ЖЭТФ, 2002, том 122, вып. 6 (12), стр. 1168–1197 © 2002

ДВУХФОТОННЫЕ ТОРМОЗНЫЕ ПРОЦЕССЫ В АТОМАХ: ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

А. А. Крыловецкий, Н. Л. Манаков, С. И. Мармо*

Воронежский государственный университет
394006, Воронеж, Россия

А. Ф. Старасе**

University of Nebraska, Department of Physics and Astronomy
Lincoln, NE 68588-0111, USA

Поступила в редакцию 7 июня 2002 г.

Выполнен парциально-волновой анализ сечений двухфотонных свободно-свободных (тормозных) переходов электрона при рассеянии на статическом потенциале $U(r)$, а также на атоме с ненулевым угловым моментом. Дипольное взаимодействие с излучением учитывается во втором порядке теории возмущений для общего случая эллиптической поляризации фотонов. Поляризационная и угловая зависимости двухфотонной амплитуды потенциального рассеяния представлены в виде комбинации скалярных произведений импульсов электрона и векторов поляризации фотонов и пяти атомных параметров, содержащих полиномы Лежандра от угла рассеяния и радиальные матричные элементы, зависящие от начальной E и конечной E' энергий электрона. Результаты применимы как для спонтанного двойного тормозного излучения при нерелятивистских энергиях, так и для вынужденного поглощения и излучения в поле световой волны. Проанализированы специфические поляризационные эффекты (циркулярный и эллиптический дихроизм) в двухфотонных тормозных процессах, обусловленные интерференцией эрмитовой и антиэрмитовой частей амплитуды и зависящие от знака спиральности фотонов. Аналитически исследованы предельные случаи малых и больших частот фотонов и найдены асимптотики радиальных матричных элементов и амплитуд для потенциала $U(r)$ общего вида. Для кулоновского потенциала получены замкнутые аналитические выражения для радиальных матричных элементов в виде интегралов от гипергеометрической функции и в явном виде выделены сингулярности при $E' \to E$. Обсуждаются методы приближенного расчета радиальных матричных элементов и приводятся результаты их точного численного расчета, а также угловых распределений и сечений вынужденного одно- и двухфотонного излучения и поглощения для случая кулоновского потенциала. Как показывают численные результаты, эффекты дихроизма вполне доступны для экспериментального наблюдения.

PACS: 03.65.Nk, 34.80.Qb, 34.50.Rk

1. ВВЕДЕНИЕ

Процессы рассеяния электронов на атомах и ионах, сопровождающиеся излучением и поглощением фотонов, составляют обширный раздел атомной физики. Начало квантовому описанию таких процессов положило исследование Зоммерфельдом (1931 г.) спонтанного тормозного излучения (Bremsstrahlung, BrS) при рассеянии электрона на кулоновском центре [1]. В нерелятивистском дипольном приближении сечение BrS с испусканием фотона с частотой ω и вектором поляризации $\mathbf{e}$ в направлении $\mathbf{k}$,

$$\frac{d\sigma}{d\omega d\Omega_{\mathbf{p}'} d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{e^2\hbar^5}{(2\pi)^4 c^3}\,\frac{p'}{p}\omega\,|\mathcal{M}|^2, \tag{1}$$

определяется матричным элементом (МЭ)

$$\mathcal{M} = \left\langle \psi_{\mathbf{p}'}^{(-)} \middle| \mathbf{e}^* \cdot \nabla \middle| \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} \right\rangle \tag{2}$$

*E-mail: manakov@thp.vsu.ru
**A. F. Starace.

перехода между состояниями непрерывного спектра $\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}$ и $\psi_{\mathbf{p}'}^{(-)}$ электрона в статическом атомном потенциале $U(r)$. При рассеянии на кулоновском центре трехмерный МЭ $\mathcal{M}$ вычисляется через гипергеометрические функции ${}_2F_1(a,b;c;x)$ [1, 2]. Более того, в этом случае оказывается возможным аналитически проинтегрировать сечение (1) по направлениям рассеянного электрона и выразить спектральное распределение BrS, $d\sigma/d\omega$, в замкнутой форме через производную квадрата модуля функции ${}_2F_1$ по аргументу (формула Зоммерфельда [1, 3]). Для потенциала $U(r)$ общего вида расчет сечения (1) состоит в использовании мультипольного разложения функций $\psi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}$ (см. ниже (15)). В этом случае парциальное разложение амплитуды $\mathcal{M}$, удобное для анализа поляризационно-угловой зависимости сечения, имеет вид [4]

$$\mathcal{M} = Q(p,p',\theta)\,(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{p}) + Q(p',p,\theta)\,(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{p}'), \qquad (3)$$

$$Q(p,p',\theta) = i\frac{2\pi^2}{m\sqrt{p^3p'}}\sum_{l=1}^{\infty}\left[\exp(i\Delta_{l-})d_{l-1\,l}(E',E) + \right.$$
$$\left. + \exp(i\Delta_{l+})d_{l+1\,l}(E',E)\right]P_l^{(1)}(\cos\theta). \qquad (4)$$

Здесь $\Delta_{l\pm} = \delta_{l\pm 1}(p') + \delta_l(p)$, $\delta_l(p)$ — фазы рассеяния на потенциале $U(r)$, $P_l^{(1)}(x) = (d/dx)P_l(x)$ — производная полинома Лежандра $P_l(x)$, $E' = p'^2/2m = E - \hbar\omega$, а $d_{l'\,l}(E',E)$ — радиальные МЭ оператора импульса (см. (37)). Спектральное распределение $d\sigma/d\omega$ также записывается в виде парциального ряда:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{8\pi^2e^2\hbar^5}{3m^2c^3}\,\frac{\omega}{p^2}\times$$
$$\times\sum_{l=1}^{\infty} l\left[|d_{l\,l-1}(E',E)|^2 + |d_{l-1\,l}(E',E)|^2\right]. \qquad (5)$$

В кулоновском случае этот ряд удается просуммировать непосредственно (см. работу [5], где аналитически вычислена сумма ряда (5), записанного с использованием оператора взаимодействия в «форме ускорения») и воспроизвести формулу Зоммерфельда. Хотя для кулоновского BrS такой подход имеет скорее методический интерес, для потенциала $U(r)$ общего вида парциально-волновой анализ является единственным способом упрощения общих формул (1), (2) без дополнительных приближений.

Наряду с обычным BrS, при рассеянии электрона на силовом центре возможен и процесс одновременного излучения двух спонтанных фотонов (двойное тормозное излучение, 2BrS), который в общем виде был впервые рассмотрен Гайтлером и Нордгеймом в 1934 г. [6] как радиационная поправка к обычному BrS. В 1985 г. спонтанное 2BrS было зарегистрировано экспериментально: в [7] и последовавших за ней работах [8] методом совпадений измерены дифференциальные сечения излучения двух тормозных фотонов при рассеянии электронов с энергией около 70 кэВ на тонких мишенях. В экспериментах [9] спонтанное 2BrS наблюдалось для электронов с энергией порядка 10 кэВ. Первые теоретические расчеты сечения 2BrS при рассеянии электрона на ядре были выполнены в релятивистском борновском приближении [10]. Точный учет действия кулоновского поля на электрон в процессе 2BrS возможен в рамках нерелятивистского дипольного приближения. С использованием кулоновской функции Грина амплитуду 2BrS удается представить в виде интегралов от гипергеометрической функции ${}_2F_1$ (двухфотонный аналог результатов работ [1, 2] для $\mathcal{M}$ в (2)). Различные способы расчета двухфотонных амплитуд (с разными представлениями кулоновской функции Грина), использованные разными авторами, приводят к количественно эквивалентным, но различным по форме выражениям [11–13]. В частности, в [13] в амплитуде выделены внеинтегральные («борновские») слагаемые, значительно упрощающие анализ предельных случаев. Следует отметить предложенный Королем [14] эффективный приближенный метод расчета амплитуды 2BrS, основанный на учете в однофотонных МЭ $d_{l_2\,l_1}(E_2,E_1)$, входящих в составной МЭ двухфотонного перехода, лишь вклада от δ-образных сингулярностей, возникающих при $E_2\to E_1$. В дальнейшем этот метод был распространен на недипольные расчеты [15] и на релятивистский случай [16]. Точные аналитические выражения для нерелятивистской амплитуды 2BrS с учетом эффектов запаздывания получены в [17, 18]. Кроме перечисленных результатов для кулоновского потенциала, численные расчеты спонтанного 2BrS были выполнены также для рассеяния электронов на нейтральных атомах как в рамках модели потенциального рассеяния [19], так и при учете поляризационного тормозного излучения атомным остовом [20].

Наряду со спонтанным излучением, значительный интерес к многоквантовым тормозным процессам был стимулирован лазерными экспериментами, что позволило наблюдать вынужденные процессы многофотонного тормозного излучения и поглощения в оптической области частот. Первые измерения сечений свободно-свободных переходов в присутствии интенсивной лазерной волны были выполнены в работах [21, 22]. Такого рода эксперименты неоднократно проводились и в дальнейшем для различных атомных мишеней при разных энергиях электронного пучка и геометрии опыта (см., например, [23] и обзор [24]). Весьма общих результатов в теоретическом описании многофотонных переходов в непрерывном спектре удается достичь в рамках борновского и низкочастотного приближений. В борновском случае сечение $d\sigma^n$ n-фотонного вынужденного излучения ($n < 0$) и поглощения ($n > 0$) в лазерном поле с амплитудой F, вектором поляризации $\mathbf{e}$ и частотой ω имеет простой вид (формула Бункина–Федорова [25]; см. также [26]):

$$d\sigma^n = \frac{p'_n}{p} J_n^2 \left(\frac{eF|\mathbf{e}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}'_n)|}{m\hbar\omega^2} \right) d\sigma_B, \qquad (6)$$

где J_n — функция Бесселя, $d\sigma_B$ — борновское сечение упругого рассеяния в отсутствие световой волны, а импульсы p и p'_n в начальном и конечном состояниях связаны законом сохранения энергии: $({p'_n}^2 - p^2)/2m = n\hbar\omega$. Как показано в [27], в низкочастотном пределе ($\omega \to 0$) борновский ряд может быть просуммирован точно, так что даже для медленных электронов при $\hbar\omega \ll E$ сечение $d\sigma^n$ также имеет факторизованный вид (6) с заменой $d\sigma_B$ на точное сечение упругого рассеяния $d\sigma_0$ в отсутствие светового поля. Отметим, что хотя были предложены различные варианты вывода низкочастотной асимптотики $d\sigma^n$ (см., например, [28, 29]), вопрос о границах применимости приближения Кролла–Ватсона [27], пренебрегающего воздействием лазерного поля на динамику взаимодействия медленного электрона с атомным потенциалом, до настоящего времени является предметом дискуссий [30–33]. В [34] выражение для $d\sigma^n$ получено в приближении, в котором движение электрона описывается классически, а процесс излучения и поглощения — квантовомеханически. Различные варианты обобщения результатов [25, 27] с учетом эффектов сильного лазерного поля см., например, в обзоре [35], однако точный учет рассеивающего потенциала возможен лишь в рамках теории возмущений по полю волны. В частности, для кулоновского двойного тормозного излучения и поглощения такой расчет полностью аналогичен случаю спонтанного 2BrS [11–13]. Однако при упругом переизлучении фотонов возникает особая ситуация: оба МЭ, определяющие амплитуду перехода, оказываются расходящимися, так что получение конечного результата требует устранения расходимостей [13, 36]. Кроме чисто вынужденных переходов, индуцируемых интенсивным лазерным полем, оно может существенно модифицировать и процесс спонтанного BrS. В борновском приближении этот вопрос исследован в [37]. Более детальный учет эффектов атомного (кулоновского) потенциала выполнен в [38, 39]. Укажем также работы [40, 41], в которых рассматривались «комбинированные» двухфотонные тормозные процессы комптоновского типа — поглощение электроном лазерного фотона с последующим спонтанным BrS в поле ядра.

Ввиду трудностей экспериментального измерения поляризационных характеристик спонтанного BrS, в работах по спонтанным тормозным процессам анализируются, в основном, энергетическая и угловая зависимости сечений. Напротив, в случае вынужденных процессов возможность контролируемого изменения лазерной поляризации открывает новые возможности в исследовании свободно-свободных переходов, что делает актуальным анализ поляризационных эффектов в тормозных процессах. Обобщение результатов Кролла–Ватсона [27] на случай эллиптической поляризации лазерного излучения обсуждается в [31, 42]. В работах [43, 44] показано существенное различие сечений одно- и двухфотонного рассеяния для случаев линейной и циркулярной лазерной поляризации при рассеянии электронов на атомах водорода [43] и гелия [44]. Однако наиболее ярким поляризационным эффектом является эффект дихроизма, состоящий в различии сечений при изменении знака степени циркулярной поляризации фотонов. В [4] установлено, что дифференциальное сечение однофотонного BrS при рассеянии электрона на ядре существенно различается для фотонов с правой и левой циркулярными поляризациями (циркулярный дихроизм, CD). Общий анализ CD в тормозном излучении при рассеянии электрона на атоме с ненулевым угловым моментом выполнен в [45]. Поляризационная зависимость поправок к упругому кулоновскому рассеянию, обусловленных влиянием световой волны, исследована в [13, 36]. Эффект CD оказывается чувствительным к энергии электрона и частоте фотона и исчезает как в борновском, так и в низкочастотном пределах, а также при малых углах рассеяния. Вне указанных областей CD имеет заметную величину и вполне доступен экспериментально. Укажем, что CD в фотопроцессах с неполяризованными атомными мишенями является существенно квантовым интерференционным эффектом и, в частности, отсутствует при классическом анализе BrS в сильном лазерном поле [46]; в то же время численный квантовый расчет однофотонного кулоновского BrS вне рамок теории возмущений по лазерному полю [47] указывает на значительный CD. В работах [48] рассмотрено рассеяние электрона на атоме водорода в присутствии двух полей, с линейной и циркулярной поляризациями. При наличии двух полей возникновение дихроичных эффектов достаточно очевидно, и в этом случае при определенной геометрии полей CD отличен от нуля и для быстрых (борновских) электронов, а также в полном сечении рассеяния.

Как уже отмечалось, для корректного описания поляризационных эффектов первое борновское приближение недостаточно и необходим более точный учет взаимодействия электрона с мишенью, что для процессов с двумя и более фотонами представляет значительные трудности уже в рамках теории возмущений по взаимодействию электрона с излучением. Ввиду наличия в задаче нескольких векторных параметров, в первую очередь представляет интерес выделение динамических (зависящих от энергий и структуры потенциала) и кинематических (зависящих от поляризации фотонов и геометрии задачи) факторов в общих выражениях для сечений. В настоящей статье выполнен парциально-волновой анализ сечений двухфотонных свободно-свободных переходов, применимый как для потенциального рассеяния в поле $U(r)$, так и для рассеяния на атоме с ненулевым угловым моментом. Общие результаты проиллюстрированы аналитическими и численными расчетами для рассеяния на кулоновском потенциале. В разд. 2 проведено максимально возможное аналитическое упрощение амплитуды двухфотонных дипольных переходов для случая центрального потенциала $U(r)$, обобщающее результаты (3), (4) для однофотонного BrS. В отличие от двучленного выражения (3), двухфотонная амплитуда для общего случая различных фотонов записывается в виде суммы пяти произведений инвариантных (не зависящих от поляризации фотонов) атомных параметров Q_i и скалярных произведений векторов поляризации фотонов и начального и конечного импульсов электрона. Аналогично (4), параметры Q_i представлены в виде ряда из произведений радиальных МЭ второго порядка, $M_{l'l}^{L=l\pm1}$, между состояниями континуума с фиксированными значениями орбитальных моментов l и l' и полиномов Лежандра от угла рассеяния θ. Такая форма представления амплитуды позволяет получить явные выражения для атомных параметров, описывающих дихроичные поляризационные явления, зависящие от знака спиральности фотонов (п. 2.3), и, в частности, показать, что при вынужденных двухфотонных процессах наряду с CD возникает новый дихроичный эффект — эллиптический дихроизм (ED), исчезающий в случае чисто циркулярной поляризации лазерного поля. Проанализированы оптимальные условия для наблюдения CD и ED. В разд. 3 (см. также Приложение Б) получены замкнутые аналитические выражения для кулоновских МЭ $M_{l'l}^{L}$ в виде суммы МЭ $d_{l_2\,l_1}(E', E)$ обычного BrS и однократного интеграла от функции ${}_2F_1$. В разд. 4 рассмотрены упругие двухфотонные переходы и показано, что сингулярности, возникающие в $M_{l'l}^{L}$ при сближении энергий конечного и начального состояний, $E' \to E$, компенсируются при вычислении инвариантных параметров Q_i^{el}, для которых в случае кулоновского рассеяния получены явные аналитические выражения. В разд. 5 исследованы предельные области малых и больших частот фотонов и найдены простые асимптотики амплитуд неупругого рассеяния для центрального поля $U(r)$. Частотная и энергетическая зависимости кулоновских радиальных МЭ, а также точность приближенных методов расчета обсуждаются в п. 6.1. В п. 6.2 приведены результаты для угловых распределений и поляризационной зависимости процессов вынужденного двухфотонного излучения и поглощения и проведено сравнение численных величин сечений одно- и двухфотонных тормозных переходов. Полученные в настоящей работе аналитические формулы для кулоновских МЭ $M_{l'l}^{L}$ являются наиболее общими выражениями для амплитуд двухфотонных переходов в кулоновском поле между состояниями с фиксированными орбитальными моментами l и l'. Как показано в Приложении Б, аналитическим продолжением по энергии ($p \to imZe^2/n\hbar$ и/или $p' \to imZe^2/n'\hbar$) из них следуют известные результаты для случая, когда оба или одно из состояний принадлежат дискретному спектру [49].

Далее в статье используется атомная система единиц.

2. ПОЛЯРИЗАЦИОННО-УГЛОВАЯ СТРУКТУРА СЕЧЕНИЙ ДВУХФОТОННЫХ ТОРМОЗНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Общие формулы

Амплитуда двухфотонного перехода электрона между состояниями рассеяния с асимптотическими импульсами $\mathbf{p}_i \equiv \mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_f \equiv \mathbf{p}'$ в потенциале $U(r)$ определяется МЭ второго порядка теории возмущений (ср. (2)):

$$M(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathcal{E}) = -\left\langle \psi^{(-)}_{\mathbf{p}'} \right| (\mathbf{e}_2\cdot\nabla') G_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}',\mathbf{r})(\mathbf{e}_1\cdot\nabla) \left| \psi^{(+)}_{\mathbf{p}} \right\rangle, \quad (7)$$

где $\psi^{(-)}_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}')$ и $\psi^{(+)}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ — волновые функции непрерывного спектра с асимптотикой сходящихся (−) и расходящихся (+) волн, нормированные условием

$$\left\langle \psi^{(\pm)}_{\mathbf{p}'} \middle| \psi^{(\pm)}_{\mathbf{p}} \right\rangle = (2\pi)^3\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}),$$

$G_{\mathcal{E}}$ — функция Грина гамильтониана с потенциалом $U(r)$ с асимптотикой расходящихся волн при $\mathcal{E}>0$. Дифференциальное сечение спонтанного 2BrS с испусканием фотонов в направлениях $\mathbf{k_1}$ и $\mathbf{k_2}$ ($|\mathbf{k}_i|=1$, $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i^*=1$, $i=1,2$) имеет вид

$$\frac{d\sigma^5}{d\Omega_{\mathbf{p}'}d\Omega_{\mathbf{k_1}}d\Omega_{\mathbf{k_2}}d\omega_1 d\omega_2} = \frac{\alpha^6}{(2\pi)^6}\frac{p'}{p}\omega_1\omega_2 \times |M(\mathbf{e}_2^*,\mathbf{e}_1^*,E-\omega_1)+M(\mathbf{e}_1^*,\mathbf{e}_2^*,E-\omega_2)|^2. \quad (8)$$

При рассеянии электрона на силовом центре $U(r)$ в присутствии интенсивной световой волны, электрический вектор которой будем записывать в виде

$$\mathbf{F}(t) = F\,\mathrm{Re}\,\{\mathbf{e}\exp(-i\omega t)\}, \quad \mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^*=1,$$

основной интерес представляют вынужденные многофотонные процессы. При этом вынужденные двухфотонные переходы определяют процессы двойного тормозного излучения и поглощения, а также линейную по интенсивности волны $I = cF^2/4\pi$ поправку к сечению упругого рассеяния. Сечения указанных процессов тоже определяются МЭ (7). Так, дифференциальное (по углам рассеянного электрона) сечение вынужденного 2BrS имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{p}'}} = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{F}{2\omega}\right)^4 \frac{p'}{p}|M(\mathbf{e}^*,\mathbf{e}^*,\mathcal{E})|^2, \quad (9)$$

где энергия $\mathcal{E}$ электрона в промежуточном состоянии связана с энергиями в начальном ($E=p^2/2$) и конечном ($E'={p'}^2/2$) состояниях соотношением $\mathcal{E}=E-\omega=E'+\omega$. Аналогично, сечение двойного тормозного поглощения дается выражением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{p}'}} = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{F}{2\omega}\right)^4 \frac{p'}{p}|M(\mathbf{e},\mathbf{e},\mathcal{E})|^2, \quad (10)$$

где $\mathcal{E}=E+\omega=E'-\omega$.

В случае упругого рассеяния ($E'=E$) учет взаимодействия со световой волной в низшем (втором)

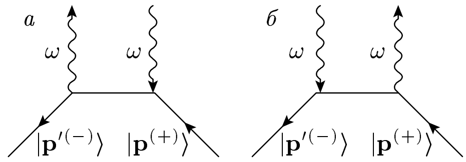

Рис. 1. Диаграммы Фейнмана для процесса переизлучения фотона электроном в континууме

порядке теории возмущений дает линейную по интенсивности волны поправку к амплитуде,

$$f = f_0 + f_2\,, \quad (11)$$

где f_0 — амплитуда упругого рассеяния на потенциале $U(r)$ в отсутствие световой волны, а

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{F}{2\omega}\right)^2 \times [M(\mathbf{e},\mathbf{e}^*,E-\omega)+M(\mathbf{e}^*,\mathbf{e},E+\omega)] \quad (12)$$

— поправка, обусловленная индуцированным волной двухфотонным переходом (переизлучением фотона электроном в процессе рассеяния, рис. 1). Поправка порядка F^2 к сечению упругого рассеяния определяется интерференцией амплитуд f_0 и f_2:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{p}'}} = |f_0|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f_0^* f_2). \quad (13)$$

2.2. Парциально-волновое разложение амплитуды

Поскольку $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ входят в (7) линейно, то, очевидно, МЭ $M(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathcal{E})$ может быть представлен в виде суммы произведений линейно независимых комбинаций векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ (где $\mathbf{n}=\mathbf{p}/p$, $\mathbf{n}'=\mathbf{p}'/p'$) и инвариантных амплитуд $\mathcal{P}_i$, зависящих только от p, p', $\mathcal{E}$ и угла θ между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$. Линейно независимых комбинаций $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ насчитывается пять и, выбирая их определенным образом, $M(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathcal{E})$ можно записать в виде

$$M(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathcal{E}) = \mathcal{P}_1(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{n})(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{n}) + \mathcal{P}_2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{n}')(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{n}') + +\mathcal{P}_3(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{n})(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{n}') + \mathcal{P}_4(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{n}')(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{n}) + \mathcal{P}_5(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1). \quad (14)$$

Отметим, что именно такую структуру имеют и аналитические выражения амплитуды двухфотонных переходов в кулоновском поле, полученные в [11–13] без использования парциальных разложений. Явный вид амплитуд $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i(p, p', \theta, \mathcal{E})$ для произвольного потенциала $U(r)$ может быть получен лишь путем конкретного расчета МЭ (7). Общим способом упрощения выражений типа (7) является использование мультипольных разложений входящих в (7) волновых функций и операторов с последующим интегрированием по угловым переменным методами квантовой теории углового момента [50]. Представим волновые функции и функцию Грина в (7) в виде разложений по сферическим функциям:

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{p}} \times \\ \times \sum_{lm} i^l \exp\left(\pm i\delta_l(p)\right) R_{El}(r) Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) Y^*_{lm}(\mathbf{n}), \quad (15)$$

$$G_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{LM} g_L(r, r', \mathcal{E}) Y_{LM}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) Y^*_{LM}\left(\frac{\mathbf{r}'}{r'}\right),$$

где $R_{El}(r)$ — нормированные на энергию радиальные функции непрерывного спектра в потенциале $U(r)$, а $\delta_l(p)$ — фазы рассеяния. Подставляя (15) в (7) и выполняя интегрирование по углам и суммирование по проекциям моментов, получаем (ниже используются стандартные обозначения квантовой теории углового момента [50])

$$M(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathcal{E}) = -\frac{(2\pi)^3}{\sqrt{pp'}} \sum_{c=0}^{2} \sum_{ll'L} i^{l+l'} \times \\ \times \exp\left[i(\delta_{l'}(p') + \delta_l(p))\right] \begin{Bmatrix} 1 \, 1 \, c \\ l' \, l \, L \end{Bmatrix} \times \\ \times \langle R_{E'l'} || \nabla g_L \nabla || R_{El} \rangle \times \\ \times \left(\{\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1\}_c \cdot \{Y_{l'}(\mathbf{n}') \otimes Y_l(\mathbf{n})\}_c\right). \quad (16)$$

Обычно выражения типа (16) рассматриваются как конечный результат аналитических преобразований «геометрической» части амплитуд методами квантовой теории углового момента, а дальнейшие вычисления основаны на численных расчетах тензорных конструкций в (16) в выбранной некоторым подходящим образом системе координат (см., например, работы [30] по одно- и двухфотонному вынужденному излучению и поглощению в линейно-поляризованном поле; отметим, что в указанных работах в качестве конечного состояния в МЭ (2) и (7) автор необоснованно использует функцию $\psi_{\mathbf{p}'}^{(+)}(\mathbf{r})$ с асимптотикой расходящихся волн). В работе [45] (см. также [51]) развита специальная техника для упрощения тензорных произведений сферических функций $Y_{lm}(\mathbf{n})$, основанная на редукционной формуле для биполярных гармоник $Y_{LM}^{l'l}(\mathbf{n}', \mathbf{n})$, определяемых соотношением

$$Y_{LM}^{l'l}(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = \{Y_{l'}(\mathbf{n}') \otimes Y_l(\mathbf{n})\}_{LM} = \\ = \sum_{mm'} C_{l'm'lm}^{LM} Y_{l'm'}(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}). \quad (17)$$

Указанная техника позволяет представить $Y_{LM}^{l'l}(\mathbf{n}', \mathbf{n})$ с произвольными значениями $l, l' > L$ в виде конечной суммы «минимальных» гармоник $Y_{LM}^{k,L-k}(\mathbf{n}', \mathbf{n})$ с $0 \le k \le L$ и полиномов Лежандра. Например, для биполярной гармоники $Y_{2m}^{ll}(\mathbf{n}', \mathbf{n})$ имеем [45]

$$Y_{2m}^{ll}(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = \frac{(-1)^{l-1}}{4\pi} \left[\frac{30(2l+1)}{(2l-1)l(l+1)(2l+3)}\right]^{1/2} \times \\ \times \left(P_l^{(1)}(x) \{\mathbf{n}' \otimes \mathbf{n}\}_{2m} + \right. \\ \left. + P_l^{(2)}(x) \{[\mathbf{n}' \times \mathbf{n}] \otimes [\mathbf{n}' \times \mathbf{n}]\}_{2m}\right), \quad (18)$$

где $x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \cos\theta$, $P_l^{(k)}(x) = (d/dx)^k P_l(x)$. Выражения для остальных биполярных гармоник $Y_{cm}^{l'l}(\mathbf{n}', \mathbf{n})$ с $c = 0, 1, 2$, входящих в (16), также приведены в [45]. Используя их и переписывая возникающие тензорные конструкции вида $(\{\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1\}_c \cdot \{\mathbf{n}' \otimes \mathbf{n}\}_c)$ через скалярные произведения векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ [50, гл. 3], выражение (16) для $M(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathcal{E})$ приводим к виду (14). Окончательный результат удобно записать в следующем виде:

$$M(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathcal{E}) = Q_1 \left[(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{3}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\right] + \\ + Q_2 \left[(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}')(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}') - \frac{1}{3}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\right] + \\ + \frac{1}{2} Q_3 \left[(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}')(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}') - \right. \\ \left. - \frac{2}{3}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\right] + \\ + Q_4 \left[(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}')(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}')\right] + \\ + Q_5 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1), \quad (19)$$

где

$$Q_1 = -\sum_{l=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2l+3}\left(\mathcal{M}_{l\,l}^{l+1}+\mathcal{M}_{l+2\,l}^{l+1}\right)+\right.$$
$$\left.+\ \frac{1}{2l-1}\left(\mathcal{M}_{l\,l}^{l-1}+\mathcal{M}_{l-2\,l}^{l-1}\right)\right]P_l^{(2)}(x)\,,$$
$$Q_2 = -\sum_{l=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2l+3}\left(\mathcal{M}_{l\,l}^{l+1}+\mathcal{M}_{l\,l+2}^{l+1}\right)+\right.$$
$$\left.+\ \frac{1}{2l-1}\left(\mathcal{M}_{l\,l}^{l-1}+\mathcal{M}_{l\,l-2}^{l-1}\right)\right]P_l^{(2)}(x)\,,$$
$$Q_3 = \sum_{l=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2l-1}\mathcal{M}_{l\,l}^{l-1}+\frac{1}{2l+3}\mathcal{M}_{l\,l}^{l+1}\right]P_l^{(1)}(x)+ \qquad (20)$$
$$+\,2\sum_{l=2}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2l-1}\mathcal{M}_{l\,l}^{l-1}+\frac{1}{2l+3}\mathcal{M}_{l\,l}^{l+1}\right)x+\right.$$
$$\left.+\ \frac{1}{2l+1}\left(\mathcal{M}_{l-1\,l+1}^{l}+\mathcal{M}_{l+1\,l-1}^{l}\right)\right]P_l^{(2)}(x)\,,$$
$$Q_4 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\left[\mathcal{M}_{l\,l}^{l-1}-\mathcal{M}_{l\,l}^{l+1}\right]P_l^{(1)}(x),$$
$$Q_5 = \frac{1}{3}\sum_{l=0}^{\infty}\left[l\mathcal{M}_{l\,l}^{l-1}+(l+1)\mathcal{M}_{l\,l}^{l+1}\right]P_l(x).$$

В радиальные МЭ $\mathcal{M}_{l'l}^{L}$ включены фазовые множители из (15):

$$\mathcal{M}_{l'\,l}^{L} = \left(2\pi^2/\sqrt{pp'}\right)\times$$
$$\times\exp\left[i(\delta_{l'}(p')+\delta_l(p))\right]M_{l'\,l}^{L}(E',E,\mathcal{E}),$$

$$M_{l'\,l}^{L}(E',E,\mathcal{E}) =$$
$$= \langle D(L,l')R_{E'l'}\,|\,g_L(\mathcal{E})\,|D(L,l)R_{El}\rangle\,, \qquad (21)$$

$$D(l_1,l_2) = \frac{d}{dr}+\frac{\mathrm{sign}(l_2-l_1)\mathrm{max}(l_1,l_2)+1}{r}. \qquad (22)$$

Формулы (20) в явном виде выражают пять инвариантных параметров Q_i (очевидным образом связанных с $\mathcal{P}_i$ в (14)) через радиальные МЭ. Из (20) непосредственно видны свойства симметрии,

$$Q_1(p,p') = Q_2(p',p), \quad Q_{3,4,5}(p',p) = Q_{3,4,5}(p,p').$$

2.3. Эффекты циркулярного и эллиптического дихроизма в свободно-свободных переходах

Параметризация амплитуды в виде (19), (20) позволяет полностью проанализировать поляризационные и угловые зависимости как в спонтанном 2BrS (с различными поляризациями $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$), так и для вынужденных процессов (с $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$). Рассмотрим вначале вынужденное 2BrS (результаты для двойного тормозного поглощения следуют из приведенных ниже формул при замене $\mathbf{e},\omega \to \mathbf{e}^*,-\omega$). Полагая в (19) $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^*$, видим, что в случае вынужденных процессов параметр Q_4 выпадает и для M имеем

$$M = Q_1(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{n})^2+Q_2(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{n}')^2+$$
$$+\,Q_3(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{n})(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{n}')+\mathcal{Q}(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e}^*), \qquad (23)$$
$$\mathcal{Q} = Q_5-\frac{1}{3}(Q_1+Q_2+xQ_3)\,.$$

В результате сечение (9) принимает вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{p}'}} = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{F}{2\omega}\right)^4\frac{p'}{p}(f_{reg}+\Delta_{CD}+\Delta_{ED}), \qquad (24)$$

где

$$f_{reg} = |Q_1|^2|\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}|^4+|Q_2|^2|\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}'|^4+$$
$$+\,|Q_3|^2|\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}|^2|\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}'|^2+l^2|\mathcal{Q}|^2+$$
$$+\,2\,\mathrm{Re}(Q_1^*Q_2)\,\mathrm{Re}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})^2(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{n}')^2\}+$$
$$+\,2\,\mathrm{Re}(Q_1^*Q_3)|\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}|^2\,\mathrm{Re}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{n}')\}+$$
$$+\,2l\,\mathrm{Re}(Q_1^*\mathcal{Q})\,\mathrm{Re}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})^2\}+$$
$$+\,2\mathrm{Re}(Q_2^*Q_3)|\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}'|^2\,\mathrm{Re}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}')(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{n})\}+$$
$$+\,2l\,\mathrm{Re}(Q_2^*\mathcal{Q})\,\mathrm{Re}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}')^2\}+$$
$$+\,2l\,\mathrm{Re}(Q_3^*\mathcal{Q})\,\mathrm{Re}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}')\}, \qquad (25)$$

$$\Delta_{CD} = 2\,\mathrm{Im}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{n}')\}\Big(\mathrm{Im}(Q_2^*Q_3)|\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}'|^2-$$
$$-\,2\,\mathrm{Im}(Q_1^*Q_2)\,\mathrm{Re}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{n}')\}-$$
$$-\,\mathrm{Im}(Q_1^*Q_3)|\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}|^2\Big), \qquad (26)$$

$$\Delta_{ED} = -2l\Big(\mathrm{Im}(Q_1^*\mathcal{Q})\mathrm{Im}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})^2\}+$$
$$+\,\mathrm{Im}(Q_2^*\mathcal{Q})\,\mathrm{Im}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}')^2\}+$$
$$+\,\mathrm{Im}(Q_3^*\mathcal{Q})\,\mathrm{Im}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}')\}\Big). \qquad (27)$$

Очевидно, что f_{reg} не меняется при замене $\mathbf{e} \rightleftarrows \mathbf{e}^*$, т. е. не зависит от знака спиральности фотонов. Для анализа Δ_{CD} и Δ_{ED} удобно записать единичный комплексный вектор поляризации в инвариантной (по отношению к выбору системы координат) форме,

$$\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\epsilon}+i\eta[\mathbf{k}\times\boldsymbol{\epsilon}]}{\sqrt{1+\eta^2}}, \quad -1\le\eta\le 1, \qquad (28)$$

где единичные векторы $\boldsymbol{\epsilon}$ и $\mathbf{k}$ задают направления главной оси эллипса поляризации и распространения волны, а степень эллиптичности η связана со степенями линейной (l) и циркулярной (ξ) поляризаций, которые мы определяем как в [3]:

$$l = \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = \mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e}^*, \quad \xi = \frac{2\eta}{1+\eta^2} = i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{e}^*\times\mathbf{e}].$$

Используя (28), нетрудно установить соотношения

$$\begin{aligned} &2\,\mathrm{Im}\{(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{n})(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}')\} = \xi(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{n}']),\\ &2\,\mathrm{Im}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}')\} = \xi\{(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{n})([\mathbf{k}\times\boldsymbol{\epsilon}]\cdot\mathbf{n}') + \\ &\quad + (\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{n}')([\mathbf{k}\times\boldsymbol{\epsilon}]\cdot\mathbf{n})\}, \end{aligned} \tag{29}$$

так что

$$\Delta_{CD} \sim \xi, \quad \Delta_{ED} \sim \xi l. \tag{30}$$

Из (30) следует, что последние два слагаемых в (24) приводят к зависимости сечения от знака ξ и описывают эффекты CD и ED. При этом Δ_{ED} исчезает при чисто циркулярной ($\xi = \pm 1$, $l = 0$) поляризации, в то время как CD-член Δ_{CD} в этом случае максимален. Хотя количественные результаты для CD и ED могут быть получены лишь из численных расчетов, характерные особенности этих эффектов видны уже из общих формул (24)–(27). В частности, CD- и ED-слагаемые в (24) существенно различным образом зависят не только от поляризационных параметров волны, но и от геометрии процесса. Так, слагаемое Δ_{CD} содержит общий поляризационно-угловой множитель $\xi(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{n}'])$ (см. (29)) и достигает «геометрического» максимума при распространении световой волны перпендикулярно плоскости рассеяния электрона: $\mathbf{k} \parallel \pm[\mathbf{n}\mathbf{n}']$. В этом случае Δ_{CD} имеет вид

$$\begin{aligned} &\Delta_{CD} = \xi\sin\theta\times\\ &\times\left[2\,\mathrm{Im}(Q_1^*Q_2)\cos\theta + \mathrm{Im}(Q_1^*Q_3) - \mathrm{Im}(Q_2^*Q_3)\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Если же начальный импульс электрона коллинеарен направлению распространения волны ($\mathbf{n}\times\mathbf{k} = 0$), то CD исчезает так же, как и при рассеянии вперед и назад, $\mathbf{n}' = \pm\,\mathbf{n}$. Отметим, что кинематический фактор $\xi(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{b}])$, определяющий Δ_{CD}, имеет универсальный характер и описывает CD в различных однофотонных процессах с неполяризованными атомами при наличии в задаче двух полярных векторов, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, например, в обычном и вынужденном однофотонном BrS [4] и в двухэлектронной ионизации атома жестким фотоном [45, 52]. Эллиптический дихроизм возможен лишь в процессах с двумя и более идентичными фотонами и менее чувствителен к геометрии процесса: в соответствии с (27) для обращения Δ_{ED} в нуль необходимо одновременное выполнение условий $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = 0$ и $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}' = 0$. Эффект ED «в чистом виде» (без сопутствующего CD) проявляется в угловом распределении рассеянных электронов, когда начальный импульс $\mathbf{p}$ коллинеарен световому пучку, $[\mathbf{k}\times\mathbf{n}] = 0$. В этом случае в (23) остаются лишь слагаемые с $\mathcal{Q}$ и Q_2, а Δ_{ED} имеет простой вид,

$$\begin{aligned} \Delta_{ED} &= -2l\,\mathrm{Im}(Q_2^*\mathcal{Q})\,\mathrm{Im}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}')^2\} = \\ &= -2l\xi\,\mathrm{Im}(Q_2^*\mathcal{Q})(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{n}')(\mathbf{k}\cdot[\boldsymbol{\epsilon}\times\mathbf{n}']), \end{aligned} \tag{32}$$

и достигает максимума при рассеянии под прямым углом (т. е. в плоскости поляризации) в направлениях, составляющих углы $\pm\pi/4$ и $\pm 3\pi/4$ с направлением главной оси эллипса поляризации.

В отличие от CD, эффект ED сохраняется и в сечении вынужденного 2BrS (или двойного тормозного поглощения), проинтегрированном по направлениям $\mathbf{n}'$ импульса рассеянного электрона. Сечение в этом случае зависит лишь от векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{n}$ и имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{F}{2\omega}\right)^4\frac{p'}{p}(A_1 + A_2 l^2 + A_3 l\,\mathrm{Re}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n})^2\} + \\ + A_4 l\xi\,(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{n})(\boldsymbol{\epsilon}\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{k}]) + \\ + A_5|\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}|^2 + A_6|\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}|^4). \end{aligned} \tag{33}$$

Как видно, ED-член в выражении для σ максимален, когда начальный импульс электрона $\mathbf{p}$ ортогонален направлению светового пучка и составляет угол $\pi/4$ с главной осью эллипса поляризации. Укажем, что в кинематическом отношении выражение (33) полностью аналогично угловому распределению фотоэлектронов при двухфотонной ионизации атома с ненулевым орбитальным моментом в эллиптически-поляризованном поле (поляризационные эффекты и ED в этой задаче проанализированы в [53]). Явные выражения для динамических параметров A_i в (33) через радиальные МЭ (21) можно получить, интегрируя по $\mathbf{n}'$ квадрат модуля амплитуды (16). Для примера мы ограничимся лишь выражением для «дихроичного параметра» A_4:

$$\begin{aligned} A_4 = \frac{16\pi^5}{pp'}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{Im}\left\{\frac{l(l+1)}{(2l-1)(2l+3)}M_{ll}^{l-1}M_{ll}^{l+1\,*} + \right.\\ + \left(lM_{ll}^{l-1} + (l+1)M_{ll}^{l+1}\right)\times\\ \times\left[\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)}e^{i(\delta_l(p)-\delta_{l+2}(p))}M_{l\,l+2}^{l+1\;*} + \right.\\ \left.\left. + \frac{l(l-1)}{(2l-1)(2l+1)}e^{i(\delta_l(p)-\delta_{l-2}(p))}M_{l\,l-2}^{l-1\;*}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Во всех рассмотренных случаях численное значение дихроичных параметров в сечениях (Δ_{CD}, Δ_{ED}, A_4) определяется в конечном счете соотношением между вещественными и мнимыми частями радиальных МЭ $\mathcal{M}^L_{l'\,l}$, т. е. интерференцией эрмитовых и антиэрмитовых частей амплитуды процесса. Поэтому эффекты дихроизма исчезают в борновской области энергий электрона E и E', а также в низкочастотном пределе (см. ниже разд. 5, где показано, что в указанных пределах параметры Q_i отличаются друг от друга лишь вещественными множителями, так что $\mathrm{Im}(Q_i^* Q_j) = 0$). В остальных случаях дихроичные члены в сечениях не имеют буквенного параметра малости и (при благоприятной геометрии процесса) относительная величина эффектов дихроизма в сечениях может достигать 100 %. Таким образом, в отличие от однофотонных тормозных процессов, в которых возможен лишь эффект CD и сечение для эллиптической поляризации может быть восстановлено из экспериментальных данных для линейной и циркулярной поляризаций, при исследовании двухфотонного тормозного излучения и поглощения наиболее полную информацию о процессе дает только использование световой волны с эллиптической поляризацией.

При анализе поляризационных эффектов в упругом рассеянии следует учесть, что $Q_1 = Q_2$ при $E' = E$, так что поправка к упругому сечению в (13) содержит четыре инвариантных параметра Q_i^{el}:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{p}'}} = |f_0|^2 + \frac{1}{\pi}\left(\frac{F}{2\omega}\right)^2 \times$$

$$\times \left\{ \mathrm{Re}(f_0^* Q_1^{el}) \left(|\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}|^2 + |\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}'|^2 - 2/3 \right) + \right.$$

$$+ \mathrm{Re}(f_0^* Q_2^{el}) \left(\mathrm{Re}\{(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{n})(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}')\} - (1/3)\cos\theta \right) +$$

$$\left. + \mathrm{Re}(f_0^* Q_4^{el}) + \mathrm{Im}(f_0^* Q_3^{el}) \xi (\mathbf{k}\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{n}']) \right\}. \quad (34)$$

Таким образом, при упругом рассеянии электрона в световом поле возникает лишь эффект CD, который описывается слагаемым с Q_3^{el} и имеет ту же интерференционную природу и кинематическую зависимость, что и CD в случае неупругих процессов, а также при однофотонном рассеянии [4]. Явные выражения для параметров Q_i^{el}, аналогичные (20), приведены ниже (см. (48)).

Ввиду наличия в задаче нескольких векторных параметров, свойства симметрии угловых распределений рассеянных электронов в общем случае эллиптической поляризации фотонов можно установить лишь для простейших начальных конфигураций электронного и лазерного пучков. Наиболее информативной и удобной для эксперимента является «ортогональная» геометрия, когда начальный импульс электрона $\mathbf{p}$ (ось z) ортогонален направлению светового пучка (ось x), а главная ось эллипса поляризации составляет угол α с осью y (рис. 2). В этом случае плоскость yz (плоскость поляризации) является плоскостью симметрии углового распределения в общем случае эллиптической поляризации. Поскольку при циркулярной поляризации результаты не зависят от угла α, в отсутствие CD угловое распределение обладало бы и симметрией относительно плоскости xz, т. е. при замене $\varphi \to -\varphi$. CD-слагаемые разрушают эту симметрию, так как $\xi(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{n}']) = -\xi\sin\theta\,\sin\varphi$. Тем не менее, как следует из этого соотношения, в циркулярном поле угловые распределения при $\xi = 1$ и $\xi = -1$ переходят друг в друга при отражении относительно плоскости xz (или повороте на 180° вокруг оси z), т. е. сечение $d\sigma/d\Omega$ инвариантно при замене $\xi \to -\xi$, $\varphi \to -\varphi$. В эллиптическом поле симметрия понижается и указанная инвариантность сохраняется лишь при значениях угла α кратных $\pi/2$.

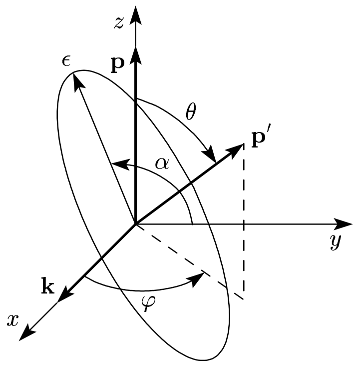

Рис. 2. Геометрия процессов вынужденного тормозного излучения и поглощения: θ и φ — сферические углы вектора импульса рассеянного электрона $\mathbf{p}'$ в системе координат с полярной осью вдоль вектора $\mathbf{p}$ и осью x вдоль направления лазерного пучка $\mathbf{k}$; α определяет ориентацию эллипса поляризации в плоскости yz

Для спонтанного 2BrS экспериментальный интерес представляет сечение, проинтегрированное по направлениям $\mathbf{n}'$ импульса рассеянного электрона. Общий вид поляризационно-угловой зависимости сечения для этого случая следует из (8), (19) (ср. с (33)):

$$\frac{d\sigma^4}{d\Omega_{\mathbf{k_1}} d\Omega_{\mathbf{k_2}} d\omega_1 d\omega_2} = a_1 + a_2|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2|^2 + a_3|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2{}^*|^2 + \\ + a_4|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}|^2 + a_5|\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}|^2 + \\ + a_6|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}|^2|\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}|^2 + a_7 \operatorname{Re} I_1 + \\ + a_8 \operatorname{Re} I_2 + a_9 \operatorname{Im} I_1 + a_{10} \operatorname{Im} I_2, \quad (35)$$

где

$$I_1 = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2{}^*),$$
$$I_2 = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e}_2{}^* \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2).$$

Опуская громоздкие выражения для коэффициентов a_i через радиальные МЭ, укажем, что факторы $\operatorname{Im} I_1$ и $\operatorname{Im} I_2$ в последних двух слагаемых в (35) меняют знак при одновременной замене векторов поляризации на комплексно-сопряженные: $\mathbf{e}_1 \rightleftarrows \mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2 \rightleftarrows \mathbf{e}_2^*$, поэтому сечение содержит линейные по ξ_1 и ξ_2 слагаемые и зависит от знака степени циркулярной поляризации фотонов. Таким образом, эффект CD в спонтанном 2BrS сохраняется и при интегрировании по $\mathbf{n}'$. Комплексные величины I_1 и I_2 можно выразить через вещественные векторы $\boldsymbol{\epsilon}_i$ и $\mathbf{k}_i$ при любых поляризациях $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ (такие выражения можно найти в [54]), однако для наблюдения CD наиболее интересен случай, когда один из фотонов поляризован линейно, скажем $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^* \equiv \boldsymbol{\epsilon}_2$. Тогда $I_1 = I_2 \equiv I$ и кинематическая зависимость CD-слагаемого в (35) дается выражением

$$2 \operatorname{Im} I = \xi_1(\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1]).$$

Это выражение имеет максимум при «ортогональной» геометрии ($\mathbf{k}_1 \perp \mathbf{n}$, $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$), использованной в экспериментах [8], когда тормозные фотоны регистрируются в противоположных направлениях перпендикулярно падающему электронному пучку. С помощью поляризационно-чувствительных детекторов эффект CD в указанных экспериментах может наблюдаться по измерению разности выхода фотонов с правой и левой циркулярными поляризациями при фиксированной линейной поляризации второго фотона под углом $\pi/4$ к плоскости векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$.

При рассеянии электрона на свободно ориентирующемся атоме с ненулевым полным угловым моментом поляризационная структура сечений двухфотонных тормозных процессов заметно усложняется. Действительно, в этом случае лишь сечение процесса (но не амплитуда) является скаляром, который может быть представлен в виде комбинации скалярных и смешанных произведений векторов поляризации фотонов и импульсов электрона, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. Соответственно, число слагаемых в сечении, которые определяются линейно независимыми поляризационно-угловыми множителями, значительно увеличивается. Тем не менее общее выражение для сечения в векторной форме, а также явные выражения для дихроичных слагаемых в записи через приведенные МЭ оператора импульса могут быть получены аналогично случаю потенциального рассеяния.

3. КУЛОНОВСКИЕ ДВУХФОТОННЫЕ РАДИАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Формулы (20) выражают параметры Q_i через радиальные МЭ $M^L_{l'l}(E', E, \mathcal{E})$ переходов между состояниями континуума с фиксированными значениями орбитального момента в потенциале $U(r)$. В соответствии с дипольными правилами отбора в выражениях (20) возникают МЭ следующих четырех видов:

$$\begin{aligned} &M^{l+1}_{l\,l}(E', E, \mathcal{E}) = \\ &= \langle D(l+1,l)R_{E'l}|\, g_{l+1}(\mathcal{E})\, |D(l+1,l)R_{El}\rangle\,, \\ &M^{l+1}_{l+2\,l+2}(E', E, \mathcal{E}) = \\ &= \langle D(l{+}1,l{+}2)R_{E'l+2}|g_{l+1}(\mathcal{E})| \times \\ &\times D(l{+}1,l{+}2)R_{El+2}\rangle, \\ &M^{l+1}_{l+2\,l}(E', E, \mathcal{E}) = \\ &= \langle D(l{+}1,l{+}2)R_{E'l+2}|\, g_{l+1}(\mathcal{E})\, |D(l{+}1,l)R_{El}\rangle\,, \\ &M^{l+1}_{l\,l+2}(E', E, \mathcal{E}) = \\ &= \langle D(l{+}1,l)R_{E'l}|\, g_{l+1}(\mathcal{E})\, |D(l{+}1,l{+}2)R_{El+2}\rangle\,. \end{aligned} \qquad (36)$$

Как видно из определения,

$$M^{l+1}_{l\,l+2}(E', E, \mathcal{E}) = M^{l+1}_{l+2\,l}(E, E', \mathcal{E}),$$

так что достаточно вычислить лишь M^{l+1}_{ll}, $M^{l+1}_{l+2\,l+2}$ и $M^{l+1}_{l+2\,l}$.

В случае кулоновского потенциала $U(r) = -Z/r$ МЭ $M^L_{l'l}$ вычисляются в замкнутом аналитическом виде. Как показано в Приложении А, каждый из МЭ $M^L_{l'l}$ может быть записан в виде суммы шести слагаемых, два из которых содержат дипольные МЭ первого порядка,

$$d_{l'l}(E', E) = \langle R_{E'l'}|D(l', l)|R_{El}\rangle, \quad l' = l \pm 1, \quad (37)$$

а остальные четыре включают интегральные члены $J^{mm'}$ (А.4) с $m, m' = 0, 1$:

$$M_{ll}^{l+1}(E',E,\mathcal{E}) = \frac{p}{E-\mathcal{E}}\frac{l+1-ia}{|l+1-ia|}d_{ll+1}(E',E) -$$
$$- \frac{p'}{E'-\mathcal{E}}\frac{l+1-ia'}{|l+1-ia'|}d_{l+1l}(E',E) +$$
$$+ \frac{2^{2l+2}Z^2(pp')^l}{[(2l+3)!]^2}C_{El}C_{E'l}\left[(l+2+ia')(l+2+ia)J^{00}+\right.$$
$$+ (l+2+ia')(l+1-ia)J^{01} +$$
$$+ (l+1-ia')(l+2+ia)J^{10} +$$
$$\left.+ (l+1-ia')(l+1-ia)J^{11}\right], \quad (38)$$

$$M_{l+2\,l+2}^{l+1}(E',E,\mathcal{E}) =$$
$$= -\frac{p}{E-\mathcal{E}}\frac{|l+2-ia|}{l+2-ia}d_{l+2l+1}(E',E) +$$
$$+ \frac{p'}{E'-\mathcal{E}}\frac{|l+2-ia'|}{l+2-ia'}d_{l+1l+2}(E',E) +$$
$$+ \frac{2^{2l+2}Z^2(pp')^l}{[(2l+3)!]^2(l+2-ia)(l+2-ia')}C_{El+2}C_{E'l+2} \times$$
$$\times \left[J^{00}-J^{01}-J^{10}+J^{11}\right], \quad (39)$$

$$M_{l+2l}^{l+1}(E',E,\mathcal{E}) = \frac{p}{E-\mathcal{E}}\frac{l+1-ia}{|l+1-ia|}d_{l+2l+1}(E',E)+$$
$$+ \frac{p'}{E'-\mathcal{E}}\frac{|l+2-ia'|}{l+2-ia'}d_{l+1l}(E',E) +$$
$$+ \frac{2^{2l+2}Z^2(pp')^l}{[(2l+3)!]^2(l+2-ia')} \times$$
$$\times C_{El}C_{E'l+2}\left[(l+2+ia)J^{00} + (l+1-ia)J^{01} -\right.$$
$$\left.-(l+2+ia)J^{10} - (l+1-ia)J^{11}\right]. \quad (40)$$

Здесь $a = Z/p$ — стандартный кулоновский параметр, а C_{El} — нормировочный множитель для состояния континуума $R_{El}(r)$:

$$C_{El} = \sqrt{\frac{2p}{\pi}}\exp(\pi a/2)\left|\Gamma(l+1-ia)\right|.$$

МЭ $d_{ll'}$ удовлетворяют соотношениям симметрии

$$d_{ll+1}(E',E) = -d_{l+1l}(E,E'),$$
$$d_{l+2l+1}(E',E) = -d_{l+1l+2}(E,E'),$$

и выражаются явным образом (см. Приложение А) через функции ${}_2F_1$ (ср. с выражением для МЭ однофотонного перехода с оператором взаимодействия в «форме длины» [55]):

$$d_{l+1\,l}(E',E) = -\frac{2^{2l+2}Zp'^{l+1}p^l}{[(2l+3)!]^2} \times$$
$$\times C_{E'l+1}C_{El}\left[(l+2+ia)I^{10}+(l+1-ia)I^{11}\right],$$
$$d_{l+1\,l+2}(E',E) = -\frac{2^{2l+2}Zp'^{l+1}p^l}{[(2l+3)!]^2(l+2-ia)} \times$$
$$\times C_{E'l+1}C_{El+2}\left(I^{10}-I^{11}\right), \quad (41)$$

где

$$I^{m'm}(E',E) = (-1)^l(2l+3)! \times$$
$$\times \frac{(p-p'+i0)^{-l-1-m'+ia'}(p'-p+i0)^{-l-1-m+ia}}{(p+p')^{2+ia'+ia-m'-m}} \times$$
$$\times {}_2F_1(l+1+m'-ia', l+1+m-ia, 2l+4, \lambda_0), \quad (42)$$

где $\lambda_0 = -4pp'/(p-p')^2$.

Выражение (A.4) для $J^{mm'}$ удается записать лишь в виде одномерного интеграла от функции ${}_2F_1$ с теми же параметрами, что и в (42):

$$J^{m'm}(E',E,\mathcal{E}) = 2^{2l+4}(2l+3)!\,\nu^{2l+5}\int_0^1 dt\,\frac{t^{l+1-Z\nu}{}_2F_1(l+1+m'-ia', l+1+m-ia, 2l+4; \lambda)}{A^{l+1+m-ia}B^{l+1+m'-ia'}C^{2-m'-m+ia'+ia}}, \quad (43)$$

где $\nu = 1/\sqrt{-2\mathcal{E}}$, $\lambda = (16pp'|\nu|^2t)/AB$,

$$A = (1-p|\nu|+i0)(1+p'|\nu|+i0) - t(1+p|\nu|-i0)(1-p'|\nu|-i0),$$
$$B = (1+p|\nu|+i0)(1-p'|\nu|+i0) - t(1-p|\nu|-i0)(1+p'|\nu|-i0), \quad (44)$$
$$C = (1+p|\nu|+i0)(1+p'|\nu|+i0) - t(1-p|\nu|-i0)(1-p'|\nu|-i0).$$

Формулы (43), (44) записаны в предположении, что энергия промежуточного состояния положительна: $\mathcal{E} > 0$. Если $\mathcal{E} < 0$ (такой случай реализуется в упругом рассеянии при переизлучении фотона с $\omega > E$), то параметр $\nu = 1/\sqrt{-2\mathcal{E}}$ является вещественным и в (43), (44) следует заменить $|\nu| \to -i\nu$. Бесконечно малые добавки $\pm i0$ в (42), (44), определяющие правила возведения в степень отрицательных величин, возникают в результате регуляризации интегралов (А.3) и (А.4) с осциллирующими функциями. Как видно, выражения (38)–(40) содержат слагаемые двух типов — гипергеометрические функции ${}_2F_1$ и интегралы от ${}_2F_1$. Сравнительно простые «внеинтегральные» члены дают доминирующий вклад в $M^L_{l'l}(E', E, \mathcal{E})$ в ряде областей значений переменных (см. разд. 5) и, в частности, содержат борновский предел, поскольку слагаемые с интегралами $J^{m'm}$ имеют лишний множитель Z.

Несмотря на громоздкость, типичную для аналитических расчетов с кулоновскими функциями континуума, формулы (38)–(40), (43), по-видимому, не могут быть подвергнуты дальнейшим упрощениям и являются наиболее простыми выражениями, обобщающими кулоновские матричные элементы типа (41), (42) для однофотонных тормозных процессов на случай двухфотонных свободно-свободных переходов. В то же время следующие из них при аналитическом продолжении по E и E' выражения для МЭ связанно-связанных и связанно-свободных переходов упрощаются и сводятся к двухфотонным формулам Гордона [49], не содержащим интегрирований. Соответствующие преобразования см. в Приложении Б.

4. УСТРАНЕНИЕ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ В АМПЛИТУДЕ УПРУГИХ ДВУХФОТОННЫХ ПЕРЕХОДОВ

Упругие двухфотонные переходы в непрерывном спектре требуют особого рассмотрения ввиду расходимости радиальных МЭ дипольных переходов между состояниями континуума с одинаковой энергией уже в однофотонном случае. В двухфотонных переходах ситуация аналогична: из выражений (42) и (43) видно, что при $E' \to E$ ($p' \to p$) все МЭ $M^L_{l'\,l}$ расходятся. Причину расходимости легко понять, рассмотрев асимптотику радиальной кулоновской функции Грина, проинтегрированной с волновой функцией континуума:

$$\int\limits_0^\infty dr' r'^2 g_L(\mathcal{E}; r, r') \left(\frac{d}{dr'} + \frac{A}{r'}\right) \times \\ \times R_{El}(r') \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} C_1 r^{Z\nu-1} e^{-r/\nu} + \\ + \frac{C_2}{r} \cos\left(pr + \frac{Z}{p}\ln(2pr) - \frac{\pi}{2}l + \delta_l(p)\right),$$

где A, C_1, C_2 — постоянные. Наличие в асимптотике второго слагаемого, осциллирующего с той же частотой, что и волновая функция $R_{El}(r)$, и приводит к расходимости $M^L_{l'\,l}(E', E, \mathcal{E})$ при $E' \to E$ как в случае кулоновского потенциала, так и при $Z = 0$. Поскольку сечения упругих процессов являются конечными, сингулярности в $M^L_{l'l}$ должны компенсироваться при вычислении предела $E' \to E$ в сумме

$$M(\mathbf{e}^*, \mathbf{e}, E + \omega) + M(\mathbf{e}, \mathbf{e}^*, E - \omega'), \qquad (45)$$

определяющей полную амплитуду перехода f_2 в (12). Первое слагаемое в (45) соответствует процессу поглощения фотона с последующим его испусканием (см. рис. 1*a*), а второе — обратному процессу (см. рис. 1*б*). Величины ω, ω' в (45) связаны соотношением $\omega - \omega' = E' - E$.

Из выражения (19) для $M(\mathbf{e}^*, \mathbf{e}, \mathcal{E})$ следует, что при перестановке $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}^*$ поляризационно-угловой множитель при параметре Q_4 меняет знак, а знаки при остальных Q_i не меняются. Отсюда ясно, что сингулярности при $E' \to E$ должны компенсироваться в следующих комбинациях МЭ:

$$S^L_{l'\,l} = \lim_{E'\to E}\left[M^L_{l'\,l}(E', E, E + \omega) + \right. \\ \left. + M^L_{l'\,l}(E', E, E - \omega')\right], \qquad (46)$$

$$R_l(\mathcal{E}) = \lim_{E'\to E}\left[M^{l-1}_{l\,l}(E', E, \mathcal{E}) - \right. \\ \left. - M^{l+1}_{l\,l}(E', E, \mathcal{E})\right], \qquad (47)$$

через которые и выражаются параметры Q^{el}_i упругих переходов в формуле (34):

$$Q^{el}_1 = -\sum_{l=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2l+3}\left(\mathcal{S}^{l+1}_{l\,l} + \mathcal{S}^{l+1}_{l+2\,l}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2l-1}\left(\mathcal{S}^{l-1}_{l\,l} + \mathcal{S}^{l-1}_{l-2\,l}\right)\right] P^{(2)}_l(x),$$

$$Q_2^{el} = \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2l-1} \mathcal{S}_{l\,l}^{l-1} + \frac{1}{2l+3} \mathcal{S}_{l\,l}^{l+1} \right] P_l^{(1)}(x) + \\ + 2 \sum_{l=2}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2l-1} \mathcal{S}_{l\,l}^{l-1} + \frac{1}{2l+3} \mathcal{S}_{l\,l}^{l+1} \right) x + \\ + \frac{1}{2l+1} \left(\mathcal{S}_{l-1\,l+1}^{l} + \mathcal{S}_{l+1\,l-1}^{l} \right) \right] P_l^{(2)}(x), \quad (48)$$

$$Q_3^{el} = \sum_{l=1}^{\infty} \left[\mathcal{R}_l(E+\omega) - \mathcal{R}_l(E-\omega) \right] P_l^{(1)}(x),$$

$$Q_4^{el} = \frac{1}{3} \sum_{l=0}^{\infty} \left[l \mathcal{S}_{l\,l}^{l-1} + (l+1) \mathcal{S}_{l\,l}^{l+1} \right] P_l(x),$$

где

$$\mathcal{S}_{l'\,l}^{L} = \left(2\pi^2/p\right) \exp\left[i(\delta_{l'}(p) + \delta_l(p))\right] S_{l'\,l}^{L},$$

$$\mathcal{R}_l(\mathcal{E}) = \left(\pi^2/p\right) \exp\left[2i\delta_l(p)\right] R_l(\mathcal{E}).$$

Чтобы убедиться в компенсации расходимостей и найти пределы выражений (46), (47), следует выделить в явном виде расходящуюся и конечную части МЭ $M_{l'l}^{L}$. Мы проиллюстрируем соответствующие результаты, используя аналитические выражения (38)–(40) для кулоновского потенциала. Для внеинтегральных слагаемых это легко достигается путем известного асимптотического разложения функции ${}_2F_1$ по обратным степеням аргумента [56]. Выделение сингулярностей из $J^{m'm}$ в (38)–(40) требует более сложных преобразований. Прежде всего отметим (см. (43)), что интегралы J^{00} и J^{11} являются конечными при $E' = E$, а J^{01} и J^{10} расходятся как $\ln(E' - E)$. Наличие лишь логарифмической сингулярности позволяет в коэффициентах интегральных членов в (38)–(40) и в интеграле (43) положить $E' = E$ везде, кроме факторов A и B. Далее, с использованием техники выделения сингулярностей, описанной в [13], диагональные МЭ можно представить в виде

$$M_{l+2\,l+2}^{l+1}(E', E, \mathcal{E}) = -\frac{a}{\pi} \frac{1}{E - \mathcal{E}} \times \\ \times \left(\ln\left(\frac{p - p'}{2p}\right)^2 - 2\psi(1) \right) + \\ + \frac{1}{E - \mathcal{E}} \frac{a}{\pi(l + 2 - ia)} \times \\ \times \left(\frac{2\mathcal{E}}{E - \mathcal{E}} + ia\psi(l + 1 - ia) + ia\psi(l + 2 - ia) + \\ 2ia\psi(l + 3 + ia) - 2(l + 2 + ia) \operatorname{Re}\psi(l + 2 - ia) \right) + \\ + Z^2 \frac{2^{2l+2} p^{2l}}{((2l+3)!)^2} \frac{C_{El+2}^2}{(l + 2 - ia)^2} [J^{00} + J^{11} - K], \quad (49)$$

$$M_{ll}^{l+1}(E', E, \mathcal{E}) = -\frac{a}{\pi} \frac{1}{E - \mathcal{E}} \times \\ \times \left(\ln\left(\frac{p - p'}{2p}\right)^2 - 2\psi(1) \right) + \\ + \frac{1}{E - \mathcal{E}} \frac{a}{\pi(l+1+ia)} \left(-\frac{2\mathcal{E}}{E - \mathcal{E}} + \frac{ia}{l+1-ia} + \frac{ia}{l+2+ia} - \\ - ia\psi(l + 1 - ia) - ia\psi(l + 2 - ia) - \\ - 2ia\psi(l + 3 + ia) - 2(l + 1 - ia) \operatorname{Re}\psi(l + 2 - ia) \right) + \\ + Z^2 \frac{2^{2l+2} p^{2l}}{((2l+3)!)^2} C_{El}^2 [(l + 2 + ia)^2 J^{00} + \\ + (l + 1 - ia)^2 J^{11} + (l + 1 - ia)(l + 2 + ia) K], \quad (50)$$

где K — регулярная часть суммы $J^{01} + J^{10}$:

$$K = -\frac{2^{2l+4}(2l+3)!\nu^{2l+5}}{(1 - p^2|\nu|^2)(l + 1 - ia)} \times \\ \times \int_0^1 dt \frac{t^{l - Z\nu}}{A^{2l+2-2ia} C^{1+2ia}} \times \\ \times \left[\left(ia(1 - p|\nu|) + \frac{t}{C}(1 + 2ia)(1 - p|\nu|)^2 \right) \times \\ \times {}_2F_1(l + 1 - ia, l + 1 - ia, 2l + 4, \lambda) + \\ + (l+1-ia) {}_2F_1(l+1-ia, l+2-ia, 2l+4, \lambda) \right], \quad (51)$$

$\psi(x) = (d/dx) \ln \Gamma(x)$ — пси-функция. Интегралы J^{mm} в (49) и (50) определяются выражением (43) с $p' = p$. При этом

$$A = B = (1 - p^2|\nu|^2)(1 - t) + i0, \\ C = (1 + p|\nu|)^2 - t(1 - p|\nu|)^2, \quad \lambda = \frac{16p^2|\nu|^2 t}{A^2}. \quad (52)$$

Учитывая, что $E - \mathcal{E} = -\omega$ для диаграммы на рис. 1*а* и $E - \mathcal{E} = \omega'$ для диаграммы на рис. 1*б*, а сингулярные члены в (49), (50) одинаковы и не зависят от l, легко видеть, что при вычислении $R_l(\mathcal{E})$ в (47) и диагональных элементов S_{ll}^{L} в (46) расходимости компенсируются и окончательные результаты очевидны из (49) и (50).

Недиагональные МЭ наряду с логарифмической содержат степенную сингулярность, так что их сингулярная часть имеет вид

$$\left[M_{l+2\,l}^{l+1}(E', E, \mathcal{E}) \right]_{sing} = \frac{a}{\pi |l + 1 - ia| |l + 2 + ia|} \times \\ \times \left(\frac{l + 1 - ia}{E - \mathcal{E}} + \frac{l + 2 + ia}{E' - \mathcal{E}} \right) \frac{p}{p - p'} + \\ + \left(\frac{C(E, l)}{E - \mathcal{E}} + \frac{C(E', l)}{E' - \mathcal{E}} \right) \ln\left(\frac{p - p'}{2p}\right)^2. \quad (53)$$

При вычислении предела $E' \to E$ в сумме (46) с $l' = l+2$ члены с логарифмическими сингулярностями исчезают, а члены со степенными сингулярностями дают конечный вклад. В результате окончательное выражение для $S^{l+1}_{l+2\,l}$ принимает вид

$$S^{l+1}_{l+2\,l} = \frac{Zp(1+2ia)}{\pi|l+1-ia||l+2+ia|}\frac{1}{\omega^2} + \\ + \frac{Z^2 2^{2l+2}p^{2l}}{[(2l+3)!]^2(l+2-ia)} \times \\ \times \Big[(l+2+ia)(J^{00}(E+\omega)+J^{00}(E-\omega)) - \\ -(l+1-ia)(J^{11}(E+\omega)+ \\ + J^{11}(E-\omega)) - (1/2+ia)(K(E+\omega)+K(E-\omega))\Big]. \quad (54)$$

Функции ${}_2F_1$ в подынтегральных выражениях в интегралах $J^{mm'}$ и K, входящих в (49), (50) и (54), имеют при $\lambda = 1$ точку ветвления, лежащую на контуре интегрирования. Выбор нужной аналитической ветви определяется мнимой добавкой в выражении (52) для A. Выражения (49), (50) и (54) полностью определяют амплитуду f_2 в (12) и сечение (34) упругих двухфотонных переходов в кулоновском поле.

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АМПЛИТУД НЕУПРУГИХ ДВУХФОТОННЫХ ПЕРЕХОДОВ

Парциально-волновой подход дает выражения для параметров $Q_i(p,p',\theta)$ лишь в виде рядов по полиномам Лежандра, причем входящие в эти ряды радиальные МЭ вычисляются аналитически только в кулоновском случае. Тем не менее для ряда предельных областей параметров задачи, рассмотренных ниже, можно получить достаточно простые замкнутые выражения для Q_i и амплитуд переходов в потенциале $U(r)$ общего вида.

5.1. Низкочастотный предел ($\omega/p^2 \ll 1$)

Рассмотрим вначале МЭ первого порядка, $d_{l'l}(E',E)$ (37). Поскольку при $E' \to E$ частоты осцилляций волновых функций начального и конечного состояний сближаются, радиальный интеграл в (37) расходится на бесконечности. Заменяя волновые функции их асимптотическими выражениями при $r \to \infty$,

$$R_{El} \to \sqrt{\frac{2p}{\pi}}\sin\left(pr - \frac{1}{2}\pi l + \delta_l(p)\right), \quad (55)$$

и оставляя в (37) лишь главные по $1/r$ члены, получаем

$$d_{l'l} = -\frac{p}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\exp(-i\Delta_{l'l}(E))}{E'-E+i0}\right) = \\ = p\sin\Delta_{l'l}(E)\delta(E'-E) + \frac{p}{\pi}\frac{\cos\Delta_{l'l}(E)}{E'-E}, \quad (56)$$

где $\Delta_{l'l}(E) = \delta_l(p) - \delta_{l'}(p) - (\pi/2)(l-l')$. Наличие δ-функции в МЭ свободно-свободных переходов и способ нахождения их асимптотики хорошо известны [57, § 21]. В реальных однофотонных переходах между состояниями континуума (с $E' \neq E$) сингулярный член выпадает, однако в составных МЭ по энергиям виртуальных состояний проводится интегрирование и δ-слагаемое в $d_{l'l}$ играет существенную роль. Вопросы, связанные с его учетом в численных и аналитических расчетах, неоднократно рассматривались в литературе [14, 58–62].

Рассмотрим теперь низкочастотный предел МЭ второго порядка $M^L_{l'l}(E',E,\mathcal{E})$ с $\mathcal{E} = E \pm \omega$ и $E' = \mathcal{E} \pm \omega'$. Используя для функции Грина в (21) спектральное разложение, представим $M^L_{l'l}$ в виде

$$M^L_{l'l}(E',E,\mathcal{E}) = -\sum_n \frac{d_{l'L}(E',E_n)d_{Ll}(E_n,E)}{E_n-\mathcal{E}} - \\ - \int d\epsilon \frac{d_{l'L}(E',\epsilon)d_{Ll}(\epsilon,E)}{\epsilon-\mathcal{E}-i0}, \quad (57)$$

где суммирование проводится по состояниям дискретного, а интегрирование — по состояниям непрерывного спектра гамильтониана с потенциалом $U(r)$. В области малых частот два члена в (57) имеют разную величину: нетрудно проверить, что сумма по дискретному спектру дает конечный результат при $\omega, \omega' \to 0$, в то время как интеграл имеет порядок $1/\omega\omega'$ в соответствии с общим характером частотной зависимости амплитуды рассеяния, сопровождающегося излучением мягких фотонов [3]. Оказывается, что главный вклад в интеграл в (57), приводящий к упомянутой выше сингулярности при $\omega, \omega' \to 0$, обусловлен δ-образными слагаемыми в подынтегральной функции, наличие которых следует из (56) и известного соотношения

$$\frac{1}{\epsilon-\mathcal{E}-i0} = \mathrm{V.p.}\frac{1}{\epsilon-\mathcal{E}} + i\pi\delta(\epsilon-\mathcal{E}). \quad (58)$$

Опуская в (57) сумму по дискретному спектру и учитывая в интеграле только вклад точек $\epsilon = E, E', \mathcal{E}$, получаем для $M^L_{l'l}$ следующее промежуточное выражение:

$$M^L_{l'l} = p' \sin\Delta_{l'L}(E') \frac{1}{E' - \mathcal{E}} d_{Ll}(E', E) + \\ + p \sin\Delta_{Ll}(E) \frac{1}{E - \mathcal{E}} d_{l'L}(E', E) - \\ - i\pi d_{l'L}(E', \mathcal{E}) d_{Ll}(\mathcal{E}, E). \quad (59)$$

Заменяя МЭ $d_{l_2 l_1}(E_2, E_1)$ их предельными выражениями при $E_2 \to E_1$ (второе слагаемое в (56)) и сохраняя лишь главный член асимптотики при $\omega, \omega' \to 0$, получаем

$$M^L_{l'l} = \frac{p^2}{\pi} \frac{\sin\Delta_{l'L}(E) \cos\Delta_{Ll}(E)}{(E' - \mathcal{E})(E' - E)} + \\ + \frac{p^2}{\pi} \frac{\cos\Delta_{l'L}(E) \sin\Delta_{Ll}(E)}{(E - \mathcal{E})(E' - E)} - \\ - i\frac{p^2}{\pi} \frac{\cos\Delta_{l'L}(E) \cos\Delta_{Ll}(E)}{(E' - \mathcal{E})(\mathcal{E} - E)}. \quad (60)$$

В низкочастотном пределе можно не только упростить парциальные МЭ, но и просуммировать в общем виде ряды в (20) для параметров Q_i. Рассмотрим для определенности процесс вынужденного 2BrS: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^*$, $\mathcal{E} = E - \omega$, $E' = E - 2\omega$. Тогда (60) приводит к следующим выражениям для $\mathcal{M}^{l''}_{l'l}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{l+1}_{ll} &= \frac{\pi p}{i\omega^2} \left(e^{2i\delta_l(p)} - e^{2i\delta_{l+1}(p)} \right), \\ \mathcal{M}^{l-1}_{ll} &= \frac{\pi p}{i\omega^2} \left(e^{2i\delta_l(p)} - e^{2i\delta_{l-1}(p)} \right), \\ \mathcal{M}^{l+1}_{l+2l} &= \frac{\pi p}{2i\omega^2} \left(2e^{2i\delta_{l+1}(p)} - e^{2i\delta_{l+2}(p)} - e^{2i\delta_l(p)} \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Подставляя (61) в (20) и используя рекуррентное соотношение для производных полинома Лежандра [56], параметр Q_1 представим в виде

$$Q_1 = \frac{\pi p}{2i\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(x) e^{2i\delta_l(p)}.$$

Учитывая теперь известное соотношение для амплитуды f_0 упругого рассеяния в поле $U(r)$ [57],

$$f_0(\theta) = \frac{1}{2ip} \sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{2i\delta_l(p)}, \quad (62)$$

Q_1 выразим через f_0:

$$Q_1 = \frac{\pi p^2}{\omega^2} f_0 .$$

Аналогичным образом с помощью подходящих рекуррентных соотношений для $P^{(m)}_k(x)$ можно выразить через f_0 остальные параметры Q_i в (20) и установить, что

$$Q_2 = Q_1, \quad Q_3 = -2Q_1, \quad Q_5 = \frac{2}{3}(1 - \cos\theta) Q_1 .$$

В результате для амплитуды 2BrS $M(\mathbf{e}^*, \mathbf{e}^*, E - \omega)$ в (19) получаем

$$M = \frac{\pi p^2}{\omega^2} f_0 \left(\mathbf{e}^* \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{n}') \right)^2 , \quad (63)$$

а низкочастотная асимптотика сечения (см. (9)) имеет вид

$$d\sigma = \frac{F^4}{2^6 \omega^8} |\mathbf{e} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^4 d\sigma_0. \quad (64)$$

Этот же результат следует из формулы Кролла–Ватсона (выражение (6) с $d\sigma_B \to d\sigma_0 = |f_0|^2 d\Omega$), если в последней перейти к случаю малой напряженности поля F.

Приведем в справочных целях низкочастотные асимптотические выражения для парциальных МЭ (61) 2BrS в кулоновском поле. В этом случае

$$e^{i\delta_l(p)} = \frac{\Gamma(l + 1 - ia)}{|\Gamma(l + 1 - ia)|} , \quad (65)$$

так что из (61) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{l+1}_{ll} &= \frac{Zp}{\pi\omega^2} \frac{l + 1 - ia}{(l+1)^2 + a^2}, \\ \mathcal{M}^{l+1}_{l+2\,l+2} &= -\frac{Zp}{\pi\omega^2} \frac{l + 2 + ia}{(l+2)^2 + a^2}, \\ \mathcal{M}^{l+1}_{l+2\,l} &= -\frac{Zp}{\pi\omega^2} \frac{1/2 + ia}{|(l + 1 - ia)(l + 2 - ia)|}. \end{aligned} \quad (66)$$

Выше рассматривался случай произвольного потенциала $U(r)$ (изложенный общий способ оценки МЭ в области малых частот был использован ранее [62]), однако поведение кулоновских амплитуд в области малых частот можно исследовать и исходя из точных выражений, полученных в разд. 3. Разлагая функции ${}_2F_1$ в выражении для $M^L_{l'l}$ по обратным степеням аргумента и удерживая главный по $1/\omega$ член, приходим к результатам, в точности совпадающим с (66). При этом оказывается, что вклад в главный член асимптотики дают лишь внеинтегральные слагаемые. Формула (59), учитывающая вклад только δ-образных сингулярностей в составном МЭ и возникшая в наших вычислениях как промежуточная, была аналогичным способом получена Королем [14] и использовалась для приближенного расчета кулоновских амплитуд во всей области значений переменных. Сравнение с имеющимися в литературе данными [11, 12] показало, что простая в отношении вычислений формула (59) очень хорошо воспроизводит результаты точных расчетов сечения спонтанного 2BrS. Наличие точных аналитических выражений для кулоновских амплитуд позволяет установить источник столь хорошего согласия. Сравнивая (59) с (38)–(40) и принимая во внимание соотношение (65), нетрудно убедиться, что вещественная часть в формуле Короля (59) в точности совпадает с вещественной частью внеинтегральных членов в $M^L_{l'l}$. Мнимая же часть в (59) вообще является точной. Таким образом, (59) не учитывает только вещественную часть интегральных членов в (38)–(40). Как отмечалось выше, внеинтегральные члены дают главный вклад в амплитуду в борновской и низкочастотной области. При этом первый член асимптотики интегральной части $M^L_{l'l}$ и в борновской, и в низкочастотной областях оказывается чисто мнимым, так что поправка к (59) появляется лишь в следующем порядке и имеет относительную величину

$$\frac{a^2\omega^2}{E^2}\left[\ln^2\left(\frac{\omega}{E}\right)+C\ln\left(\frac{\omega}{E}\right)+C'\right], \qquad (67)$$

где C, C' — постоянные. Эта оценка и определяет точность приближения (59) для кулоновского поля.

Следует обратить внимание, что низкочастотное приближение Кролла–Ватсона неприменимо при малых углах рассеяния, когда для оценки амплитуд Q_i учет лишь главного члена (60) асимптотики МЭ $M^L_{l'l}$ при $\omega, \omega' \to 0$ оказывается недостаточным. Поскольку оценка поправочных членов к (60) для поля $U(r)$ общего вида затруднительна, мы проиллюстрируем это утверждение на примере кулоновского рассеяния. В этом случае низкочастотная асимптотика (64) имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{F}{2\omega}\right)^4\frac{p'}{p}f_{reg}=B|\mathbf{e}\cdot(\mathbf{n}-\mathbf{n}')|^4, \qquad (68)$$

где

$$B=\frac{F^4Z^2}{2^8\omega^8}\,\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Поправки в следующем порядке по частоте имеют громоздкий вид и могут быть получены из точных формул разд. 3. В частности, в следующем порядке по ω возникает CD-член

$$\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{F}{2\omega}\right)^4\frac{p'}{p}\Delta_{CD}= \\ =B\frac{2a\omega}{p^2}(\ln y+b)\xi(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{n}'])|\mathbf{e}\cdot(\mathbf{n}-\mathbf{n}')|^2, \qquad (69)$$

где

$$y=\frac{4pp'}{(p-p')^2}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

а $b = b(a)$ — гладкая функция импульса p. Очевидно, что условие применимости приближения Кролла–Ватсона состоит в выполнении неравенства

$$\frac{a\omega}{p^2}\,|(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{n}'])| \ll |\mathbf{e}\cdot(\mathbf{n}-\mathbf{n}')|^2. \qquad (70)$$

Поскольку $|\mathbf{e}\cdot(\mathbf{n}-\mathbf{n}')|^2 \sim \theta^2$, а $|\mathbf{n}\times\mathbf{n}'| \sim \theta$ при $\theta \to 0$, видно, что условие (70) нарушается при малых углах рассеяния (очевидно, его выполнение зависит также от азимутального угла). Заметим, что поскольку поправка (69) зависит от ξ, то для этой области углов эффекты дихроизма в сечении 2BrS имеют заметную величину даже при малых значениях ω/p^2 (хотя, конечно, при $\theta = 0$ эффект CD исчезает).

5.2. Высокочастотный предел ($Z/p \ll 1$, $\omega/E' \gg 1$, $\omega/E \sim 1$) и борновское приближение

Пусть в процессе вынужденного 2BrS быстрый электрон теряет значительную часть своей энергии, так что конечное состояние является неборновским. В этом случае замена волновой функции начального состояния на функцию свободного движения,

$$R_{El}(r)\to R^{(0)}_{El}(r), \quad R^{(0)}_{El}=\sqrt{\frac{2p}{\pi}}j_l(pr), \qquad (71)$$

приводит к следующим результатам действия операторов D на волновую функцию:

$$\begin{aligned} D(l+1,l)R^{(0)}_{El}&=-pR^{(0)}_{El+1},\\ D(l+1,l+2)R^{(0)}_{El+2}&=pR^{(0)}_{El+1}. \end{aligned} \qquad (72)$$

Заменяя затем в (36) функцию Грина g_L на функцию Грина свободного электрона и используя соотношения (72), приведем $M^L_{l'l}$ к следующему виду:

$$M^L_{l'l}=(-1)^{(l-l')/2}\frac{2E}{E-\mathcal{E}}\left\langle R_{E'l'}\middle|R^{(0)}_{El'}\right\rangle. \qquad (73)$$

Вычисляя интеграл перекрытия $\left\langle R_{E'l'}\middle|R^{(0)}_{El'}\right\rangle$ [63] и переходя к пределу $E\to\infty$, получаем

$$M^L_{l'l}=(-1)^{(l-l')/2}2^{2l'+9/2}Z\frac{C_{E'l'}(l'+1)!p'^{l'}}{\sqrt{\pi}(2l'+2)!p^{l'+7/2}}. \qquad (74)$$

Сравнивая (72) с (A.1) и (A.2), нетрудно установить, что в кулоновском случае выражение (74) соответствует учету в (38)–(40) только внеинтегрального слагаемого с $d_{l'l+1}$, в котором волновая функция начального состояния заменена на $R^{(0)}_{El}$. Более детальный анализ выражений (38)–(40) в высокочастотной области показывает, что член с $d_{l'l+1}$ дает главный вклад в асимптотику $M^L_{l'l}$ только при $L = l' + 1$, а при $L = l' - 1$ одинаковый порядок величины имеют все слагаемые в M^{l+1}_{l+2l}, M^{l+1}_{l+2l+2} (в том числе и вещественная часть интегральных членов). Таким образом, выражение (74) является правильной высокочастотной асимптотикой для МЭ M^{l+1}_{ll}, M^{l+1}_{ll+2} и отличается множителем при $p^{-l'-7/2}$ от правильного результата для M^{l+1}_{l+2l}, M^{l+1}_{l+2l+2}.

Интересно, что аналогичная ситуация возникает и при анализе однофотонных переходов: замена (71) в МЭ фотоионизации

$$d_{l_f l_i}(E_f, E_{n_i}) = \langle R_{E_f l_f} \,|\, D(l_f, l_i) \,| R_{n_i l_i} \rangle \tag{75}$$

приводит к правильной асимптотике МЭ с $l_f = l_i + 1$ и дает неверный множитель при энергетической зависимости в случае $l_f = l_i - 1$ (этот факт отмечается в книге [55], хотя его природа не обсуждается). Чтобы выяснить причину таких результатов, рассмотрим, как формируется высокочастотная асимптотика МЭ фотоионизации в борновском приближении:

$$d^{(0)}_{l-1l}(E_f, E_{n_i}) = \left\langle R^{(0)}_{E_f l-1} \right| \left(\frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r} \right) \left| R_{n_i l} \right\rangle. \tag{76}$$

Интеграл в (76) содержит быстроосциллирующую (при $E_f \to \infty$) сферическую функцию Бесселя $j_{l_f}(pr)$, поэтому основной вклад дает окрестность точки $r = 0$. Поскольку $R_{n_i l} \sim N_{n_i l} r^l$ при малых r, из (76) следует

$$d_{l-1l}(E_f, E_{n_i}) = \\ = (2l+1) N_{n_i l} \int\limits_0^\infty r^{l+1} R^{(0)}_{E_f l-1}(r)\, dr. \tag{77}$$

Используя известные формулы [63], для интеграла вида (77) получаем

$$\int\limits_0^\infty r^{l_1} R^{(0)}_{E l_2}(r)\, dr = \\ = \frac{\Gamma\left(\dfrac{l_2 + l_1 + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{l_2 - l_1 + 2}{2}\right)} 2^{l_1 - 1/2} (2E)^{-(2l_1+1)/4}. \tag{78}$$

При $l_1 = l + 1$ и $l_2 = l - 1$ гамма-функция в знаменателе этого выражения обращается в бесконечность и, следовательно, главный член разложения $R_{n_i l}$ по r не дает вклада в асимптотику. Для вычисления первого неисчезающего члена высокочастотной асимптотики $d_{l-1l}(E_f, E_{n_i})$ нужно не только проводить дальнейшие разложения $R_{n_i l_i}$ по r, но и учитывать следующие члены разложения волновой функции R_{El} по $1/E$, т. е. поправку к $R^{(0)}_{El}$ в (71), а для МЭ второго порядка и кулоновскую поправку к функции Грина свободного электрона. Мы не приводим здесь эти вычисления, а отметим лишь, что главный вклад в асимптотику полного МЭ $M(\mathbf{e}^*, \mathbf{e}^*, E - \omega)$ в (7) дают парциальные амплитуды с $l' = 0$, высокочастотная асимптотика которых определяется формулой (74) (напомним, что в низкочастотной области все парциальные амплитуды имели одинаковый порядок величины по ω).

В кулоновском случае, учитывая в (20) только члены с $l' = 0$, которые имеются лишь в Q_1 и Q_5:

$$Q_1 = 3Q_5 = 2^5 \pi Z e^{\pi a'/2} \Gamma(1 - ia') p^{-4}, \tag{79}$$

для полной амплитуды получаем

$$M(\mathbf{e}^*, \mathbf{e}^*, E - \omega) = \\ = 2^5 \pi Z e^{\pi a'/2} \Gamma(1 - ia') p^{-4} (\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{n})^2. \tag{80}$$

Отметим, что количественное согласие асимптотического и точного результатов значительно улучшается, если при вычислении асимптотики сохранить в $M^L_{l'l}$ точный нормировочный множитель C_{El}, что соответствует замене $\sqrt{2p/\pi} \to C_{El}/l!$ в (71).

Поскольку, как уже отмечалось, высокочастотная асимптотика M^{l+1}_{ll}, M^{l+1}_{ll+2} определяется внеинтегральными членами, то точно учитывающая их формула (59) дает правильный предел (74) для этих МЭ и в этой области. В то же время для M^{l+1}_{l+2l+1} и M^{l+1}_{l+2l+2} высокочастотный предел формулы (59) совпадает с (74) и отличается от правильного результата.

Если электрон остается быстрым и в конечном состоянии ($a' = Z/p' \ll 1$), применимо борновское приближение. Согласно результатам Бункина и Федорова [25] (см. (6)), в этом случае сечение вынужденного 2BrS в кулоновском поле имеет элементарный вид:

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega} = \frac{F^4 Z^2}{2^4 \omega^8} \frac{|\mathbf{e} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^4}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^4} \frac{p'}{p}, \\ p'^2 = p^2 - 4\omega. \tag{81}$$

Этот же результат можно получить и непосредственно из точных результатов парциально-волнового анализа. В области низких частот, $\omega \ll p^2$ (хотя при этом частота может быть и не малой по сравнению с энергией связи, $\omega \sim 1$), борновские парциальные ряды сводятся к низкочастотным, в которых следует устремить $a \to 0$ (см. п. 5.1). При произвольном ω парциальные кулоновские МЭ $M^L_{l'l}$ тоже значительно упрощаются в борновской области: во-первых, члены с интегралами в (38)–(40) оказываются малыми при $a, a' \ll 1$, так как имеют лишний множитель Z/p; во-вторых, параметры функций ${}_2F_1$ становятся целыми, так что эти функции сводятся к элементарным. Например, выражение для M_{ll}^{l+1} в борновском пределе принимает вид

$$M_{ll}^{l+1} = Z\frac{(-1)^l 4^{l+1}(l!)^2}{(2l+3)!}\,\frac{(l+1)(pp')^{l+1/2}}{(p-p')^{2l+4}} \times \\ \times\left[(l+2)\frac{p^2+p'^2}{\omega(p+p')}{}_2F_1(l+1,l+2,2l+4;\lambda_0)+ \right. \\ \left. + 4(l+1){}_2F_1(l+2,l+2,2l+4;\lambda_0)\right],$$

где $\lambda_0 = -4pp'/(p-p')^2$. Более того, полагая $a = a' = 0$ в подынтегральных выражениях в (38)–(40), в элементарном виде вычисляется и вторая борновская поправка от интегральных слагаемых в радиальных МЭ. Однако явные выражения указанных интегралов и функций ${}_2F_1$ с целочисленными параметрами через элементарные (степенные и логарифмические) функции оказываются громоздкими и все более усложняющимися с ростом l, что затрудняет процедуру суммирования парциальных рядов по l в (20). В первом борновском приближении такое суммирование удается выполнить с использованием разложения [50, формулы (5.17.26), (5.17.32)]

$$\frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(p,p')P_l(\cos\theta),$$

$$a_l(p,p') = \frac{l!\,(pp')^{\,l}}{(1/2)_l\,(p-p')^{2l+2}} \times \\ \times {}_2F_1\left(l+1,l+1,2l+2;-\frac{4pp'}{(p-p')^2}\right).$$

Используя рекуррентные соотношения для функций ${}_2F_1$ и полиномов Лежандра, можно проверить, что в борновском пределе результат суммирования парциальных рядов для амплитуды дает выражение (81).

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА И ОБСУЖДЕНИЕ

6.1. Частотная и энергетическая зависимости радиальных матричных элементов

Поскольку даже при фиксированных геометрии эксперимента и поляризации фотонов сечения двухфотонных тормозных процессов остаются многопараметрическими функциями, представляет интерес качественный анализ зависимости МЭ $M_{l'l}^{L}(E',E,\mathcal{E})$ от частоты фотонов и энергии электрона при различных значениях орбитальных моментов l, L, l'. Для кулоновского потенциала наличие точных формул (38)–(40) позволяет получить количественные результаты для МЭ и сечений в широком интервале указанных параметров, поскольку задача сводится к расчету функций ${}_2F_1$ и интегралов от них, который несложно провести, используя стандартные компьютерные программы. Как показано в [64], однофотонные кулоновские МЭ $d_{l'l}(E',E)$ являются положительными монотонными функциями энергии и, скажем, при фиксированном E и $E' > E$ монотонно убывают с ростом E' и расходятся при $E' \to E$ (при наличии некулоновской части в потенциале $U(r)$ МЭ могут менять знак в некоторой области энергий в зависимости от величины некулоновской добавки к фазам рассеяния [65]). В двухфотонном случае ситуация существенно усложняется как из-за наличия дополнительного параметра — частоты фотона ω (или энергии электрона в виртуальном состоянии $\mathcal{E} = E \pm \omega$), — так и ввиду комплексности МЭ $M_{l'l}^{L}$ (они вещественны лишь при $\mathcal{E} < 0$, что соответствует переизлучению фотона с $\omega > E$ в процессе упругого рассеяния (см. рис. 1*б*)). Поскольку мнимые части МЭ $M_{l'l}^{L}$ сводятся к простому произведению однофотонных МЭ (см. (59)), установление области параметров, для которых мнимая часть дает доминирующий вклад в двухфотонные МЭ, приобретает особый интерес ввиду очевидного кардинального упрощения результатов.

Как уже отмечалось, при фиксированном l вклад в двухфотонные сечения дают два «диагональных», M_{ll}^{l+1} и $M_{l+1\,l+1}^{l}$, и два «недиагональных», $M_{l\,l+2}^{l+1}$ и $M_{l+2\,l}^{l+1}$, радиальных МЭ. Все они, как показывают расчеты в широком диапазоне E, ω и l, ведут себя достаточно универсально. Вещественные и мнимые части всех радиальных МЭ (за исключением $\operatorname{Re} M_{ll}^{l+1}$) отрицательны и с ростом частоты монотонно убывают по абсолютной величине, не меняя знака (при этом мнимая часть убывает быстрее вещественной). При изменении l знаки $\operatorname{Re} M_{l'l}^{L}$ и $\operatorname{Im} M_{l'l}^{L}$ сохраняются. Абсолютные значения $\operatorname{Re} M_{l'l}^{L}$ и $\operatorname{Im} M_{l'l}^{L}$ при заданной начальной энергии (вне области малых частот) уменьшаются с ростом l (мнимая часть и в этом случае убывает быстрее вещественной), причем скорость их убывания при увеличении частоты увеличивается с ростом l. Некоторые примеры численных расчетов частотной зависимости радиальных МЭ с $l = 0$ и $l = 5$ для вынужденного 2BrS ($\mathcal{E} = E - \omega$, $E' = E - 2\omega$) приведены на рис. 3 при малых ($E = 0.1$) и промежуточных ($E = 1.0$) зна-

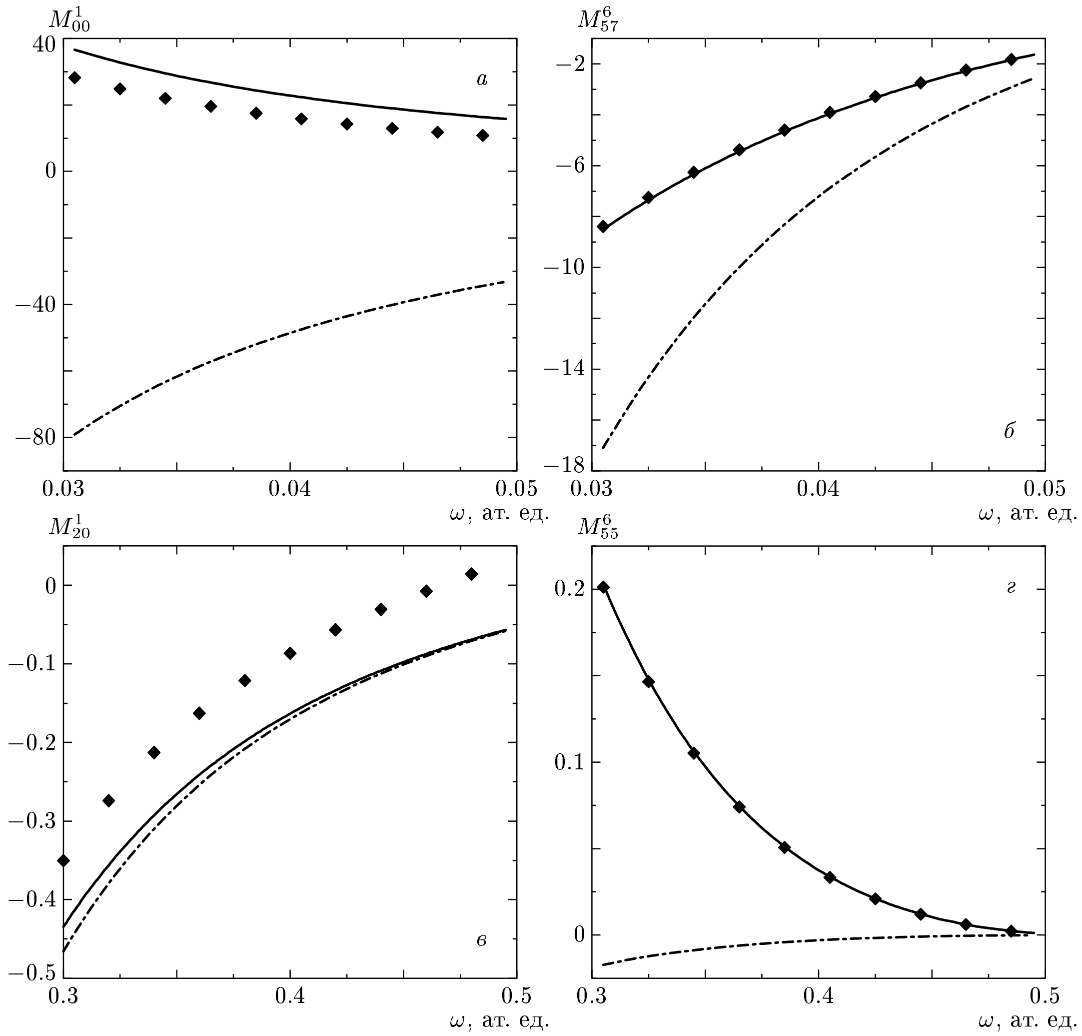

Рис. 3. Частотные зависимости матричных элементов 2BrS при начальной энергии электрона $E = 0.1$ (a, $б$) и $E = 1.0$ ($в$, $г$). Сплошные линии — $\mathrm{Re}\, M$, штрихпунктир — $\mathrm{Im}\, M$, ромбы — $\mathrm{Re}\, M$ в приближении (59)

чениях начальной энергии E. Отметим, что все МЭ принимают конечные значения при пороговой частоте $\omega = E/2$ ($E' = 0$).

Частотная зависимость радиальных МЭ двойного тормозного поглощения ($\mathcal{E} = E + \omega$, $E' = E + 2\omega$) для тех же, что и в случае 2BrS (см. рис. 3), значений E и l показана на рис. 4. Как видно, поведение $M^L_{l'l}$ для процессов излучения и поглощения качественно одинаково (монотонное убывание $\mathrm{Re}\, M^L_{l'l}$ и $\mathrm{Im}\, M^L_{l'l}$ с ростом ω и момента l, их знакоопределенность, более быстрое убывание мнимой части). Отличие состоит в том, что при тормозном поглощении нет порогового ограничения на частоту и с ростом ω МЭ убывают, стремясь (в очень далекой области частот) к асимптотике вида (74). При заданной частоте ω «диагональные» МЭ для поглощения значительно превышают соответствующие МЭ для 2BrS, причем $|M^{l+1}_{ll}| > |M^l_{l+1\, l+1}|$. Наблюдается интересное соответствие между численными значениями «недиагональных» МЭ для излучения и поглощения:

$$M^L_{l'l}(E + 2\omega, E + \omega, E) \leftrightarrows M^L_{ll'}(E - 2\omega, E - \omega, E).$$

В частности, в обоих случаях наибольшими по модулю в преобладающей области частот оказываются те МЭ, в которых изменение энергии и орбитального момента происходят «в одну сторону». Это соответствует известному правилу Бете для однофотонных переходов в дискретном спектре [55]. Однако для двухфотонных переходов в непрерывном спектре это правило оказывается нестрогим: оно нарушается в области малых частот, причем эта область расширяется с увеличением момента l.

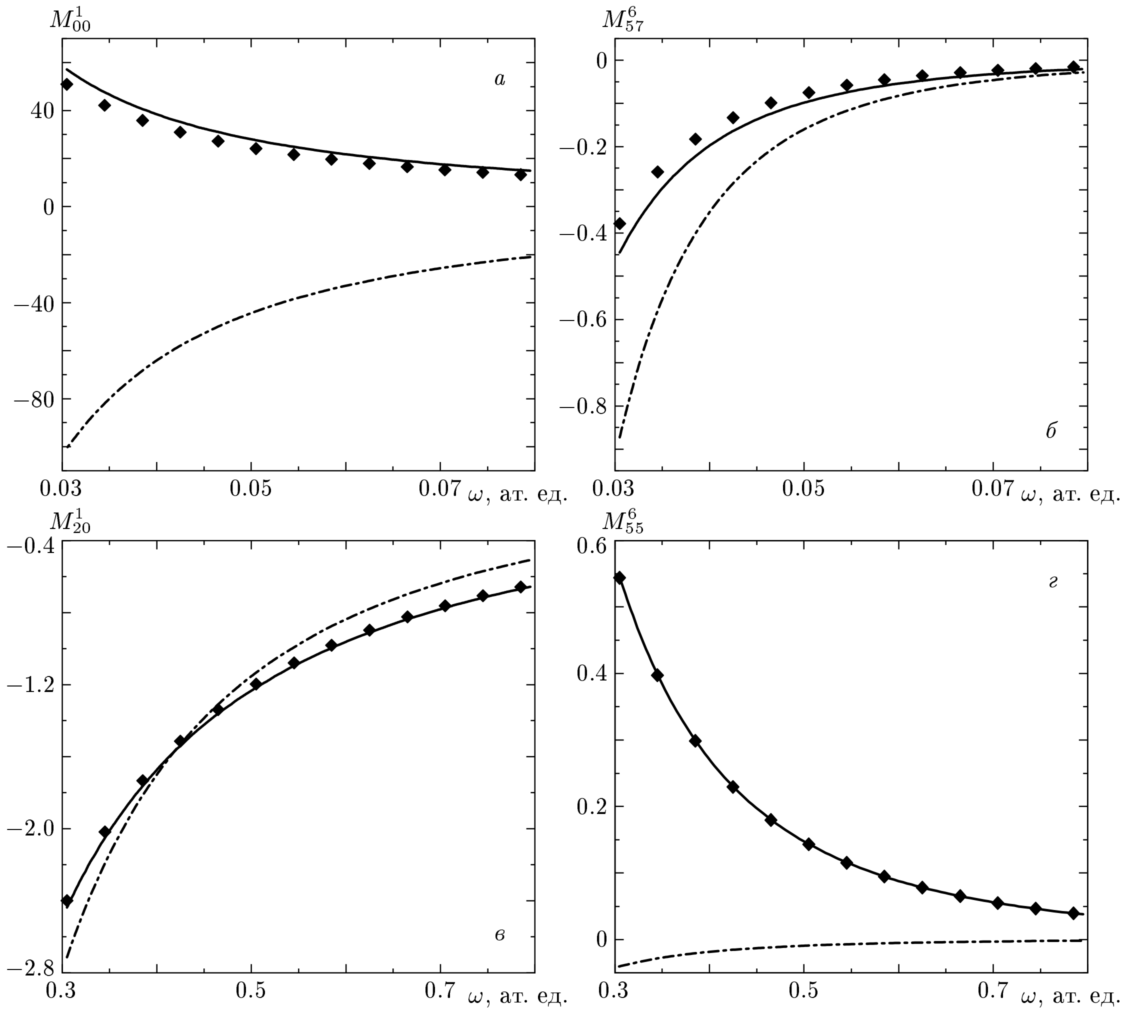

Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но для матричных элементов двойного тормозного поглощения

Наличие точных результатов позволяет проверить корректность приближений, используемых для расчета $M^L_{l'l}(E', \mathcal{E}, E)$. Наиболее простым является «полюсное» приближение, которое состоит в учете только мнимой части $M^L_{l'l}$ в (57) (происходящей от члена с δ-функцией в (58)). В условиях применимости теории возмущений по полю волны к нему сводится и модель «существенных состояний» [66, 67] в теории многофотонных процессов в сильном поле. Асимптотические оценки (66) и численные расчеты показывают, что мнимая часть доминирует в низкочастотной области при малых начальных энергиях электрона (при этом для «недиагональных» МЭ точность полюсного приближения значительно лучше, чем для «диагональных»). В полюсном приближении двухфотонный переход можно рассматривать как «каскадный», т. е. происходящий лишь через одно промежуточное состояние континуума с энергией $\mathcal{E}$, чему соответствует факторизация амплитуды процесса:

$$M^L_{l'l}(E', \mathcal{E}, E) \to i \,\mathrm{Im}\, M^L_{l'l} = \\ = -i\pi \left\langle R_{E'l'} \right| D(l', L) \left| R_{\mathcal{E}L} \right\rangle \left\langle R_{\mathcal{E}L} \right| D(L, l) \left| R_{El} \right\rangle .$$

При увеличении частоты и/или энергии электрона вклад опущенной вещественной части МЭ возрастает. В области высоких частот ($a \ll 1$, $\omega/E' \gg 1$, $\omega/E \sim 1$ для процесса излучения и $a' \ll 1, \omega/E' \sim 1$, $\omega/E \gg 1$ для процесса поглощения) вещественная часть $M^L_{l'l}$ становится преобладающей, а мнимая часть имеет относительную малость порядка $1/\sqrt{\omega}$. В области промежуточных частот $\omega \sim E$ величины $\mathrm{Re}\, M^L_{l'l}$ и $\mathrm{Im}\, M^L_{l'l}$ имеют одинаковый порядок, так что переходы через различные промежуточные состояния, соответствующие вещественной части $M^L_{l'l}$, становятся столь же существенны, как и «каскадные». Для примера ниже приводится ряд МЭ $M^L_{l_f l_i}(E+2\omega, E+\omega, E)$ для энергии $E = 0.0536 = 1.458$ эВ и $\omega = 0.0735 = 2.0$ эВ, которые возникают при оценке вклада квадратичных по интенсивности поправок (обусловленных виртуальными переходами в континууме) к сечению фотоионизации состояния атома водорода с $n = 5$, $l = 4$ [68] (результаты приведены для случая оператора дипольного взаимодействия в «форме длины», используемой в [68]):

$$\begin{gathered}
M^4_{35} = -(14.71 + i\cdot 24.76),\\
M^4_{55} = -(3,882 + i\cdot 0.910)\cdot 10^2,\\
M^6_{55} = (3.323 - i\cdot 0.594)\cdot 10^2,\\
M^6_{75} = -(2.386 - i\cdot 3.100)\cdot 10^2,\\
M^2_{13} = -(1.353 + i\cdot 2.793)\cdot 10^2,\\
M^2_{33} = -(1.369 + i\cdot 0.606)\cdot 10^3,\\
M^4_{33} = (1.141 - i\cdot 0.346)\cdot 10^3,\\
M^4_{53} = -(0.819 + i\cdot 1.270)\cdot 10^3.
\end{gathered}$$

Как видно, в рассматриваемом случае полюсное приближение (так же как и правило Бете) неприменимо, причем эта ситуация типична для «надпороговых» многофотонных процессов, когда частоты фотонов сравнимы с энергией электрона в континууме. Следует также иметь в виду, что отдельные радиальные МЭ в полной амплитуде процесса, как правило, существенно «интерферируют» (взаимно сокращаются), что значительно повышает требования к точности их вычисления.

Приближение (59) (аппроксимация «1-delta» [14]) наряду с мнимой частью $M^L_{l'l}$ точно учитывает вещественную часть внеинтегральных членов в (38)–(40). Как обсуждалось в разд. 5, это приводит к правильным результатам в низкочастотной области (при любых значениях начальной энергии электрона) и в борновской области, а в высокочастотной области дает весьма точный результат для двух из четырех МЭ $M^L_{l'l}$ (тех, в которых конечное состояние имеет наименьший возможный орбитальный момент, см. п. 5.2), а также правильный вид частотной зависимости и порядок величины для двух других МЭ. Поэтому естественно, что указанное приближение хорошо согласуется с точными результатами практически при всех значениях частоты лазерного поля и энергии электрона (см. рис. 3, 4). Заметное различие наблюдается лишь при малых энергиях и малых значениях момента l (при этом наибольшее расхождение наблюдается для МЭ, в которых внеинтегральные члены не дают правильной высокочастотной асимптотики).

Рис. 5. Пространственное распределение электронов в процессе 2BrS, рассеивающихся (с начальной энергией $E = 1.0$) на кулоновском центре в присутствии циркулярно поляризованной волны с частотой $\omega = 0.01$ (*а, б*) и $\omega = 0.1$ (*в, г*) при $\xi = 1$ (*а, в*) и $\xi = -1$ (*б, г*). Начальный импульс электрона лежит в плоскости поляризации (плоскость yz)

6.2. Угловые распределения и дихроизм в вынужденных тормозных процессах

Как обсуждалось в п. 2.3, угловые распределения существенно зависят не только от начальной энергии электрона E и частоты ω, но и от поляризации фотонов. Для рассеяния на кулоновском центре в присутствии циркулярно поляризованной волны с $\xi = \pm 1$ качественные особенности пространственного распределения рассеянных электронов при вынужденном 2BrS видны из рис. 5 для двух значений частоты: $\omega = 0.01$ и 0.1. В соответствии с геометрией рис. 2 направление светового пучка $\mathbf{k}$ выбрано перпендикулярным начальному импульсу электронов $\mathbf{p} = p\mathbf{n}$ с энергией $E = p^2/2 = 1.0$ ат. ед. Рисунок 5 наглядно показывает наличие CD: сечения $d\sigma/d\Omega$ для $\xi = +1$ и $\xi = -1$ существенно различаются (в то же время они переходят друг в друга при отражении

Рис. 6. То же, что и на рис. 5, но в поле с эллиптической поляризацией и частотой $\omega = 0.1$: *а* — $\alpha = \pi/2$, $\xi = 1/\sqrt{2}$; *б* — $\alpha = \pi/2$, $\xi = -1/\sqrt{2}$; *в* — $\alpha = \pi/4$, $\xi = 1/\sqrt{2}$; *г* — $\alpha = \pi/4$, $\xi = -1/\sqrt{2}$

относительно плоскости xz, см. п. 2.3). С уменьшением частоты эффект CD уменьшается в соответствии с тем, что низкочастотная асимптотика (68) содержит только «регулярный» член. Однако в области малых углов рассеяния значения $d\sigma/d\Omega$ при $\xi = \pm 1$ существенно различны даже при $\omega/E = 0.01$ (см. рис. 5*а* и 5*б* и обсуждение в п. 5.1). При дальнейшем уменьшении θ величина Δ_{CD} снова становится меньше f_{reg}, что подтверждают и численные расчеты: из рис. 5 видно, что при $\theta = 0$ значения $d\sigma/d\Omega$ при $\xi = +1$ и $\xi = -1$ совпадают.

В поле с эллиптической поляризацией наряду с CD асимметрия углового распределения обусловлена также эффектом эллиптического дихроизма (слагаемое с Δ_{ED} в (24)). При этом сечение существенно зависит от ориентации поляризационного эллипса, которая на рис. 2 задается углом α между вектором $\boldsymbol{\epsilon}$ и осью y. На рис. 6 показано угловое распределение электронов при тех же E и ω, что на рис. 5*в* и 5*г*, но при $\xi = \pm 1/\sqrt{2}$ и двух значениях угла α: $\alpha = \pi/2$ ($\boldsymbol{\epsilon} \parallel \mathbf{p}$) и $\alpha = \pi/4$ (вектор $\mathbf{p}$ составляет угол $\pi/4$ с главной осью эллипса поляризации). Рисунки 6*в* и 6*г* наглядно иллюстрируют обсуждавшееся в разд. 2.3 понижение симметрии при переходе от циркулярной поляризации к эллиптической: при $\alpha = \pi/4$ результаты для $\xi = 1/\sqrt{2}$ и $\xi = -1/\sqrt{2}$ качественно различаются, хотя плоскость yz по-прежнему остается плоскостью симметрии. Отметим, что хотя член Δ_{ED} не имеет параметра малости в общей формуле (24), численные расчеты показывают, что влияние эллиптического дихроизма на асимметрию угловых распределений оказывается существенно меньше, чем циркулярного.

Для иллюстрации абсолютной величины двухфотонных сечений и их зависимости от эллиптичности на рис. 7 показаны угловые распределения по углу θ между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ (в плоскости эллипса поляризации) для процесса вынужденного 2BrS при $E = 1.0$, $\omega/E = 0.1$ и различных значениях ξ (для двойного тормозного поглощения графики имеют аналогичный вид с заменой $\xi \to -\xi$). Результаты приведены для $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = \pi/4$. В первом случае ($\alpha = \pi/2$) при $\theta = \pi$ сечения при $\xi = \pm 1$ являются строго одинаковыми вследствие отсутствия CD при рассеянии назад. В то же время сечения практически совпадают и в случае эллиптической поляризации с $\xi = \pm 1/\sqrt{2}$, что объясняется малостью Δ_{ED} по сравнению с регулярным слагаемым f_{reg} в (24) при $\theta = \pi$. Во втором случае ($\alpha = \pi/4$) четыре кривые (с $\xi = \pm 1$, $\xi = \pm 1/\sqrt{2}$) при $\theta = \pi$ сходятся в одну точку, так как при этих значениях углов α, θ, φ регулярный член f_{reg} с большой точностью ($< 5\,\%$) не зависит от поляризации и дает доминирующий вклад в сечение. Как видно, при изменении знака поляризации в области малых углов величина сечения изменяется почти на порядок. Отметим также существенную зависимость результатов от ориентации вектора $\mathbf{p}$ относительно главной оси эллипса поляризации, а также отсутствие симметрии $d\sigma(\xi; \varphi) = d\sigma(-\xi; -\varphi)$ при $\alpha = \pi/4$. Зависимость сечения двухфотонного поглощения от энергии E при тех же, что и на рис. 7, значениях ξ и ω показана на рис. 8 для двух значений угла θ и ориентации $\mathbf{p}$ перпендикулярно главной оси поляризации ($\alpha = 0$). Эффекты дихроизма наиболее существенны при $\omega \sim E$, причем зависимость от энергии в этой области качественно меняется при изменении θ.

В процессе двойного тормозного поглощения новым обстоятельством по сравнению с 2BrS является существование «критической» геометрии рассеяния, при которой переданный импульс $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ оказывается перпендикулярным плоскости поляризации, так что $\mathbf{e} \cdot \Delta\mathbf{p} = 0$. В этом случае борновское приближение (81) и низкочастотная асимптотика (64)

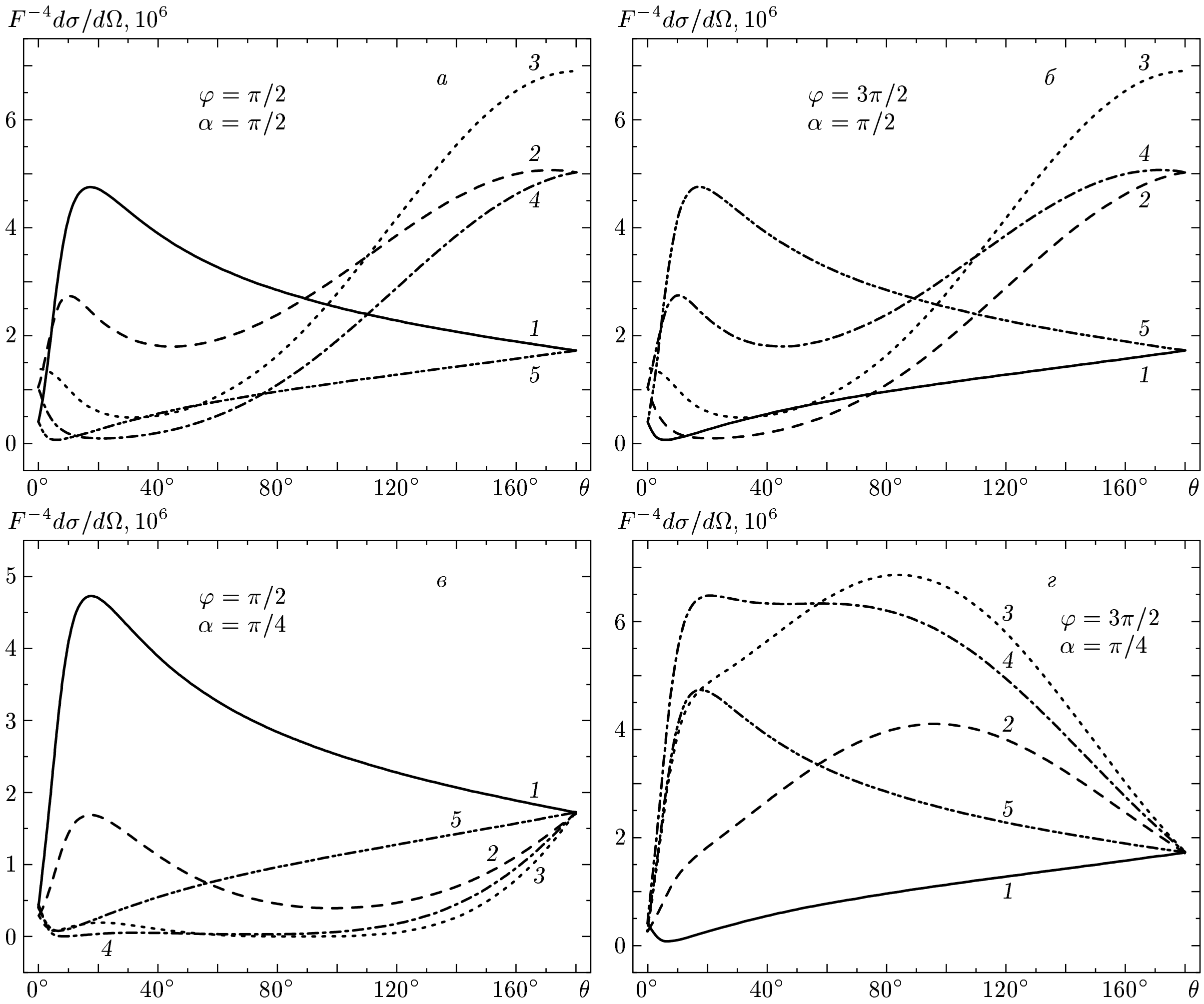

Рис. 7. Зависимость сечения 2BrS электронов с $E = 1.0$ и $\omega = 0.1$ от угла рассеяния θ в плоскости эллипса поляризации: кривые *1* — $\xi = -1$; *2* — $\xi = -1/\sqrt{2}$; *3* — $\xi = 0$; *4* — $\xi = 1/\sqrt{2}$; *5* — $\xi = 1$. Значения углов α и φ в геометрии рис. 2 указаны на графиках

дают нуль для сечения, тогда как при точном учете рассеивающего потенциала значение $d\sigma/d\Omega$ конечно. На рис. 9 показана зависимость сечения двойного тормозного поглощения от угла φ (см. рис. 2) в «критической» области. При энергии $E = 1.0$ и $\omega = 1/6$ (рис. 9*а*) формула Бункина–Федорова (81) вполне удовлетворительно описывает сечение (хотя борновские параметры в этом случае и не слишком малы: $a \approx 0.7$, $a' \approx 0.6$) за исключением малой области углов вблизи «критической» точки: $\theta = \pi/6$ и $\varphi = 0$, в которой борновский результат обращается в нуль, а точное сечение имеет ярко выраженный минимум. В то же время для $E = 0.1$ и $\omega = 1/60$ (рис. 9*б*) низкочастотная асимптотика (64) дает значительно худшее количественное согласие с точными результатами. Другая область «критических» параметров, для которой низкочастотная асимптотика Кролла и Ватсона резко противоречит эксперименту и которая активно обсуждается в последние годы (см. ссылки в [32]), — низкоэнергетическое рассеяние (с энергией E порядка нескольких электронвольт) на малые углы в линейно поляризованном поле с начальным импульсом $\mathbf{p}$ вдоль направления поляризации. На рис. 10 приведены сечения двойного тормозного поглощения для $E = 0.1$ и $\omega/E = 0.01$ и 0.05 в указанной геометрии. Как видно, при малых углах различие точных и приближенных результатов достигает пяти-шести порядков, хотя с ростом θ наблюдается практически полное согласие (результаты для 2BrS качественно те же, что и на рис. 10, однако в этом случае различие при малых θ не превышает одного-двух порядков). Таким образом, во-

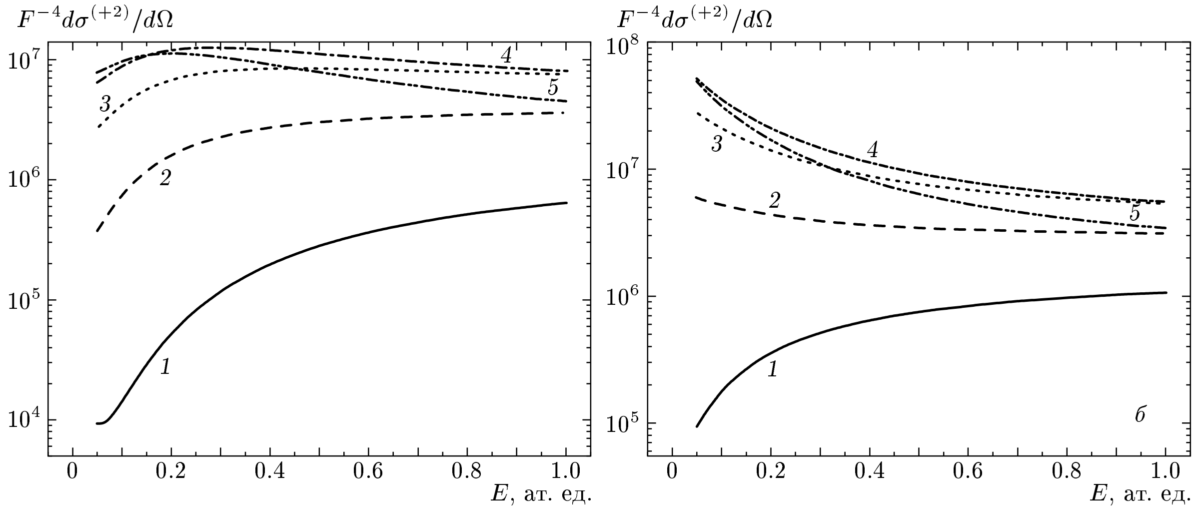

Рис. 8. Зависимость сечения двухфотонного поглощения от энергии E при $\omega = 0.1$, $\alpha = 0$, $\varphi = \pi/2$ и различных ξ (обозначения кривых те же, что и на рис. 7): *а* — $\theta = \pi/6$; *б* — $\theta = \pi/3$

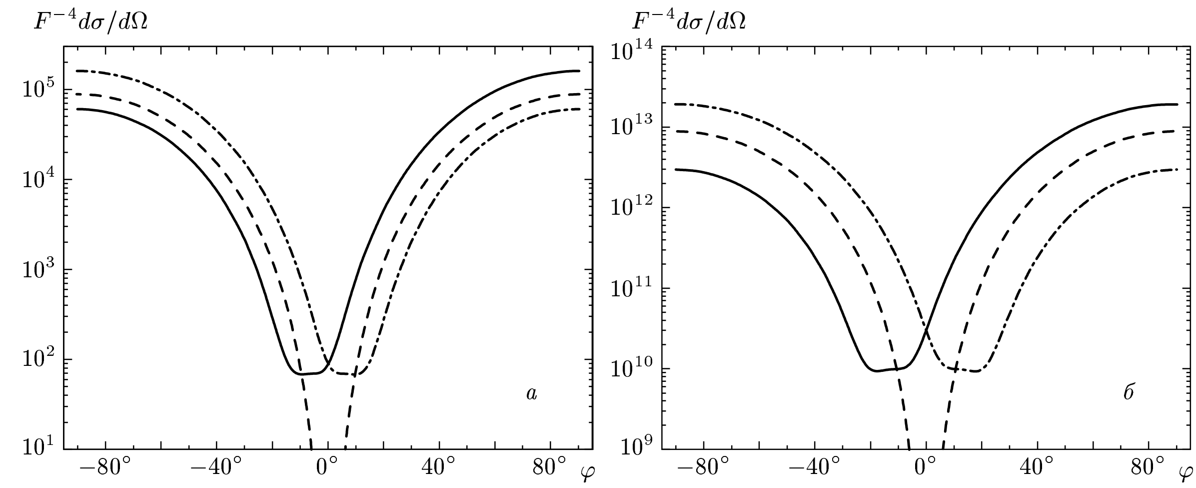

Рис. 9. Зависимость сечения двойного тормозного поглощения от угла φ при $\theta = \pi/6$ (сплошные линии — $\xi = 1/\sqrt{2}$; штрихпунктирные — $\xi = -1/\sqrt{2}$), $E = 1.0$, $\omega = 1/6$ (*а*, штриховая линия — борновское приближение (81)) и $E = 0.1$, $\omega = 1/60$ (*б*, штриховая линия — низкочастотная асимптотика (64))

прос о простых аппроксимациях тормозных сечений для описания рассеяния на малые углы при низких энергиях (когда борновское приближение неприменимо) требует особого рассмотрения.

Для иллюстрации соотношения между сечениями одно- и двухфотонного рассеяния в зависимости от параметров лазерного излучения и угла рассеяния на рис. 11 приведены сечения обычного резерфордовского рассеяния ($d\sigma^{(R)}/d\Omega$) и одно- и двухфотонного поглощения и излучения ($d\sigma^{(n)}/d\Omega$ с $n = \pm 1, \pm 2$) как функции угла θ в плоскости поляризации (для кулоновского потенциала аналитические выражения для факторов Q в амплитуде однофотонных процессов (3), (4) приведены в [4]). Как видно, сечения $d\sigma^{(n)}/d\Omega$ более чувствительны к изменению степени эллиптичности при углах $\theta < \pi/2$, при этом в обоих случаях при малых углах сечения максимальны при циркулярной поляризации, в то время как рассеяние на углы $\theta > \pi/2$ более эффективно в поле с линейной поляризацией. В отличие от резкой угловой зависимости резерфордовского сечения $d\sigma^{(R)}/d\Omega$ при малых θ, сечения тормозных процессов более плавно зависят от θ, хотя однофотонные сечения при малых углах также возрастают более

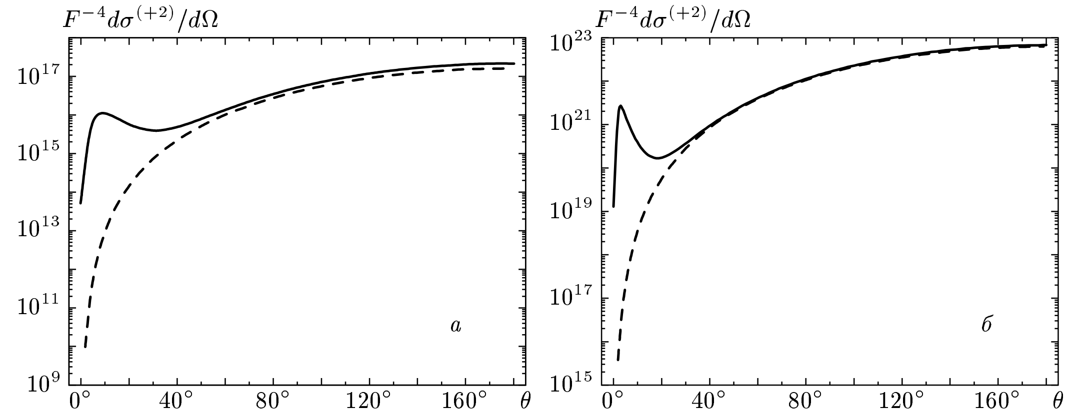

Рис. 10. Сечения двойного тормозного поглощения электронов с энергией $E = 0.1$ на кулоновском центре в поле линейно поляризованной волны с частотой $\omega = 0.005$ (a) и $\omega = 0.001$ ($б$). Начальный импульс электрона направлен вдоль вектора поляризации волны; θ — угол рассеяния. Сплошные линии — точный результат, штриховые — низкочастотное приближение (64)

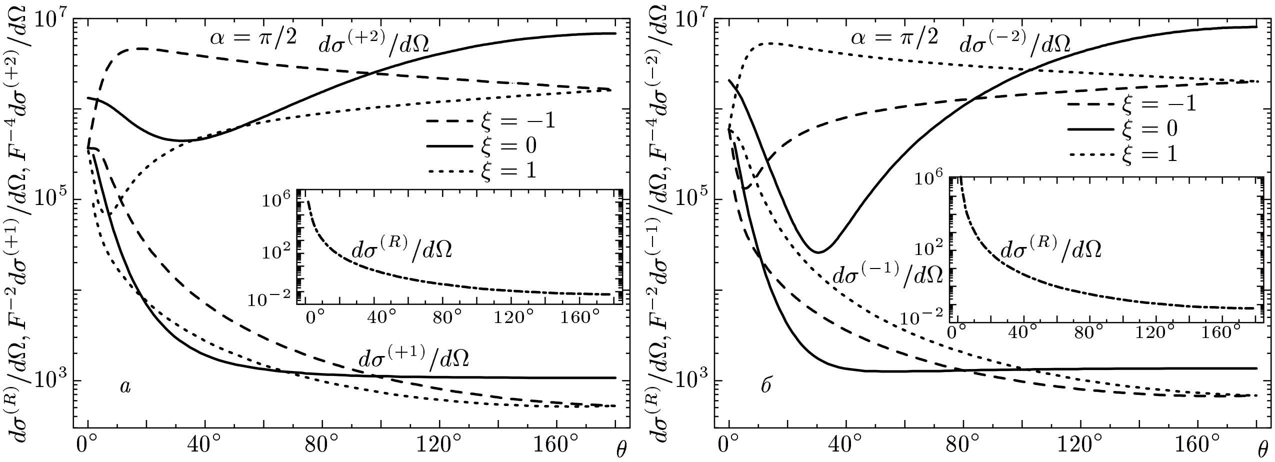

Рис. 11. Сечения рассеяния электронов с энергией $E = 1.0$ в полях линейно ($\xi = 0$) и циркулярно ($\xi = \pm 1$) поляризованных волн с частотой $\omega = 0.1$. Импульс рассеянного электрона лежит в плоскости поляризации; $\varphi = \pi/2$. Величины $d\sigma^{(n)}/d\Omega$ с $n = +1, +2$ и $n = -1, -2$ соответствуют поглощению (a) и излучению ($б$) одного и двух фотонов. На вставках показано сечение $d\sigma^{(R)}/d\Omega$ резерфордовского рассеяния в отсутствие поля

чем на два порядка, а двухфотонные демонстрируют немонотонную зависимость. Эффекты дихроизма наиболее существенны при малых углах, хотя и при рассеянии под прямым углом различие сечений при изменении знака ξ достигает 100%. При фиксированной начальной энергии электрона абсолютная величина тормозных сечений резко возрастает с уменьшением частоты (рис. 12), при этом частотные зависимости хорошо аппроксимируются выражением

$$d\sigma^{(\pm n)}(\omega)/d\Omega \sim 1/\omega^{4n}.$$

В заключение отметим, что приведенные результаты позволяют качественно оценить пределы применимости теории возмущений по лазерному полю для описания тормозных процессов. Так, вне области малых углов при $E \approx 1$ и $\omega \approx 0.1$ типичное отношение двухфотонных сечений к однофотонным составляет $(10^4\text{–}10^3)F^2$ и достигает единицы (когда теория возмущений становится заведомо неприменимой) при интенсивности $I_{cr} \sim (10^{12}\text{–}10^{13})$ Вт/см^2, значительно меньшей внутриатомной, $I_0 = 3.51 \cdot 10^{16}$ Вт/см^2. С уменьшением частоты величина I_{cr} быстро убывает (как ω^4), так что в области оптических частот эффек-

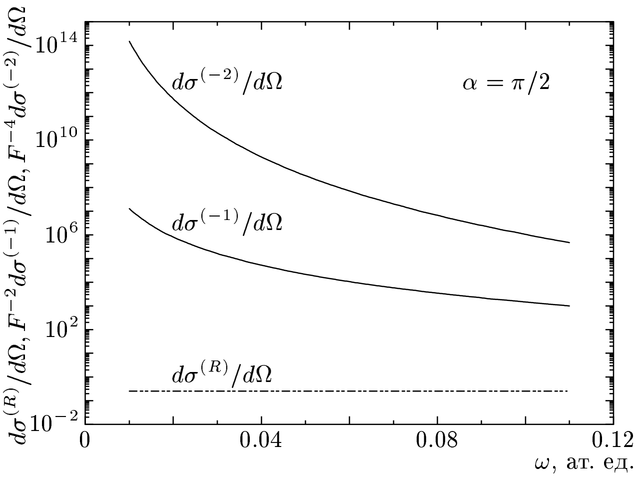

Рис. 12. Частотная зависимость сечений однофотонного $(d\sigma^{(-1)}/d\Omega)$ и двойного тормозного $(d\sigma^{(-2)}/d\Omega)$ излучений электронов с энергией $E = 1.0$ на кулоновском центре в поле циркулярно поляризованной волны с $\xi = 1$ в геометрии рис. 2 с $\theta = \varphi = \pi/2$; $d\sigma^{(R)}/d\Omega$ — сечение резерфордовского рассеяния

тивным параметром теории возмущений является отношение F/ω^2 (или отношение амплитуды классических осцилляций электрона в лазерном поле к боровскому радиусу). При малых θ отношение $d\sigma^{(\pm2)}(\omega)/d\sigma^{(\pm1)}$ достигает 1 лишь в сверхсильных полях с $I_{cr} \sim I_0$ (см. рис. 11), а в более слабых полях доминирующий вклад в сечение рассеяния на малые углы дают однофотонные процессы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке CRDF и Министерства образования РФ (грант VZ-010-0), а также РФФИ (проект 00-02-17843), Конкурсного центра Министерства образования РФ (грант E00-3.2-515) и Национального научного фонда США (A. F. S., грант PHY-0070980).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Используя рекуррентные соотношения для вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(\alpha, \beta; x)$, действие дипольных операторов (22) на кулоновскую волновую функцию непрерывного спектра $R_{El}(r)$ можно представить в виде

$$D(l+1,l)R_{El}(r) = -p\frac{l+1-ia}{|l+1-ia|}R_{El+1}(r) - \\ - \frac{2ZC_{El}}{(2l+3)!}(2pr)^l \exp(-ipr) \times \\ \times [(l+2+ia)\Phi(l+3+ia, 2l+4; 2ipr) + \\ + (l+1-ia)\Phi(l+2+ia, 2l+4; 2ipr)], \quad (A.1)$$

$$D(l+1,l+2)R_{El+2}(r) = p\frac{|l+2-ia|}{l+2-ia}R_{El+1}(r) - \\ - \frac{2ZC_{El+2}}{(2l+3)!(l+2-ia)}(2pr)^l \exp(-ipr) \times \\ \times [\Phi(l+3+ia, 2l+4; 2ipr) - \\ - \Phi(l+2+ia, 2l+4; 2ipr)]. \quad (A.2)$$

Поскольку первые слагаемые в правых частях (A.1) и (A.2) пропорциональны $R_{El+1}(r)$, соответствующие члены в МЭ $M^L_{l'l}$ в (36) выражаются через МЭ (37) в соответствии с (38)–(40). Величины $d_{l'l}$ легко вычисляются с использованием соотношений (A.1) и (A.2), что дает для $d_{l+1\,l}$ и $d_{l+1\,l+2}$ формулы (41), в которых интеграл

$$I^{m'm}(E', E) = \int_0^\infty dr\, r^{2l+3} \exp[-i(p'+p)r - \varepsilon r] \times \\ \times \Phi(l+3-m'+ia', 2l+4; 2ip'r) \times \\ \times \Phi(l+3-m+ia, 2l+4; 2ip'r) \quad (A.3)$$

является табличным [56] и сводится к функции ${}_2F_1$, см. (42).

Двойной интеграл $J^{m'm}$ в (38)–(40) содержит радиальную кулоновскую функцию Грина $g_l(r, r', \mathcal{E})$:

$$J^{m'm} = \int_0^\infty dr'\, dr (r'r)^{l+2} \exp[-ip'r' - ipr - \varepsilon r] \times \\ \times \Phi(l+3-m'+ia', 2l+4; 2ip'r) g_{l+1}(\mathcal{E}, r, r') \times \\ \times \Phi(l+3-m+ia, 2l+4; 2ipr). \quad (A.4)$$

Для его вычисления удобно использовать интегральное представление g_L [69]:

$$g_L(r, r', \mathcal{E}) = \frac{2}{\sqrt{rr'}} \int_0^1 \frac{dt}{1-t} t^{-(1/2)-Z\nu} \times \\ \times \exp\left[-\frac{r+r'}{\nu}\frac{1+t}{1-t}\right] I_{2L+1}\left(\frac{4\sqrt{rr't}}{\nu(1-t)}\right), \quad (A.5)$$

где $I_k(t)$ — модифицированная функция Бесселя $\nu = 1/\sqrt{-2\mathcal{E}}$. Отметим, что в интегралы (А.3), (А.4) с осциллирующими функциями введены регуляризующие множители $\exp(-\varepsilon r)$ с $\varepsilon \to +0$. Подставляя (А.5) в (А.4) и используя интегральное представление функции $\Phi(\alpha, \beta, x)$ [56], получаем

$$J^{m'm}(E', E, \mathcal{E}) = \\ = \frac{2(2l+3)!}{\Gamma(l+1+m+ia)\Gamma(l+3-m-ia)} \times \\ \times \int\limits_0^1 dt\, \frac{t^{-Z\nu-1/2}}{1-t} \times \\ \times \int\limits_0^1 du\, u^{l+m+ia}(1-u)^{l+2-m'-ia} \times \\ \times \int\limits_0^\infty dr'\, r'^{l+3/2} \exp\left[-\left(\frac{1}{\nu}\frac{1+t}{1-t} + ip'\right) r'\right] \times \\ \times \Phi(l+1+m'+ia', 2l+4; 2ip'r') \times \\ \times \int\limits_0^\infty dr\, r^{l+3/2} \exp\left[-\left(ip + \frac{1}{\nu}\frac{1+t}{1-t} - 2ipu\right) r\right] \times \\ \times I_{2l+3}\left(\frac{4\sqrt{rr't}}{\nu(1-t)}\right). \quad (А.6)$$

Специальное соотношение между индексом функции Бесселя I_k, параметром β в $\Phi(\alpha, \beta; x)$ и показателями степеней r и r' в интеграле (А.6), достигнутое преобразованиями (А.1), (А.2), позволяет выразить интегралы по r и r' через элементарные функции [63]. В результате интеграл по u в (А.6) дает определение гипергеометрической функции двух переменных (функции Аппеля)

$$F_1(l+1+m+ia; l+3-m'-ia', l+1+m'+ia'; 2l+4; x, y),$$

которая при указанных значениях параметров сводится к ${}_2F_1$ согласно известным формулам приведения [56], и $J^{m'm}$ принимает окончательный вид (43).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Аналитическое продолжение формул (38)–(40) по переменным p и p' на область отрицательных энергий, $p \to iZ/n$ и $p' \to iZ/n'$, позволяет получить МЭ двухфотонных переходов между состояниями дискретного спектра $|nl\rangle$ и $|n'l'\rangle$:

$$M^L_{l'l}(n', n, \mathcal{E}) = \langle n'l'|\, D(l', L) g_L(\mathcal{E}) D(L, l)\, |nl\rangle\,. \quad (Б.1)$$

В результате указанной замены p и p' параметры функций ${}_2F_1$ и показатели степени в знаменателе в интеграле (43) становятся целыми:

$$J^{m'm}(n', n, \mathcal{E}) \propto \int\limits_0^1 dt\, \frac{t^{l+1-Z\nu}{}_2F_1(l+1+m'-n', l+1+m-n, 2l+4; \lambda)}{(1-t/y)^{l+1+m-n}(1-yt)^{l+1+m'-n'}(1-y't)^{2-m'-m+n'+n}}\,, \quad (Б.2)$$

где

$$y = \frac{(\alpha-\nu)(\alpha'+\nu)}{(\alpha+\nu)(\alpha'-\nu)}, \quad y' = \frac{(\alpha-\nu)(\alpha'-\nu)}{(\alpha+\nu)(\alpha'+\nu)},$$
$$\lambda = \frac{16\alpha\alpha'\nu^2}{(\alpha^2-\nu^2)(\alpha'^2-\nu^2)}\, \frac{t}{(1-yt)(1-t/y)}\,,$$
$$\alpha = n/Z\,, \quad \alpha' = n'/Z.$$

Интеграл в (Б.2) можно выразить через известные функции, преобразуя подынтегральное выражение с помощью соотношения [56, формула (2.5.2.12)]

$$\frac{(1-yt)^{n'-l-m'-1}(1-t/y)^{n-l-m-1}}{(1-y't)^{n+n'+2-m-m'}} \times \\ \times {}_2F_1(l+1+m'-n', l+1+m-n, 2l+4; \lambda) = \\ = \sum_{k=0}^\infty \frac{(2l+4)_k}{k!}(y't)^k {}_2F_1(l+1+m-n, -k; 2l+4; z) \times \\ \times {}_2F_1(l+1+m'-n', -k; 2l+4; z')\,,$$

где $z = -4\alpha\nu/(\alpha-\nu)^2$, $z' = -4\alpha'\nu/(\alpha'-\nu)^2$. После этого интеграл (Б.2) вычисляется элементарно и принимает вид, тождественный формуле (13) в [49]. Воспользовавшись результатами указанной работы, запишем $J^{m'm}$ через гипергеометрические полиномы ${}_2F_1(-k, b; c; x)$ и функции Аппеля $F_1(a; -k, k+2l+2; d; x, y)$ специального вида, выражающиеся через сумму $k+1$ полных функций ${}_2F_1$ или (при целом отрицательном a) гипергеометрический полином двух переменных:

$$J^{m'm} = 2^{-2l-4}\,\Gamma^2(2l+4)\,(\alpha\alpha')^{l+2} \times \\ \times\, g^{l+1}_{n-l-1-m, n'-l-1-m'}(\nu; \alpha, \alpha')\,, \quad (Б.3)$$

где

$$g^{l}_{kk'}(\nu;\alpha,\alpha') = \nu\frac{\left(4\nu\sqrt{\alpha\alpha'}\right)^{2l+2}}{\Gamma(2l+2)}\times$$
$$\times\frac{(\alpha-\nu)^{k}}{(\alpha+\nu)^{k+2l+2}}\frac{(\alpha'-\nu)^{k'}}{(\alpha'+\nu)^{k'+2l+2}}\times$$
$$\times\Big[\frac{{}_2F_1(-k,l{+}1{-}\eta;2l{+}2;z)}{l+1-\eta}\times$$
$$\times F_1(l{+}1{-}\eta;-k',k'{+}2l{+}2;l{+}2{-}\eta;y,y')+$$
$$+\sum_{p=1}^{k}C^{p}_{k}(-z)^{p}\times \qquad (\text{Б}.4)$$
$$\times\frac{{}_2F_1(-k{+}p,l{+}1{-}\eta{+}p;2l{+}2{+}p;z)}{(2l{+}2)_p}\times$$
$$\times\Phi_p(k',l,\eta;y,y')\Big],$$
$$\Phi_p(k',l,\eta;y,y') = -\frac{(l{+}2{+}\eta{-}p)_{p-1}(1{-}y)^{k'}}{(1{-}y')^{k'+2l+2}}\times$$
$$\times F_1(-p{+}1;-k',k'{+}2l{+}2;l{+}2{+}\eta{-}p;1/(1{-}y),1/(1{-}y')),$$

C^{p}_{k} — биномиальный коэффициент, $\eta = Z\nu$.

Для преобразования $J^{m'm}$ к форме (Б.3), (Б.4) достаточно, чтобы в (Б.2) целым было лишь одно из двух чисел, n или n' (которое и будет определять верхний предел k суммы по p в (Б.4)). Поэтому в замкнутом виде могут быть представлены также амплитуды связанно-свободных (но не свободно-свободных) переходов. Явные выражения для всех $M^{L}_{l'l}(n',n,\mathcal{E})$ в (Б.1), разрешенных дипольными правилами отбора, в виде линейных комбинаций $g^{l}_{kk'}$ и аналогичные выражения для МЭ связанно-свободных переходов (двухфотонные формулы Гордона) приведены в [49].

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Sommerfeld, Ann. der Phys. **11**, 257 (1931); А. Зоммерфельд, *Строение атома и спектры*, т. 2, Гостехиздат, Москва (1956).
2. L. Bess, Phys. Rev. **77**, 550 (1950); A. Nordsieck, Phys. Rev. **93**, 785 (1954).
3. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
4. N. L. Manakov, S. I. Marmo, and V. V. Volovich, Phys. Lett. **27A**, 42 (1995); J. Electr. Spectr. and Rel. Phen. **79**, 327 (1996).
5. L. C. Biedenharn, Phys. Rev. **102**, 262 (1956).
6. W. Heitler and L. Nordheim, Physica **1**, 1059 (1934).
7. J. C. Altman and C. A. Quarles, Phys. Rev. A **31**, 2744 (1985).
8. D. L. Kahler, J. Liu, and C. A. Quarles, Phys. Rev. Lett. **68**, 1690 (1992); Phys. Rev. A **47**, 4274 (1993); J. Liu and C. A. Quarles, Phys. Rev. A **47**, R3479 (1993).
9. R. Hippler, Phys. Rev. Lett. **66**, 2197 (1991); R. Hippler and H. Schneider, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. **87**, 268 (1994).
10. А. И. Смирнов, ЯФ **25**, 1030 (1977).
11. M. Gavrila, A. Maquet, and V. Veniard, Phys. Rev. A **32**, 2537 (1985); V. Veniard, M. Gavrila, and A. Maquet, Phys. Rev. A **35**, 448 (1987); M. Gavrila, A. Maquet, and V. Veniard, Phys. Rev. A **42**, 236 (1990).
12. V. Florescu and V. Djamo, Phys. Lett. **119A**, 73 (1986); M. Dondera and V. Florescu, Phys. Rev. A **48**, 4267 (1993).
13. Н. Л. Манаков, С. И. Мармо, А. Г. Файнштейн, ЖЭТФ **108**, 1569 (1995).
14. A. V. Korol, J. Phys. B **28**, 3873 (1995).
15. A. V. Korol, J. Phys. B **29**, 3257 (1996).
16. T. A. Fedorova, A. V. Korol, and I. A. Solovjev, J. Phys. B **33**, 5007 (2000).
17. A. V. Korol, J. Phys. B **30**, 413 (1997).
18. M. Dondera and V. Florescu, Phys. Rev. A **58**, 2016 (1998).
19. A. V. Korol, J. Phys. B **27**, 155 (1994).
20. G. Kracke, J. S. Briggs, A. Dubois et al., J. Phys. B **27**, 3241 (1994).
21. D. Andrick and L. Langhaus, J. Phys. B **9**, L459 (1976).
22. A. Weingartshofer, J. K. Holmes, G. Caudle et al., Phys. Rev. Lett. **39**, 269 (1977).

23. B. Wallbank and J. K. Holmes, Phys. Rev. A **48**, R2515 (1993); J. Phys. B **27**, 1221 (1994); **27**, 5405 (1994); **29**, 5881 (1996).

24. N. J. Mason, Rep. Progr. Phys. **56**, 1275 (1993).

25. Ф. В. Бункин, М. В. Федоров, ЖЭТФ **49**, 1569 (1965).

26. Ф. В. Бункин, А. Е. Казаков, М. В. Федоров, УФН **107**, 559 (1972).

27. N. M. Kroll and K. M. Watson, Phys. Rev. A **8**, 804 (1973).

28. M. H. Mittleman, Phys. Rev. A **19**, 134 (1979); **20**, 1965 (1979); **21**, 79 (1980).

29. L. Rosenberg, Phys. Rev. A **23**, 2283 (1981).

30. S. Geltman, Phys. Rev. A **53**, 3473 (1996); **55**, 3755 (1997).

31. L. B. Madsen and K. Taulbjerg, J. Phys. B **31**, 4701 (1998).

32. N. J. Kylstra and C. J. Joachain, Phys. Rev. A **58**, R26 (1998); **60**, 2255 (1999).

33. L. W. Garland, A. Jaroń, J. Z. Kamiński, and R. M. Potvliege, J. Phys. B **35**, 2861 (2002).

34. И. Я. Берсон, ЖЭТФ **80**, 1727 (1981).

35. F. Ehlotzky, A. Jaroń, and J. Z. Kamiński, Phys. Rep. **297**, 63 (1998).

36. A. G. Fainshtein, N. L. Manakov, and S. I. Marmo, Phys. Lett. A **195**, 358 (1994).

37. Р. В. Карапетян, М. В. Федоров, ЖЭТФ **75**, 816 (1978).

38. R. Daniele and E. Fiordilino, Nuovo Cim. D **18**, 547 (1996).

39. A. Florescu and V. Florescu, Phys. Rev. A **61**, 033406 (2000).

40. В. П. Крайнов, С. П. Рощупкин, ЖЭТФ **84**, 1302 (1983).

41. A. Florescu and V. Florescu, Phys. Lett. **226A**, 280 (1997).

42. M. H. Mittleman, J. Phys. B **26**, 2709 (1993).

43. P. D. Fainstein and A. Maquet, J. Phys. B **27**, 5563 (1994).

44. D. Khalil, O. E. Akramine, A. Makhoute et al., J. Phys. B **31**, 1115 (1998); O. E. Akramine, A. Makhoute, D. Khalil et al., J. Phys. B **32**, 2783 (1999).

45. N. L. Manakov, S. I. Marmo, and A. V. Meremianin, J. Phys. B **29**, 2711 (1996).

46. А. А. Балакин, Г. М. Фрайман, ЖЭТФ **120**, 797 (2001).

47. Л. П. Рапопорт, А. С. Корнев, ЖЭТФ **116**, 1241 (1999); L. P. Rappoport and A. S. Kornev, J. Phys. B **33**, 87 (2000).

48. A. Cionga, F. Ehlotzky, and G. Zloh, Phys. Rev. A **62**, 063406 (2000); J. Phys. B **33**, 4939 (2000).

49. А. А. Крыловецкий, Н. Л. Манаков, С. И. Мармо, ЖЭТФ **119**, 45 (2001).

50. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).

51. N. L. Manakov, A. V. Meremianin, and A. F. Starace, Phys. Rev. A **57**, 3233 (1998).

52. J. S. Briggs and V. Schmidt, J. Phys. B **33**, R1 (2000).

53. N. L. Manakov, A. Maquet, S. I. Marmo et al., J. Phys. B **32**, 3747 (1999).

54. Н. Л. Манаков, А. В. Меремьянин, ЖЭТФ **112**, 1984 (1997).

55. Г. Бете, Э. Солпитер, *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*, Физматгиз, Москва (1960).

56. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, Наука, Москва (1974).

57. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).

58. L. C. Biedenharn, J. L. McHale, and R. M. Thaler, Phys. Rev. **100**, 376 (1955).

59. Н. Л. Манаков, М. А. Преображенский, Л. П. Рапопорт, А. Г. Файнштейн, ЖЭТФ **75**, 1243 (1978); N. C. Sil, M. A. Crees, and M. J. Seaton, J. Phys. B **17**, 1 (1984); B. Gao and A. F. Starace, Comput. in Phys. **6**, 70 (1987).

60. J. L. Madajczyk and M. Trippenbach, J. Phys. A **22**, 2369 (1989).

61. L. Pan, J. Mod. Opt. **36**, 877 (1989); V. Veniard and B. Piraux, Phys. Rev. A **41**, 4019 (1990); A. V. Korol, J. Phys. B **27**, L103 (1994); T. Mercouris, Y. Komninos, S. Dionissopoulou, and C. A. Nicolaides, J. Phys. B **29**, L13 (1996).

62. N. L. Manakov, S. I. Marmo, and A. V. Shaposhnikov, in: *Atoms and Molecules in Strong Field of Laser Radiation*, ed. by F. V. Bunkin and I. I. Tugov, Wiley-Nauka Sci. Publ., Moscow (1992), p. 87.

63. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).

64. S. D. Oh and R. H. Pratt, Phys. Rev. A **45**, 1583 (1992).

65. C. D. Shaffer, R. H. Pratt, and S. D. Oh, Phys. Rev. A **57**, 227 (1998).

66. Z. Deng and J. H. Eberly, Phys. Rev. Lett. **53**, 1810 (1984); J. Opt. Soc. Amer. B **2**, 486 (1985).

67. M. Trippenbach, K. Rzazewski, M. V. Fedorov, and A. E. Kazakov, J. Phys. B **22**, 1193 (1989).

68. O. V. Tikhonova, A. M. Popov, and M. V. Fedorov, Phys. Rev. A **65**, 053404 (2002).

69. L. Hostler, J. Math. Phys. **5**, 591 (1964).