

СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Л. А. Большов, А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев*

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук
113191, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 18 июля 2002 г.

Теоретически рассмотрены характеристики свободной конвекции в проводящей жидкости в ламинарном режиме вблизи нагретой твердой вертикальной стенки в присутствии поперечного магнитного поля. Установлено наличие двух режимов теплопередачи от стенки к жидкости. В первом режиме на малых высотах $x \ll x_*$, когда влиянием магнитного поля можно пренебречь, теплопередача описывается известными результатами для свободно-конвективного пограничного слоя в непроводящей жидкости с числом Нуссельта $Nu_x \propto x^{3/4}$. Во втором режиме при $x \gg x_*$, когда магнитное поле играет определяющую роль, зависимость теплопередачи от высоты и напряженности поля имеет вид $Nu_x \propto \sqrt{x}/B$. Положение границы между режимами сильно зависит от магнитного поля, $x_* \propto B^{-4}$.

PACS: 44.20.+b, 44.25.+f, 47.65.+a

1. ВВЕДЕНИЕ

В то время как свободно-конвективные пограничные слои в непроводящих жидкостях изучены довольно хорошо (см., например, [1]), эти же слои для проводящих жидкостей в присутствии магнитного поля исследованы еще мало. К примеру, в монографии [2], где представлен обзор по данной проблеме, приведена задача, допускающая автомодельное решение при условии, что напряженность магнитного поля имеет специфическую зависимость от координаты вдоль нагретой поверхности ($\propto x^{1/4}$). Без такой зависимости (в частности, в однородном поле) задача значительно усложняется. В любом случае приведенные в [2] решения имеют вид бесконечных степенных рядов, использование которых весьма затруднительно. Вместе с тем, знание закономерностей теплоотдачи проводящей жидкости в присутствии магнитного поля существенно для многих практических задач, например, о течении проводящих жидкостей в трубах [3] или о процессах, относящихся к электролитической металлургии.

Целью настоящей работы является анализ характеристик стационарного ламинарного свобод-

но-конвективного пограничного слоя проводящей жидкости вблизи вертикальной стенки при температуре стенки, отличной от температуры жидкости, в однородном магнитном поле, направленном по нормали к стенке. Ниже для определенности рассматривается ситуация, когда температура стенки выше, чем температура жидкости, но все результаты переносятся с соответствующими изменениями и на обратный случай.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать распределение скорости течения и температуры проводящей жидкости в присутствии магнитного поля вблизи нагретой стенки. Состояние жидкости вдали от стенки предполагаем изотермическим и неподвижным. Направленное по нормали к стенке магнитное поле вблизи нее считаем однородным. Перепад температуры между стенкой и жидкостью вдали от нее обозначим ΔT . Отсчет температуры будем производить от ее значения вдали от стенки. Направим ось x вверх, а ось y — перпендикулярно стенке, так что на самой стенке $y = 0$. Вдоль третьей оси z система предполагается

*E-mail: kondrat@ibrae.ac.ru

однородной, поэтому z -компонента скорости отсутствует.

Будем считать, что выполнено условие применимости приближения пограничного слоя, состоящее в том, что число Рэлея велико в сравнении с единицей:

$$\text{Ra} = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\nu\chi} \gg 1.$$

Здесь g — ускорение земного тяготения, β — термический коэффициент объемного расширения, H — характерный размер по вертикали, ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность. Кроме того, будем полагать малой величину магнитного числа Рейнольдса

$$\text{Re}_m = \frac{4\pi\sigma}{c^2} VH \ll 1,$$

где σ — проводимость жидкости, c — скорость света, V — характерная скорость течения, что позволяет не учитывать обратное влияние течения жидкости на магнитное поле.

Ток в жидкости в присутствии магнитного поля определяется соотношением

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right).$$

Так как магнитное поле направлено по оси y , а вектор скорости лежит в плоскости xy , вектор $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ направлен вдоль z . Из уравнения

$$\text{div } \mathbf{j} = 0$$

при постоянной проводимости следует, что

$$\text{div } \mathbf{E} = 0.$$

Кроме того, справедливо уравнение

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0.$$

Исходя из этого, приходим к выводу, что в режиме короткого замыкания, который будем предполагать выполненным, напряженность электрического поля тождественно обращается в нуль:

$$\mathbf{E} \equiv 0.$$

Перейдем к выводу уравнений движения для пограничного слоя. По сравнению с непроводящей жидкостью, уравнения гидродинамики в присутствии магнитного поля для проводящей жидкости содержат дополнительно силу Лоренца, которая в рассматриваемой геометрии войдет только в продольную компоненту уравнения Навье–Стокса

(вдоль оси x). Как обычно, воспользовавшись поперечной компонентой в данном уравнении для исключения давления, приходим к системе уравнений движения для свободно-конвективного пограничного слоя проводящей жидкости в поперечном магнитном поле

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta T + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\nu}{\delta_M^2} u, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3)$$

Здесь u и v — продольная и поперечная компоненты скорости (соответственно, вдоль осей x и y). Температура T отсчитана от ее значения для жидкости вдали от стенки. Фигурирующая в уравнении (2) «магнитная толщина» определяется выражением

$$\delta_M = \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}} \frac{c}{B}, \quad (4)$$

где η — динамическая вязкость жидкости. Граничные условия для системы (1)–(3) состоят, как обычно, в равенстве нулю величин u , T в пределе $y \rightarrow \infty$ и u , v при $y = 0$, а также $T = \Delta T$ при $y = 0$.

3. СТРУКТУРА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Из уравнения (2) видно, что наличие магнитного поля приводит к дополнительному торможению. Покажем, что на начальном участке «разгона» жидкости (при малых значениях x) вкладом слагаемого, содержащего напряженность магнитного поля, можно пренебречь. Оценим суммарный вклад вязкого и инерционного членов в уравнении (2), положив

$$\delta_M^{-2} \propto B^2 = 0.$$

Тогда, согласно известным результатам для обычного пограничного слоя (см. [1]), справедливым в отсутствие магнитного поля, для величины

$$A \equiv u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

имеем

$$A \sim \frac{\nu u}{x^2} (\text{Ra}_x S)^{1/2}, \quad (5)$$

где

$$\text{Ra}_x = \frac{g\beta\Delta T x^3}{\nu\chi},$$

$S = 1$, если число Прандтля $Pr \equiv \nu/\chi \gtrsim 1$, и $S = Pr^{-1}$, если $Pr \lesssim 1$. Сравнивая оценку (5) с магнитным слагаемым в уравнении (2), приходим к выводу, что на начальном участке пограничного слоя в области $x \ll x_*$, где

$$x_* = \delta_M \left(\frac{\delta_M}{H} \right)^3 Ra S, \quad (6)$$

влиянием магнитного поля на пограничный слой можно пренебречь. В этом случае толщина теплового пограничного слоя $\delta_T \propto x^{1/4}$, а число Нуссельта

$$Nu_x \equiv - \frac{x}{\Delta T} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (7)$$

представляющее собой безразмерный коэффициент теплопередачи, дается оценкой

$$Nu_x \sim \left(\frac{Ra_x}{S} \right)^{1/4}.$$

Рассмотрим теперь свойства пограничного слоя при значениях $x \gg x_*$. В этой области x в уравнении баланса импульса (2) теперь уже можно пренебречь инерционным, а при значениях $y > \delta_M$ — также и вязким слагаемым в пользу магнитного. В этих условиях, согласно уравнению (2), $u \approx \bar{u}$, где

$$\bar{u} = \frac{g\beta\delta_M^2}{\nu} T. \quad (8)$$

Как будет показано ниже, толщина термического пограничного слоя δ_T при $x \gg x_*$ значительно больше величины δ_M :

$$\delta_T \gg \delta_M. \quad (9)$$

Это значит, что в уравнении баланса энергии (3) различием между величиной \bar{u} , определенной в (8), и продольной компонентой скорости течения u можно пренебречь. Поэтому, принимая во внимание линейность уравнения (3) относительно температуры, из уравнений (1), (3) получаем замкнутую систему уравнений для величины \bar{u} :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (11)$$

с граничными условиями

$$\bar{u} \Big|_{y=0} = U \equiv \frac{g\beta\Delta T\delta_M^2}{\nu}, \quad \bar{v} \Big|_{y=0} = \bar{u} \Big|_{y \rightarrow \infty} = 0. \quad (12)$$

Формально система уравнений (10), (11) совпадает с соответствующей системой для сдвигового пограничного слоя [4], если в последней произвести замену $\nu \rightarrow \chi$. Однако граничные условия для этих двух случаев принципиально различаются.

Подобно случаю сдвигового пограничного слоя, система (10), (11) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для безразмерной функции тока $f(\xi)$:

$$f f'' + 2f''' = 0, \quad (13)$$

$$f(0) = f'(\infty) = 0, \quad f'(0) = 1. \quad (14)$$

Автомодельная переменная ξ определяется равенством

$$\xi = y \sqrt{\frac{U}{\chi x}}. \quad (15)$$

Величины \bar{u} и \bar{v} связаны с функцией f соотношениями

$$\bar{u} = U f'(\xi), \quad \bar{v} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\chi U}{x}} (\xi f' - f). \quad (16)$$

В свою очередь температура, в соответствии с равенством (8), дается выражением

$$T = \Delta T f'(\xi). \quad (17)$$

Характерный масштаб зависимости функции f от переменной ξ имеет, естественно, порядок единицы. Поэтому толщину термического пограничного слоя, согласно равенству (15), можно оценить как

$$\delta_T \sim \sqrt{\frac{x}{x_*}} S \delta_M, \quad (18)$$

что подтверждает неравенство (9) при условии $x \gg x_*$.

Вернемся к определению продольной компоненты скорости течения в пограничном слое при условии $x \gg x_*$. При $y \gg \delta_M$ она определяется выражением (8). В области $y \lesssim \delta_M$ конвективные члены в уравнении (2) по-прежнему малы, но становится важной вязкость. Тогда вместо соотношения (8) для скорости u имеем уравнение

$$g\beta T + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\nu}{\delta_M^2} u = 0. \quad (19)$$

С учетом того, что при условии $\delta_T \gg \delta_M$ температура T на расстояниях порядка δ_M меняется слабо, решение уравнения (19) принимает вид

$$u = \frac{g\beta\delta_M^2}{\nu} T (1 - e^{-y/\delta_M}). \quad (20)$$

Подчеркнем, что это выражение справедливо во всей области изменения поперечной координаты y .

Как следует из (18), полная толщина пограничного слоя δ_T растет по мере увеличения продольной координаты пропорционально \sqrt{x} , в то время как толщина вязкого подслоя δ_M остается постоянной. Поэтому по мере роста x возмущение температуры, вызванное отклонением профиля скорости от профиля температуры вблизи стенки (формула (19)), будет все более незначительным.

Отметим, что согласно (18) и при учете (4) толщина температурного пограничного слоя в области $x \gg x_*$ пропорциональна величине магнитного поля:

$$\delta_T \propto B\sqrt{x}.$$

4. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ОТ СТЕНКИ В РЕЖИМЕ МАГНИТНОГО ТОРМОЖЕНИЯ

Тепловой поток от стенки определяется числом Нуссельта (7), которое в режиме магнитного торможения (в области $x \gg x_*$) с учетом соотношений (7), (15) и (17) дается выражением

$$\text{Nu}_x = -f''(0) \frac{\delta_M}{x} \text{Ra}_x^{1/2} \propto \frac{\sqrt{x}}{B}.$$

В этом режиме плотность теплового потока обратно пропорциональна напряженности магнитного поля и корню квадратному от продольной координаты. Для определения $f''(0)$ система (13), (14) решалась численно. Подчеркнем, что хотя уравнение (13) совпало с соответствующим уравнением для сдвигового пограничного слоя, в случае последнего граничные условия для функции $f(\xi)$ вместо (14) имеют вид

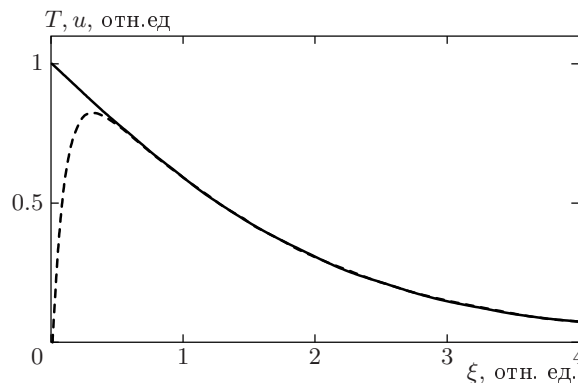
$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1.$$

Численное решение уравнений (13), (14) проводилось методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Полученное значение второй производной в нуле оказалось равным $f''(0) = -0.44$. В итоге окончательное выражение для числа Нуссельта имеет вид

$$\text{Nu}_x = 0.44 \frac{\delta_M}{x} \text{Ra}_x^{1/2}.$$

На рисунке представлены профили температуры и продольной скорости в зависимости от координаты ξ , полученные в результате численного решения системы (13), (14) с учетом (17) и (20) для $\delta_T/\delta_M = 10$.

Условие реализации теплоотдачи в режиме магнитного торможения состоит в требовании, чтобы



Зависимости температуры (непрерывная линия) и продольной скорости (штрихи) от переменной ξ , нормированные, соответственно, на ΔT и $\frac{g\beta\delta_M^2}{\nu} \Delta T$, при $\delta_T/\delta_M = 10$

высота стенки H была одновременно велика как по сравнению с толщиной пограничного слоя, так и с нижней границей режима по продольной координате x_* . С учетом выражений (17) и (5), это требование сводится к неравенствам

$$(\text{Ra}S)^{1/4} < \frac{H}{\delta_M} \ll \text{Ra}^{1/2}. \quad (21)$$

При характерных значениях параметров $\beta \approx 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, $\sigma \approx 3 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$, $\chi \approx 0.1 \text{ cm}^2 \cdot \text{c}^{-1}$ и $\Delta T \approx 10 \text{ K}$, $H = 40 \text{ cm}$ неравенство (21) принимает вид следующего условия для величины магнитного поля:

$$100 \text{ Гс} < B \ll 6 \cdot 10^3 \text{ Гс}.$$

Другим условием реализации исследуемого режима является устойчивость ламинарного течения жидкости в рассматриваемом диапазоне параметров. Поскольку полная задача устойчивости течения в данном пограничном слое требует самостоятельного исследования, здесь мы ограничимся следующим замечанием. Согласно [4], движение в ламинарном пограничном слое устойчиво, если число Рейнольдса, определенное по толщине вытеснения δ (определение δ см. в [4]), не превышает некоторого критического значения $\text{Re}_{\delta_{cr}} \sim 10^2$. Подставляя в качестве толщины вытеснения толщину пограничного слоя (18), а для максимальной скорости — выражение (8) с $T = \Delta T$, получаем при $\text{Pr} \approx 1$ и $B \approx 500 \text{ Гс}$ следующую оценку для значения числа Рейнольдса: $\text{Re}_{\delta T} \approx 10$. С ростом магнитного поля число Рейнольдса убывает обратно пропорционально величине поля, поэтому можно ожидать,

что для рассматриваемых значений параметров ламинарное течение в исследуемом пограничном слое будет устойчиво.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты проведенного анализа состоят в следующем. В присутствии поперечного магнитного поля свободно-конвективный пограничный слой по продольной координате разбивается на две области, пространственная доля которых определяется величиной напряженности поля. В первой области пограничного слоя, примыкающей к его передней кромке, влияние поля несущественно. В следующей за первой (второй) области магнитное поле оказывает тормозящее воздействие на пограничный слой. Здесь с ростом продольной координаты x продольная скорость выходит на насыщение, а толщина пограничного слоя вместо зависимости $x^{1/4}$, как в первой области, приобретает более быструю зависимость ($\propto \sqrt{x}$). Такое поведение, в свою очередь, приводит к существенному подавлению теплового

потока от жидкости к стенке, который оказывается обратно пропорциональным величине магнитного поля.

В заключение авторы выражают благодарность Д. В. Никольскому за проведение численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия, *Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен*, т. 1. Мир, Москва (1991).
2. Э. Я. Блум, Ю. А. Михайлов, Р. Я. Озолс, *Тепло- и массообмен в магнитном поле*, Зинанте, Рига (1980).
3. Л. Г. Генин, В. Г. Свиридов, *Гидродинамика и теплообмен МГД-течений в каналах*, Издательство МЭИ, Москва (2001).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).