \gamma_{\mathbf{q}=0}(s, s_i, t)$ :

$$\psi(t, 0, s)\gamma_0(s, s_i, t) = g_0 a_0(0, s, s_i, t) - \frac{3}{s} g_1(1 - g_0) a_1(0, s, s_i, t). \quad (3.14)$$

Определяющую роль при решении системы уравнений (3.4)–(3.6) играет детерминант

$$\psi(t, \mathbf{q}, s) = (1 - 3g_1 m_1(w)) \left( 1 - g_0 + \frac{l}{l_a} \right) - g_0 s^2 m_1(w). \quad (3.15)$$

Нуль детерминанта  $s^*$  в комплексной плоскости  $s$  определяется из трансцендентного уравнения. В области малых времен при  $\tilde{q} = 0$  нуль детерминанта имеет вид

$$s^* \approx \sqrt{(1 - \cos \theta) \left[ 6 \frac{t}{\tau} (1 - \cos \theta) + \frac{3l}{l_a} \right]}. \quad (3.16)$$

Именно значение этой величины и определяет особенности временной корреляционной функции, обусловленные диффузионным характером переноса излучения в сильно неоднородной среде.

С учетом того, что интегралы, входящие в выражения для  $a_0(0, s, s_i, t)$  и  $a_1(0, s, s_i, t)$ , содержат только функцию  $\gamma_0(s', s_i, t)$ , уравнение (3.14) представляет собой замкнутое интегральное уравнение. Это уравнение подобно уравнению Милна для изотропной фазовой функции и решается методом Винера–Хопфа. Действительно, функция  $\psi(t, 0, s)$  может быть представлена как отношение функции

$$s(s + s_i) \left[ g_0 a_0(0, s, s_i, t) - \frac{3}{s} g_1(1 - g_0) a_1(0, s, s_i, t) \right],$$

регулярной в левой полуплоскости,  $\text{Re } s < s_i$ , к функции  $s(s + s_i)\gamma_0(s, s_i, t)$ , регулярной в правой полуплоскости,  $\text{Re } s > 0$ , комплексной плоскости  $s$ . В силу четности  $\psi(t, 0, s)$  по  $s$  она может быть представлена также как отношение функций, регулярных справа и слева:

$$\psi(t, 0, s) = \frac{h_+(s)}{h_-(s)}.$$

Тогда произведения этих функций

$$h_+(s)s(s + s_i)\gamma_0(s, s_i, t) = h_-(s)s(s + s_i) \times \left[ g_0 a_0(0, s, s_i, t) - \frac{3}{s} g_1(1 - g_0) a_1(0, s, s_i, t) \right],$$

должны быть регулярны повсюду и по обобщенной теореме Лиувилля представляют собой полином по  $s$  первого порядка. Именно в замене константы на полином первого порядка и состоит отличие от классического решения Милна для изотропной фазовой функции; это отличие возникает из-за необходимости дополнительного умножения уравнения (3.14) на  $s$  для устранения особенностей в правой и левой частях при  $s = 0$ .

В результате решение уравнения (3.14) можно представить в виде

$$\gamma_0(s, s_i, t) = \frac{(C_1 + C_2 s)\sqrt{3}}{s(s + s^*)(s + s_i)} \exp[-J_0(t, s)], \quad (3.17)$$

где функция  $J_0(t, s) = J_{\mathbf{q}=0}(t, s)$  может быть названа обобщенной функцией Чандрасекара и имеет вид

$$J_{\mathbf{q}}(t, s) = \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{s^2 + s'^2} \ln \left[ \frac{3\psi(t, \mathbf{q}, is')}{s^{*2} + s'^2} \right]. \quad (3.18)$$

При  $t = 0$  члены уравнения (3.14), содержащие параметр  $\overline{\cos \theta}$ , описывающий анизотропию индикатрицы, исчезают и решение (3.17) переходит в известное решение Милна:

$$\gamma_0(s, s_i, 0) \equiv \gamma_M(s, s_i) = \frac{3 \exp[-J_0(0, s) - J_0(0, s_i)]}{s_i(s_i + s)s}, \quad (3.19)$$

т. е. интенсивность рассеянного назад света не зависит от анизотропии однократного рассеяния.

Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  постоянны относительно  $s$ . Подставляя в общем случае, при  $t \neq 0$ , полученное решение (3.17) в интегральное уравнение (3.14), раскладывая последнее в ряд по степеням  $s$ , получим последовательность уравнений, достаточных для определения этих коэффициентов. Избыточные уравнения удовлетворяются автоматически, в чем нетрудно убедиться численно.

Вид правой части (3.14) при  $s \rightarrow -s_i$  позволяет найти тождество

$$C_2 - \frac{C_1}{s_i} = \frac{\sqrt{3}}{s_i + s^*} \exp[-J_0(t, s_i)] \times \left[ g_0 + \frac{3g_1}{s_i^2} (1 - g_0) \right]. \quad (3.20)$$

Еще одно уравнение для определения параметров  $C_1$  и  $C_2$  найдем, подставляя решение (3.17) в уравнение (3.14) и полагая  $s = 0$ ,

$$C_1 = -\frac{\sqrt{3}g_1}{1 - g_1} s_i s^* a_1(0, 0, s_i, t). \quad (3.21)$$

Таким образом, (3.20) и (3.21) являются замкнутой системой уравнений, позволяющих найти параметры  $C_1$  и  $C_2$ . Видно, что параметр  $C_1$  является малой величиной, исчезающей в пределе  $t = 0$ , и, следовательно, при вычислении параметра  $a_1(0, 0, s_i, t)$ , полагая в подинтегральном выражении  $t = 0$ , можно использовать решение Милна.

В области малых временных интервалов основная особенность поведения временной корреляционной функции определяется параметром  $s^*$ , поскольку он является линейной функцией  $\sqrt{t/\tau}$ , в то время как функция Чандрасекара линейна по  $t/\tau$ . По этой причине решение в первом порядке по  $\sqrt{t/\tau}$  не изменится, если в исходном уравнении (3.14) пренебречь членами порядка  $(t/\tau)s^n$ ,  $n \geq 2$ .

Многократный характер переноса излучения в случайно-неоднородной среде приводит к появлению неаналитической зависимости от времени вида

$$C^{(E)}(t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \propto 1 - \kappa \sqrt{\frac{6t}{\tau}}, \quad (3.22)$$

где коэффициент начального наклона  $\kappa$  определяет скорость убывания временных корреляций и является важным экспериментально определяемым параметром.

В первом порядке по параметру  $s^*$  получаем

$$C_1 = -\frac{\sqrt{3}g_1s^*}{s_i(1-g_1)} \exp[-J_0(0, s_i)] + O\left(\frac{t}{\tau}\right). \quad (3.23)$$

Тогда выражение (3.20) дает  $C_2 = C_2^{(1)} + O(t/\tau)$ , где

$$C_2^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{s_i} \exp[-J_0(0, s_i)] \left[ 1 - \frac{s^*g_1}{s_i(1-g_1)} \right]. \quad (3.24)$$

В результате в области малых времен для временной корреляционной функции поля получаем

$$C^{(E)}(t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \approx \frac{3}{s_i s_f (s_f + s_i)} \times \exp[-J_0(0, s_i) - J_0(0, s_f)] \left( 1 - \kappa \sqrt{\frac{6t}{\tau}} \right), \quad (3.25)$$

где

$$\kappa = \frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_f} = \cos \theta_i + \cos \theta_f$$

представляет собой теоретическое значение коэффициента наклона, зависящее от углов падения и рассеяния.

При нормальном падении,  $\cos \theta_i = 1$ , коэффициент наклона  $\kappa = 2$  вне зависимости от анизотропии индикатрисы однократного рассеяния, в согласии с известными экспериментальными данными [8].

Это означает, что в  $P_1$ -приближении начальная временная зависимость имеет универсальный характер, а специфика рассеивающей системы при этом содержится только в параметре  $\tau = 1/Dk^2$ .

Мы рассчитали временную зависимость корреляционной функции для различных углов обратного рассеяния. Зависимость от параметра  $\overline{\cos \theta}$  в единицах измерения  $\sqrt{t/\tau}$  достаточно слабая. Рассчитанные результаты достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными [8].

Затухание, обусловленное неупругим рассеянием и приводящее к конечному значению длины  $l_a$ , сводится, как видно из (3.4), к замене параметра

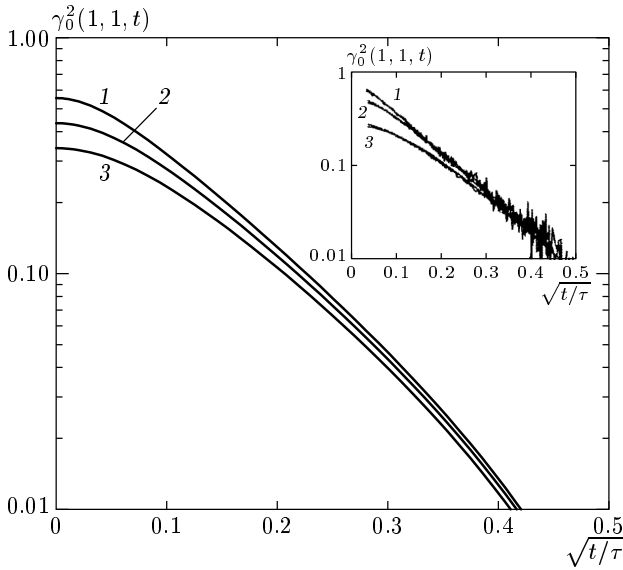
$$1 - g_0 \rightarrow (1 - \overline{\cos \theta}) \left( \frac{2t}{\tau} + \frac{l^*}{l_a} \right),$$

что в результате приводит к зависимости малого параметра  $s^*$  от отношения  $l^*/l_a$ :

$$s^* \approx (1 - \overline{\cos \theta}) \sqrt{6\frac{t}{\tau} + \frac{3l^*}{l_a}}, \quad (3.26)$$

где  $l^* = l/(1 - \overline{\cos \theta})$  — транспортная длина. Таким образом, линейный закон убывания временных корреляций с учетом уже упомянутого условия  $(1 - \overline{\cos \theta})t\tau^{-1} \ll 1$  может наблюдаться в интервале  $l^*/l_a \ll t/\tau \ll l^*/l$ . Используя значения  $\tau \approx 3.7$  мс,  $\lambda = 0.488$  мкм, диаметра частиц  $d = 0.497$  мкм, концентрации суспензии  $c = 0.01$  и  $l^* \approx 140$  мкм, взятые из работы [8] и применяя оценку  $l_a \approx 1$  м, рассчитанную на основе этих данных в приближении Рэлея–Ганса, получим  $t \gg 0.26$  мс, или  $\sqrt{t/\tau} \gg 10^{-2}$ . Однако отклонения в указанной работе начинаются со значительно больших значений  $t/\tau$ . Это отклонение объясняется конечностью толщины образца; с уменьшением толщины  $L$  отклонение увеличивается (см. вставку на рис. 1). Будем считать, что для ограниченного слоя толщиной  $L$  параметр  $l_a$  в приведенных формулах следует заменить на величину порядка  $L_{eff}$ . На рис. 1 представлена корреляционная функция интенсивности в зависимости от времени для трех значений эффективной толщины слоя; мы положили  $L_{eff} = \alpha L$  и выбрали  $\alpha = 10$ . Значения толщин выбраны такими же, как в работе [8]. Следует отметить близость рассчитанных и экспериментальных кривых.

До сих пор мы рассматривали ситуацию, когда и падающее, и рассеянное излучения представляют собой плоские волны с заданными волновыми векторами. При проведении измерений с использованием волоконнооптических световодов и широкоугольных объективов реализуется ситуация, когда источник или приемник света, или оба вместе, следует



**Рис. 1.** Нормированная корреляционная функция интенсивности  $\gamma_0^2(1, 1, t)$  в зависимости от времени для трех значений эффективной толщины слоя  $L = 2$  (1), 1 (2), 0.6 (3) мм. На вставке представлены экспериментальные кривые из работы [8]

рассматривать как точечные. Полученные здесь результаты могут быть применены также для описания указанной геометрии эксперимента. В главном порядке по параметру  $s^*$  для временной корреляционной функции поля получим:

а) нормально падающая плоская волна и точечный приемник на плоской границе среды

$$C^{(E)}(t|s_i = 1, s_f > 1) \propto \int_1^\infty \frac{ds}{s} \gamma_0(s, 1, t), \quad (3.27)$$

б) точечный источник и точечный приемник, оба на границе среды, на расстоянии  $\rho$  друг от друга

$$C^{(E)}(t|s_i > 1, s_f > 1) \propto \rho^{-2} \int_1^\infty \frac{ds}{s} \int_1^\infty \frac{ds'}{s'} \gamma_0(s, s', t).$$

Численные расчеты дают коэффициент наклона  $\kappa = 1.53$  для случая (а) плоская падающая волна – точечный приемник и  $\kappa = 0.95$  для случая (б) точечный источник – точечный приемник.

В работе [8] рассеянное излучение собиралось широкоугольным объективом. В этом случае интеграл в (3.27) следует вычислять в конечном интервале  $1 < s < s_{max}$ , где  $s_{max} = 1/\cos\theta_{max}$ ,  $\theta_{max}$  –

угол раствора объектива. При  $\theta_{max} = 45^\circ$  расчет дает

$$C^{(E)}(t|s_i = 1, 1 < s_f < \sqrt{2}) \propto 1 - \kappa \sqrt{\frac{6t}{\tau}},$$

где  $\kappa = 1.85$ .

Таким образом, будучи нечувствительным к параметру анизотропии, наклон оказывается весьма чувствительным к геометрии эксперимента, и в частности, к углу раствора объектива.

В работе [14] решалась задача о временной корреляционной функции для чисто упругого рассеяния и нормального падения в  $P_2$ -приближении, с использованием фазовой функции Хеньи–Гринштейна [2]. В результате в интервале времен, где погрешность экспериментальных данных невелика, теоретические кривые для различных значений  $\cos\theta$  практически совпадают с измеренными значениями [8].

#### 4. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ: ОБРАТНОЕ КОГЕРЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ

Найденное решение позволяет описать эффект усиления обратного рассеяния. Интенсивность обратного когерентного рассеяния  $I(\Delta\theta)$  задается интерференционной составляющей функции когерентности при  $t = 0$

$$I(\Delta\theta) = C^{(V)}(0|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i),$$

где  $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$ . С учетом формул (2.9) и (3.3) с точностью до членов первого порядка по параметру  $\tilde{q} = kl \cos\theta_i \Delta\theta$  получим

$$I(\Delta\theta) = C^{(V)}(0|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \frac{S}{4\pi} \times \left[ \gamma_{\mathbf{q}}(s_f, s_i, 0) - \frac{4\pi G(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i, 0)}{\int d\Omega_f G(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i, 0)} \frac{1}{s_i + s_f} \right]. \quad (4.1)$$

Эта формула справедлива только при условии  $\Delta\theta \ll 1$ . При нарушении этого условия, при  $\Delta\theta \sim 1$ , параметр  $\tilde{q}$  становится большим,  $\tilde{q} \gg 1$ , и в этом случае интерференционный вклад  $C^{(V)}$  настолько мал, что практически ненаблюдаем на фоне вклада фейнмановских диаграмм произвольного вида.

Таким образом, для нахождения  $\gamma_{\mathbf{q}}(s_f, s_i, 0)$  необходимо решить систему (3.4)–(3.6) при  $t = 0$  и  $q \neq 0$ . Рассмотрим последнее уравнение этой системы в окрестности  $q = s = 0$ . Получим

$$\gamma_{\mathbf{q}}^{(11)}(s, s_i, 0) = -\frac{g_1}{1 - g_1} \gamma_{\mathbf{q}}^{(0)}(s, s_i, 0) [1 + O(\tilde{q})]. \quad (4.2)$$



Неаналитическая зависимость от переменных  $t/\tau$  и  $\tilde{q}$  возникает из-за нуля детерминанта, т.е. от положения диффузионного полюса, в окрестности  $s = 0$ . Это означает, что в первом уравнении системы (3.4) можно положить  $q^2 m_1(w) \approx q^2/3$ , а во втором опустить члены, содержащие множитель  $q^2$ . Тогда, подставляя (4.2) в первые два уравнения, получим

$$\left[ \frac{l}{l_a} + \frac{\tilde{q}^2}{3(1 - \overline{\cos \theta})} \right] \gamma_{\mathbf{q}}^{(0)}(s, s_i, 0) - s^2 m_1(w) \gamma_{\mathbf{q}}(s, s_i, 0) = a_0(\mathbf{q}, s, s_i, 0), \quad (4.3)$$

$$3\overline{\cos \theta} m_1(w) \gamma_{\mathbf{q}}(s, s_i, 0) + \frac{1}{s} \gamma_{\mathbf{q}}^{(1)}(s, s_i, 0) = \frac{3}{s} \overline{\cos \theta} a_1(\mathbf{q}, s, s_i, 0). \quad (4.4)$$

Полагая  $m_1(w) \approx m_1(s)$ , эти уравнения можно записать в виде

$$\left[ \frac{1}{3} s_q^* - s^2 m_1(s) \right] \gamma_{\mathbf{q}}(s, s_i, 0) = a_0(\mathbf{q}, s, s_i, 0) - \frac{\overline{\cos \theta}}{1 - \overline{\cos \theta}} \frac{s_q^{*2}}{s} a_1(\mathbf{q}, s, s_i, 0), \quad (4.5)$$

где

$$s_q^* = \sqrt{\tilde{q}^2 + \frac{3l(1 - \overline{\cos \theta})}{l_a}}.$$

Уравнение (4.5) получено аналогично (3.14) и дает решение

$$I(\Delta\theta) \sim \gamma_{\mathbf{q}}(s, s_i, 0) = \frac{3}{2} \cos^3 \theta_i \exp \left[ -2J \left( \frac{1}{\overline{\cos \theta}_i} \right) \right] \times \left[ 1 - \kappa \sqrt{\left( \frac{\tilde{q}}{1 - \overline{\cos \theta}} \right)^2 + \frac{3l^*}{l_a}} \right] - \frac{\cos \theta_i}{2} \frac{4\pi G(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i, 0)}{\int G(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i, 0) d\Omega_f}. \quad (4.6)$$

В этой формуле последнее слагаемое, описывающее вклад однократного рассеяния, для систем с сильно анизотропным рассеянием, т.е. с малым значением сечения рассеяния назад, практически может быть опущен.

Уравнение (4.6), полученное как обобщение точного решения Милна, дает в пренебрежении однократным рассеянием, при нормальном падении,  $\kappa = 2$ ,

$$I(\Delta\theta) \propto 1 - 2kl^* \Delta\theta. \quad (4.7)$$

В то же время в рамках диффузионного приближения начальная угловая зависимость конуса обратного рассеяния, также в пренебрежении однократным рассеянием, описывается линейной формулой вида [5, 27]

$$I^{(dif)}(\Delta\theta) \sim 1 - 2 \frac{(1 + z^*)^2}{1 + 2z^*} kl \Delta\theta, \quad (4.8)$$

$$z^* = \frac{0.71}{1 - \overline{\cos \theta}}.$$

Эти два уравнения предсказывают существенно различную зависимость от параметра анизотропии  $\overline{\cos \theta}$ .

В диффузионном приближении временная корреляционная функция и интенсивность когерентного обратного рассеяния симметричны относительно замены [27]  $\sqrt{6t/\tau} \leftrightarrow kl^* \Delta\theta$ . Формулы (3.25) и (4.6), полученные в рамках точного решения граничной задачи, подтверждают такую симметрию. Однако, в то время как (3.25) хорошо согласуется с экспериментом, формула (4.6) предсказывает более узкий конус обратного рассеяния, нежели в эксперименте [3, 4]. Отметим, что эти оценки ширины конуса в случае сильной анизотропии чрезвычайно чувствительны к значению параметра  $\overline{\cos \theta}$ : изменение  $\overline{\cos \theta}$  на 3% вблизи значения  $\overline{\cos \theta} \sim 0.9$  приводит к изменению ширины пика в полтора раза.

### 5. ВРЕМЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В $P_0$ -ПРИБЛИЖЕНИИ

В общем случае решение граничной задачи для тензора четвертого ранга  $\hat{\Gamma}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t | \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  чрезвычайно громоздко. Тензорная структура уравнения (2.1) значительно упрощается в случае падающего плоско-поляризованного света с поляризацией  $\alpha$ . В этом случае индексы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  совпадают. Тогда в силу симметрии задачи попарно совпадают индексы  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  и  $\mu = \nu$ . Это позволяет рассматривать тензоры четвертого ранга с попарно совпадающими индексами как тензоры второго ранга:  $\Lambda_{\beta\beta\mu\mu} = \Lambda_{\beta\mu}$ ,  $\Gamma_{\beta\beta\alpha\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha}$ , и значительно упростить задачу. Уравнение Бете–Солпитера (2.1) для попарно совпадающих индексов поляризации принимает вид

$$\Gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t | \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = k_0^4 \tilde{G}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i, t) \delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \delta_{\beta\alpha} + k_0^4 \int d\mathbf{R}_3 \tilde{G}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_{23}, t) \Lambda_{\beta\mu}(R_{23}) \times \Gamma_{\mu\alpha}(\mathbf{R}_3, \mathbf{R}_1, t | \mathbf{k}_{23}, \mathbf{k}_i). \quad (5.1)$$

Будем считать, что волновой вектор падающей волны лежит в плоскости  $yz$ , а ее поле поляризовано вдоль  $x$ ,  $\alpha = 1$ . Тогда, поскольку начальная поляризация задана,  $\alpha = 1$ , отысканию подлежит вектор-столбец  $\gamma = (\Gamma_{11}, \Gamma_{21}, \Gamma_{31})/4\pi$ .

Мы рассмотрим случай изотропной индикатрисы однократного рассеяния, когда функция  $\tilde{G}_0(\mathbf{q})$  не зависит от переданного волнового вектора  $\mathbf{q}$ ,  $\tilde{G}_0(\mathbf{q}) = G_0$ . Обозначив для краткости в случае изотропной индикатрисы

$$\tilde{\Gamma}_{\beta 1}(q_{\perp} = 0, s_f, s_i, t | \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \equiv 4\pi\gamma_{\beta}(s_f, s_i, t), \quad (5.2)$$

временную корреляционную функцию поля представим в виде

$$C_{\beta 1}(t | \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \frac{S}{4\pi} \gamma_{\beta}(s_f, s_i, t). \quad (5.3)$$

В случае нормального падения поляризованную и деполаризованную составляющие корреляционной функции интенсивности с учетом факторизации (2.5) можно записать в виде

$$C_{pol}^I(\theta_f, t) = \gamma_1^2(s_f, 1, t), \quad (5.4)$$

$$C_{depol}^I(\theta_f, t) = \gamma_2^2(s_f, 1, t) \cos^2 \theta_f + \gamma_3^2(s_f, 1, t) \sin^2 \theta_f, \quad (5.5)$$

если поле падающей волны перпендикулярно плоскости рассеяния, и

$$C_{pol}^I(\theta_f, t) = \gamma_1^2(s_f, 1, t) \cos^2 \theta_f + \gamma_3^2(s_f, 1, t) \sin^2 \theta_f, \quad (5.6)$$

$$C_{depol}^I(\theta_f, t) = \gamma_2^2(s_f, 1, t), \quad (5.7)$$

если поле падающей волны лежит в плоскости рассеяния. Плоскостью рассеяния называем плоскость, образованную волновыми векторами падающей и рассеянной волн. Усредним уравнение (5.1) по ориентациям  $\mathbf{k}_f$ , т. е. выполним интегрирование  $\int d\Omega_f$ . Выполняя, как в (3.2), двумерное преобразование Фурье и два преобразования Лапласа, получим

$$\left[ \hat{I} - \frac{3}{2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \hat{\Lambda}(s) \right] \gamma(s, s_i, t) = \mathbf{b}(s, s_i, t). \quad (5.8)$$

Здесь

$$\hat{\Lambda}(s) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3m_0 + 2m_1 + 3m_2 & m_0 - 2m_1 + m_2 & 4(m_1 - m_2) \\ m_0 - 2m_1 + m_2 & 3m_0 + 2m_1 + 3m_2 & 4(m_1 - m_2) \\ 4(m_1 - m_2) & 4(m_1 - m_2) & 8(m_0 - 2m_1 + m_2) \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Вектор-столбец  $\mathbf{b}(s, s_i, t)$  в правой части (5.8) имеет вид

$$b_{\beta}(s, s_i, t) = \frac{3}{2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \frac{1}{s_i + s} \delta_{\beta 1} - \frac{3}{4} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \times \int_1^{\infty} \frac{ds'}{s'(s' - s)} a_{\beta\mu}(s') \gamma_{\mu}(s', s_i, t), \quad (5.10)$$

где

$$\hat{a}(s) = \frac{1}{8s^4} \times \begin{pmatrix} 3s^4 + 2s^2 + 3 & (s^2 - 1)^2 & 4(s^2 - 1) \\ (s^2 - 1)^2 & 3s^4 + 2s^2 + 3 & 4(s^2 - 1) \\ 4(s^2 - 1) & 4(s^2 - 1) & 8(s^2 - 1)^2 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Структура матриц  $\hat{\Lambda}$  и  $\hat{a}$  такова, что система уравнений (5.8) разбивается на две независимые подсистемы. Действительно, определив функции

$$\gamma_{\pm}(s, s_i, t) = \frac{1}{2} [\gamma_1(s, s_i, t) \pm \gamma_2(s, s_i, t)] \quad (5.12)$$

и складывая и вычитая два первых уравнения из трех системы (5.8), получим замкнутое уравнение для компоненты  $\gamma_{-}(s, s_i, t)$ , описывающей степень деполаризации,

$$\psi_{-}(s, t) \gamma_{-}(s, s_i, t) = \frac{3}{4} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \frac{1}{s_i + s} - \frac{3}{4} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \int_1^{\infty} \frac{ds'}{s'(s' - s)} [a_{11}(s') - a_{12}(s')] \times \gamma_{-}(s', s_i, t), \quad (5.13)$$

где

$$\psi_{-}(s, t) = 1 - \frac{3}{8} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) (m_0 + 2m_1 + m_2), \quad (5.14)$$

и систему уравнений для двух оставшихся компонент:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{4}e^{-2t/\tau}(m_0 + m_2) & -\frac{3}{4}e^{-2t/\tau}(m_1 - m_2) \\ -\frac{3}{2}e^{-2t/\tau}(m_1 - m_2) & 1 - \frac{3}{2}e^{-2t/\tau}(m_0 - 2m_1 + m_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1 + b_2}{2} \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Уравнение (5.13) для функции  $\gamma_-(s, s_i, t)$ , которая согласно определению представляет собой в случае нормального падения разность поляризованной и деполаризованной рассеянных компонент, имеет вид уравнения Милна и решается при помощи метода Винера–Хопфа стандартным образом. В результате получим

$$\gamma_-(s, s_i, t) = \frac{3 \exp(-2t/\tau)}{4(s_i + s)(1 - 0.7 \exp(-2t/\tau))} \times \exp[-J_d(s, t) - J_d(s_i, t)], \quad (5.16)$$

где величина

$$J_d(s, t) = \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{s'^2 + s^2} \times \ln \left[ \frac{\psi_-(is', t)}{1 - 0.7 \exp(-2t/\tau)} \right] \quad (5.17)$$

играет роль функции Чандрасекара [28]. Укажем, что функция  $\psi_-(s, t)$  конечна при  $s = 0$ :

$$\psi_-(0, t) = 1 - 0.7 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right), \quad (5.18)$$

что приводит к тому, что функция  $\gamma_-(s, s_i, t)$  не имеет особенности при  $s \rightarrow 0$  и, как следствие, регулярна по  $t$  в области малых времен. Это означает, что разность между поляризованной и деполаризованной компонентами временной корреляционной функции изменяется по линейному закону в зависимости от аргумента  $t/\tau$ , в то время как сами эти компоненты линейно зависят от величины  $\sqrt{t/\tau}$  при малых временах.

Мы рассчитали зависимость величины  $\gamma_-(1, 1, t)$  от времени. Согласно (5.4) и (5.5), в случае поляризации падающего поля перпендикулярно плоскости рассеяния

$$\gamma_-(1, 1, t) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{C_{pol}^I(0, t)} - \sqrt{C_{depol}^I(0, t)} \right).$$

Достоинство этого результата состоит в том, что он справедлив для любых времен и рассчитанная функция является экспериментально определяемой величиной.

Обратимся теперь к системе (5.15) и найдем ее решение в главном порядке по временному параметру  $t/\tau$ . Используя определение функций  $m_j(s)$  и учитывая малость величины  $t/\tau$  преобразуем ее к виду

$$\begin{pmatrix} \frac{2t}{\tau} - \frac{3s^2(m_1+m_2)}{4} & \frac{t}{\tau} - \frac{3s^2(m_1-m_2)}{4} \\ \frac{2t}{5\tau} - \frac{3(m_1-m_2)}{2} & \frac{8t}{5\tau} + \frac{3(m_1-m_2)(1-s^2)}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \gamma_+ \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1 + b_2 + b_3}{2} \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

При написании (5.19) мы пренебрегли величинами порядка  $(t/\tau)s^2$  и выше. Такое пренебрежение, как было показано в скалярном случае, не отражается на решении задачи Милна при  $t/\tau \ll 1$ . Основная особенность в поведении временной корреляционной функции, а именно, линейная зависимость от  $\sqrt{t/\tau}$  при малых временах, возникает из-за обращения в нуль детерминанта матрицы в уравнении (5.19) при  $s = 0, t = 0$ . Видно, что в нуль при  $s = 0, t = 0$  обращаются элементы первой строки. Это означает, что в асимптотической области  $t \ll \tau$  можно положить  $t = 0$  в элементах второй строки. В результате получим

$$\begin{aligned} \left[ \frac{2t}{\tau} - s^2 m_1 \right] \gamma_+ + \left[ \frac{2t}{3\tau} - \frac{s^2(m_1 - m_2)}{2} \right] \gamma_e &= \\ = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}, & \quad (5.20) \\ - \frac{m_1 - m_2}{2} [s^2 \gamma_+ - (1 - s^2) \gamma_e] &= \frac{b_3}{3}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_e = \gamma_e(s, s_i, t) = \gamma_3(s, s_i, t) - \gamma_+(s, s_i, t).$$

Из уравнений (5.20) видно, что функция  $\gamma_e(s, s_i, t)$  конечна при  $s \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ , в то время как  $\gamma_+(s, s_i, t)$  неограниченно возрастает в этом пределе. Конечность  $\gamma_e(0, s_i, 0)$  в главном порядке позволяет положить  $t = 0$  повсюду, кроме коэффициента при  $\gamma_+$  в первом уравнении. Тогда эту систему можно переписать в виде двух уравнений, к каждому из которых применим метод Винера–Хопфа:

$$\psi_+(s, t)\gamma_+(s, s_i, t) = \frac{(b_1 + b_2)(1 - s^2) + b_3}{3}, \quad (5.21)$$

$$\frac{m_1 - m_2}{2}\gamma_c(s, s_i, t) = \frac{b_3}{3}, \quad (5.22)$$

где определена новая искомая функция

$$\gamma_c(s, s_i, t) = (1 - s^2)\gamma_e(s, s_i, t) - s^2\gamma_+(s, s_i, t),$$

а величина  $\psi_+(s, t)$  имеет вид

$$\psi_+(s, t) = \left[ \frac{2t}{\tau} - s^2 m_1(s) \right] (1 - s^2) - \frac{1}{2} [m_1(s) - m_2(s)] s^4. \quad (5.23)$$

С учетом асимптотического поведения функций  $m_1(s)$  и  $m_2(s)$  для оператора правой части (5.23) имеем

$$\psi_+(s, t) \approx \frac{s_0^{*2} - s^2}{3} \quad \text{при } s \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \quad (5.24)$$

где  $s_0^{*2} = 6t/\tau$ . Таким образом, функция  $\psi_+(s, t)$  имеет нуль в комплексной плоскости  $s$ , приближающийся к началу координат при  $t \rightarrow 0$ . Такое поведение воспроизводит известную особенность пропагатора уравнения Бете–Солпитера и приводит к диффузионному характеру распространения света в режиме многократного рассеяния. В результате, используя стандартную процедуру Винера–Хопфа, с учетом указанного нуля функции  $\psi_+(s, t)$  в комплексной плоскости решение уравнения (5.21) можно представить в виде

$$\gamma_+(s, s_i, t) = \frac{d_1}{s + s_0^*} \frac{1 + s}{1 + \sqrt{3}s} \exp[-J_+(s, t)], \quad (5.25)$$

где

$$J_+(s, t) = \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{s'^2 + s^2} \times \ln \left[ \frac{3\psi_+(is', t)}{s'^2 + s_0^{*2}} \frac{1 + s'^2}{1 + 3s'^2} \right]. \quad (5.26)$$

Аналогично решая уравнение (5.22), получим

$$\gamma_c(s, s_i, t) = d_2 \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{15}} s \right) \exp[-J_c(s)], \quad (5.27)$$

где

$$J_c(s) = \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{s'^2 + s^2} \times \ln \left[ \frac{15}{2} (m_1(is') - m_2(is')) \left( 1 + \frac{2s'^2}{15} \right) \right]. \quad (5.28)$$

Параметры  $d_1$  и  $d_2$  являются постоянными по отношению к переменной  $s$  и будут найдены из дополнительных соображений. Здесь мы воспользовались тождеством

$$\exp \left\{ \frac{-s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{s'^2 + s^2} \ln(A^2 + s'^2) \right\} = \frac{1}{A + s}, \quad (5.29)$$

$$\text{Re } s > 0, \quad A > 0,$$

чтобы получить выражения, удобные при численных расчетах, так как функции под знаком логарифма в (5.26) и (5.28) обращаются в единицу при  $s' \rightarrow \infty$  и интегралы быстро сходятся. Величина  $J_+(s, t)$ , являющаяся вариантом функции Чандрасекара, линейно зависит от времени при малых значениях  $t$ , поэтому в дальнейшем будем полагать  $J_+(s, t) \approx J_+(s, 0)$ .

Константы  $d_1$  и  $d_2$  мы найдем аналогично тому, как это было проделано для скалярного случая. Из определения  $\gamma_c(s, s_i, t)$  легко получить связь между параметрами  $d_1$  и  $d_2$ . Действительно,  $\gamma_+(s, s_i, t)$  и  $\gamma_e(s, s_i, t)$  при  $s = 1$  должны быть конечны, так как это — наблюдаемые компоненты временной корреляционной функции при рассеянии строго назад, поэтому при  $s = 1$  получаем  $\gamma_c(1, s_i, t) = -\gamma_+(1, s_i, t)$ . Используя решения (5.25) и (5.27), получаем

$$d_2 \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{15}} \right) \exp[-J_c(1)] = -\frac{2d_1}{(1 + s_0^*)(1 + \sqrt{3})} \exp[-J_+(1)]. \quad (5.30)$$

Непосредственное вычисление дает

$$d_2 = -0.582 \frac{d_1}{1 + s_0^*}.$$

Обозначим

$$\alpha_n = \int_1^{\infty} \frac{ds'}{s'^n} \frac{1 + s'}{s'(1 + \sqrt{3}s')} \exp[-J_+(s')], \quad (5.31)$$

$$\beta_n = \int_1^{\infty} \frac{ds'}{s'^n} \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{15}} s' \right) \exp[-J_c(s')]. \quad (5.32)$$

Параметры  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  легко находятся численно.

Подставляя найденное решение в уравнение (5.21) и полагая в правой и левой частях  $s = 0$ , с

учетом численных значений параметров  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  получим

$$d_1 = 2 \left\{ \alpha_2 + 0.582\beta_4 + s_0^* \left[ \frac{4}{3} - (\alpha_3 + 0.582\beta_4) \right] \right\}^{-1} \approx \frac{2.57}{1 + 0.894 s_0^*}. \quad (5.33)$$

Подставляя эту величину в (5.25), получим в случае нормального падения и рассеяния назад

$$\gamma_+(1, 1, t) \approx \frac{2.319}{(1 + s_0^*)(1 + 0.895 s_0^*)}. \quad (5.34)$$

С точностью до численного множителя это выражение близко к решению Милна [29] для временной корреляционной функции в модели скалярного поля

$$\gamma_{scal}(1, 1, t) \approx \frac{4.22}{(1 + s_0^*)^2}. \quad (5.35)$$

Также с точностью до численного множителя оно совпадает с решением в рамках диффузионного приближения для случая изотропной индикатрисы однократного рассеяния, если в рамках метода зеркальных отображений выбрать зеркальную границу на физической границе,  $z = 0$  [7].

В случае неполяризованного падающего света  $\gamma_- = 0$ , и, таким образом, близость временных зависимостей, описываемых формулами (5.34) и (5.35), является подтверждением того, что приближение скалярного поля действительно можно с указанной точностью до 10 % использовать при описании эффектов многократного рассеяния для неполяризованного света.

В случае нормального падения и рассеяния назад поляризованная компонента временной корреляционной функции определяется выражением

$$\gamma_{pol}(1, 1, t) = \gamma_+(1, 1, t) + \gamma_-(1, 1, t), \quad (5.36)$$

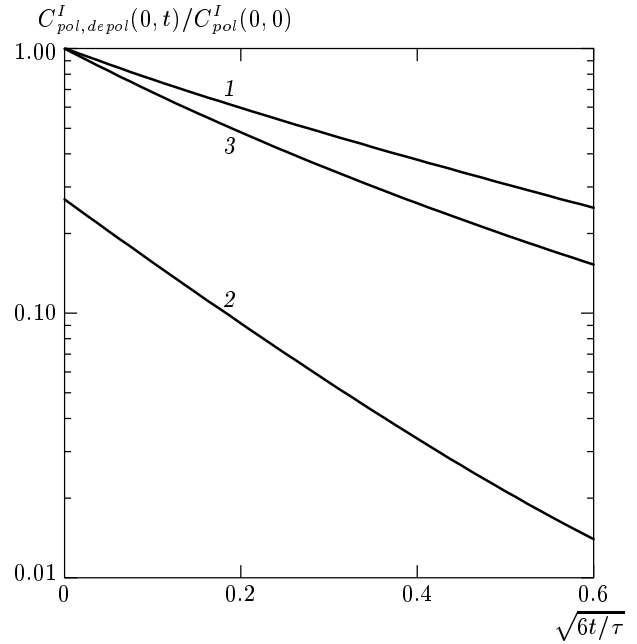
а деполаризованная

$$\gamma_{depol}(1, 1, t) = \gamma_+(1, 1, t) - \gamma_-(1, 1, t). \quad (5.37)$$

В первом порядке по временной переменной, оставляя только линейную зависимость от  $\sqrt{t/\tau}$ , в функции  $\gamma_-(1, 1, t)$  можно положить  $t = 0$ . Тогда в главном по параметру  $s_0^* = \sqrt{6t/\tau}$  порядке получаем

$$\gamma_{pol}(1, 1, t) \approx 3.05 (1 - 1.44 s_0^*), \quad (5.38)$$

$$\gamma_{depol}(1, 1, t) \approx 1.59 (1 - 2.75 s_0^*). \quad (5.39)$$



**Рис. 2.** Временная зависимость поляризованной (1),  $C_{pol}^I(0, t)$ , и деполаризованной (2),  $C_{depol}^I(0, t)$ , компонент корреляционной функции интенсивности света, рассеянного назад, рассчитанных согласно (5.16), (5.34) и нормированных на квадрат интенсивности поляризованной компоненты. Для сравнения приведена нормированная временная корреляционная функция неполяризованного излучения (3), рассчитанная согласно (5.35)

Временная корреляционная функция интенсивности определяется как квадрат от корреляционной функции полей. На рис. 2 представлены схематически временные корреляционные функции поляризованной и деполаризованной компонент интенсивности. Видно, что в случае поляризованного излучения описание в рамках скалярной теории оказывается недостаточным.

Теория скалярного поля предсказывает коэффициент наклона  $\gamma_{scal}(1, 1, t) \propto 1 - \gamma s_0^*$ , определяющий скорость начального убывания временных корреляций полей, в точности равный двум,  $\gamma = 2$ . Видно, что коэффициенты наклона для поляризованной и деполаризованной компонент разительно отличаются от этого значения:  $\gamma_{pol} = 1.44$  и  $\gamma_{depol} = 2.75$ . Расчеты в рамках диффузионного приближения дают весьма близкие значения [27], 1.6 и 2.7, соответственно, и хорошо согласуются с экспериментальными значениями [27]  $1.6 \pm 0.1$  и  $2.8 \pm 0.2$  при рассеянии света с  $\lambda = 0.488$  мкм в растворе латекса с диаметром частиц 0.091 мкм, значительно меньшим длины

волны.

В случае неполяризованного падающего излучения или в случае наблюдения излучения, усредненного по поляризации,  $\gamma_{pol} + \gamma_{depol}$ , вклад  $\gamma_-$  отсутствует и коэффициент наклона  $\gamma = 1.89$ , определяющий скорость убывания компоненты  $\gamma_+$ , близок к значению  $\gamma = 2$  скалярной теории. Однако в том случае, когда в падающем излучении присутствуют в равных долях две ортогональные поляризации, нельзя обойтись приближением попарно совпадающих индексов.

При  $t = 0$  полученное решение описывает интенсивность рассеянного излучения (без учета интерференционной составляющей). Мы рассчитали поляризованную  $I_{pol}(\theta_f)$  и деполаризованную  $I_{depol}(\theta_f)$  компоненты интенсивности рассеяния в зависимости от угла обратного рассеяния  $\theta_f$  для нормального падения. В случае, когда рассеянный луч расположен в плоскости  $yz$ , т. е. в плоскости, перпендикулярной поляризации падающего поля, эти компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} I_{pol}(\theta_f) &= \gamma_+(s_f, 1, 0) + \gamma_-(s_f, 1, 0), \\ I_{depol}(\theta_f) &= -s_f^{-2}[\gamma_e(s_f, 1, 0) + \gamma_-(s_f, 1, 0)]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

В случае, когда рассеянный луч расположен в плоскости  $xz$ , т. е. падающее поле ориентировано в плоскости рассеяния,

$$\begin{aligned} I_{pol}(\theta_f) &= -s_f^{-2}[\gamma_e(s_f, 1, 0) - \gamma_-(s_f, 1, 0)], \\ I_{depol}(\theta_f) &= \gamma_+(s_f, 1, 0) - \gamma_-(s_f, 1, 0). \end{aligned} \quad (5.41)$$

На рис. 3 представлены зависимости поляризованной и деполаризованной составляющих интенсивности обратного рассеяния от угла рассеяния для двух рассмотренных случаев расположения плоскости рассеяния и поляризации падающей волны. Видно, что угловая зависимость поляризованной компоненты различна для разных ориентаций вектора поляризации падающей волны относительно плоскости рассеяния. В случае, когда поле падающей волны расположено в плоскости рассеяния, интенсивность рассеянной поляризованной компоненты убывает с ростом угла рассеяния заметно быстрее, начиная с углов рассеяния порядка  $10^\circ$ . Угловая зависимость деполаризованной компоненты одинакова для любой начальной поляризации.

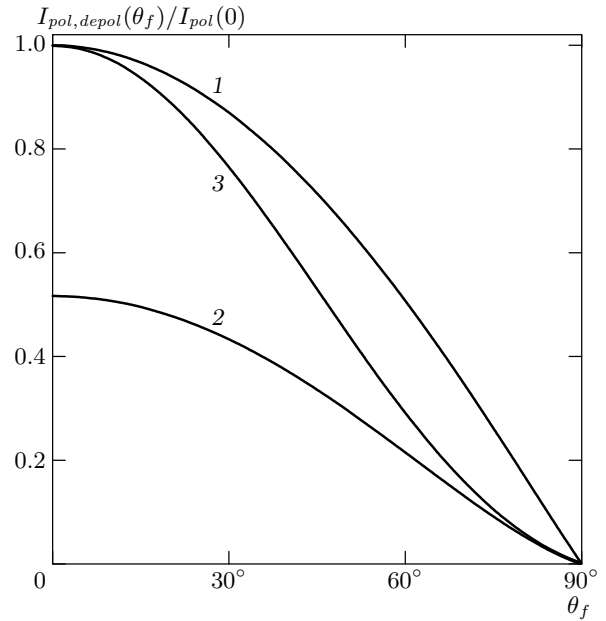


Рис. 3. Поляризованные  $I_{pol}(\theta_f)$  и деполаризованные  $I_{depol}(\theta_f)$  компоненты интенсивности рассеяния в зависимости от угла обратного рассеяния; 1 — поляризованная, 2 — деполаризованная компоненты в случае, когда поле падающей волны ориентировано нормально к плоскости рассеяния, 3 — поляризованная компонента в случае, когда поле падающей волны лежит в плоскости рассеяния. Деполаризованная компонента для этой геометрии практически совпадает с кривой 2. Представленные величины нормированы на интенсивность поляризованной компоненты рассеяния при  $\cos\theta_f = 1$

### 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ: СТЕПЕНЬ ДЕПОЛЯРИЗАЦИИ С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ В $P_1$ -ПРИБЛИЖЕНИИ

Ограничимся вычислением разности поляризованной и деполаризованной компонент (см. (5.1)) при нормальном падении и рассеянии

$$\begin{aligned} \Gamma_-(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1|t) &= \\ &= \frac{1}{2} [\Gamma_{11}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1|t) - \Gamma_{21}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1|t)]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Сделаем двумерное фурье-преобразование этой величины и дважды преобразование Лапласа и при  $q = 0$  представим ее в  $P_1$ -приближении в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_-(s, s_i, t|\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &\approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi} [\gamma_-^{(0)}(s, s_i, t) - \cos\theta_f \gamma_-^{(1)}(s, s_i, t)]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Подставляя уравнение (6.2) в уравнение Бете–Солпитера, получим систему уравнений для составляющих  $\gamma_-^{(0)}(s, s_i, t)$  и  $\gamma_-^{(1)}(s, s_i, t)$

$$\begin{aligned} (1 - 0.7g_0)\gamma_-^{(0)}(s, s_i, t) - \frac{3}{8}g_0s^2(m_1(s) + 2m_2(s) + m_3(s))\gamma_-(s, s_i, t) = \frac{3g_0}{4(s_i + s)} - \\ - \frac{3g_0}{16} \int_1^\infty \frac{ds'}{s'} \left(1 + \frac{1}{s'^2}\right)^2 \frac{\gamma_-(s', s_i, t)}{s' - s}, \\ \frac{3}{8}g_1s(m_1(s) + 2m_2(s) + m_3(s))\gamma_-(s, s_i, t) + \\ + \frac{1}{3}\gamma_-^{(1)}(s, s_i, t) = \frac{3g_1}{4(s_i + s)} + \\ + \frac{3g_1}{16} \int_1^\infty \frac{ds'}{s'^2} \left(1 + \frac{1}{s'^2}\right)^2 \frac{\gamma_-(s', s_i, t)}{s' - s}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где определена величина

$$\gamma_-(s, s_i, t) = \gamma_-^{(0)}(s, s_i, t) - \frac{1}{s}\gamma_-^{(1)}(s, s_i, t), \quad (6.4)$$

$m_3(s) = [m_2(s) - 1/5]/s^2$ . При  $s = s_f$  именно эта комбинация определяет разность поляризованной и деполаризованной компонент временной корреляционной функции поля.

Составляя линейную комбинацию из уравнений (6.3), получаем замкнутое интегральное уравнение для функции (6.4):

$$\begin{aligned} \psi_-(s, t)\gamma_-(s, s_i, t) = \frac{3g_0}{4(s_i + s)} \left[1 - \frac{3g_1}{sg_0}(1 - 0.7g_0)\right] - \\ - \frac{3g_0}{16} \int_1^\infty \frac{ds'}{s'} \left(1 + \frac{1}{s'^2}\right)^2 \left[1 + \frac{3g_1}{ss'g_0}(1 - 0.7g_0)\right] \times \\ \times \frac{\gamma_-(s', s_i, t)}{s' - s}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_-(s, t) = (1 - 0.7g_0) \left[1 - \frac{9g_1}{8}(m_1 + 2m_2 + m_3)\right] - \\ - \frac{3g_0}{8}s^2(m_1 + 2m_2 + m_3). \end{aligned} \quad (6.6)$$

При малых значениях  $s$  и  $t = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \psi_-(s, 0) \approx 0.3 \left(1 - \frac{69}{70}\overline{\cos\theta}\right) - \\ - s^2 \frac{23 + 14.1\overline{\cos\theta}}{70}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Поскольку величина  $\psi_-(s, 0)$  конечна при  $s = 0$ , формально решение  $\gamma_-(s, s_i, t)$  регулярно в области  $t = 0$ , т.е. не возникает зависимость вида  $\sqrt{t/\tau}$ . Однако, из-за того что при  $\overline{\cos\theta} \rightarrow 1$ , т.е. в случае сильной анизотропии однократного рассеяния,

нуль функции  $\psi_-(s, 0)$  приближается к началу координат, в области малых времен возникает (с учетом  $69/70 \approx 1$ ) «почти» неаналитическая зависимость от  $t/\tau$ .

Уравнение (6.5) с учетом определения (6.6) удовлетворяет всем условиям, при которых можно использовать метод Винера–Хопфа. С помощью способа, использованного при решении аналогичного уравнения для скалярного поля, получим

$$\gamma_-(s, s_i, t) = \frac{D_1 + D_2s}{\psi_-(0, t)s(s + s_i)} \exp[-J_-(s, t)], \quad (6.8)$$

где

$$J_-(s, t) = \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{ds'}{s'^2 + s^2} \ln \frac{\psi_-(is', t)}{\psi_-(0, t)}. \quad (6.9)$$

На параметры  $D_1$  и  $D_2$ , постоянные относительно  $s$ , легко получить условие, аналогичное (3.20):

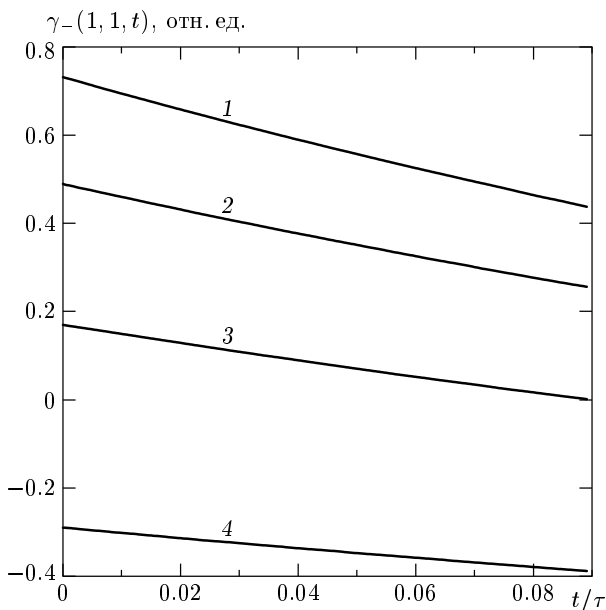
$$\begin{aligned} D_2 - \frac{D_1}{s_i} = \frac{3g_0}{4} \times \\ \times \left[1 + \frac{3g_1}{s_i g_0}(1 - 0.7g_0)\right] \exp[-J_-(s_i, t)]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Подставляя решение (6.8) в (6.5) и полагая  $s = 0$ , получаем

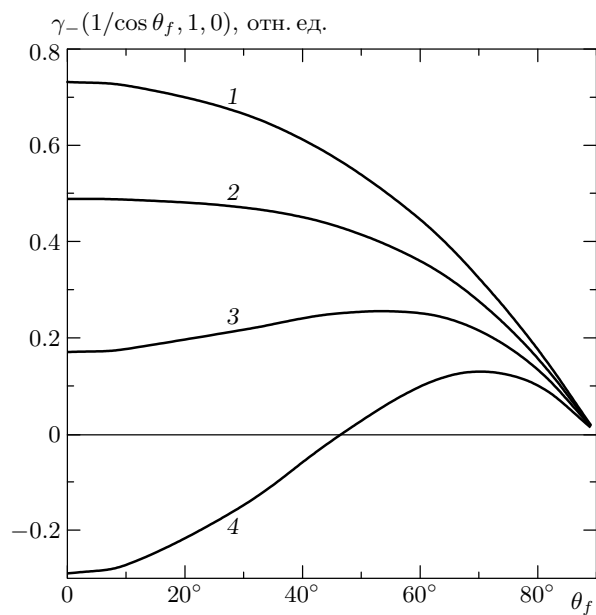
$$\begin{aligned} D_1 = -\frac{9}{4}g_1(1 - 0.7g_0) \left\{1 + \frac{s_i}{4} \int_1^\infty \frac{ds'}{s'^3} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{1}{s'^2}\right)^2 \frac{(D_1 + D_2s') \exp[-J_-(s', t)]}{s'(s' + s_i)\psi_-(0, t)}\right\}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Укажем на принципиальное отличие полученного решения от решения для скалярного поля. Параметр  $D_1$  не исчезает при  $t = 0$ ; это означает, что в случае электромагнитного поля интенсивность рассеянного назад излучения зависит от параметра анизотропии, в отличие от скалярного поля.

Мы рассчитали величину  $\gamma_-(1, 1, t)$ , описывающую разность поляризованной и деполаризованной компонент временной корреляционной функции, для различных значений  $\overline{\cos\theta}$ , для случаев нормального падения и рассеяния. Результаты приведены на рис. 4. Видно, что в случае слабой анизотропии, при небольших значениях  $\overline{\cos\theta}$ , степень поляризации убывает по линейному закону с ростом  $t/\tau$ , и уменьшается значительно медленнее, чем сами поляризованная и деполаризованная компоненты, которые убывают линейно относительно  $\sqrt{t/\tau}$ . Однако для систем с большим значением  $\overline{\cos\theta}$  возникает необычная ситуация: с ростом времени доля



**Рис. 4.** Разность поляризованной и деполаризованной компонент временной корреляционной функции  $\gamma_-(1, 1, t)$  в зависимости от времени для случая нормального падения и рассеяния;  $\overline{\cos\theta} = 0$  (1), 0.2 (2), 0.4 (3), 0.6 (4)



**Рис. 5.** Разность поляризованной и деполаризованной компонент интенсивности обратного рассеяния  $\gamma_-(s_f, 1, 0)$  в зависимости от угла рассеяния; значения  $\overline{\cos\theta}$  такие же, как и на рис. 4

деполаризованной компоненты во временной корреляционной функции увеличивается по сравнению с поляризованной.

Заметим, что все сказанное относится к области  $t/\tau \ll 1$ ; в связи с уже отмеченной малостью величины  $\psi_-(0, 0)$  при  $1 - \overline{\cos\theta} \ll 1$  параметром разложения является  $t/\tau$ , а не  $(1 - \overline{\cos\theta})t/\tau$ .

Мы рассчитали также величину  $\gamma_-(s_f, 1, t = 0)$ , которая описывает разность поляризованной и деполаризованной компонент интенсивности обратного рассеяния, в зависимости от угла рассеяния. Результаты приведены на рис. 5 для различных значений  $\overline{\cos\theta}$ . Видно, что разность между интенсивностями поляризованной и деполаризованной компонент обратного рассеяния сильно зависит от параметра анизотропии. Для слабо анизотропных систем степень поляризации монотонно убывает с ростом угла рассеяния. Для умеренных значений параметра анизотропии,  $\overline{\cos\theta} \sim 0.4$ , относительная доля деполаризованной компоненты возрастает с ростом угла рассеяния по сравнению с соответствующим значением при рассеянии строго назад. Наконец, при больших значениях анизотропии,  $\overline{\cos\theta} \geq 0.6$ , возникает ситуация, когда с увеличением угла рассеяния поляризация меняет знак: деполаризованная компонента рассеянного излучения становится больше поляризо-

ванной компоненты.

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод Винера–Хопфа, лежащий в основе классического решения Милна для интенсивности рассеяния скалярного поля точечными рассеивателями, удалось применить для решения ряда более содержательных задач многократного рассеяния. В случае скалярного поля получено решение для временной корреляционной функции при учете анизотропии в  $P_1$ - и  $P_2$ -приближениях, достаточно хорошо согласующееся с экспериментом. Найдено решение, описывающее начальную угловую зависимость обратного когерентного рассеяния в  $P_1$ -приближении, которое можно использовать как исходное приближение в численных расчетах для систем с сильной анизотропией.

Мы обобщили решение Милна для электромагнитного поля. В случае изотропного рассеяния мы нашли решение для временной корреляционной функции для поляризованной и деполаризованной компонент. В случае анизотропного рассеяния найдено решение для разности этих компонент. В случае достаточно сильной анизотропии,  $\overline{\cos\theta} \sim 0.4-0.6$ , обнаружены необычные поляризационные эффекты. Поляризационные эффекты для



когерентного обратного рассеяния рэлеевскими частицами предсказаны [20] даже в случае неполяризованного падающего излучения. Мы описали эффекты, связанные с анизотропией однократного рассеяния: изменение относительной скорости убывания поляризованной и деполаризованной компонент при переходе к системам с высокой анизотропией и изменение знака деполаризации с ростом угла рассеяния. Эти эффекты нуждаются в экспериментальной проверке.

В данной работе анизотропия однократного рассеяния рассмотрена в  $P_1$ -приближении. Строго говоря, оно применимо для систем со слабой анизотропией,  $\cos \theta \ll 1$ . Его применение для рассеяния со значительной анизотропией основано на физическом предположении, что излучение в результате многократного рассеяния становится почти изотропным, несмотря на сильную анизотропию однократного рассеяния. Такое предположение нуждается в дополнительной проверке.

В рассматриваемых задачах рассеяние в основном должно быть упругим. Должен реализоваться режим многократного рассеяния,  $l \ll L$ . Кроме того, рассеяние должно быть слабым,  $\lambda \ll l$ . Такая ситуация реализуется в сложных коллоидных, часто искусственных системах: суспензиях, гелях, пенах, а также в биологических тканях. Мы пренебрегали эффектами ближнего поля. Мы не учитывали внутреннего отражения на границе [11], обусловленного разностью показателей преломления.

Авторы выражают благодарность В. П. Романову за обсуждения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 02-02-16577) и Конкурсного центра фундаментального естествознания (грант № PD02-1.2-297).

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. C. W. Van Rossum and Th. N. Nieuwenhuizen, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 313 (1999).
2. А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*, Мир, Москва (1981).
3. M. P. Van Albada and A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2692 (1985).
4. P. E. Wolf and G. Maret, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2696 (1985).
5. E. Akkermans, P. E. Wolf, R. Maynard, and G. Maret, *J. de Phys.* **49**, 77 (1988).
6. Ю. Н. Барабаненков, В. Д. Озрин, *ЖЭТФ* **94**, 56 (1988).
7. M. J. Stephen, *Phys. Rev. B* **37**, 1 (1988).
8. D. J. Pine, D. A. Weitz, P. M. Chaikin, and E. Herbolzheimer, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1134 (1988).
9. Е. Е. Городничев, С. Л. Дударев, Д. Б. Рогозкин, *ЖЭТФ* **96**, 847 (1989).
10. E. E. Gorodnichev, S. L. Dudarev, and D. B. Rogozkin, *Phys. Lett. A* **144**, 48 (1990).
11. T. M. Nieuwenhuizen and J. M. Luck, *Phys. Rev. E* **48**, 569 (1993).
12. В. Л. Кузьмин, В. П. Романов, *ЖЭТФ* **116**, 1912 (1999).
13. E. Amic, J. M. Luck, and T. M. Nieuwenhuizen, *J. Phys. A* **29**, 4915 (1996).
14. V. L. Kuzmin, V. P. Romanov, and E. V. Aksenova, *Phys. Rev. E* **65**, 016601 (2002).
15. V. L. Kuzmin and V. P. Romanov, *Europhys. Lett.* **59**, 206 (2002).
16. D. S. Wiersma, A. Muzzi, M. Colocci, and R. Righini, *Phys. Rev. E* **62**, 6681 (2000).
17. M. J. Stephen and G. Swilich, *Phys. Rev. B* **34**, 7564 (1986).
18. M. I. Mishchenko, *Phys. Rev. B* **44**, 12597 (1991).
19. M. I. Mishchenko, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **56**, 673 (1996).
20. E. Amic, J. M. Luck, and T. M. Nieuwenhuizen, *J. Phys. I* **7**, 445 (1997).
21. M. I. Mishchenko, J. M. Luck, and T. M. Nieuwenhuizen, *J. Opt. Soc. Amer. A* **17**, 888 (2000).
22. В. Л. Кузьмин, *Опт. и спектр.* **93**, 482 (2002).
23. B. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2168 (1986).
24. Ю. Н. Барабаненков, *Изв. ВУЗов, радиофизика* **16**, 88 (1973).
25. А. А. Голубенцев, *ЖЭТФ* **86**, 47 (1984).
26. M. B. van der Mark, M. P. van Albada, and A. Lagendijk, *Phys. Rev. B* **37**, 3575 (1988).
27. F. C. MacKintosh and S. John, *Phys. Rev. B* **40**, 2383 (1989).
28. S. Chandrasekhar, *Radiation Transfer*, Dover, New York (1960).
29. В. Л. Кузьмин, В. П. Романов, *Опт. и спектр.* **82**, 642 (1997).