

ОДНОАТОМНЫЙ ЛАЗЕР. КОГЕРЕНТНЫЕ И НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В РЕЖИМЕ СИЛЬНОЙ АТОМНО-ПОЛЕВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

С. Я. Килин, Т. Б. Карлович*

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
220072, Минск, Беларусь*

Поступила в редакцию 13 ноября 2001 г.

В приближении сильных корреляций между атомом и внутрирезонаторным полем, выражающемся в равенстве вероятности найти атом в основном состоянии и n фотонов и вероятности найти атом в возбужденном состоянии и $n-1$ фотонов, обнаружено, что условные состояния генерируемого одноатомным лазером поля описываются диагональной частью обобщенных когерентных состояний Миттаг–Лефлера. Найдены функции квазираспределения вероятности амплитуды внутрирезонаторного поля (P и Q) и показана ограниченность функции Глаубера на отрезке. Продемонстрирована возможность генерации без инверсии, а для некоторой области параметров — и без порога. Исследованы режимы генерации амплитудно-сжатых состояний поля и определены параметры системы для достижения максимального сжатия. Показано, что при малых интенсивностях накачки состояния атом–поле являются перепутанными.

PACS: 42.50.-p, 32.80.-t, 42.55.-f, 42.60.Da

1. ВВЕДЕНИЕ

Одноатомный лазер привлекает к себе внимание не только как предельный случай устройства, способного генерировать когерентное излучение, но и как простейшая квантовооптическая система, допускающая полное теоретическое описание и проверку этого описания в эксперименте. Достигнутые в настоящее время технические возможности позволяют получить изоляцию атома в оптическом резонаторе, добротность которого настолько высока, что один фотон способен насытить резонансный переход атома [1].

Исторически сложилось так, что исследование генерационных свойств одноатомного лазера началось с изучения трех-, четырехуровневых схем [2–4], обычно применяемых для генерации в макроскопических лазерах. Однако оказалось, что простейшая двухуровневая схема для атомных состояний обеспечивает наблюдение всех тех новых эффектов, которые были предсказаны для трех-, четырехуровневых схем. Среди них субпуассоновская статистика

света [2, 6], многопиковый спектр флуоресценции [3], генерация без инверсии [6]. Было показано, что двухуровневый одноатомный лазер с некогерентной накачкой имеет те же режимы работы, что и обычный лазер: подпороговый режим, надпороговый режим и самотушение [4, 7].

Однако ряд вопросов и даже формулировок проблем остались вне рамок данных работ, возможно, из-за громоздкости используемых уравнений. К ним относится вопрос о состоянии поля, которое формируется в резонаторе при некогерентной накачке атома. К какому классу состояний оно относится? Какова причина возникновения его неклассических особенностей? В чем причина генерации без инверсии в лазере с одним двухуровневым атомом? Является ли общее состояние атома и поля перепутанным?

В настоящей статье на основе использования приближения сильных корреляций между атомом и полем, соответствующего большому значению константы взаимодействия атом–поле, удается найти в относительно простом виде стационарную матрицу плотности. При этом оказывается, что условные матрицы плотности генерируемого поля описываются

*E-mail: kilin@dragon.bas-net.by

диагональной частью матрицы плотности обобщенных когерентных состояний Миттаг–Лефлера. Эти состояния являются собственными функциями обобщенного оператора уничтожения и естественным образом обобщают обычные когерентные состояния. Для данных состояний найдены функции квазираспределения вероятности амплитуды внутрирезонаторного поля (P и Q) и показана ограниченность функции Глаубера на отрезке. Это свойство присуще только функции Глаубера. Ни Q -функция, ни W -функция такой особенностью не обладают. Результатом сильной атомно-полевой корреляции является также способность одноатомного лазера генерировать обобщенные когерентные состояния без инверсии, а для некоторой области параметров — и без порога. В случаях, когда скорость распада возбужденного состояния атома меньше скорости затухания поля в резонаторе, флуктуации числа фотонов находятся ниже уровня дробового шума. В работе найдена максимальная величина амплитудного сжатия для одноатомного лазера. Анализ свойств перепутанности атомной и полевой подсистем показывает, что квантовые корреляции в данной системе возможны только при относительно слабых интенсивностях накачки.

Материалы настоящей статьи представлены в следующем виде. В разд. 2 формулируется основное уравнение для матрицы плотности рассматриваемой модели. Раздел 3, посвященный свойствам функций квазивероятности P , Q и W , разбит на два подраздела. В разд. 3.1 приводятся общие и стационарные уравнения для P -функции Глаубера и соответствующие уравнения для распределения числа фотонов и нормально упорядоченных моментов поля. Здесь же дается физическая интерпретация стационарных уравнений как уравнений баланса населенностей уровней совместной атомно-полевой квантовой системы. Раздел 3.2 формулирует основное приближение статьи и содержит аналитические выражения для P - и Q -функций. В нем также обсуждается физическая причина ограниченности функции Глаубера на отрезке для излучения одноатомного лазера. В разд. 4 рассматривается распределение фотонов и показывается, что одноатомный лазер служит источником излучения, соответствующего обобщенным когерентным состояниям Миттаг–Лефлера (точнее, их диагональной части). В разд. 5 описываются особенности безинверсионной генерации одноатомного лазера. Раздел 6 содержит описание субпуассоновской статистики такого источника. Классические и квантовые корреляционные свойства атома и поля подробно рассмотрены в

разд. 7. Методы регуляризации P -функций для фазово-независимых состояний поля вынесены в Приложение.

2. МОДЕЛЬ

Одноатомный лазер рассматривается в рамках модельной системы, состоящей из двухуровневого атома с основным $|1\rangle$ и возбужденным $|2\rangle$ состояниями и взаимодействующего с резонаторной модой поля согласно гамильтониану Джейнса–Каммингса с константой взаимодействия g . Атом возбуждается некогерентной накачкой со средней скоростью R_{12} . Кроме того, учитываются затухание резонаторной моды поля со скоростью k и распад атома со скоростью R_{21} . Управляющее уравнение для матрицы плотности, редуцированной по состояниям окружения, в представлении взаимодействия имеет вид

$$\dot{\hat{\rho}} = g [a^+ \sigma_- - a \sigma_+, \hat{\rho}] - R_{12} L(\sigma_+, \sigma_-) \hat{\rho} - R_{21} L(\sigma_-, \sigma_+) \hat{\rho} - 2kL(a, a^+) \hat{\rho}. \quad (2.1)$$

Здесь операторы переходов атома (σ_+, σ_-) и поля (a^+, a) подчиняются коммутационным соотношениям для ферми- и бозе-частиц: $[\sigma_+, \sigma_-] = 2\sigma_z$, $[a, a^+] = 1$ а релаксация описывается с помощью линдабладовского оператора L :

$$2L(x, y) \hat{\rho} = [x, \hat{\rho}y] + [x\hat{\rho}, y].$$

Предполагается, что частота атомного перехода совпадает с частотой основной моды резонатора. В модели одноатомного лазера мы ограничиваемся рассмотрением оптических частот, поэтому вклад тепловых фотонов не учитывается.

3. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУДЫ ВЕРОЯТНОСТИ ВНУТРИРЕЗОНАТОРНОГО ПОЛЯ

3.1. Общие соотношения

Для исследования s -упорядоченных функций квазивероятности $R^{(s)}(\alpha)$ (см. Приложение) поля, генерируемого одноатомным лазером, удобно перейти от уравнения для матрицы плотности (2.1) к уравнению для нормально упорядоченного характеристического оператора $F_N \equiv F$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = & -g\lambda^* \sigma_- F + g\lambda F \sigma_+ + \\ & + g \left[\sigma_-, \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right] + g \left[\sigma_+, \frac{\partial F}{\partial \lambda^*} \right] - \\ & - \frac{R_{21} L(\sigma_+, \sigma_-) F}{2} - \frac{R_{12} L(\sigma_-, \sigma_+) F}{2} - \\ & - k_0 \left(\lambda^* \frac{\partial F}{\partial \lambda^*} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right). \quad (3.1) \end{aligned}$$

Это уравнение трансформируется с помощью интегрального преобразования (П.1) в систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных для любой из $R^{(s)}$ -функции в базе атомных состояний. Наиболее простой вид имеют уравнения для функций распределения Глаубера $R_{ij}^{(0)} \equiv P_{ij}$. В предположении, что начальное состояние поля является фазово-независимым, т.е. диагональные элементы P_{11} и P_{22} зависят только от квадрата модуля амплитуды поля $|\alpha|^2$, а недиагональные элементы P_{12} и P_{21} равны нулю, уравнения для элементов P_{ij} можно представить в виде уравнения для элементов вектора-столбца \mathbf{P} с компонентами $P_1 = P_{11}$, $P_2 = P_{22}$, $P_3 = P_{12}/\alpha^*$, $P_4 = P_{21}/\alpha$, зависящими только от $|\alpha|^2 \equiv p$:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = A\mathbf{P} + \frac{\partial}{\partial p}(B\mathbf{P}). \quad (3.2)$$

Здесь матрицы A и B определяются выражениями

$$A = \begin{pmatrix} -R_{12} & R_{21} & gp & gp \\ R_{12} & -R_{21} & -gp & -gp \\ -g & g & -\gamma_{12} & 0 \\ -g & g & 0 & -\gamma_{21} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2kp & 0 & -gp & -gp \\ 0 & 2kp & 0 & 0 \\ 0 & -g & 2kp & 0 \\ 0 & -g & 0 & 2kp \end{pmatrix},$$

а «скорость затухания» недиагональных элементов

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{R_{21} + R_{12} - 2k}{2}.$$

Решая уравнения (3.2) и используя связь между s -упорядоченными функциями (П.3), можно определить все три функции квазивероятности. Отметим, что система четырех линейных уравнений в частных производных (3.2) является исходной для рассмотрения статистических свойств поля. При использовании некоторых приближений, например, адиабатического, можно исключить из рассмотрения функции P_{12} и P_{21} , выразив их явным образом через P_1 и P_2 . Полученную систему двух уравнений в частных производных второго порядка при пренебрежении членами, ответственными за спонтанное испускание, можно привести к одному уравнению для безусловной функции распределения поля $P = P_{11} + P_{22}$, которое, в свою очередь, при дополнительных предположениях сводится к уравнению типа уравнения Фоккера–Планка. В настоящей работе мы не будем использовать адиабатическое приближение и ряд других приближений, приводящих систему (3.2) к уравнению Фоккера–Планка для функций P . Кроме того, в этой работе мы не будем рассматривать нестационарное решение уравнений (3.2), а ограничимся анализом стационарных функций распределения Q_i и P_i , а также связанных с ними (см. (П.4), (П.7), (П.10), (П.15)) распределений чисел фотонов $\rho_i(n) \equiv \langle n | \langle i | \hat{\rho} | i \rangle | n \rangle$ и нормально упорядоченных моментов $m_i(n) = \text{Sp}_f(\langle i | a^{+n} a^n \hat{\rho} | i \rangle)$. Согласно (3.2), непрерывные функции P_1 и P_2 и эти два набора дискретных величин в стационарном режиме удовлетворяют следующей системе уравнений и двум рекуррентным последовательностям соответственно:

$$\begin{cases} \left[2\nu + p \left(1 - \frac{\partial}{\partial p} \right) \right] P_2 + pP_1 = 2\underline{a}^2 P_1, \end{cases} \quad (3.3a)$$

$$\begin{cases} p \left(1 - \frac{\partial}{\partial p} \right) P_2 - pP_1 = \frac{2}{\eta} \left(\mu - p \frac{\partial}{\partial p} \right) pP, \end{cases} \quad (3.3b)$$

$$\begin{cases} (2\nu + n + 1)\rho_2(n) + (n + 1)\rho_1(n + 1) = 2\underline{a}^2 \rho_1(n), \end{cases} \quad (3.4a)$$

$$\begin{cases} \rho_2(n) - \rho_1(n + 1) = \frac{2}{\eta} \{ (\mu + n + 1)\rho(n + 1) - (n + 2)\rho(n + 2) \}, \end{cases} \quad (3.4b)$$

$$\begin{cases} (2\nu + n + 1)m_2(n) + m(n + 1) = 2\underline{a}^2 m_1(n), \end{cases} \quad (3.5a)$$

$$\begin{cases} (n + 1)m_2(n) + m_2(n + 1) - m_1(n + 1) = \frac{2}{\eta} (\mu + n + 1)m(n + 1). \end{cases} \quad (3.5b)$$

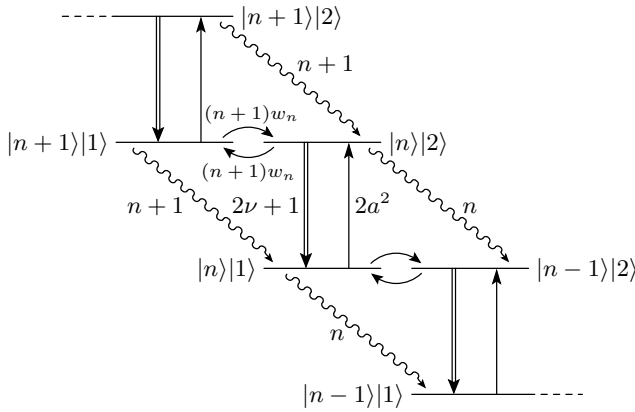


Рис. 1. Схема переходов и уровней атома в резонаторе. Расщепление уровней, имеющих одинаковое число возбуждений, не показано. Волнистыми косыми стрелками обозначены переходы, вызванные уходом фотонов из резонатора (скорости переходов, нормированные на скорость затухания k , определяются числом фотонов в резонаторе). Двойные стрелки обозначают переходы, вызванные распадом атома (скорости: $2\nu + 1$); стрелки, направленные вверх — переходы, вызываемые некогерентной накачкой (скорости: $2a^2$). Дугообразные стрелки обозначают спонтанные и вынужденные переходы в атоме, совершаемые под действием внутрирезонаторного поля (w_n — скорость спонтанных переходов при условии наличия n фотонов в резонаторе)

Здесь $P = P_1 + P_2$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $m = m_1 + m_2$, параметр $2\nu + 1 = R_{21}/k$ равен нормированной скорости распада возбужденного уровня $|2\rangle$, параметр $2a^2 = R_{12}/k$ равен скорости возбуждения состояний $|n\rangle|2\rangle$ посредством некогерентной накачки, величина $\eta = g^2/k^2$ определяет нормированную скорость спонтанного испускания в резонаторную моду, а параметр $\mu = a^2 + \nu$ равен суммарной скорости «дефазировки», вызванной некогерентными возмущениями R_{12} и R_{21} , за вычетом половинной скорости затухания поля $k/2$.

Уравнения (3.4а) имеют простой физический смысл. Они описывают баланс переходов между соседними группами состояний, имеющими одинаковое число возбуждений (число фотонов, если атом находится в основном состоянии или число фотонов плюс единица, если атом находится в возбужденном состоянии): в левой части уравнения (3.4а) стоит среднее число переходов, совершаемых из состояний $|n+1\rangle|1\rangle$ и $|n\rangle|2\rangle$ (см. рис. 1) в состояния $|n\rangle|1\rangle$ и $|n-1\rangle|2\rangle$, а в правой его части — число обратных переходов. Уравнение (3.4б) можно интерпретировать как баланс числа переходов между сос-

тояниями, имеющими одинаковое число фотонов в резонаторе. Для этого необходимо ввести вероятности спонтанных w_n и вынужденных nw_n переходов, совершаемых атомом под действием внутрирезонаторного поля. Тогда количество переходов, совершаемых из состояний $|n+1\rangle|2\rangle$ и $|n+1\rangle|1\rangle$ в состояния $|n\rangle|2\rangle$ и $|n\rangle|1\rangle$ (см. рис. 1), должно быть равно числу обратных:

$$(n+1)\rho_2(n+1) + (n+1)\rho_1(n+1) + (n+1)w_n\rho_1(n+1) = (n+1)w_n\rho_2(n). \quad (3.6)$$

Приравнивая (3.6) и (3.4б), находим, что нормированная вероятность спонтанных переходов вследствие взаимодействия с внутрирезонаторным полем равна:

$$w_n = \frac{\eta}{2} \left\{ \mu + (n+1) \left[1 - \frac{(n+2)\rho(n+2)}{(n+1)\rho(n+1)} \right] \right\}^{-1}. \quad (3.7)$$

Из соотношения (3.7) следуют два вывода: 1) w_n зависит от накачки a^2 , причем с увеличением a^2 (в общем случае, при превышении некоторого значения) вероятность w_n уменьшается (эффект самотухания), 2) w_n зависит от числа фотонов в резонаторе, что является следствием частичного разрушения интерференции внутрирезонаторных фотонов, которые становятся различимыми в результате взаимодействия с атомом: фотоны, «принадлежащие» атому в основном состоянии, отличимы от фотонов, соответствующих возбужденному атомному состоянию. Зависимость w_n от числа фотонов не является априорной¹⁾, а может быть определена только после нахождения функции распределения числа фотонов $\rho(n)$. Однако в предельном случае сильных взаимодействий, когда параметр η так велик, что можно пренебречь правыми частями уравнений (3.3б) и (3.4б), зависимость w_n от n не является существенной.

3.2. Сильные взаимодействия ($\eta \gg 1$). Ограниченность функции Глаубера на отрезке

В случае сильных взаимодействий возникает жесткая связь между населенностями уровней, обла-

¹⁾ Отметим, что знаменатель выражения (3.7), пропорциональный, согласно (3.4б), разности $\rho_2(n) - \rho_1(n+1)$, не обращается в нуль ни при каких значениях параметров, т.е. функция w_n всегда является положительно определенной величиной, что доказывается методом от противного при использовании уравнения (3.4а).

дающих одинаковым числом возбуждений. Согласно (3.4б), в этом случае

$$\rho_2(n) = \rho_1(n + 1), \quad (3.8)$$

что отражает факт выравнивания населенностей состояний $|n\rangle|2\rangle$ и $|n+1\rangle|1\rangle$, прежде чем произойдут переходы из этих состояний в другие. Такое выравнивание населенностей совместно с балансом числа переходов между соседними группами состояний с одинаковым числом возбуждений приводит к простой алгебраической связи условных плотностей квазивероятностей P_1 и P_2 :

$$\nu P_2 = (a^2 - p)P_1. \quad (3.9)$$

Она получается вычитанием уравнения (3.3б) из (3.3а) при условии $\eta \gg 1$. Алгебраическое соотношение (3.9) вместе с дифференциальным уравнением (3.3а) позволяет найти функции P_1 и P_2 в явном виде:

$$P_1(p) = c\theta(\underline{a}^2 - p) \frac{(\underline{a}^2 - p)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^p, \quad (3.10а)$$

$$P_2(p) = c\theta(\underline{a}^2 - p) \frac{(\underline{a}^2 - p)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} e^p. \quad (3.10б)$$

Здесь $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хэвисайда, а нормировочная константа

$$c = \frac{1}{\pi} \Gamma(\nu + 1) \underline{a}^{-2\nu} \left[1 + 2 \frac{\underline{a}^2}{\nu + 1} N_{\nu+1}(\underline{a}^2) \right]^{-1} \quad (3.11)$$

выражается через неполную гамма-функцию $\gamma(\nu, x)$ или функцию Миттаг–Лефлера [8]:

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_n \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$$

как

$$N_\nu(x) = \nu x^{-\nu} e^x \gamma(\nu, x) \equiv \Gamma(1 + \nu) E_{1, 1+\nu}(x). \quad (3.12)$$

Согласно (3.10), глауберовские функции P_1 и P_2 выражаются через ядро операции свертки

$$I^\beta * f(x) = \frac{\theta(x)}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} * f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} f(t) dt,$$

называемой операцией дробного интегрирования Римана–Лиувилля порядка β [9]. При этом функции $P_1(p)$ соответствует порядок $\nu \equiv R_{21}/2k - 1/2$, а $P_2(p)$ — порядок $\nu + 1$. В случае отрицательного порядка операции дробного интегрирования ее называют операцией дробного дифференцирования, поскольку при целом n

$$I^{-n} * f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n f(x).$$

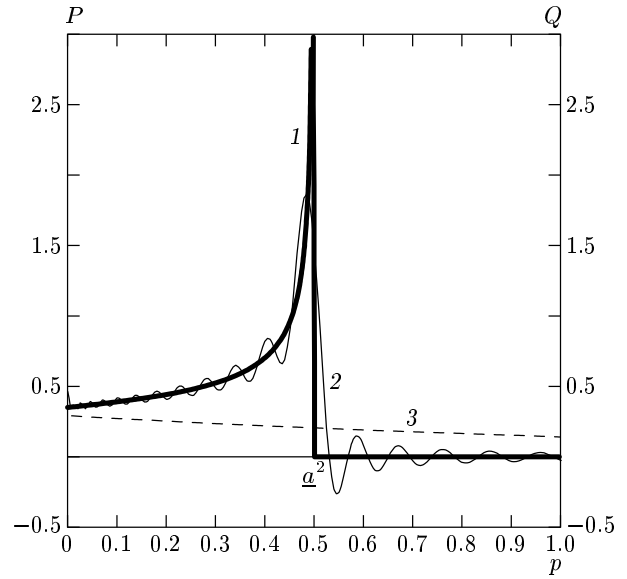


Рис. 2. P -функция (1, 2) и Q -функция (3) распределения для параметров $\sqrt{\eta} = 200$, $\underline{a}^2 = 1/2$, $\nu = 1/2$; 1 — кривая, соответствующая приближению сильной корреляции, 2 — кривая, рассчитанная на основе численного решения точных алгебраических уравнений (3.4), (3.5) и использования регуляризованных разложений (П.10) и (П.14) при числе членов ряда $N = 3500$

Очевидно, в этом случае ядро преобразования является обобщенной функцией. Согласно (3.10), функция Глаубера $P_2(p)$ всегда является положительно-определенной функцией распределения, в то время как функция $P_1(p)$ при $-0.5 \leq \nu < 0$ перестает быть функцией распределения, а становится обобщенной функцией. Неклассические особенности света для такого состояния будут рассмотрены в разд. 6.

Характерной особенностью функций P_1 и P_2 является их ограниченность на отрезке $[0, \underline{a}^2]$, т. е. невозможность «наблюдения» амплитуд поля больших, чем \underline{a} . Явным образом наличие граничного значения амплитуды поля проявляется для значений параметра $0 \leq \nu \leq 1$, когда $1 < R_{21}/2k < 3$ (см. рис. 2). Чтобы продемонстрировать, что ограниченность P -функций не является следствием приближения сильного взаимодействия, использованного при выводе (3.10), нами численно рассчитана P -функция путем решения точных алгебраических уравнений (3.4) и (3.5) и использования регуляризованных разложений (П.10) и (П.14) P -функций по полиномам Лягерра. Как видно из рис. 2 (кривая 2), максимум вероятности распределения также со-

ответствует граничному значению \underline{a}^2 , но за его пределами P -функция проявляет неклассические свойства, осциллируя вблизи нуля.

Очевидно, что в силу сглаживания особенностей P -функций при переходе к описанию распределений амплитуды поля на основе Q - или W -функций (П.3) существование верхней границы для амплитуды поля не приводит к ограничению функций Q и W на отрезке. Так, Q_i -функции в рассматриваемом пределе определяются (согласно (3.9), (3.10), (П.3)) следующими выражениями:

$$Q_1(p) = c\Gamma(\nu + 1)e^{-p} \left(\frac{a}{\sqrt{p}}\right)^\nu I_\nu(2a\sqrt{p}), \quad (3.13a)$$

$$\begin{aligned} Q_2(p) &= e^{-p} \frac{\partial}{\partial p}(Q_1 e^p) = \\ &= c\Gamma(\nu + 1)e^{-p} \left(\frac{a}{\sqrt{p}}\right)^{\nu+1} I_{\nu+1}(2a\sqrt{p}), \quad (3.13б) \end{aligned}$$

где $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя ν -го порядка. Из данных формул следует, что функции $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$ не обращаются в нуль для всех значений амплитуд поля (см. рис. 2).

Величина граничного значения амплитуды поля $|\alpha_b|^2 = \underline{a}^2 = R_{12}/2k$ соответствует статистическому равенству числа возбуждений атома $R_{12}\Delta t$ за интервал времени Δt при некогерентной накачке (т. е. числа переходов $|1\rangle|n\rangle \rightarrow |2\rangle|n\rangle$ с последующим переходом $|2\rangle|n\rangle \rightarrow |1\rangle|n+1\rangle$, увеличивающим число внутрирезонаторных фотонов на единицу и происходящим, согласно (3.8), с вероятностью $1/2$) и числа переходов $2k|\alpha_b|^2\Delta t$ из состояний $|1\rangle|n\rangle$ ($n \approx |\alpha_b|^2$) в состояния $|1\rangle|n-1\rangle$ (т. е. переходов, уменьшающих число внутрирезонаторных фотонов на единицу). Такое статистическое равновесие, дополненное многофотонной интерференцией, соответствующей представлению функции Глаубера в виде суперпозиции вкладов от различных n -фотонных состояний (см. (П.10) и (П.14)), является причиной ограниченности функций P_1 и P_2 на отрезке. Следует отметить, что так же, как функции $Q_i(p)$ и $W_i(p)$ не обладают свойством ограниченности на отрезке, функции распределения числа фотонов $\rho_1(n)$ и $\rho_2(n)$ демонстрируют весьма слабую зависимость при переходе граничного значения $n_b \approx \underline{a}^2$. В качестве примера приведем выражения для функций P_1 и P_2 для случая равенства скоростей распада атома R_{21} и поля k ($\nu = 0$):

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\delta(\underline{a}^2 - p)}{\pi [2 - \exp(-\underline{a}^2)]}, \\ P_2 &= \frac{\exp[-(\underline{a}^2 - p)] \theta(\underline{a}^2 - p)}{\pi [2 - \exp(-\underline{a}^2)]}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Следовательно, в этом пределе состояние поля при условии нахождения атома в основном состоянии является усредненным по случайной фазе когерентным состоянием. Распределение числа фотонов для него — пуассоновское, с возможной регистрацией числа фотонов, превышающих по величине граничное значение \underline{a}^2 . Для поля, соответствующего атому в возбужденном состоянии, распределение фотонов, согласно (3.8), — смещенное пуассоновское. Для него также доступны числа фотонов, большие \underline{a}^2 . Следует отметить, что получение пуассоновского распределения фотонов не связано с большой величиной некогерентной накачки, а является следствием когерентности взаимодействия атом–поле. Для трехуровневой Λ -схемы эта возможность отмечается в работе [4].

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФОТОНОВ. ОБОБЩЕННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ МИТТАГ–ЛЕФЛЕРА

Как следует из уравнений (3.4а), (3.8) в пределе сильных взаимодействий нахождение стационарных матриц плотности ρ_1 и ρ_2 можно представить как решение следующей проблемы на собственные значения:

$$\left(1 + \frac{\beta}{aa^+}\right) a\rho_i a^+ = \underline{a}^2 \rho_i. \quad (4.1)$$

Параметр $\beta = \nu$ для матрицы плотности ρ_1 и $\beta = \nu + 1$ для матрицы плотности ρ_2 . Действительно, при вычислении диагональных элементов в фоковском базисе из соотношения (4.1) с учетом известных равенств

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

получаются уравнения (3.4а). Задачу (4.1) можно переформулировать как задачу на собственные значения:

$$A_\beta |\underline{a}, \beta\rangle = \underline{a} |\underline{a}, \beta\rangle \quad (4.2)$$

следующего обобщенного оператора уничтожения:

$$A_\beta = \sqrt{1 + \frac{\beta}{aa^+}} a. \quad (4.3)$$

Тогда решение (4.1) записывается как диагональная часть матрицы плотности обобщенного когерентного состояния $|\underline{a}, \beta\rangle$:

$$\rho_1 = n_1 \text{diag} \{ |\underline{a}, \nu\rangle \langle \underline{a}, \nu| \}, \quad (4.4a)$$

$$\rho_2 = n_2 \text{diag} \{ |\underline{a}, \nu + 1\rangle \langle \underline{a}, \nu + 1| \}. \quad (4.4b)$$

Здесь n_1 и n_2 — населенности основного и возбужденного состояний:

$$n_2 = 1 - n_1 = \frac{b}{1 + 2b}, \quad b = \frac{\underline{a}^2}{\nu + 1} N_{\nu+1}(\underline{a}^2),$$

а нормированные обобщенные когерентные состояния $|\underline{a}, \nu\rangle$ определяются в виде суперпозиции фоковских состояний:

$$|\underline{a}, \beta\rangle = N_\beta^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \underline{a}^n \sqrt{\frac{\Gamma(1 + \beta)}{\Gamma(1 + \beta + n)}} |n\rangle. \quad (4.5)$$

Нормировочная константа $N_\beta(\underline{a}^2)$ определяется посредством функции Миттаг–Лефлера $E_{1,1+\beta}(\underline{a}^2)$ (3.12). В силу связи с этими специальными функциями данный класс обобщенных когерентных состояний авторы работы [8] предложили называть когерентными состояниями Миттаг–Лефлера. Очевидно, что для $\beta = 0$ эти состояния совпадают с обычными когерентными состояниями. При $\beta \neq 0$ состояния (4.5) обобщают когерентные состояния естественным образом: в разложении когерентного состояния $|\underline{a}\rangle$ по фоковским состояниям величина $n! \equiv \Gamma(1 + n)$ заменяется на $\Gamma(1 + \beta + n)$, а экспоненциальная константа нормировки $\exp(|\underline{a}|^2)$ — на целую функцию $\Gamma(1 + \beta) E_{1,1+\beta}(\underline{a}^2)$. Замечая, что фоковское состояние $|n\rangle$ генерируется из вакуумного оператором $A_\beta^+ / \sqrt{\Gamma(1 + \beta + n)}$,

$$|n\rangle = A_\beta^+ / \sqrt{\Gamma(1 + \beta + n)} |0\rangle,$$

получаем еще одно представление для состояний (4.5):

$$|\underline{a}, \beta\rangle = (E_{1,1+\beta}(\underline{a}^2))^{-1/2} E_{1,1+\beta}(\underline{a} A_\beta^+) |0\rangle, \quad (4.6)$$

которое аналогично генератору когерентных состояний из вакуума.

Обобщенные деформированные операторы уничтожения A_β и рождения A_β^+ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[A_\beta, A_\beta^+] = 1 + \beta |0\rangle \langle 0|, \quad (4.7)$$

которые определяют соотношения неопределенностей для операторов A_β и A_β^+ и их комбинаций. Для

состояний (4.5), (4.6) достигается знак равенства в этих соотношениях. Соотношения (4.6) показывают также неканонический характер преобразований (деформаций), переводящих операторы a, a^+ в A_β, A_β^+ .

Распределение фотонов для обобщенных когерентных состояний Миттаг–Лефлера, а следовательно, и для состояний, описываемых матрицами плотности (4.4), определяется выражением

$$|\langle n | \underline{a}, \beta \rangle|^2 = (E_{1,1+\beta}(\underline{a}^2))^{-1} \frac{\underline{a}^{2n}}{\Gamma(1 + \beta + n)}. \quad (4.8)$$

Обычно особенности распределения фотонов связываются с генерационными возможностями системы (наличие максимума у функции распределения), а также со стабильностью создаваемого излучения (шириной функции распределения в сравнении с пуассоновским светом). В зависимости от параметра β распределение (4.8) может быть как субпуассоновским ($\beta < 0$), так и суперпуассоновским ($\beta > 0$), сохраняя при этом свои генерационные возможности.

Прежде чем переходить к обсуждению генерационных возможностей одноатомного лазера, а также стабильности распределения фотонов, приведем другой способ описания систем, связанных с деформированными операторами A_β, A_β^+ [10]. Образум на основе соотношения

$$|n\rangle_\beta = \frac{A_\beta^{+n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

набор базисных состояний, отличающихся от фоковских отсутствием нормировки. Очевидно, что в этом деформированном базисе для операторов A_β, A_β^+ выполняются соотношения

$$A_\beta^+ |n\rangle_\beta = \sqrt{n + 1} |n + 1\rangle_\beta, \quad A_\beta |n\rangle_\beta = \sqrt{n} |n - 1\rangle_\beta,$$

аналогичные соотношениям с операторами a, a^+ в обычном фоковском пространстве, и, следовательно, выполняются коммутационные соотношения $[A_\beta, A_\beta^+] = 1$. Используя это обстоятельство, можно предположить, что оператор Гамильтона деформированного осциллятора равен

$$H_\beta = \hbar\omega \frac{A_\beta^+ A_\beta + A_\beta A_\beta^+}{2}.$$

В фоковском представлении его собственные значения равны

$$E_\beta(n) = \hbar\omega \left[(1 - \delta_{n0}) \left(n + \beta + \frac{1}{2} \right) + \delta_{n0} \frac{1 + \beta}{2} \right],$$

т. е. структура спектра деформированного осциллятора совпадает со спектром обычного осциллятора,

исключение составляет основное состояние, которое сдвинуто относительно состояния $n = 1$ на величину $\hbar(1 + \beta/2)$, что больше или меньше величины кванта $\hbar\omega$ в зависимости от знака параметра β . При таком подходе состояние (4.4а) связано с деформированным осциллятором, у которого частота перехода $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ может быть меньше $\hbar\omega$ ($\nu < 0$). Для состояния (4.4б) частота аналогичного перехода всегда больше $\hbar\omega$ на величину $\hbar\omega(1 + (\nu + 1)/2)$.

5. ГЕНЕРАЦИЯ БЕЗ ИНВЕРСИИ

Из полученных распределений фотонов (4.4) следует, что в рассматриваемом случае населенность верхнего атомного уровня n_2 всегда меньше населенности нижнего n_1 . Возникает вопрос: как же в этом случае такое устройство, как одиночный атом в высокодобротном резонаторе, называемое в литературе как «одноатомный лазер» [3, 4, 11], может генерировать излучение, близкое к когерентному? Создается ли такое излучение при преодолении определенного порога или оно возникает беспороговым образом? Вопрос о том, что принимать за определение порога генерации в случае, когда доля спонтанного излучения, попадающего в резонаторную моду, по отношению к суммарному спонтанному излучению (в резонаторной и нерезонаторных модах) приближается к единице ($\beta_c \rightarrow 1$), подробно обсуждался в литературе [11, 12]. Очевидно, что рассуждения, применяемые к обычному лазеру ($\beta_c \rightarrow 0$) и основанные на балансных уравнениях для скоростей и сравнении средних скоростей вынужденных и спонтанных переходов, а также значения скоростей потерь говорят о средней интенсивности излучения (среднем числе фотонов) и ее росте с увеличением некогерентной накачки. Однако остается непонятным, какое излучение создается таким источником, каковы его когерентные свойства? Чтобы ответить на этот вопрос, нужны исследования функций распределения создаваемого излучения. На основе их рассмотрения были предложены некоторые возможные критерии перехода от режима некогерентного излучения, характеризующегося экспоненциальным распределением фотонов, к когерентному излучению, для которого характерно пуассоновское распределение фотонов с максимумом функции распределения, отличным от нуля. Одним из таких «очевидных» предложенных критериев является появление максимума у функции распределения $\rho(n)$, что можно определить по соотношению $\rho(0) < \rho(1)$ [11, 13]. Этот критерий является приблизительным, так как в области малых

амплитуд $|\alpha|^2 < 1$ он не позволяет отличить когерентное излучение от некогерентного. При этом его использование для обычных лазеров совпадает с пороговым условием «средняя скорость вынужденных процессов испускания — средняя скорость процессов поглощения = средняя скорость потерь фотонов». Однако в области $\beta_c \rightarrow 1$ (а мы рассматриваем именно такой режим работы устройства «одноатомный лазер») это обычное пороговое условие, полученное из скоростных уравнений, не выполняется никогда, хотя, как показано выше, излучение одноатомного лазера может быть когерентным. Действительно, как следует из уравнения баланса (3.6),

$$k\langle nw_n \rangle_2 - k\langle nw_n \rangle_1 = k\langle n \rangle - k\langle w_n \rangle_2,$$

т. е. разность средних скоростей вынужденного излучения

$$k\langle nw_n \rangle_2 \equiv k \sum_n n w_n \rho_2(n)$$

и поглощения

$$k\langle nw_n \rangle_1 \equiv k \sum_n n w_n \rho_1(n)$$

всегда меньше скорости потерь,

$$k\langle n \rangle \equiv \sum_n n (\rho_1(n) + \rho_2(n)),$$

на величину скорости спонтанного испускания,

$$k\langle w_n \rangle_2 = k \sum_n w_n \rho_2(n),$$

в резонаторную моду поля, чего и следовало ожидать для двухуровневого атома в стационарных условиях. Это означает, что фотоны, спонтанно испущенные в резонаторную моду поля, не «портят» когерентных свойств создаваемого излучения окончательно, и при определенных условиях рассматриваемое устройство может генерировать излучение с большой степенью когерентности. Причиной этого является принципиальная неразличимость фотонов, принадлежащих одной резонаторной моде: нет никакого различия между фотонами, появившимися в резонаторной моде в результате вынужденных и спонтанных процессов испускания. В связи с этим следует специально отметить, что, несмотря на то что роль вынужденных процессов в создании когерентного излучения одноатомным лазером уменьшается, никакого когерентного излучения невозможно создать только за счет спонтанных переходов. Кроме того, термин «лазер» применительно к данному устройству, создающему когерентное излучение, надо понимать с оговорками, как исторически сложившийся, соответствующий устройству, получающемуся в предельном переходе из обычного лазера.

С учетом сказанного выше можно показать, что если когерентная накачка становится больше значения

$$\underline{a}_1^2 = \sqrt{(\nu + 1)(\nu + 2)}, \quad (5.1)$$

то вероятность наличия одного фотона $\rho(1)$ превышает вероятность отсутствия фотонов, т. е. происходит «отрыв» максимума распределения $\rho(n)$ от нулевого значения, что можно рассматривать как порог генерации (порог по распределению фотонов). При дальнейшем увеличении некогерентной накачки максимум дискретного распределения $\rho(n)$ смещается в область больших значений числа фотонов, последовательно принимая растущие значения m при достижении накачкой m -фотонного порога:

$$\underline{a}_m^2 = \sqrt{(\nu + m)(\nu + m + 1)}. \quad (5.2)$$

Условия возникновения генерации (5.1) и зависимость максимума амплитуды (5.2) от накачки может быть получена и при рассмотрении условных Q -функций (3.13). Так, максимум в распределениях Q_1 и Q_2 возникает при выполнении соответственно соотношений:

$$2\underline{a}^2 = x \frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}, \quad 2\underline{a}^2 = x \frac{I_{\nu+1}(x)}{I_{\nu+2}(x)}.$$

Здесь $x = 2\sqrt{p}a$. Решение этих уравнений при $p = 0$ дает два порога генерации для условных состояний поля: $\underline{a}_{1(1)}^2 = \nu + 1$ и $\underline{a}_{1(2)}^2 = \nu + 2$, а рассмотрение безусловной Q -функции приводит к пороговому значению, равному (5.1) (см. рис. 3). Заметим, что исследуемый тип генерации без инверсии отличается от описанных в работах [5] типов для трех-, четырехуровневых схем. В этих работах причиной безинверсной генерации считалась сильная интерференция смежных переходов. В рассматриваемой системе в качестве такой причины выступает сильная атомно-полевая корреляция, отсутствующая при традиционном рассмотрении процессов спонтанных и вынужденных переходов в двухуровневых системах. Именно вследствие такой корреляции выполняются соотношения (3.8), очевидным образом «обеспечивающие» отсутствие инверсной населенности в атомарной подсистеме: даже значительное превышение накачки $2\underline{a}^2$ над потерями $2\nu + 1$ нивелируется «мгновенным» выравниванием населенностей состояний $|n\rangle|2\rangle$ и $|n + 1\rangle|1\rangle$, которое соответствует восстановлению безинверсного распределения населенностей по атомным состояниям и увеличению числа фотонов на единицу.

Следовательно, в режиме сильной коррелированности атомно-полевой системы возможно возбужде-

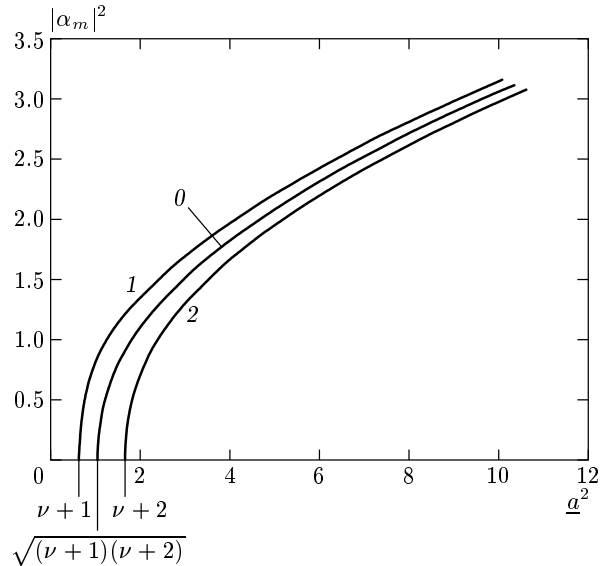


Рис. 3. Зависимость максимума $|\alpha_m|^2$ безусловной (0) и условных (1 — Q_1 , 2 — Q_2) Q -функций от величины накачки \underline{a}^2 . Пороговые значения накачки $\underline{a}_1^2 = \sqrt{(\nu + 1)(\nu + 2)}$, $\underline{a}_{1(1)}^2 = \nu + 1$, $\underline{a}_{1(2)}^2 = \nu + 2$, соответствующие возникновению максимумов у функций Q . Q_1 , Q_2 обозначены стрелками; кривые построены при $\nu = -1/2$

ние фотонной подсистемы в высокоинтенсивные состояния, близкие к когерентным, путем некогерентной накачки атомной подсистемы. В этом смысле такой режим возбуждения близок к когерентному возбуждению полевого осциллятора классическим током, стабилизированным по амплитуде. Последнее наиболее наглядно проявляется в области параметров $0 < \nu < 1$, где, согласно (3.10), состояние поля является классическим (функции P_i положительно определены), а максимум безусловной функции распределения Глаубера имеет место при любых сколь угодно малых интенсивностях накачки, демонстрируя беспороговое возбуждение состояний поля, подобным когерентным [4, 7]. Таким же образом ведет себя и полевой осциллятор, возбуждаемый классическим током.

Область применимости приближения сильных корреляций (3.8) связана с ограниченностью скорости спонтанных переходов w_n (3.7), индуцированных взаимодействием с внутрирезонаторным полем. Оценку области применимости можно провести на основе неравенства

$$w_n > \frac{\eta/2}{\mu + n + 1} \gg 1,$$

откуда вытекает, что помимо неравенств $g \gg k$, R_{12} ,

R_{21} , ν должно выполняться и неравенство $g \gg kn$, что, естественно, не может быть выполнено для произвольных n при фиксированном значении g . Поэтому увеличение накачки \underline{a}^2 , приводящее к заселению возбужденных состояний поля, несомненно приведет к ограничению рассматриваемого приближения. Как показывают численные расчеты, приближение сильных корреляций применимо, пока населенность возбужденного атомного состояния не приближается к $1/2$, т. е. определяющий насыщение параметр b (см. (4.4)) ограничен.

6. СУБПУАССОНОВСКАЯ СТАТИСТИКА СВЕТА ($\nu < 0$)

Как уже отмечалось, в области параметров $\nu < 0$ функция Глаубера (3.10а) становится обобщенной функцией с более высоким порядком, чем обычная δ -функция, что находит отражение в неклассических свойствах излучения одномодового лазера. Распределение чисел фотонов становится субпуассоновским. Согласно (3.10) или (4.4) и (4.5), нормально упорядоченные моменты $m_1(n)$ и $m_2(n)$ в приближении сильной корреляции выражаются через моменты

$$m_{\underline{a},\beta}(n) = \langle \underline{a}, \beta | a^{+n} a^n | \underline{a}, \beta \rangle = \frac{\underline{a}^{2n}}{N_{\beta}(\underline{a}^2)} \left(\frac{d}{d\underline{a}^2} \right)^n N_{\beta}(\underline{a}^2) \quad (6.1)$$

обобщенных состояний Миттаг–Лефлера (4.5):

$$m_1(n) = n_1 m_{\underline{a}^2, \nu}(n), \quad m_2(n) = n_2 m_{\underline{a}^2, \nu+1}(n). \quad (6.2)$$

На рис. 4 приведены значения фано-фактора

$$F = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle} = 1 - m(1) + \frac{m(2)}{m(1)}$$

для безусловного распределения числа фотонов в резонаторе как функции некогерентной накачки \underline{a}^2 для различных параметров ν . Из рис. 4 видно, что для $\nu < 0$ фано-фактор становится меньше единицы вне зависимости от других параметров системы, и с уменьшением ν до граничного значения $-1/2$ растет величина сжатия излучения, достигая 5.5%. Минимальное значение фано-фактора достигается при интенсивности накачки, приблизительно равной $1/2$, и при увеличении константы распада атома смещается к нулевому значению на величину $\nu + 1/2$.

Для исследования возможности достижения максимального амплитудного сжатия в одноатомном лазере на рис. 5 приведены зависимости фано-фактора

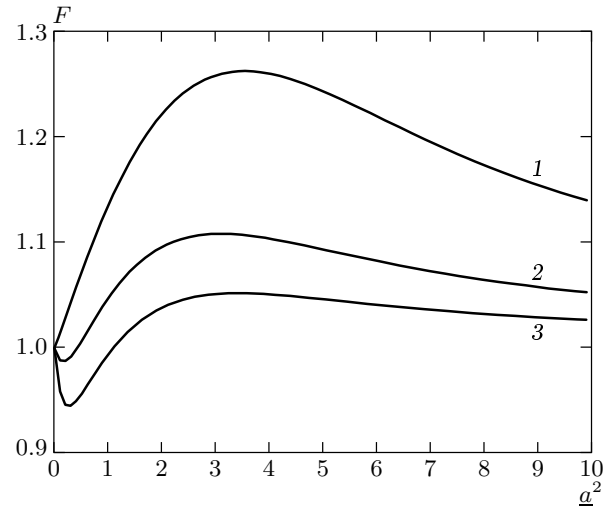


Рис. 4. Фано-фактор внутрирезонаторного поля в приближении сильной корреляции в зависимости от интенсивности некогерентной накачки \underline{a}^2 при $\sqrt{\eta} = 200$ и $\nu = 1/2$ (1), -0.25 (2), -0.495 (3)

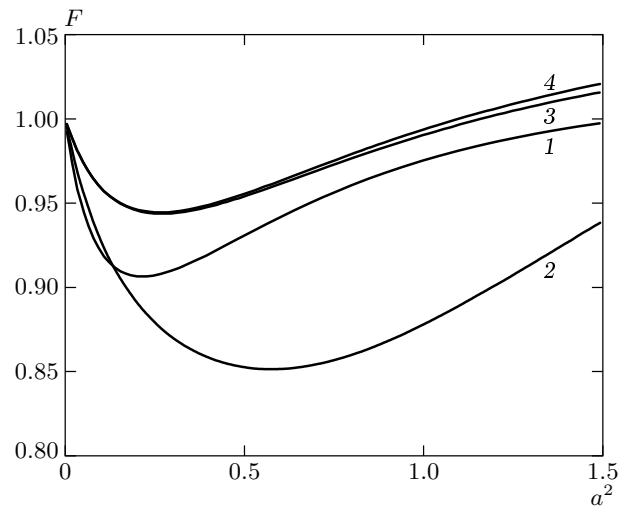


Рис. 5. Фано-фактор внутрирезонаторного поля, полученный путем численных расчетов точных рекуррентных соотношений (3.5), в зависимости от интенсивности некогерентной накачки при $\nu = -0.495$ и $\sqrt{\eta} = 0.6$ (1), 1.5 (2), 20 (3), 200 (4)

для различных констант взаимодействия, рассчитанные без использования приближения сильных корреляций на основе точных рекуррентных соотношений (3.5). Из рисунка следует, с ростом η величина сжатия растет, достигая максимального значения, а затем начинает убывать до некоторой константы, определяемой формулами (6.1), (6.2). Численные расчеты

ты фано-фактора показывают, что максимальная величина сжатия составляет 15 % и достигается при следующих соотношениях параметров: $2\nu + 1 \ll 1$, $\eta = (3/2)^2$, $\underline{a}^2 = 1$. Последнее уточняет область параметров, для которой достигается максимальное сжатие, в сравнении с [6].

7. КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ. ПЕРЕПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ АТОМА И ПОЛЯ

Как уже отмечалось ранее, в процессе атомно-полевого взаимодействия при некогерентной накачке атома создается коррелированное атомно-полевое состояние. Согласно (3.2) и (3.4), совместная стационарная матрица плотности, соответствующая этому состоянию, имеет следующий вид:

$$\hat{\rho}_{st} = |1\rangle\langle 1|\rho_1 + |2\rangle\langle 2|\rho_2 + \frac{1}{\sqrt{\eta}}(\sigma_+ a \rho + \rho a^+ \sigma_-), \quad (7.1)$$

где ρ_i — условные полевые матрицы плотности, $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — безусловная матрица плотности поля.

В пределе сильных взаимодействий, $\eta \gg 1$, который соответствует пренебрежению последним слагаемым в (7.1), образующееся смешанное состояние демонстрирует сильные атомно-полевые корреляции: с основным состоянием атома связано обобщенное когерентное состояние Миттаг–Лефлера с параметром ν (4.4а), а с возбужденным атомным состоянием — такое же состояние поля с параметром $\nu + 1$ (4.4б). Однако данный тип корреляций носит классический характер, поскольку матрица плотности коррелированной атомно-полевой системы в этом случае есть смесь факторизованных состояний атома и поля ($|1\rangle|n\rangle$ и $|2\rangle|n\rangle$) с соответствующими вероятностями $\rho_1(n)$ и $\rho_2(n)$. Этот тип корреляций не требует для своего описания использования суперпозиции таких факторизованных атомно-полевых состояний. Данный тип корреляций можно объяснить, оставаясь в рамках понятий теории корреляции классических случайных величин.

В настоящем разделе мы рассматриваем вопрос о возможности создания в исследуемой системе неклассических корреляций, т. е. корреляций, которые проявляют так называемые перепутанные состояния. В нашем случае это состояния, включающие в себя суперпозиции факторизованных атомно-полевых состояний. К сожалению, в настоящее

время еще не разработаны общие методы анализа свойств перепутанных систем, находящихся в смешанных состояниях. Поэтому мы ограничим данный анализ случаями, для которых такие методы разработаны.

Один из таких методов — аналитический расчет одной из мер перепутанных состояний, энтропии формирования перепутанного состояния (entanglement of formation) E_F , — был предложен Вутгерсом применительно к смешанным состояниям двух двухуровневых систем. Согласно этому методу,

$$E_F = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x). \quad (7.2)$$

Здесь величина

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}$$

выражается через так называемый параметр параллелизма (concurrence)

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (7.3)$$

где λ_i — собственные значения матрицы $\rho \tilde{\rho}$, расположенные в порядке убывания. Присоединенная матрица $\tilde{\rho}$ вычисляется по правилу

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y),$$

где σ_y — спиновые операторы Паули для частиц со спином 1/2.

Рассматриваемая в настоящей статье квантовая система может быть представлена как система двух спинов в случае, когда можно ограничиться количеством фотонов, не превышающим единицу. В этом случае одна двухуровневая квантовая система — атом, другая — поле в резонаторе с возможными состояниями $|0\rangle$ и $|1\rangle$.

В приближении сильных корреляций, если не отбрасывать последнее слагаемое в (7.1) и использовать (4.4) для вычисления матрицы плотности (7.1), в однофотонном пределе (малая величина некогерентной накачки) собственные значения матрицы $\rho \tilde{\rho}$ равны

$$\lambda_1 = \frac{s+s_1}{1+2s}, \quad \lambda_2 = \frac{s-s_1}{1+2s}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{\sqrt{s_2}}{1+2s}, \quad (7.4)$$

где

$$s = \frac{\underline{a}^2}{\nu + 1}, \quad s_1 = \frac{s}{\sqrt{\eta}}, \quad s_2 = \frac{\underline{a}^2 s}{\nu + 2}.$$

Константы s_1 и s_2 по порядку величины значительно меньше константы s , поэтому параметр параллелизма всегда отрицателен. Следовательно, величина E_F для данной системы равна нулю и состояния атом–поле не перепутаны.

Рис. 6. Зависимость параметра параллелизма C от параметра ν и величины атомно-полевого взаимодействия η при $\underline{a}^2 = 0.05$ (1), 0.25 (2)

Не ограничиваясь приближением сильных корреляций, при условии возбуждения только однофотонного состояния свойство перепутанности атомной и полевой подсистем можно оценить, используя следующее выражение для параметра параллелизма:

$$C = 2(z_3 - \sqrt{z_4})(1 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4), \quad (7.5)$$

где параметры

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\rho_1(1)}{\rho_1(0)} = \frac{\eta \underline{a}^2}{2(\nu + 1)(\eta + 2\nu + 1)}, \\ z_2 &= \frac{\rho_2(0)}{\rho_1(0)} = \frac{(\eta + 2\nu + 2)z_1}{\eta}, \\ z_3 &= \frac{\rho_2(1)}{\rho_1(0)} = \frac{(\eta + 2\nu + 4)\underline{a}^2}{2(\nu + 2)(\eta + 2\nu + 2)}, \\ z_4 &= \text{Sp}(a\rho) = \frac{z_1}{\sqrt{\eta}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)} \end{aligned}$$

вычислялись по рекуррентным соотношениям (3.7) при учете (7.1). Согласно (7.5), атомная и полевая

системы будут находиться в перепутанном состоянии при условии

$$\frac{\eta z_3}{z_1} > 0. \quad (7.6)$$

Зависимость C от величины атомно-полевого взаимодействия и параметра ν в рамках данного приближения представлена на рис. 6. Там же «изображено» условие (7.6). Как видно из рисунка, с ростом взаимодействия η параметр параллелизма возрастает и достигает максимального значения при значениях параметров $\sqrt{\eta} = 0.4$, $\nu = -1/2$. На рис. 7 представлена зависимость параметра параллелизма C и меры «перепутанности» E_F состояний атом-поле от интенсивности некогерентной накачки для оптимальных значений параметров $\sqrt{\eta} = 0.4$, $\nu = -1/2$. Видно, что обе зависимости одновременно достигают максимума при $\underline{a}^2 = 0.33$.

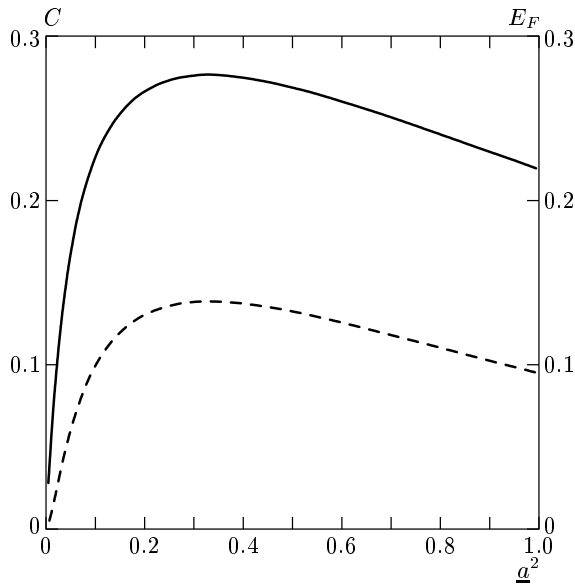


Рис. 7. Зависимость параметра параллелизма (сплошная кривая) и меры «перепутанности» (штриховая) состояний атом–поле E_F от интенсивности некогерентной накачки

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы подробно исследовали состояние поля, создаваемого одноатомным лазером в режиме, когда между атомом и полем существует жесткая связь как квантового (связанного с перепутанными атомно-полевыми состояниями), так и классического (проявляющегося в их отсутствии) характера. В отличие от обычного макроскопического лазера, где такая связь отсутствует и состояния атомов и поля статистически независимы, состояния поля одноатомного лазера зависят от того, на каком из уровней находится атом: в стационарном состоянии вероятность обнаружения n фотонов и атома в возбужденном состоянии равна вероятности обнаружить $n + 1$ фотон и атом в основном состоянии. Показано, что в стационарном состоянии «принадлежащие» основному или возбужденному атомным уровням состояния поля есть обобщенные когерентные состояния Миттаг–Лефлера, усредненные по фазовым флуктуациям, с отличающимся на единицу индексом баланса потерь ν . Найдено, что соответствующие этим состояниям условные глауберовские P -функции выражаются через ядро операции дробного интегрирования (дифференцирования) Римана–Лиувилля порядка, равного индексу потерь или превышающего его на единицу. В случае, когда этот индекс равен нулю (атомарные потери равны

полевым потерям), обобщенные когерентные состояния, принадлежащие основному атомарному состоянию, вырождаются в обычное когерентное состояние, усредненное по фазовым флуктуациям. Тем самым демонстрируется, что излучение, создаваемое одноатомным лазером при некогерентной накачке атома, близко к излучению, создаваемому классическим током со стабилизированной амплитудой и случайной фазой.

Наличие жесткой классической корреляции между состояниями атома и поля является также причиной генерации без инверсии, которая отличается от безинверсионной генерации в трехуровневых макроскопических системах. В случае, когда индекс потерь меньше нуля (скорость полевых потерь превышает скорость атомарных потерь), генерируемое излучение обладает неклассической субпуассоновской статистикой. Другой неклассической особенностью излучения одноатомного лазера является ограниченность P -функции на отрезке.

Хотя атомно-полевые корреляции для большинства значений параметров носят классический характер, в области малых интенсивностей возможна генерация атомно-полевых перепутанных состояний с максимальной энтропией формирования порядка 12 %.

В заключение отметим, что рассмотренный в настоящей статье режим сильной корреляции между атомом и резонаторной модой поля достигается в современных экспериментах с одиночными атомами в высокодобротных оптических резонаторах [14, 15]. Так, в эксперименте [15] с использованием предварительно охлажденных атомов Cs (резонансный переход соответствует одной из компонент D_2 линии с длиной волны 852.4 нм, константа дипольного распада перехода $6S_{1/2}, F = 4, m_F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F = 5, m_F = 5$ равна $\gamma_{\perp} = 2\pi \cdot 2.6$ МГц), захватываемых с помощью далеко отстроенной от резонанса дипольно-силовой ловушкой со временем захвата $\tau = 28$ мс в резонаторе длиной $l = 44.6 \cdot 10^{-6}$ м и константой затухания $k = 2\pi \cdot 4$ МГц, величина константы взаимодействия $g = 2\pi \cdot 32$ МГц, что соответствует режиму сильной корреляции с параметром $\eta = 64$. При этом частота резонаторной моды поля практически совпадает с частотой атомного перехода и частотой пробного низкоинтенсивного лазерного излучения со средним числом фотонов $\bar{n} \approx 0.1$.

Работа выполнена в рамках совместного проекта РФФИ–БРФИ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Свойства фазово-независимых функций распределения

Статистические свойства одномодового поля, усредненные по состояниям атома, удобно исследовать при помощи s -упорядоченных функций квазивероятности,

$$R^{(s)}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda F_N(\lambda) \times \exp(-\lambda\alpha^* + \lambda^*\alpha - s|\lambda|^2/2), \quad (\text{П.1})$$

определяемых как двумерное фурье-преобразование нормально упорядоченной полевой характеристической функции [16]

$$F_N = \text{Sp}_f (\exp(\lambda a^+) \exp(-\lambda^* a) \rho).$$

Здесь индекс $s = 0$ соответствует P -функции распределения Глаубера, $s = 1$ — функции Вигнера W , $s = 2$ — Q -функции распределения. Для одноатомного лазера с некогерентной накачкой как характеристическая функция, так и функции распределения оказываются фазово-независимыми функциями в силу инвариантности управляющего уравнения (2.1) относительно совместного фазового сдвига операторов, относящихся к атому и полю: $a \rightarrow a \exp(i\phi)$, $\sigma_- \rightarrow \sigma_- \exp(i\phi)$ [17]. В этом случае функции распределения $R_s(|\alpha|^2)$ вычисляются как одномерное преобразование Бесселя от характеристической функции:

$$R^{(s)}(|\alpha|^2) = \frac{2}{\pi} \times \int d|\lambda| |\lambda| J_0(2|\lambda||\alpha|) F_N(|\lambda|^2) \exp(-s|\lambda|^2/2). \quad (\text{П.2})$$

Кроме того, функция Вигнера и Q -функция связаны с P -функцией интегральным соотношением

$$R^{(s)}(|\alpha|) = \frac{4}{s} \exp\left(-\frac{2}{s}|\alpha|^2\right) \times \int_0^\infty d|\beta| |\beta| \exp\left(-\frac{2}{s}|\beta|^2\right) I_0\left(\frac{4}{s}|\alpha||\beta|\right) P(|\beta|), \quad (\text{П.3})$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя.

Воспользовавшись разложением фазово-независимой характеристической функции в степенной ряд по нормально упорядоченным моментам:

$$F_N(|\lambda|^2) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{|\lambda|^{2n}}{(n!)^2} \langle a^{+n} a^n \rangle, \quad (\text{П.4})$$

функцию Вигнера и Q -функцию можно представить в виде суммы по полиномам Лягерра:

$$R^{(s)}(|\alpha|^2) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{s^{n+1} n!} \langle a^{+n} a^n \rangle \times \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{s}\right) L_n\left(\frac{|\alpha|^2}{s}\right), \quad (\text{П.5})$$

где полиномы Лягерра — известные ортогональные полиномы, определяемые рядом [18]

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = \sum_{l=0}^n (-1)^l \frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{x^l}{l!}. \quad (\text{П.6})$$

Для P -функции ($s = 0$) разложение (П.5) не определено. Регуляризованное разложение P -функции в ряд по полиномам Лягерра было получено в работе [19]. Для фазово-независимого распределения оно имеет вид

$$P(|\alpha|^2) = \frac{1}{\pi} \exp[-(\xi - 1)|\alpha|^2] \sum_{j=0}^\infty L_j(\xi|\alpha|^2) \times \sum_{s=0}^\infty \frac{(-\xi)^s}{s!(j-s)!} \rho(s), \quad (\text{П.7})$$

где параметр регуляризации $\xi \geq 1$, $\rho(s)$ — диагональные элементы матрицы плотности в фоковском базисе.

Возможен и другой способ регуляризации P -функции распределения. В подынтегральном выражении (П.2) при $s = 0$ сделаем формальную подстановку $1 = \exp(-q|\alpha|^2) \exp(q|\alpha|^2)$ и запишем разложение в ряд произведения

$$e^{q|\lambda|^2} F_N(|\lambda|^2) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m \langle a^{+m} a^m \rangle}{m!^2 (n-m)!} q^{n-m} |\lambda|^{2n} = \sum_{n=0}^\infty L_n\left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial (-\lambda^*)}\right) F_N\left(\frac{|\lambda|^2}{q}\right) \Big|_{\lambda=0} \times q^n |\lambda|^{2n}. \quad (\text{П.8})$$

Предполагая сходимость ряда (П.8) и пользуясь соотношением

$$\int_0^\infty d|\lambda| |\lambda|^{2n+1} J_0(2|\lambda||\alpha|) \exp(-q|\lambda|^2) = \frac{n!}{2q^{n+1}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{q}\right) L_n\left(\frac{|\alpha|^2}{q}\right), \quad (\text{П.9})$$

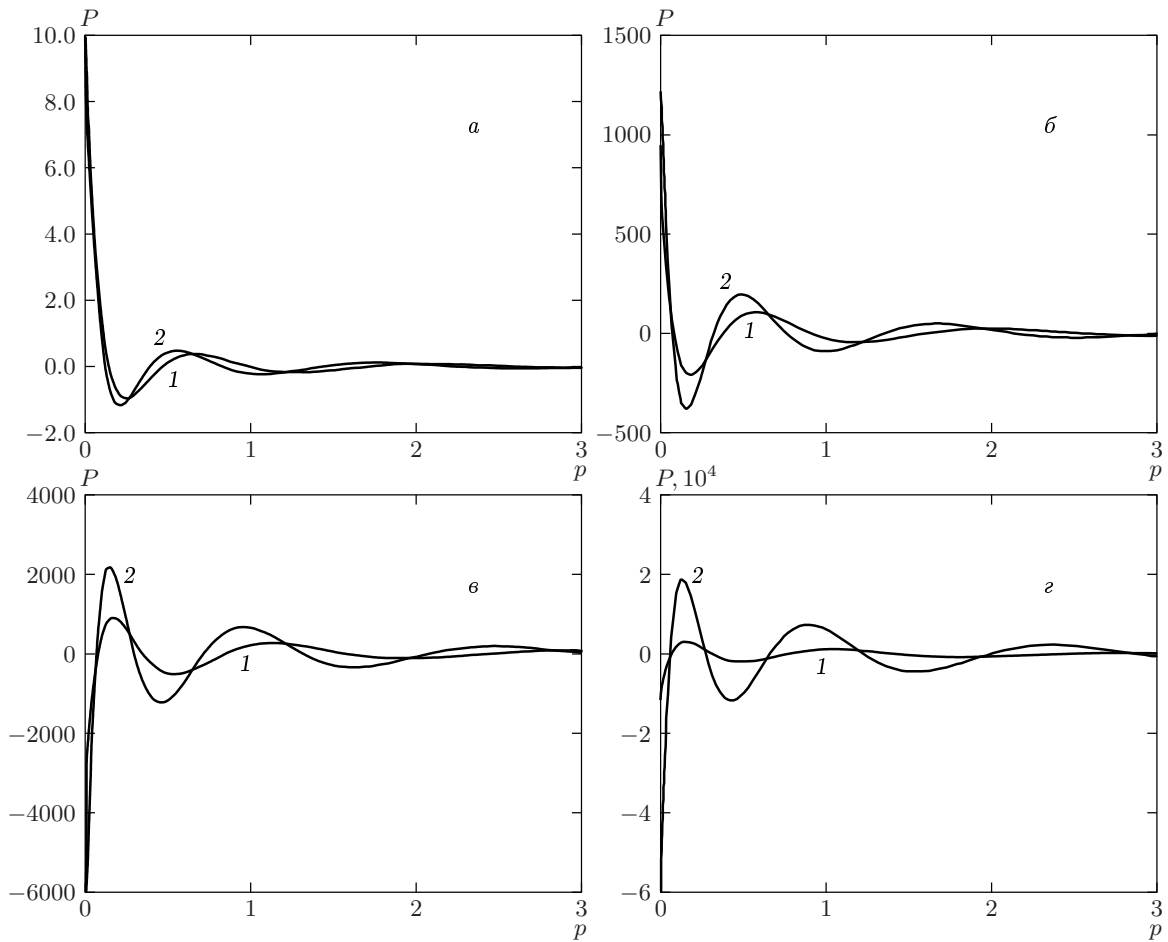


Рис. 8. Приближенные распределения P -функции для четных и нечетных фокковских состояний. Кривые соответствуют учету полиномов Лягерра L_N с номерами $N = 25$ (1), 30 (2); $n_0 = 0$ (а), 2 (б), 3 (в), 5 (г)

получим искомое разложение P -функции квазивероятности в ряд по полиномам Лягерра и нормально упорядоченным моментам $\langle a^{+n} a^n \rangle$:

$$P(|\alpha|^2) = \frac{1}{\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{q}\right) L_n\left(\frac{|\alpha|^2}{q}\right) \times L_n\left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial (-\lambda^*)}\right) F_N\left(\frac{|\alpha|^2}{q}\right) \Big|_{\lambda=0}. \quad (\text{П.10})$$

Примером фазово-независимого неклассического состояния поля является чистое фокковское состояние $\rho_0 = |n_0\rangle\langle n_0|$. Нормально упорядоченные моменты для него равны

$$\langle a^{+k} a^k \rangle = \frac{\theta(n_0 - k) n_0!}{(n_0 - k)!}, \quad (\text{П.11})$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Подставляя значение (П.11) в разложение (П.10), получим регуляр-

зованное выражение для функции Глаубера фокковского состояния:

$$P_{n_0}(|\alpha|^2) = \frac{1}{\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{q}\right) L_n\left(\frac{|\alpha|^2}{q}\right) \times \sum_{k=0}^n (-q)^k C_n^k C_{n_0}^k. \quad (\text{П.12})$$

Из (П.12) при $n_0 = 0$ следует, в частности, представление δ -функции для положительной полуоси значений аргумента в виде ряда по полиномам Лягерра:

$$\delta(|\alpha|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-|\alpha|^2) L_n(|\alpha|^2). \quad (\text{П.13})$$

На рис. 8 приведены графики приближенных распределений для четных и нечетных фокковских состояний. Для четных состояний центральный пик P -функции распределения находится в положитель-

ной области значений. С ростом порядка n учитываемых в разложении (П.12) полиномов Лягерра высота центрального пика возрастает, так же как и высота других отрицательных и положительных минимумов функции распределения. С увеличением числа фотонов n_0 функция распределения становится более сингулярной, количество и интенсивность осцилляций растет, период осцилляций уменьшается, центральный пик проявляется с большей интенсивностью, чем для $n_0 = 0$. Для нечетных фоковых состояний центральный пик распределения находится в отрицательной области значений. Его интенсивность возрастает с ростом числа фотонов n_0 , оставаясь постоянно в области отрицательных значений P -функции распределения. В остальном поведение функции квазивероятности для нечетного числа фотонов аналогично поведению функции распределения для четного числа фотонов.

Учитывая разложение матрицы плотности в фокковском базисе

$$\rho = \sum \rho(n) |n\rangle \langle n|$$

и используя формулу (П.12), получим связь P -функции с распределением фотонов $\rho(n)$:

$$P(|\alpha|^2) = \frac{1}{\pi q} \sum_{n=0}^{\infty} \rho(n) \times \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{q}\right) L_m\left(\frac{|\alpha|^2}{q}\right) S_m^n, \quad (\text{П.14})$$

$$S_m^n = \sum_{k=0}^m (-q)^k C_n^k C_m^k.$$

Варьируя параметр q в формуле (П.14), можно регулировать сходимость отдельных частей ряда. Кроме того, суммированием по другим переменным ряд (П.14) может быть приведен к виду (П.7).

Сравнение (П.10) и (П.14) дает известное соотношение моментов и числа фотонов:

$$\langle a^{+m} a^m \rangle = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\rho(k) k!}{(k-m)!}.$$

Обратное соотношение

$$\rho(n) = (-1)^n \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^m \frac{\langle a^{+m} a^m \rangle}{n!(m-n)!}$$

вытекает из представления Q -функции для фазово-независимых состояний в виде (П.4) и в виде

$$Q(|\alpha|^2) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(n)}{n!} |\alpha|^{2n}. \quad (\text{П.15})$$

Сравнение прямого и обратного соотношений моментов и чисел фотонов показывает, что последовательность коэффициентов $\rho(k)$ всегда является сходящейся, в то время как последовательность моментов $\langle a^{+m} a^m \rangle$ сходится только тогда, когда сходится ряд из членов последовательности $k! \rho(k)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. J. Kimble, in *Cavity Quantum Electrodynamics*, ed. by P. R. Berman, Academ. Press, New York (1994), p. 203; Г. Вальтер, *Опт. и спектр.* **91**, 327 (2001).
2. Yu. Mu and C. M. Savage, *Phys. Rev. A* **46**, 5944 (1992).
3. M. Löffler, G. M. Meyer, and H. Walther, *Phys. Rev. A* **55**, 3923 (1997).
4. M. Löffler, G. M. Meyer, and H. Walther, *Europhys. Lett.* **37**, 317 (1997).
5. А. Козловский, А. Н. Ораевский, *ЖЭТФ* **115**, 1210 (1999).
6. H. J. Carmichael, *Phys. Rev. A* **56**, 5065 (1997); О. А. Кочаровская, Я. И. Ханин, *Письма в ЖЭТФ* **48**, 581 (1988).
7. Т. Б. Карлович, С. Я. Килин, *Опт. и спектр.* **91**, 375 (2001).
8. J.-M. Sixdeniers, K. A. Penson, and A. I. Solomon, *J. Phys. A* **32**, 7543 (1999).
9. Ю. А. Брычков, А. П. Прудников, *Интегральные преобразования обобщенных функций*, Наука, Москва (1977), с. 92.
10. V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, and F. Zaccaria, *Phys. Scripta* **55**, 128 (1997).
11. P. R. Rice and H. J. Carmichael, *Phys. Rev. A* **50**, 4318 (1994).
12. F. DeMartini and G. R. Jacobovitz, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1711 (1988); F. DeMartini, F. Cairo, P. Mataloni, and F. Verezgnassi, *Phys. Rev. A* **46**, 4220 (1992); G. Björk and Y. Yamamoto, *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-27**, 2386 (1991);

- Y. Yamamoto, S. Machida, and G. Björk, *Opt. Quantum Electron.* **24**, S215 (1992); Y. Yamamoto and R. E. Slusher, *Phys. Today* **46**(6), 66 (1993); X. Wang, R. A. Linke, G. Devlin, and H. Yokoyama, *Phys. Rev. A* **47**, R2488 (1993).
13. M. Lax and M. Zwanzinger, *Phys. Rev. A* **7**, 750 (1973); M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1999), p. 336.
14. C. J. Hood, T. W. Lynn, A. C. Doherty, A. S. Parkins, and H. J. Kimble, *Science* **287**, 1447 (2000); P. W. H. Pinkse, T. Fischer, P. Maunz, T. Puppe, and G. Rempe, *J. Mod. Opt.* **47**, 2769 (2000).
15. J. Ye, D. W. Vernooy, and H. J. Kimble, E-print archives, quant-ph/9908007.
16. С. Я. Клилин, *Квантовая оптика: поля и их детектирование*, Наука и техника, Минск (1990), с. 31; V. Bužek and P. L. Knight, in *Progress in Optics*, ed. by E. Wolf (1995), Vol. 34, p. 11.
17. B. Daeubler, H. Risken, and L. Schoendoff, *Phys. Rev. A* **48**, 3955 (1993).
18. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица, И. Стриган, Наука, Москва (1979), с. 581.
19. J. Perina and L. Mista, *Phys. Lett. A* **27**, 217 (1968).