

# О СУММИРОВАНИИ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

*Д. И. Казаков<sup>a,b\*</sup>, В. С. Попов<sup>a</sup>*

<sup>a</sup> *Институт теоретической и экспериментальной физики  
117218, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Объединенный институт ядерных исследований  
141980, Дубна, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 17 апреля 2002 г.

Исследуется возможность восстановления функции Гелл-Манна–Лоу в асимптотическом режиме сильной связи по известным первым порядкам теории возмущений  $\beta_n$  и их асимптотике  $\tilde{\beta}_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Сформулированы условия, выполнение которых необходимо для восстановления искомой функции на физическом уровне строгости: 1) известно большое число коэффициентов теории возмущений, асимптотика которых уже установилась; 2) отсутствует промежуточная асимптотика. Рассчитаны высшие порядки теории возмущений, выход их на асимптотику и степенные поправки в задачах квантовой механики, где возникают расходящиеся ряды теории возмущений (в том числе для потенциала воронки, модели  $\varphi_{(0)}^4$  и эффекта Штарка в сильном поле). Рассмотрена скалярная теория поля  $\varphi_{(4)}^4$  в схемах регуляризации  $\overline{MS}$  и MOM и показано, что на основе имеющейся для нее информации нельзя сделать сколько-нибудь определенного утверждения об асимптотике функции Гелл-Манна–Лоу при  $g \rightarrow \infty$ .

PACS: 74.50.+r, 74.60.Ge, 74.25.Fy

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как известно, ряды теории возмущений (ТВ) в квантовой теории, как правило, расходятся, т. е. являются асимптотическими рядами в смысле Пуанкаре [1, 2] и имеют нулевой радиус сходимости. Тем не менее при малых значениях константы связи  $g$  ТВ дает ценные и вполне надежные результаты, точность которых в случае асимптотических рядов определяется последним удержанным членом ряда. Расходимость рядов ТВ возникает вследствие факториального роста высших порядков ТВ и непосредственно связана с существенной особенностью искомой функции в нуле (по константе связи  $g$ ) и ее скачком на разрезе при измененном знаке константы связи,  $g \rightarrow -0$  (феномен Дайсона [3]).

Для продвижения в область  $g \gtrsim 1$  необходимо обратиться к методам суммирования расходящихся

рядов<sup>1)</sup>, причем помимо информации из ТВ здесь используются также сведения (или предположения) об аналитичности искомой функции. Появление метода Липатова [5] позволило вычислить асимптотику высших порядков ТВ в ряде задач квантовой теории поля, см. также [4, 6, 7]. На первый взгляд казалось, что «сшивание» липатовской асимптотики со значениями нескольких первых членов ряда ТВ, вычисленных из диаграмм Фейнмана, позволит найти важные для теории величины (такие, как функция Гелл-Манна–Лоу (ФГЛ)  $\beta(g)$ , определяющая поведение инвариантного заряда на малых расстояниях) при всех  $g$ . Однако уже первые попытки в этом направлении показали, что реализовать такую программу удастся лишь в некотором конечном интер-

<sup>1)</sup> Монография [1] содержит подробное изложение различных методов суммирования с математической точки зрения. Обзор некоторых методов, успешно применявшихся в теоретической физике, можно найти в [4]. Методы суммирования, использовавшиеся при вычислении функции Гелл-Манна–Лоу, обсуждаются ниже в разд. 4.

\*E-mail: kazakovd@thsun1.jinr.ru

вале<sup>2)</sup> значений  $g$ , но никак не в пределе сильной связи  $g \rightarrow \infty$ . Такой вывод был сформулирован, в частности, в работах [4], [8]-[12].

Недавно в статьях Сулова [13, 14] сделана попытка провести ревизию этих результатов. Как утверждается в [14], автором «разработана процедура суммирования расходящихся рядов теории возмущений при произвольных значениях константы связи, в которой информация обо всех членах ряда получается путем интерполяции известных первых членов с асимптотикой Липатова». В [15] (см. также [16]) развит метод вычисления степенных поправок к главному члену асимптотики Липатова. В результате применения этих процедур сделан вывод [13, 14] о том, что асимптотики ФГЛ в скалярной теории  $\varphi_{(4)}^4$  с евклидовым действием

$$S[\varphi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{16\pi^2}{4!}g\varphi^4 \right\} \quad (1)$$

и в квантовой электродинамике (КЭД) имеют вид  $\beta(g) \propto g^\alpha$  с показателем  $\alpha < 1$ , что отвечает отсутствию нуля заряда [17, 18] и внутренней непротиворечивости этих теорий на сколь угодно малых расстояниях [19]. Этот вывод резко расходится с утверждениями всех предыдущих авторов, поэтому необходимо подвергнуть его более тщательному рассмотрению.

Далее в статье обсуждается следующий вопрос: возможно ли (и если да, то при каких условиях) достаточно надежное восстановление функции  $\beta(g)$  в режиме сильной связи, если известны несколько первых порядков ТВ  $\beta_n$  и их асимптотика  $\tilde{\beta}_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , включая и конечное число степенных поправок к ней. Приведем необходимые для дальнейшего определения:

$$\beta(g) = \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n (-g)^n, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \tilde{\beta}_n \left( 1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots \right) \equiv \\ &\equiv \tilde{\tilde{\beta}}_n \left( 1 + \frac{c'_1}{n} + \frac{c'_2}{n^2} + \dots \right), \quad (3) \end{aligned}$$

<sup>2)</sup> Этот интервал, разумеется, может увеличиваться, если в расчет вводятся новые порядки ТВ или поправки к липатовской асимптотике, либо используются более эффективные методы суммирования расходящихся рядов. В этом отношении полезно сравнить результаты, полученные для ФГЛ в случае теории  $\varphi_{(4)}^4$  в [8, 9] и в дальнейших работах [10, 11].

$$\tilde{\beta}_n = n! a^n n^b c_0, \quad \tilde{\tilde{\beta}}_n = \Gamma(n+b+1) a^n c_0, \quad (4)$$

где  $n$  — порядок ТВ,  $a, b$  и  $c_0$  — параметры асимптотики, а коэффициенты при степенных поправках  $c_j$  и  $c'_j$  связаны между собой линейными соотношениями

$$\begin{aligned} c_1 &= c'_1 + \frac{1}{2}b(b+1), \\ c_2 &= c'_2 + \frac{1}{2}b(b+1) \left[ c'_1 + \frac{1}{12}(3b^2 - b - 2) \right], \quad (5) \end{aligned}$$

и т. д.<sup>3)</sup> Асимптотические ряды типа (2) возникают не только для ФГЛ, но и во многих других физических задачах<sup>4)</sup>, в том числе в квантовой механике (см. ниже разд. 3). Разумеется, наше рассмотрение относится также и к этим случаям.

Кратко опишем содержание статьи. В разд. 2 (см. также Приложение А) показано, что в общем случае ответ на поставленный вопрос — отрицательный: поведение функции  $\beta(g)$  при  $g \rightarrow \infty$  в принципе не определяется первыми коэффициентами ТВ  $\beta_n$  и их асимптотикой  $\tilde{\beta}_n$ . Там же вводится и иллюстрируется важное для дальнейшего понятие промежуточной асимптотики. Далее (разд. 3) рассмотрены некоторые задачи из квантовой механики, в которых встречаются расходящиеся ряды ТВ. Показано, что в ряде простых задач асимптотика энергии  $E^{(0)}(g)$  основного уровня может быть восстановлена с достаточной точностью по перечисленным выше данным. Для этого, однако, должны быть выполнены дополнительные условия:

- 1) необходимо (но недостаточно!), чтобы было известно большое число ( $n_0 \gg 1$ ) коэффициентов ТВ, которые при  $n \sim n_0$  уже выходят на свою асимптотику;
- 2) в рассматриваемой задаче должна отсутствовать промежуточная асимптотика.

Изучение скалярной теории поля (1) показывает (разд. 4), что в ней эти условия нельзя считать выполненными, в силу чего однозначное восстановление асимптотики ФГЛ по имеющимся в настоящее время данным невозможно. В заключительном разд. 5 сформулированы основные выводы нашей работы и содержится обсуждение и критика утверждений, сделанных в работах [13, 14]. В Приложения

<sup>3)</sup> Отметим, что  $\tilde{\beta}_n = \tilde{\tilde{\beta}}_n$ , если  $b = 0$  или  $-1$ . Сюда относятся, в частности, рассматриваемые ниже примеры (20), (24) и (35).

<sup>4)</sup> Иногда асимптотика имеет вид  $\tilde{\beta}_n \propto (n\nu)!$  с  $\nu \neq 1$ . Например, для квантового осциллятора с ангармоничностью вида  $gr^{2N}$  параметр  $\nu = N - 1$ , для КЭД  $\nu = 1/2$  и т. д. Обобщение формул на этот случай не представляет затруднений.

вынесены некоторые подробности вычислений, дополнительные примеры, доказательство расходимости разложений (3) для модели  $\varphi_{(0)}^4$ , а также обсуждение методов расчета эффекта Штарка в сверхсильном электрическом поле для короткодействующего потенциала и для атома водорода.

## 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим сначала несколько модельных примеров. Для функции

$$\varphi_1(g) = cg^{N+1}/(1 + \mu g), \quad \mu > 0 \quad (6)$$

$N$  первых коэффициентов ряда Тейлора равны нулю, а следующие легко сделать сколь угодно малы за счет выбора констант  $c$  и  $\mu$ . Поэтому у функции  $\beta_1(g) = \beta(g) + \varphi_1(g)$  первые  $N$  порядков ТВ, а также липатовская асимптотика (4) те же, что у исходной ФГЛ  $\beta(g)$ . Однако  $\varphi_1(g) \propto g^N$  при  $g \rightarrow \infty$ , что при достаточно большом  $N$  «перебьет» любую степенную асимптотику  $\beta(g)$ .

Единственной особенностью  $\varphi_1(g)$  является простой полюс в точке  $g = -1/\mu < 0$ . Это не противоречит аналитическим свойствам ФГЛ, поскольку при  $g < 0$  теория поля с действием (1) вообще не существует<sup>5)</sup>.

Простое обобщение

$$\varphi_2(g) = cg^{N+1} \frac{(1 + \lambda_1 g) \dots (1 + \lambda_L g)}{(1 + \mu_1 g) \dots (1 + \mu_M g)} \quad (7)$$

показывает<sup>6)</sup>, что с ростом  $g$  функция может последовательно проходить через несколько промежуточных асимптотик (в смысле работы [20]), прежде чем установится ее окончательная асимптотика при  $g \rightarrow \infty$ . Так, полагая  $\lambda_j \equiv 0$  и  $1 \gg \mu_1 \gg \mu_2 \dots \gg \mu_n > 0$ , имеем

$$\varphi_2(g) \approx \begin{cases} cg^{N+1}, & g \ll \mu_1^{-1}, \\ c_1 g^N, & \mu_1^{-1} \ll g \ll \mu_2^{-1}, \\ \dots & \dots \\ c_M g^{N-M+1}, & g \gg \mu_M^{-1}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $c_1 = c/\mu_1$ ,  $c_2 = c/\mu_1\mu_2$  и т. д. При этом только последняя строка в (8) дает истинную асимптотику  $\varphi_2(g)$  на бесконечности.

<sup>5)</sup> Потенциал  $U(\varphi) \propto g\varphi^4 \rightarrow -\infty$  при  $\varphi \rightarrow \infty$  и  $g < 0$ , поэтому такая теория нестабильна: в ней отсутствует основное (вакуумное) состояние.

<sup>6)</sup> Здесь  $\mu_i, \lambda_j$  — константы, причем все  $\mu_i > 0$ , а  $\lambda_j$  могут иметь любой знак.

Заметим, что степени промежуточных асимптотик вовсе не обязаны последовательно понижаться. За счет подходящего выбора констант  $\lambda_j$  и  $\mu_i$  последовательность изменения этих степеней можно задать по желанию, а если некоторые из  $\lambda_j$  отрицательны, то промежуточная асимптотика меняет знак.

Далее, пусть

$$\varphi_3(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(n-N)} (-g)^n, \quad (9)$$

где  $a_n$  — аналитическая функция номера  $n$ . Так, например, если  $a_n = (-\mu)^n$ , то

$$\varphi_3(g) = (\mu g)^{N+1} e^{\mu g} \quad (10)$$

экспоненциально возрастает при  $g \rightarrow \infty$ , а коэффициенты ТВ убывают как  $n^{N+1}/n!$  и не могут изменить липатовскую асимптотику  $\hat{\beta}_n$ .

Нетрудно построить и другие примеры того же рода. Так, для

$$\varphi_4(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu g)^n}{[\Gamma(n-N)]^2} = (\mu g)^{N+1} I_0(2\sqrt{\mu g}) \quad (11)$$

при  $g \rightarrow \infty$  имеем

$$\varphi_4(g) \propto g^{N+3/4} \begin{cases} \exp(2\sqrt{\mu g}), & \mu > 0, \\ \cos(2\sqrt{-\mu g} - \pi/4), & \mu < 0, \end{cases} \quad (12)$$

поэтому асимптотика функции  $\beta(g) + c\varphi_4(g)$  на бесконечности может определяться вторым слагаемым, вносящим при малом  $c$  пренебрежимо малый вклад в коэффициенты ТВ. Обсуждение дальнейших примеров мы выносим в Приложение А.

Закончим рассмотрением примера, относящегося уже непосредственно к теории  $\varphi_{(4)}^4$ . Модифицируем эту теорию, добавляя в действие (1) член  $\mu g^{2N+1}\varphi^4$  с целым  $N \geq 1$  и произвольно малым  $\mu > 0$ , что эквивалентно перенормировке константы связи:  $g \rightarrow \hat{g} = g(1 + \mu g^{2N})$ . При этом будем строить ряд ТВ по степеням  $g$ , рассматривая  $\mu g^{2N+1}\varphi^4$  как возмущение. Различие между коэффициентами ТВ  $\beta_n$  и  $\hat{\beta}_n$  проявляется лишь с членов порядка  $g^{2N+2}$ . С другой стороны, пусть скачок ФГЛ на разрезе при  $g < 0$ , определяющий липатовскую асимптотику (4), равен

$$\begin{aligned} \text{disc } \beta(g) &\equiv \frac{1}{2i} [\beta(g + i0) - \beta(g - i0)] = \\ &= \text{const} \cdot e^{a/g} (-g)^{-(\alpha+1)} \times \\ &\times (1 + b_1 g + b_2 g^2 + \dots), \quad g \rightarrow -0 \quad (13) \end{aligned}$$

(конкретно для (1) имеем [5]  $a = 1$  и  $\alpha = 7/2$ ). Скачок действия  $\hat{S}[\varphi]$  имеет в переменной  $\hat{g}$  тот же вид, что и (13), откуда

$$\text{disc } \hat{\beta}(g) = \text{const} \cdot e^{a/g} (-g)^{-(\alpha+1)} \times [1 + b_1 g + \dots + (b_{2N-1} - \mu a) g^{2N-1} + \dots]. \quad (14)$$

Различие между (13) и (14) при малых  $g$  сказывается лишь в членах порядка  $g^{2N-1}$  и более высокого, а для коэффициентов  $\beta_n$  и  $\hat{\beta}_n$  — в степенных поправках порядка  $n^{-(2N-1)}$ . Таким образом, две теории с функциями действия  $S[\varphi]$  и  $\hat{S}[\varphi]$  имеют  $2N + 1$  совпадающих коэффициентов ТВ и одну и ту же асимптотику  $\hat{\beta}_n$ , включая  $2N - 2$  одинаковые степенные поправки. Однако если для (1) ФГЛ

$$\beta(g) \approx c_\infty g^\alpha (\ln g)^\rho, \quad g \rightarrow \infty,$$

то во втором случае

$$\hat{\beta}(g) \equiv \beta(\hat{g}) \approx \begin{cases} \beta(g), & 1 \ll g \ll g_0, \\ (2N + 1)^\rho g^{2N\alpha} \beta(g), & g \gg g_0, \end{cases} \quad (15)$$

где  $g_0 = \mu^{-1/2N}$ . Поэтому, если параметр  $\mu$  достаточно мал, то ФГЛ  $\hat{\beta}(g)$  для теории с действием  $\hat{S}[\varphi]$  сначала проходит через промежуточную асимптотику  $\beta(g)$ , и только при  $g \gg g_0 \gg 1$  устанавливается ее окончательная асимптотика на бесконечности, существенно отличающаяся от  $\beta(g)$ .

В квантовой механике последний пример аналогичен гармоническому осциллятору

$$V(x) = V_0 + \delta V = \frac{1}{2} g (1 + \mu g^{2N}) x^2, \quad (16)$$

где  $V_0(x) = gx^2/2$ , а остаток трактуется как возмущение  $\delta V$ . При этом спектр энергий обладает теми же свойствами, что и (15), однако ряд ТВ здесь не расходится, а имеет конечный радиус сходимости:  $|g| < g_0 = \mu^{-1/2N}$ .

### 3. О СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ТВ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Перейдем теперь от математических примеров к обсуждению конкретных задач из нерелятивистской квантовой механики, в которых встречаются расходящиеся ряды ТВ. Их рассмотрение, интересное и само по себе, полезно еще и потому, что характер расходимости рядов ТВ здесь тот же, что и в квантовой теории поля, но вычисление высших порядков ТВ неизмеримо проще.

а) Начнем с ангармонического осциллятора

$$H = p^2 + \frac{1}{4}(x^2 + gx^4), \quad D = 1, \quad (17)$$

для которого в пионерской работе Бендера и Ву [21] были вычислены с высокой точностью 75 порядков ТВ для энергии основного уровня (см. таблицу I в этой работе), а также их асимптотика  $\tilde{E}_n$ :

$$E^{(0)}(g) = \sum_{k=0}^{\infty} E_n(-g)^k, \\ E_n \approx -\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot 3^n \sqrt{\frac{6}{\pi^3}} \times \\ \times \left(1 - \frac{95}{72n} - \frac{20\,099}{10\,368n^2} - \dots\right). \quad (18)$$

В дальнейшем [22], используя 150 порядков ТВ, численной подгонкой (при  $n \gg 1$ ) были определены десять степенных поправок  $c_j$  в (18). Асимптотика энергии при  $g \rightarrow \infty$  имеет вид [23, 24]

$$E^{(0)}(g) = c_\infty g^\alpha [1 + O(g^{-2\alpha})], \quad \alpha = 1/3, \quad (19)$$

где  $c_\infty$  — константа, численное значение которой приведено в [23] (в другой нормировке гамильтониана, но пересчет на (17) не представляет затруднений).

В работе [25] для асимптотического коэффициента было получено значение<sup>7)</sup>:  $c_\infty = 1.048$  (точное значение [23] равно  $1.060362\dots$ ), а метод работы [13] дает для показателя степенной асимптотики (19)  $\alpha = 0.317 \pm 0.032$  и коэффициент  $c_\infty$  с ошибкой в 10%. Таким образом, восстановление асимптотики  $E^{(0)}(g)$  по коэффициентам ряда ТВ проводится в данном случае с удовлетворительной точностью.

Эта задача иногда рассматривается как тестовый пример для проверки методов суммирования расходящихся рядов. Не отрицая такой возможности, мы все же хотели бы подчеркнуть, что в данном случае в расчет вводится до 75 порядков ТВ, которые уже «ухватывают» асимптотику: так, отношение<sup>8)</sup>  $\delta_n = \tilde{E}_n/E_n - 1 = 20\%$ ,  $2.8\%$  и  $1.8\%$  соответственно при  $n = 10, 50$  и  $75$ . При  $n \lesssim 10$  точные коэффициенты  $E_n$  еще достаточно далеки от  $\tilde{E}_n$  (в особенности, если рассматривать гамильтониан (17) в  $D$ -мерном пространстве с размерностью  $D \geq 3$ ).

<sup>7)</sup> При этом использовалась модифицированная ТВ, в которой показатель  $\alpha = 1/3$  выбирался уже в исходном приближении.

<sup>8)</sup> Мы всюду используем определение асимптотических коэффициентов, данное в (4) для случая функции  $\beta$ .

При этом коэффициент  $c_1$  первой степенной поправки быстро возрастает вместе с  $D$  (см. рис. 2 в [26]), а также при переходе от основного к возбужденным уровням [22]. Проведенные расчеты не указывают на наличие в данной задаче промежуточной асимптотики. Кроме того, строго доказано [23], что в случае (17) ряд ТВ суммируется к точной энергии  $E^{(0)}(g)$  всюду в комплексной плоскости с разрезом  $-\infty < g < 0$ .

б) Ангармонический осциллятор является одномерной моделью  $\varphi_{(1)}^4$  скалярной теории поля  $\varphi_{(4)}^4$ , а обычный интеграл

$$J(g) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \exp \left\{ - \left( \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4 \right) \right\} = \left( \frac{2\pi}{3} g \right)^{-1/2} \exp \left( \frac{3}{4g} \right) K_{1/4} \left( \frac{3}{4g} \right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} J_n (-g)^n \quad (20)$$

можно считать нуль-мерным аналогом ( $\varphi_{(0)}^4$ ) функционального интеграла в теории  $\varphi_{(4)}^4$ . Для коэффициентов ТВ имеем [4, 8]

$$J_n = \frac{\Gamma(2n + 1/2)}{\sqrt{\pi} 6^n \Gamma(n + 1)}, \quad (21)$$

$$\tilde{J}_n = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \Gamma(n) \left( \frac{2}{3} \right)^n,$$

$$J_n / \tilde{J}_n = \frac{\sqrt{2\pi} \Gamma(2n + 1/2)}{2^{2n} n! (n - 1)!} = 1 - \frac{3}{16n} + \dots, \quad (22)$$

причем уже первые порядки ТВ довольно близки к асимптотике:  $J_n / \tilde{J}_n = 0.833, 0.911, 0.940$  и  $0.963$  при  $n = 1, 2, 3$  и  $5$ . Отсюда можно заключить, что степенные поправки здесь численно малы. Кроме того, для  $J(g)$  отсутствует промежуточная асимптотика.

На примере (20) видно, что функция  $J(g)$  и борелевская сумма  $\tilde{J}(g)$  могут иметь разные асимптотики при  $g \rightarrow \infty$ , отличаясь даже знаком:

$$J(g) = c_{\infty} g^{-1/4} \left[ 1 - k g^{-1/2} + O(g^{-1}) \right], \quad (23)$$

$$\tilde{J}(g) = \sum_n \tilde{J}_n (-g)^n = -(\pi\sqrt{2})^{-1} \ln g + \dots,$$

где  $c_{\infty} = 1.600\ 714\dots$  и  $k = 0.827\ 901\dots$ , см. также формулу (Б.10) в Приложении Б.

Интеграл (20) рассматривался с целью проверки процедуры суммирования расходящихся рядов. В [9] с помощью метода Паде–Бореля (см. ниже (28), (29)) с учетом двадцати порядков ТВ

значения  $J(g)$  были восстановлены в интервале  $0 < g < 100$ . Вводя в расчет до пятидесяти коэффициентов ТВ, для показателя асимптотики на бесконечности,  $J(g) \propto g^{\alpha}$ , автор работы [13] получил значение  $\alpha = -0.235 \pm 0.025$ , близкое к точному  $\alpha = -1/4$ . В свете сказанного выше это не представляется удивительным.

Обобщением (20) является

$$J(g; K) = (2\pi)^{-1/2} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \exp \left\{ - \left( \frac{\varphi^2}{2} + g \frac{\varphi^{2K}}{(2K)!} \right) \right\}, \quad (24)$$

(модель  $\varphi_{(0)}^{2K}$ ,  $K = 2, 3, \dots$ ). Коэффициенты ТВ  $J_n$  вычисляются здесь аналитически, см. Приложение Б.

Покажем, что ряд (3) по степеням  $1/n$  является расходящимся при любом  $K$ . Полагая

$$\frac{J_n}{\tilde{J}_n} \equiv \eta(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \quad z = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad (25)$$

видим из (Б.3), что функция  $\eta(z)$  имеет полюсы в точках  $z = z_s$ , сгущающихся к нулю:

$$z_s = -2K / (2s + 1), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

Поэтому  $z = 0$  является существенной особенностью для  $\eta(z)$ , и степенной ряд (25) расходится при всяком  $z \neq 0$ . Того же следует ожидать и для более реалистических теорий, в том числе  $\varphi_{(4)}^4$  и КЭД (см. также [16]). Возможно определить и степень роста коэффициентов  $c_j$  при  $j \rightarrow \infty$ , см. Приложение Б.

Интеграл (24) можно рассматривать как нуль-мерный аналог функционального интеграла в теории поля с самодействием  $\varphi_{(D)}^{2K}$ , которая является перенормируемой [27] в размерности  $D = 2K / (K - 1)$ . Асимптотика  $J(g, K)$  при  $g \rightarrow \infty$  имеет степенной вид (Б.10) и наступает тем медленнее, чем больше показатель нелинейности  $2K$  в (24).

в) Потенциал воронки

$$V(r) = -\frac{1}{r} + gr, \quad 0 < r < \infty, \quad (27)$$

использовался в квантовой хромодинамике для описания состояний тяжелых кваркониев (так называемый корнелльский потенциал, см., например, [28–30]). В этом случае было вычислено примерно 90 коэффициентов ТВ  $E_k$  для основного уровня [31], причем параметры асимптотики (4) равны  $c_0 = -18/\pi e^3 = -0.2852\dots$ ,  $\beta = 1$  и  $a = 3/2$ .

**Таблица 1.** Высшие порядки ТВ для энергии основного уровня в потенциале воронки

$n$	$-E_n$	$\tilde{E}_n/E_n$	$n$	$-E_n$	$\tilde{E}_n/E_n$
1	3/2	0.285	10	3.281(8)	1.819
2	3/2	1.71	20	3.578(22)	1.290
3	27/8	5.13	30	3.708(38)	1.174
4	795/16	2.79	40	9.152(55)	1.124
5	3843/8	2.71	50	2.521(74)	1.101
6	11 166/2	2.52	60	4.849(93)	1.080
7	$\frac{9\ 543\ 339}{128}$	2.31	80	1.886(134)	1.059

*Примечание.* Приведены коэффициенты ряда ТВ (21), взятые с обратным знаком (пользуясь случаем, мы здесь исправили допущенную в [28] опечатку для коэффициента  $E_5$ ). Здесь и далее используются обозначения:  $n$  — порядок ТВ,  $a(b) \equiv a \cdot 10^b$ .

Часть вычисленных коэффициентов  $E_n$  приведена в табл. 1, из которой видно, что отличие  $\tilde{E}_n$  от  $E_n$  становится меньше 10% только при  $n > 50$ , а при  $n \leq 10$  эти коэффициенты различаются в несколько раз.

Суммирование ряда ТВ проводилось с помощью метода Паде–Бореля:

$$E^{(0)}(g) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(-g)^k = g^{-1} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{g}\right) B(x) dx, \quad (28)$$

(обобщение см. ниже в (49)), причем трансформанта Бореля  $B(x)$  заменялась диагональной аппроксимантой Паде  $[L/L]$ :

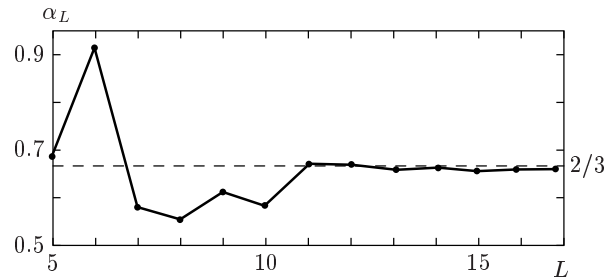
$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{k!} (-x)^k \approx B_L(x) \equiv [L/L](x). \quad (29)$$

Как вытекает из (28), асимптотике  $E(g) \approx c_{\infty} g^{\alpha}$  при  $g \rightarrow \infty$  отвечает поведение  $B(x) \approx c_{\infty} x^{\alpha} / \Gamma(\alpha + 1)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если  $\alpha > -1$ . Поэтому индекс асимптотики  $\alpha$  можно найти из уравнения  $\alpha = \lim_{L \rightarrow \infty} \alpha_L$ , где

$$\alpha_L = \lim_{x \rightarrow \infty} [xB'_L(x)/B_L(x)], \quad (30)$$

или

$$\alpha_L = -1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ xB_L(x) / \int_0^x B_L(x') dx' \right\}, \quad (31)$$



**Рис. 1.** Определение показателя  $\alpha$  степенной асимптотики (32) для энергии основного уровня в потенциале воронки. Значения  $\alpha_L$  рассчитывались по формуле (31) при  $x = 100$  (точки)

после чего определяется и асимптотический коэффициент  $c_{\infty}$ .

Заметим, что в данном случае точная асимптотика энергии уровней  $E_{nl}(g)$  находится с помощью преобразования скейлинга  $r \rightarrow g^{-1/3}r$  в уравнении Шредингера:

$$E_{nl}(g) = c_{\infty}^{(nl)} g^{2/3} [1 + O(g^{-1/3})], \quad g \rightarrow \infty \quad (32)$$

(прием, указанный Шиманчиком, см. замечание на стр. 85 в работе [23]). Для  $ns$ -уровня ( $l = 0$ ) радиальное уравнение Шредингера в пределе  $g \rightarrow \infty$  сводится после скейлинга к уравнению Эйри, поэтому  $c_{\infty}^{(ns)} = -2^{-1/3} \xi_n$ , где  $\xi_n$  означает  $n$ -й нуль функции Эйри  $\text{Ai}(\xi)$ . Например,  $\xi_1 = -2.3381\dots$  и  $c_{\infty}^{(1s)} = 1.855756\dots$  для основного уровня,  $n = 1$ .

Результаты численных расчетов<sup>9)</sup> показаны на рис. 1. Использование аппроксимант Паде–Бореля с  $L \leq 15$  обеспечивает процентную точность вычисления энергии  $E_{1s}(g)$  вплоть до  $g = 500$ , а при  $g \sim 1$  ошибка не превышает 0.01%. Естественно, что наихудшая точность имеет место при определении параметров асимптотики (32). Если усреднить значения  $\alpha_L$  в интервале  $11 \leq L \leq 17$ , то получим  $\langle \alpha \rangle = 0.667 \pm 0.003$ , что отличается от (32) на 0.5%. Соответственно, для асимптотического коэффициента при  $L = 17$  получаем  $c_{\infty} \approx 1.78$  (ошибка около 4%). С другой стороны, при  $L < 10$  значения  $\alpha_L$  еще далеки от точного  $\alpha = 2/3$ , что и понятно: для небольших порядков ТВ коэффициенты  $\tilde{E}_n$  превышают  $E_n$  в несколько раз (см. табл. 1). В случае потенциала  $V(r) = -r^{-1} + gr^2$  сходимость значений

<sup>9)</sup> В [32] использовались диагональные аппроксиманты Паде вплоть до  $L = 17$ , т.е.  $2L + 1 = 35$  порядков ТВ. Точками на рис. 1 обозначены результаты расчета по формуле (31) для  $x = 100$  (использование формулы (30) приводит к аналогичным результатам, но разброс точек  $\alpha_L$  несколько больше).

$\alpha_L$  несколько хуже: с использованием тридцати порядков ТВ было получено  $\langle \alpha \rangle = 0.47 \pm 0.08$  (точное значение  $\alpha = 1/2$ ).

Итак, суммирование расходящегося ряда ТВ для потенциала воронки дает вполне удовлетворительные результаты, включая область сильной связи. При этом, однако, остаются в силе те же замечания, что и в случае ангармонического осциллятора: в расчет вводится много коэффициентов  $E_n$ , выход которых на асимптотику  $\tilde{E}_n$  уже состоялся, и, кроме того, сравнение с численным расчетом показывает, что в данной задаче отсутствует область промежуточной асимптотики для  $E(g)$ .

г) Поучительным примером из области атомной физики является задача об эффекте Штарка в сильном поле.

В электрическом поле  $F$  (которое считаем постоянным и однородным) атомные уровни переходят в квазистационарные состояния с комплексной энергией  $E(F) = E_r - i\Gamma/2$ . Мы ограничимся одномерным и трехмерным  $\delta$ -потенциалами<sup>10)</sup> и основным состоянием атома водорода, когда ряд ТВ имеет вид

$$\varepsilon(F) = \frac{E_r(F)}{E_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k} F^{2k}, \quad (33)$$

где  $F$  — параметр разложения,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_2$  — поляризуемость, а  $\alpha_4, \alpha_6, \dots$  — гиперполяризуемости атомного уровня<sup>11)</sup>.

Результаты вычисления высших порядков ТВ (подробности этих вычислений изложены в Приложении В) приведены в табл. 2, из которой виден чрезвычайно быстрый рост коэффициентов  $\alpha_n$ , что согласуется с асимптотикой

$$\alpha_n \approx \frac{1 + (-1)^n}{2} \Gamma(n + b + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^n \times c_0 \left(1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (34)$$

и показывает, что ряд ТВ расходится при всяком  $F \neq 0$  (для возбужденных состояний, а также в случае разложения ТВ для волновой функции отличны

<sup>10)</sup> В таких потенциалах имеется по одному дискретному уровню с энергией  $E_0 = -\kappa_0^2/2$  в отсутствие поля ( $\kappa_0$  — константа, входящая в граничное условие в нуле, см., например, [33]). Далее, без потери общности, полагаем  $\kappa_0 = 1$  и используем в этом разделе атомные единицы  $\hbar = m = e = 1$ .

<sup>11)</sup> В отличие от предыдущих примеров и теории  $\varphi_{(4)}^4$  все коэффициенты  $\alpha_n$  — одного знака, поэтому трансформанта Бореля (29) имеет полюс на пути интегрирования. Это создает некоторые трудности при численном счете, которые можно преодолеть разными способами, см., например, [34–36].

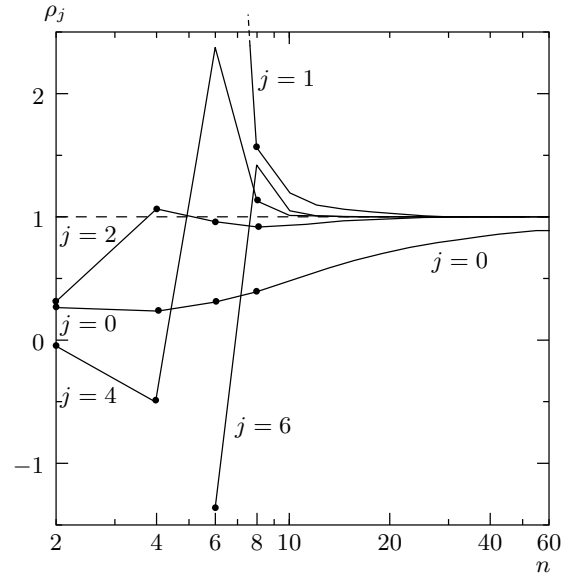


Рис. 2. Отношения  $\rho_j(n) = \alpha_n / \tilde{\alpha}_n^{(j)}$ , см. (35), в зависимости от порядка ТВ  $n$  для эффекта Штарка в атоме водорода (основное состояние). Около кривых указаны значения  $j$ , т.е. число членов, удержанных в разложении (35)

от нуля и нечетные порядки ТВ). Эта формула вытекает из дисперсионного соотношения, см. Приложение В. Параметры  $b$  и  $c_j$  приведены в табл. 3.

Рассмотрим выход коэффициентов ТВ на асимптотику с учетом степенных поправок. Обозначим через  $\tilde{\alpha}_n^{(j)}$  частичную сумму ряда (34):

$$\tilde{\alpha}_n^{(j)} = \tilde{\alpha}_n \left(1 + \frac{c_1}{n} + \dots + \frac{c_j}{n^j}\right), \quad (35)$$

$$\tilde{\alpha}_n^{(0)} \equiv \tilde{\alpha}_n = \frac{12}{\pi} n! \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

На рис. 2 показаны отношения  $\alpha_n / \tilde{\alpha}_n^{(j)}$ , характеризующие точность  $j$ -го приближения. Видно, что асимптотика  $\tilde{\alpha}_n$  заметно отличается от точных коэффициентов ТВ даже при  $n \sim 100$ , однако включение степенных поправок улучшает положение. В частности, учет двух степенных поправок (т.е.  $\tilde{\alpha}_n^{(2)}$ ) дает хорошую точность, начиная уже с  $n = 4$  (однако дальнейшее увеличение числа удержанных членов ряда (35) резко ухудшает точность при  $n \lesssim 10$ ). Казалось бы, ситуация в данном случае благоприятна для восстановления асимптотики энергии  $E(F)$  при  $F \rightarrow \infty$ . Однако это не так. Как показало суммирование рядов ТВ для различных состояний атома водорода [35, 36], включая и основное, в надбарьерной области зависимость ширины  $\Gamma$  от поля очень близка к линейной:

Таблица 2. Высшие порядки ТВ для эффекта Штарка

<i>n</i>	2	4	6	8
<i>D</i> = 1	5/4	55/4	10 625/16	1 078 125/16
<i>D</i> = 3	1/4	3/2	735/16	13 265/4
Атом Н	21/8	22 947/2 <sup>9</sup>	48 653 931/2 <sup>14</sup>	3.81903(5)
	9/2	3 555/32	2 512 779/256	13 012 777 803/2 <sup>13</sup>
<i>n</i>	10	20	50	100
<i>D</i> = 1	1.1467(7)	2.4187(20)	2.4126(71)	2.3883(173)
<i>D</i> = 3	4.3437(5)	4.2599(18)	1.6420(69)	8.0422(170)
Атом Н	7.7836(7)	2.6720(21)	4.5180(72)	6.4634(174)
	3.8906(8)	2.2421(22)	6.5583(73)	1.3647(176)
<i>n</i>	150	180	190	200
<i>D</i> = 1	6.2389(286)	3.5099(358)	9.2425(382)	4.1262(407)
<i>D</i> = 3	1.3958(284)	6.5364(355)	1.6301(380)	6.9118(404)
Атом Н	2.0826(288)	1.2865(360)	3.4826(384)	—
	5.4360(289)	3.6898(361)	1.0271(386)	4.8327(410)

Примечание. Приведены гиперполяризуемости  $\alpha_n$  в интервале  $n = 2-200$  для  $\delta$ -потенциала в размерностях  $D = 1$  и  $3$  и для основного состояния атома водорода при  $D = 2$  и  $3$  (соответственно первая и вторая строки для Н).

Таблица 3.

Параметр	$D = 1$	$D = 2$	$D = 3$	Н	$j$	$h_j$	$c_j$
$a$	3/2	3/2	3/2	3/2	1	107/12	-5.944
$b$	-1	-3/2	-2	0	2	7363/288	11.363
$A$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1/2	4	3	158.7	-35.66
$c_0$	$2/\pi$	$\sqrt{2/3\pi}$	$2/3\pi$	$12/\pi$	4	469.0	-37.1
$\gamma_\infty$	0.5456	—	0.6067	0.3062	5	1.025(4)	-1.12(3)
$k$	2/3	—	1.343	8/3	6	—	-1.0(4)

Примечание. Приведены значения параметров, входящих в формулы (26), (В.6) и (В.8) для  $\delta$ -потенциала в  $D$ -мерном пространстве, а также (столбец Н) для основного состояния атома водорода,  $D = 3$ ; коэффициенты  $h_j$  и  $c_j$  относятся к последнему случаю.

$$\Gamma(F) \approx k(F - F_0), \quad F_0 < F \lesssim 1.5-2.0 \quad (36)$$

(параметры  $k$  и  $F_0$  определяются численной подгонкой, например,  $k = 1.47$ ,  $F_0 = 0.122$  для основного состояния и  $k = 0.81$ ,  $F_0 = 0.260$  для ридберговских состояний атома водорода [37]). Линейная зависимость (36) не имеет места ни в области слабого поля, где ширина  $\Gamma(F)$  экспоненциально мала [38], ни в пределе сверхсильных полей, когда [39]

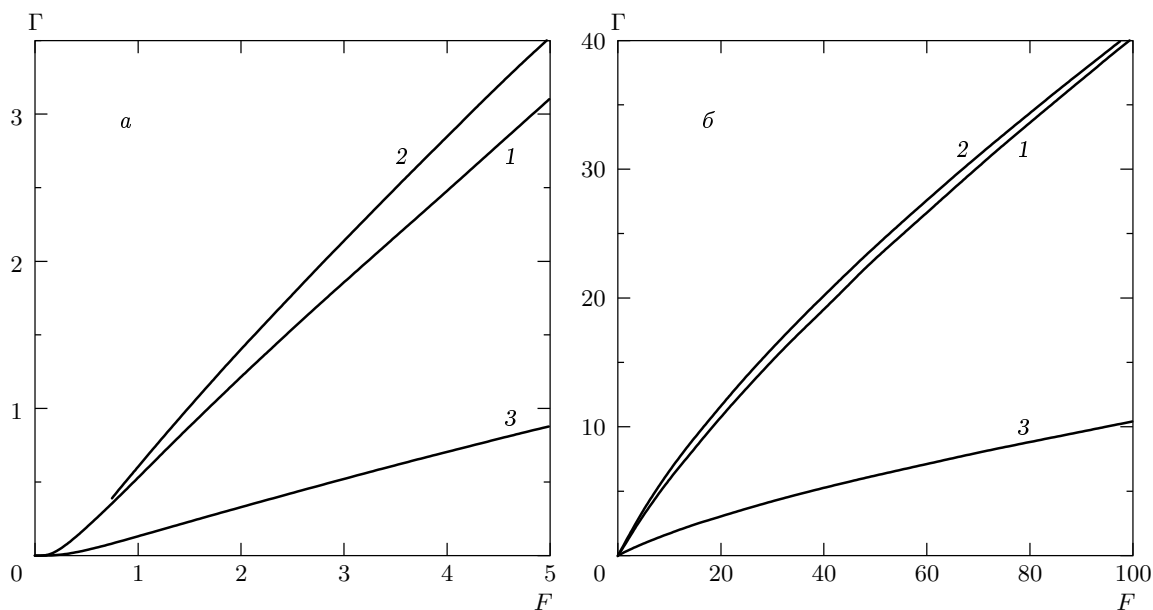
$$\Gamma(F) = \tilde{\Gamma}(F) \left\{ 1 + q \frac{\ln \ln F}{\ln F} + O\left(\frac{1}{\ln F}\right) \right\}, \quad F \rightarrow \infty,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(F) &= \gamma_\infty (F \ln F)^{2/3}, \\ \gamma_\infty &= 2^{-5/2} \cdot 3^{1/2}, \quad q = 8/3. \end{aligned} \quad (37)$$

Ту же форму имеет асимптотика  $\Gamma(F)$  для  $\delta$ -потенциала с  $D = 1$  [37], отличаясь лишь значениями ко-



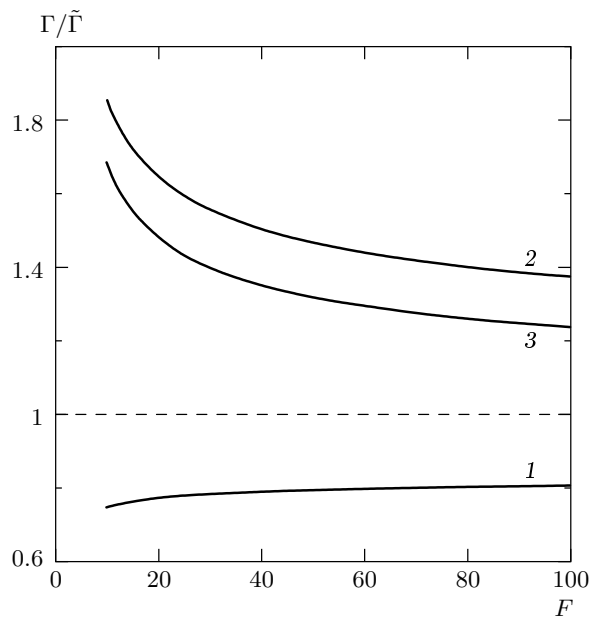


**Рис. 3.** Ширина уровня  $\Gamma(F)$  в случае эффекта Штарка в надбарьерной области (а) и при  $0 < F < 100$  (б). Кривые 1 и 3 для одномерного и трехмерного  $\delta$ -потенциалов, кривая 2 для ридберговских состояний атома водорода [36, 37]. Величины  $\Gamma$  и  $F$  измеряются в атомных единицах

эффициентов  $\gamma_\infty = 2^{-5/3} \cdot 3^{1/2}$  и  $q = 2/3$ , а при  $D = 3$  вид ее несколько изменяется, см. (В.5).

Заметим, что линейный режим (36) выполняется также для основного состояния атома гелия [40] и для  $\delta$ -потенциалов (рис. 3а). Это — промежуточная асимптотика в задаче о штарк-эффекте в сильном поле, качественное объяснение которой было дано [37] в рамках  $1/n$ -разложения. Отклонение от (36) в случае  $\delta$ -потенциала становится заметным только при  $F \gtrsim 10$  (ср. рис. 3а и 3б). При этом, как видно из рис. 4, выход  $\Gamma(F)$  на асимптотику при  $F \rightarrow \infty$  происходит чрезвычайно медленно: относительное отклонение  $(\Gamma - \tilde{\Gamma})/\Gamma$  становится меньше 10% только при  $F > 5 \cdot 10^7$  в случае одномерного  $\delta$ -потенциала и  $F \gtrsim 10^{26}$  для атома водорода (!). Поэтому окончательная асимптотика функции  $\Gamma(F)$  на бесконечности не может быть получена суммированием любого (в разумных пределах) конечного числа членов ряда ТВ, а только из анализа точных решений. Это относится и к вещественной части энергии, т. е. к штарковскому сдвигу уровня. В случае короткодействующих потенциалов выход гиперполяризуемостей  $\alpha_n$  на асимптотику несколько более быстрый, чем для атома водорода, однако при  $n \lesssim 10$  различие между  $\alpha_n$  и  $\tilde{\alpha}_n$  все еще довольно велико (рис. 5).

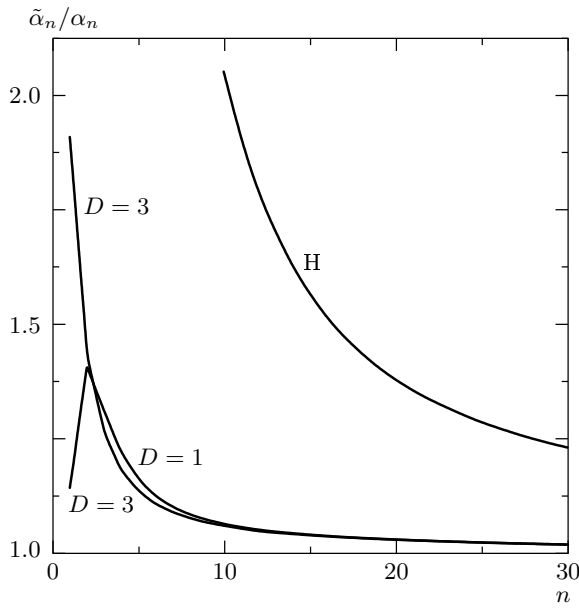
д) Как и в случае ангармонического осциллятора, представляет интерес зависимость структуры ряда ТВ от размерности пространства. Для основного



**Рис. 4.** Выход на асимптотику при  $F \rightarrow \infty$ : отношение  $\Gamma/\tilde{\Gamma}$  в зависимости от поля  $F$ . Номера кривых те же, что и на предыдущем рисунке. Асимптотика  $\tilde{\Gamma}(F)$  определена в (37) и (В.5)

состояния  $D$ -мерного «атома водорода» имеем в (33)

$$E_0 = -2/(D - 1)^2, \quad D > 1,$$



**Рис. 5.** Отношения  $\tilde{\alpha}_n/\alpha_n$  в случае  $\delta$ -потенциала (размерности  $D = 1$  и  $3$ ). Для сравнения показана соответствующая кривая (H) для основного уровня атома водорода

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{8}(D+1)(2D+3),$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{512}(D+1) \times (96D^3 + 645D^2 + 1522D + 1257), \dots \quad (38)$$

Для вычисления высоких порядков ТВ более удобны рекуррентные соотношения, приведенные в Приложении В. Асимптотика коэффициентов ТВ определяется скачком  $\text{disc } E(F) \equiv \Gamma(F)$  в окрестности особой точки  $F = 0$ , который вычисляется с помощью метода ВКБ. С учетом (В.5) и (В.10) приходим к формулам (4) и (34), в которых

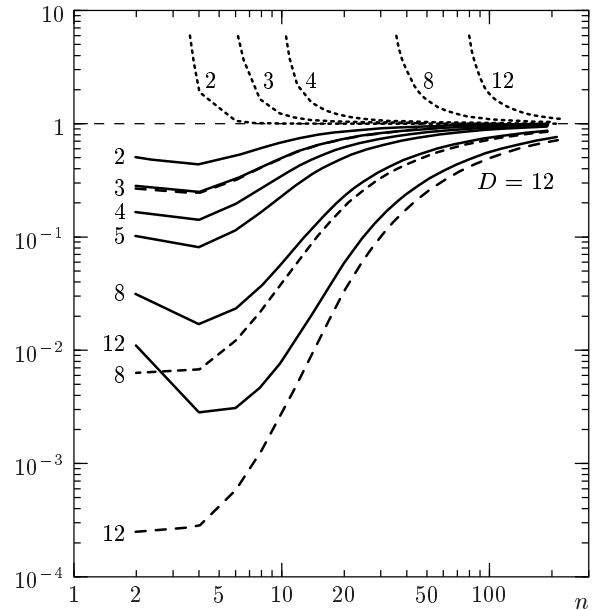
$$a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{D-3}{2},$$

$$c_0 = 2^{(D+1)/2} \cdot 3^{(D-1)/2} / \pi \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right), \quad (39)$$

$$c_1 = -\frac{1}{36}(12D^2 + 39D - 11),$$

$$c'_1 = -\frac{1}{72}(33D^2 + 42D + 5)$$

(следующие степенные поправки при  $D \neq 3$  неизвестны). При этом степенные поправки не малы:  $|c_1| > 3.2$  для  $D \geq 2$ . Быстрое увеличение коэффициентов  $c_j$  по абсолютной величине (см. табл. 3 для случая  $D = 3$ ) служит указанием на то, что ряд степенных поправок (3) является расходящимся.



**Рис. 6.** Выход коэффициентов ТВ на асимптотику для  $D$ -мерного атома водорода. Сплошные кривые отвечают  $\alpha_n/\tilde{\alpha}_n$ , штриховые —  $\alpha_n/\tilde{\alpha}_n$  с учетом первой поправки к  $\tilde{\alpha}_n$ . Около кривых указаны значения размерности пространства  $D$

С ростом размерности  $D$  выход коэффициентов ТВ на асимптотику замедляется и отодвигается в сторону все больших  $n$ , а учет первой поправки  $c_1/n$ , хотя и повышает точность аппроксимации при  $n \rightarrow \infty$ , но зато резко ухудшает ситуацию при малых  $n$  (рис. 6). Любопытно отметить, что при  $D = 10$  параметр асимптотики  $b = 7/2$ , как и в случае теории  $\varphi_{(4)}^4$ .

Число подобных примеров можно было бы увеличить. Общий вывод состоит в том, что асимптотика коэффициентов ТВ в квантовой теории устанавливается, как правило, только при  $n \gg 1$  и низшие порядки ТВ с ней не «сшиваются» (за исключением чрезвычайно редких случаев вроде лагранжиана Гейзенберга–Эйлера в КЭД, для которого степенные поправки вообще отсутствуют [8]:

$$\tilde{a}_n/a_n = 1 + (-1)^{2s} \cdot 2^{-2n} + \dots,$$

где  $s = 0$  или  $1/2$  — спин частицы). Пример с эффектом Штарка (в котором поле  $F$  играет ту же роль, что и константа связи  $g$  в (1)) показывает, насколько медленно может устанавливаться окончательная асимптотика в режиме сильной связи, если в задаче имеется область промежуточной асимптотики, а сама асимптотика содержит  $\ln F$ .

**Таблица 4.** Низшие порядки ТВ для ФГЛ в теории  $\varphi_{(4)}^4$

$n$	2	3	4	5	6
Число диаграмм	1	2	7	23	135
$\beta_n^{MOM}$	3/2	17/6	19.27	146.1	—
$\tilde{\beta}_n/\beta_n$	0.104	0.687	1.106	1.593	—
$\bar{\beta}_n/\beta_n$	0.0978	0.659	1.072	1.554	—
$\tilde{\tilde{\beta}}_n/\beta_n$	1.323	4.582	5.053	5.666	—
$\beta_n^{\overline{MS}}$	3/2	17/6	16.27	135.8	1424.3
$\tilde{\beta}_n/\beta_n$	0.0080	0.0526	0.100	0.131	0.142
$\bar{\beta}_n/\beta_n$	0.0075	0.0505	0.097	0.128	0.139
$\tilde{\tilde{\beta}}_n/\beta_n$	0.101	0.351	0.459	0.467	0.423

*Примечание.* Приведены значения коэффициентов ТВ  $\beta_n$  в схемах перенормировки MOM и  $\overline{MS}$ , а также отношения асимптотических коэффициентов к точным.

**4. О ФУНКЦИИ ГЕЛЛ-МАННА-ЛОУ В ТЕОРИИ  $\varphi_{(4)}^4$**

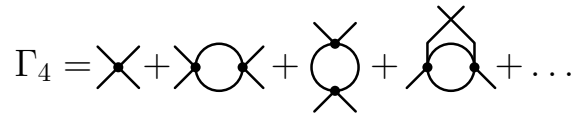
Рассмотрим, наконец, задачу восстановления ФГЛ в скалярной теории поля  $\varphi_{(4)}^4$ . Асимптотический ряд для ФГЛ имеет вид (2)–(4) с параметрами

$$a = 1, \quad b = \frac{7}{2}, \quad c_0 = \frac{1.096}{16\pi^2}, \quad c_1 = -4.7, \quad (40)$$

полученными в результате вычисления функционального интеграла методом перевала [5, 11].

Ситуация здесь осложняется тем, что коэффициенты ФГЛ в квантовой теории поля, начиная с третьего порядка ТВ, зависят от схемы вычитаний. Приведенные выше параметры относятся к так называемой симметричной схеме MOM, т. е. схеме перенормировок с вычитанием в симметричной точке ( $s = t = u = -4\mu^2/3$ ). Первоначальные вычисления в низших порядках теории возмущений были проведены именно в этой схеме (см. табл. 4, в которой указано также число фейнмановских диаграмм, которые необходимо вычислить в  $n$ -м порядке ТВ). В дальнейшем расчеты проводились в модифицированной схеме минимальных вычитаний (схема  $\overline{MS}$ ). В этом случае параметры асимптотики  $a$  и  $b$  остаются неизменными, а коэффициенты  $c_i$  меняются. Ниже мы приводим вычисление константы  $c_0$  в схеме  $\overline{MS}$ .

Константа  $c_0$  в асимптотической формуле (4)



**Рис. 7.** Вершинная функция в теории  $\varphi_{(4)}^4$  в однопетлевом приближении

вычисляется в квазиклассическом приближении и определяется из классического действия  $S$ , стоящего в экспоненте, и предэкспоненциального множителя. Переход от одной схемы вычитания к другой в ведущем порядке связан лишь с изменением классического действия

$$\exp(-S_{cl}) = \exp\left(-\frac{1}{g_{MOM}}\right) \rightarrow \exp\left(-\frac{1}{g_{\overline{MS}}}\right), \quad (41)$$

поэтому для нахождения  $c_0$  необходимо знать связь между зарядами  $g$  в двух схемах вычитания.

Рассмотрим для этой цели четыреххвостку в однопетлевом приближении (рис. 7)

$$\Gamma_4 = g - \frac{1}{2}g^2[f(s) + f(t) + f(u)],$$

где  $s, t$  и  $u$  — мандельштамовские переменные, а функция  $f(s)$  равна

$$f(s) = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d^{4-2\epsilon}k}{k^2(k-p)^2} = \frac{1}{\epsilon(1-2\epsilon)} \left(\frac{-\mu^2}{s}\right)^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} + 2 + \ln\left(-\frac{\mu^2}{s}\right) + O(\epsilon),$$

где  $s = p^2$  и  $\epsilon \rightarrow 0$ . Таким образом, в размерной регуляризации имеем

$$\Gamma_4 = g - \frac{1}{2}g^2 \times \left[ \frac{3}{\epsilon} + 6 + \ln\left(-\frac{\mu^2}{s}\right) + \ln\left(-\frac{\mu^2}{t}\right) + \ln\left(-\frac{\mu^2}{u}\right) \right].$$

Перенормируем константы связи и положим «голый» заряд  $g_B$  в схемах  $\overline{MS}$  и MOM равным соответственно

$$g_B = g_{\overline{MS}} + \frac{3}{2}g_{\overline{MS}}^2 \left(\frac{1}{\epsilon}\right), \quad (42)$$

$$g_B = g_{MOM} + \frac{3}{2}g_{MOM}^2 \left(\frac{1}{\epsilon} + \Delta_{MOM}\right).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \Gamma_4^{(\overline{MS})} &= g_{\overline{MS}} + \frac{3}{2}g_{\overline{MS}}^2 \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}g_{\overline{MS}}^2 \times \\ &\times \left[ \frac{3}{\varepsilon} + 6 + \ln\left(-\frac{\mu^2}{s}\right) + \ln\left(-\frac{\mu^2}{t}\right) + \ln\left(-\frac{\mu^2}{u}\right) \right] = \\ &= g_{\overline{MS}} - \frac{1}{2}g_{\overline{MS}}^2 \times \\ &\times \left[ 6 + \ln\left(-\frac{\mu^2}{s}\right) + \ln\left(-\frac{\mu^2}{t}\right) + \ln\left(-\frac{\mu^2}{u}\right) \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Gamma_4^{MOM} &= g_{MOM} + \frac{3}{2}g_{MOM}^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} + \Delta_{MOM} \right) - \frac{1}{2}g_{MOM}^2 \times \\ &\times \left[ \frac{3}{\varepsilon} + 6 + \ln\left(-\frac{\mu^2}{s}\right) + \ln\left(-\frac{\mu^2}{t}\right) + \ln\left(-\frac{\mu^2}{u}\right) \right] = \\ &= g_{MOM} - \frac{1}{2}g_{MOM}^2 \times \\ &\times \left[ 6 - 3\Delta_{MOM} + \ln\left(-\frac{\mu^2}{s}\right) + \ln\left(-\frac{\mu^2}{t}\right) + \ln\left(-\frac{\mu^2}{u}\right) \right]. \end{aligned}$$

По определению в схеме MOM

$$\Gamma_4^{MOM} \left( s = t = u = -\frac{4}{3}\mu^2 \right) = g_{MOM},$$

откуда  $\Delta_{MOM} = 2 + \ln(3/4)$ . Тогда из (42) имеем

$$\frac{1}{g_{MOM}} = \frac{1}{g_{\overline{MS}}} + \frac{3}{2}(\Delta_{MOM}). \quad (43)$$

Подставляя это выражение в (41), получаем

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{1}{g_{MOM}}\right) &= \exp\left(-\frac{1}{g_{\overline{MS}}} - \frac{3}{2}\Delta_{MOM}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{g_{\overline{MS}}}\right) \exp\left(-3 - \frac{3}{2}\ln\frac{3}{4}\right), \end{aligned}$$

и в итоге

$$\begin{aligned} c_0^{MOM} &= \frac{1.096}{16\pi^2}, \\ c_0^{\overline{MS}} &= c_0^{MOM} e^{-3} \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} \approx 0.07665 c_0^{MOM}. \end{aligned} \quad (44)$$

Интересно сравнить полученные асимптотические оценки с результатами вычислений в низших порядках ТВ. В схеме MOM вычислены четыре [41], а в схеме  $\overline{MS}$  — пять членов ряда ТВ [42, 43]. Результаты вычислений, а также сравнение с липатовской асимптотикой приведены в табл. 4, из которой видно, что точные значения  $\beta_n$  пока еще очень далеки от асимптотических, причем учет первой степенной поправки, известной в схеме MOM [11],

лишь ухудшает ситуацию в низших порядках ТВ. Действительно, при  $n = 2, 3$  и  $4$  коэффициенты  $\tilde{\beta}_n^{(1)} = \tilde{\beta}_n(1 - 4.7/n) < 0$ , а для  $n = 5$  имеем  $\tilde{\beta}_n^{(1)}/\beta_n = 0.096 \ll 1$ . Налицо сильная зависимость  $\beta_n$  и  $\tilde{\beta}_n$  от схемы вычитаний. Кроме того, сама форма записи асимптотики допускает определенный произвол: можно переписать (3) в виде

$$\beta_n \approx \Gamma(n + d + 1) a^n n^{b-d} \left( 1 + \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n^2} + \dots \right) \quad (45)$$

с произвольным параметром  $d$ , что эквивалентно (3) при  $n \rightarrow \infty$ , однако приводит к существенной зависимости от  $d$  в низших порядках ТВ (ср. значения  $\tilde{\beta}_n/\beta_n$  и  $\tilde{\tilde{\beta}}_n/\beta_n$  в табл. 4.) Например,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\beta}_n}{\tilde{\tilde{\beta}}_n} &= \frac{n!n^{7/2}}{\Gamma(n + 9/2)} = \\ &= \begin{cases} 0.0786, & n = 2, \\ 0.150, & n = 3, \\ 1 - \frac{63}{8n} + \frac{5313}{128n^2} - \frac{184.5}{n^3} + \dots, & n \rightarrow \infty, \end{cases} \end{aligned} \quad (46)$$

что объясняет различие (на порядок!) между значениями  $\tilde{\beta}_n/\beta_n$  и  $\tilde{\tilde{\beta}}_n/\beta_n$  в табл. 4 и показывает, что конкретная форма записи асимптотики коэффициентов ФГЛ становится несущественной лишь для высоких порядков ТВ.

Заметим, что в (45)  $k_1 = c_1 - d(d + 1)/2$ , поэтому при  $c_1 > -1/8$  выбором параметра  $d$  можно обратить в нуль первую степенную поправку. Такой выбор, возможно, является оптимальным. Если же, как в данном случае,  $c_1 < -1/8$ , то всегда  $k_1 < 0$ , причем минимальное значение  $|k_1|$  достигается при  $d = -1/2$ :

$$\begin{aligned} \beta_n &\approx \tilde{\beta}_n \left( 1 + \frac{\bar{k}_1}{n} + \frac{\bar{k}_2}{n^2} + \dots \right), \\ \tilde{\beta}_n &= \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) a^n n^{b+1/2} c_0, \\ \bar{k}_1 &= c_1 + \frac{1}{8}, \quad \bar{k}_2 = c_2 + \frac{1}{8}c_1 - \frac{5}{128}, \dots \end{aligned} \quad (47)$$

Как видно из табл. 4, для теории  $\varphi_{(4)}^4$  коэффициенты  $\tilde{\beta}_n$  близки к  $\tilde{\tilde{\beta}}_n$ , причем степенные поправки численно не малы:  $k_1 = -4.6, -4.7$  и  $-12.6$  соответственно для параметризаций  $\tilde{\beta}_n, \tilde{\tilde{\beta}}_n$  и  $\tilde{\beta}_n$ . Отсюда следует, что выход на асимптотику затягивается на большие  $n$ , что, как мы видели, характерно и для многих задач квантовой механики. Вычисления же следующих порядков ТВ в квантовой теории поля

очень сложны: число диаграмм возрастает факториально (см., в частности, табл. 4), и эффективного метода их расчета в высших порядках не существует. Так что трудно ожидать сколько-нибудь заметного прогресса в этом направлении.

Таким образом, ситуацию в теории  $\varphi_{(4)}^4$  нельзя признать благоприятной. Здесь не выполнено ни одно из условий, необходимых для определения асимптотики ФГЛ при  $g \rightarrow \infty$ : вычисленные коэффициенты  $\beta_n$  далеки от асимптотических, никаких сведений о наличии или отсутствии промежуточной асимптотики нет и неизвестны, вообще говоря, аналитические свойства искомой функции  $\beta(g)$ .

В такой ситуации уместно говорить о восстановлении функции в некотором конечном интервале значений параметра разложения с заданной точностью, хотя оценка точности зависит от метода суммирования. Именно в такой постановке эта задача рассматривалась в работах [8–11].

В [8] использовалась так называемая улучшенная теория возмущений, в которой сумма расходящегося ряда  $F(g) = \sum_n a_n (-g)^n$  аппроксимируется функциями

$$\begin{aligned} F(z)^{(N)} &= \tilde{F}(z) + R_N(z), \\ R_N(z) &= \sum_{n \leq N} (a_n - \tilde{a}_n) (-z)^n, \end{aligned} \quad (48)$$

где  $\tilde{F}(z) = \sum_n \tilde{a}_n (-z)^n$  с асимптотическими коэффициентами вида (4) вычисляется точно с помощью преобразования Бореля (см. (А.6)). Этот простой и, можно сказать, наивный метод суммирования позволяет тем не менее аппроксимировать точное решение в более широком интервале  $g$ , чем полиномы обычной ТВ. Суммирование остатка  $R_N(z)$  методом Паде–Бореля расширяет область восстановления ФГЛ до значений  $g \sim 1$  [8]. Таким путем было показано, что ФГЛ в теории  $\varphi_{(4)}^4$  не может иметь нетривиального нуля при  $g = g_0 \approx 0.63$  (на что было указание в работе [5]), и этот вывод в дальнейшем подтвердился. Однако говорить о реальном продвижении в область  $g \gg 1$  здесь не приходится.

В работе [10] для суммирования ряда (2) был применен метод конформ-Бореля. Основная трудность, связанная с факториальным ростом коэффициентов, в этом случае преодолевается путем использования интегрального преобразования Лапласа. При

этом искомая функция представляется в виде

$$f(g) = \frac{1}{g} \int_0^\infty dx e^{-x/g} \left(\frac{x}{g}\right)^{\mu-\nu} \left(x \frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu B^{(\mu,\nu)}(x), \quad (49)$$

где борелевский образ  $B^{(\mu,\nu)}(x)$  задается сходящимся степенным рядом, а параметры  $\mu$  и  $\nu$  подбираются так, чтобы добиться быстрее убывания коэффициентов этого ряда. Для аналитического продолжения суммы ряда на весь бесконечный интервал интегрирования в (49) используется конформное преобразование, обычно выбираемое в виде

$$w(x) = \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{\sqrt{1+ax} + 1},$$

которое отображает комплексную плоскость с разрезом  $(-\infty, -1/a]$  на единичный круг  $|w| < 1$  и учитывает корневое ветвление функции  $B(x)$  в точке  $x = 1/a$ . Это конформное отображение применяется к функции

$$B_\lambda[x(w)] = \frac{x^\lambda}{w^\lambda} \sum_k^N w^k B_k^{(\lambda)},$$

содержащей дополнительный параметр  $\lambda$ , введение которого позволяет учесть асимптотику функции  $B(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  или функции  $f(g)$  при  $g \rightarrow \infty$ . Хотя точный ответ не зависит от параметра  $\lambda$ , в приближенном выражении, учитывающем лишь конечное число членов ряда, остается некоторый произвол, который фиксируется, например, исходя из минимизации относительной погрешности [10].

В [11] ряд ТВ суммировался с помощью интегрального преобразования Зоммерфельда–Ватсона (в предположении об аналитичности коэффициентов  $\beta_n$  по  $n$ ):

$$\beta(g) = -\frac{1}{2i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} dz \frac{\beta(z)}{\sin \pi z} g^z, \quad \beta(n) = \beta_n, \quad (50)$$

причем подынтегральная функция  $\beta(z)$  заменялась аппроксимантами Паде  $[L/M](z)$ , построенными по первым членам ряда ТВ. Вычисленные таким путем значения  $\beta(g)$  в пределах точности вычислений (около 10 % при  $g = 40$ ) согласуются с работой [10]: в интервале  $0 < g \lesssim 50$  ФГЛ монотонно возрастает и ведет себя как  $g^\alpha$  с показателем  $\alpha = 1.95 \pm 0.2$ . Если эту зависимость экстраполировать на случай  $g \rightarrow \infty$ , то это приводит к выводу о внутренней противоречивости теории  $\varphi_{(4)}^4$ . Разумеется, в свете

сказанного выше, на этом нельзя настаивать категорически.

В работе [44] предложен метод построения сходящейся ТВ в квантовой механике и теории поля. Применение его к теории  $\varphi_{(4)}^4$  показало [12], что при малых значениях  $g$  функция  $\beta$  восстанавливается с хорошей точностью и совпадает с результатами предыдущих вычислений, однако влияние отброшенных членов ряда ТВ при больших значениях  $g$  велико, что не позволяет продвинуться в область сильной связи.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы нашей работы.

1. Восстановление асимптотики функции  $\beta$  в режиме сильной связи по ее первым коэффициентам ТВ  $\beta_n$  и их асимптотическим значениям  $\tilde{\beta}_n$ , строго говоря, невозможно без привлечения дополнительной информации.

2. Тем не менее на физическом уровне строгости эта цель иногда может быть достигнута. Необходимыми, хотя и недостаточными условиями являются наличие большого числа вычисленных членов ряда ТВ, которые уже выходят на свою асимптотику, и отсутствие у искомой функции промежуточной асимптотики.

3. В квантовой теории поля вычисление коэффициентов ряда ТВ затруднено факториальным ростом числа диаграмм Фейнмана, наличием ультрафиолетовых расходимостей и отсутствием эффективных методов вычисления диаграмм высоких порядков. Прогресс, достигнутый за 50 с лишним лет, прошедших после вычисления швингеровской поправки  $\alpha/2\pi$  к аномальному магнитному моменту электрона в КЭД, позволил продвинуться лишь до членов порядка  $(\alpha/\pi)^4$ , и вряд ли можно ожидать существенных изменений в этой области [45]. Аналогично, в квантовой теории поля вычисление каждого следующего члена ряда ТВ для функции  $\beta$  потребовало в среднем 10 лет.

4. Учет степенных поправок к  $\tilde{\beta}_n$  повышает точность аппроксимации коэффициентов ФГЛ при  $n \gg 1$ , однако приводит к резкому ухудшению точности в низших порядках ТВ (см. в этой связи рис. 2 и 6). При этом проблема сшивания первых коэффициентов  $\beta_n$  с асимптотикой  $\tilde{\beta}_n$  отнюдь не облегчается. Ситуация усугубляется еще и тем, что ряды (3) по степеням  $1/n$  являются расходящимися (см., например, [15], а также Приложение В). К тому же нахождение степенных поправок высокого порядка

в квантовой теории поля связано с вычислением высших поправок к квазиклассическому приближению для функционального интеграла и чрезвычайно трудоемко.

5. Развитые в настоящее время методы суммирования асимптотических рядов (см., например, [4, 9–12]) дают возможность значительно расширить область применимости ТВ и восстановить искомую функцию с контролируемой точностью в конечном интервале значений аргумента, но не позволяют найти ее асимптотику на бесконечности.

6. Наконец, сделаем несколько замечаний относительно работ [13, 14]. В них используется та же информация о коэффициентах ряда ТВ для ФГЛ, что и в [10], а метод суммирования является некоторой модификацией метода конформ-Бореля. Процедура подгонки параметров модели, используемая автором, основывается на статистической обработке коэффициентов ряда ТВ  $\beta_n$  в интервале  $20 \leq n \leq 40$ , где соответствующие точные значения неизвестны, и полагать, что при этом уже осуществляется выход на липатовскую асимптотику, нет никаких оснований. Первые члены ряда, как мы видели выше, еще достаточно далеки от асимптотических, а поправка порядка  $1/n$  только ухудшает ситуацию при небольших  $n$ .

Выдвигаемое в [13] требование гладкости интерполирующей функции<sup>12)</sup> между первыми вычисленными членами ряда ТВ и их асимптотическими значениями, хотя и выглядит естественным, однако далеко недостаточно для однозначного определения коэффициентов  $\beta_n$  в интервале  $10 \lesssim n \lesssim 50$ , существенном для вычисления асимптотики ФГЛ. Рассмотренные в [13] тестовые примеры (нуль-мерный аналог  $\varphi_{(0)}^4$  и одномерный ангармонический осциллятор) являются слишком упрощенными, и, кроме того, при этом в расчет вводятся десятки точно известных членов ряда ТВ, для которых липатовская асимптотика уже установилась с процентной точностью.

Вызывает сомнение принятый в [13] способ использования низших порядков ТВ, известных из диаграммных вычислений: с их помощью находились коэффициенты степенных поправок  $c_j$  из урав-

<sup>12)</sup> Точнее, предполагается, что существует аналитическая функция такая, что  $\beta(n) = \beta_n$ . Отметим, что в квантовой теории поля аналитичность коэффициентов ФГЛ по  $n$  строго не доказана. Кроме того, они заданы в целых точках  $n = 2, 3, \dots$ , аналитическое продолжение с которых неоднозначно.

нений типа

$$\frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots + \frac{c_l}{n^l} = \frac{\beta_n}{\tilde{\beta}_n} - 1, \quad 2 \leq n \leq l + 1, \quad (51)$$

в которых фигурируют  $l$  первых порядков ТВ. Очевидно, что такая подгонка имеет смысл в области  $n \geq n_0 \gg 1$  (и ранее использовалась в [22, 46]), однако при  $n \sim 1$  она не оправдана и ведет к неверным результатам. Чтобы продемонстрировать этот факт, мы вычислили, согласно (51), коэффициенты  $c_j$  для двух примеров, для которых известны их точные значения: одномерный ангармонический осциллятор и эффект Штарка. Как видно из табл. 5, ни о какой сходимости с ростом  $l$  вычисленных таким образом степенных поправок не может быть и речи. Это, в сущности, понятно и без вычислений: ряд (3) по степеням  $1/n$  расходится, и обрыв его на  $l$ -м члене может быть оправдан только при условии  $1/n \ll 1$ .

Следует также отметить, что для скалярной теории  $\varphi_{(4)}^4$  результаты работы [13] для ФГЛ в области  $5 \lesssim g < 20$  существенно расходятся с аналогичными результатами других авторов, полученными независимыми методами [10, 11]. В этом смысле было бы интересно разобраться в причине несогласия этих результатов.

Те же замечания в еще большей степени относятся к работе [14], посвященной асимптотике ФГЛ в КЭД. В этом случае известны только четыре первых члена ряда ТВ в схеме МОМ [47], а вид асимптотических коэффициентов  $\tilde{\beta}_n$ , полученный в рамках определенного анзаца [48], пока еще полностью не установлен. В этих условиях говорить о возможности восстановления ФГЛ в режиме сильной связи, по нашему мнению, преждевременно.

Таким образом, на наш взгляд, высказанное в [13, 14] утверждение об отсутствии нуля заряда в теории  $\varphi_{(4)}^4$  и в КЭД ни в коей мере нельзя считать обоснованным. Имеющиеся результаты суммирования асимптотических рядов ТВ скорее говорят о внутренней противоречивости этих теорий. Содержательное утверждение об асимптотике функции  $\beta(g)$  при  $g \rightarrow \infty$  можно сделать, только вычислив значительно большее число членов ряда ТВ, либо выйдя за рамки приближения слабой связи и используя методы, не опирающиеся на ТВ.

Авторы искренне благодарны М. И. Высоцкому, Ю. А. Кубышину, В. Д. Муру, В. А. Новикову и Л. Б. Окуню за обсуждение работы и ряд полезных замечаний, С. Г. Позднякову за помощь в численных расчетах, а также Б. М. Карнакову и М. Н. Маркиной за помощь при оформлении рукописи.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 02-02-16889, 00-15-96691, 01-02-16850).

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Продолжим обсуждение примеров из разд. 2 статьи. Функции (7), (8) имеют полюсы на отрицательной полуоси  $g < 0$ . Особую точку можно поместить и в нуль; например, для функции

$$\begin{aligned} f_N(g) &= (-1)^{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} (n - N - 1)! (-g)^n = \\ &= g^N \int_0^{\infty} \frac{\exp(-x/g)}{1+x} dx = \\ &= -g^N \exp(g^{-1}) \text{Ei}(-g^{-1}) \quad (A.1) \end{aligned}$$

точка ветвления  $g = 0$  является единственной особенностью в конечной части  $g$ -плоскости, причем скачок на разрезе (см. (13)) равен

$$\text{disc } f_N(g) = \pi g^{N+1} \exp(g^{-1}), \quad -\infty < g < 0. \quad (A.2)$$

Поскольку при  $g \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} f_N &= g^N [\ln g - C + O(\ln g/g)], \\ C &= -\psi(1) = 0.5772 \dots, \end{aligned} \quad (A.3)$$

то у функции  $\bar{\beta}(g) = \beta(g) + c f_N(g)$   $N$  первых коэффициентов ТВ и  $N$  степенных поправок те же, что и у  $\beta(g)$ , в то время как асимптотика при  $g \rightarrow \infty$  может существенно отличаться.

Коэффициенты ТВ в (A.1) обращаются в нуль при  $n \leq N$ . Хотя в квантовой теории поля условие аналитичности по номеру  $n$  для коэффициентов ФГЛ не доказано и по существу является предположением, этому условию нетрудно удовлетворить, как показывают примеры (9)–(11). Их обобщением может служить функция

$$f(g, s) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Gamma(n - N)]^{-s} g^n, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (A.4)$$

которая при больших  $g$  сводится к функции Миттаг-Лефлера

$$\begin{aligned} E_s(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(ns + 1)} \approx \\ &\approx s^{-1} \exp(z^{1/s}), \quad z \rightarrow \infty \quad (A.5) \end{aligned}$$

Таблица 5. Определение коэффициентов  $c_j$  согласно (51)

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$
$k$	Ангармонический осциллятор ( $\varphi_{(1)}^4$ )					
1	-0.359	—	—	—	—	—
3	-2.551	4.00	-1.81	—	—	—
5	-1.626	-5.58	32.5	-49.8	24.1	—
6	-0.206	-26.9	1.53(2)	-3.69(2)	4.13(2)	-1.70(2)
7	0.334	-38.2	2.48(2)	-7.66(2)	1.29(3)	-1.12(3)
Точн. [22]	-1.319	-1.939	-7.014	-40.12	-3.055(2)	-2.808(3)
$k$	Эффект Штарка (основной уровень)					
1	-1.476	—	—	—	—	—
3	-7.108	21.3	-20.0	—	—	—
5	-5.067	-21.1	2.84(2)	-8.83(2)	8.56(2)	—
6	-3.763	-60.2	7.27(2)	-3.23(3)	6.57(3)	-5.01(3)
Точн. [46, 57]	-5.944	11.36	-35.7	-37.1	-1.12(3)	-1.0(4)

Примечание. Приведены коэффициенты при степенных поправках, вычисленные согласно процедуре, указанной в (51) с учетом  $k$  низших порядков ТВ; для сравнения даны точные значения этих коэффициентов.

(при  $|\arg z| < s\pi/2$ , [1, гл. VIII]), причем  $z^{1/s} \approx sg^{1/s}$ . При  $s = 1$  и  $2$  эта формула соответствует (10) и (11).

Коэффициенты в (A.4) можно заменить на любую целую функцию от  $n$ , имеющую в точках  $n = N, N - 1, N - 2, \dots$  нули произвольной кратности (возможно, зависящей от  $n$ ). Такие функции определяются в явном виде с помощью представления Вейерштрасса, известного из теории аналитических функций.

Обобщение формулы (A.1) имеет вид

$$S_b(g) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(n + b + 1)(-g)^n = \Gamma(b + 1)g^{-(b+1)} \exp(g^{-1})\Gamma(-b, g^{-1}), \quad (A.6)$$

где  $\Gamma(-b, x)$  — неполная гамма-функция; для целых  $b = 0, 1, 2, \dots$  она выражается через интегральную экспоненту:

$$\Gamma(-b, x) = \frac{(-1)^{b+1}}{b!} \left\{ \text{Ei}(-x) - e^{-x} \sum_{k=1}^b (k-1)!(-x)^{-k} \right\}$$

(при  $b = 0$  сумму по  $k$  следует опустить). Приведем

асимптотики:

$$S_b(g) = \frac{1}{g} \begin{cases} \Gamma(b)(1 - \delta + \dots), & b > 0, \\ \ln g - C + \dots, & b = 0, \end{cases} \quad (A.7)$$

где  $g \rightarrow \infty$ ,  $\delta = [b/(b - 1)]g^{-1}$  при  $b > 1$ ,  $\delta = \ln g/g$  при  $b = 1$ ,  $\delta = \Gamma(1 - b)g^{-b}$  при  $0 < b < 1$ . Наконец, если  $b = -b' < 0$ , то

$$S_b(g) = [\pi/\sin \pi b']g^{b'-1} + \dots, \quad g \rightarrow \infty. \quad (A.8)$$

При  $b = -1, -2, \dots$  несколько первых членов ряда (A.6) обращаются в бесконечность, поэтому суммирование надо начинать с  $n = -b$ . При этом мы возвращаемся к (A.1), и асимптотика  $S_b(g)$  содержит  $\ln g$ , как в (A.3). Доказательство соотношения (A.6) нетрудно получить с помощью преобразования Бореля.

### ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Рассмотрим вопрос о расходимости ряда степенных поправок (3) на примере нуль-мерной модели  $\varphi_{(0)}^{2K}$ .



Для  $n$ -го порядка ТВ имеем из (24)

$$J_n = \frac{\Gamma(Kn + 1/2)}{\sqrt{\pi} n!} \left[ \frac{2^K}{(2K)!} \right]^n, \quad (Б.1)$$

$$\tilde{J}_n = [(K - 1)n]! a^n n^{-1} c_0,$$

где

$$a = \frac{1}{(2K - 1)!} \left( \frac{2K}{K - 1} \right)^{K-1}, \quad (Б.2)$$

$$c_0 = 1/\pi \sqrt{2(K - 1)},$$

откуда

$$J_n/\tilde{J}_n = \sqrt{2\pi(K - 1)} \frac{\Gamma(Kn + 1/2)}{\Gamma((K - 1)n)\Gamma(n + 1)} \times$$

$$\times \left[ \frac{(K - 1)^{K-1}}{K^k} \right]^n =$$

$$= 1 - \frac{2K^2 + K - 1}{24K(K - 1)} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (Б.3)$$

Учитывая формулу Барнса (см. 1.18.12 в справочнике [49]), получаем

$$\frac{\Gamma(n + b + 1)}{\Gamma(n + 1)n^b} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{n^k}\right), \quad (Б.4)$$

$$q_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k(k + 1)} [B_{k+1}(b + 1) - B_{k+1}],$$

где  $B_{k+1}(x)$  и  $B_{k+1}$  — полиномы и числа Бернулли. Отсюда находим

$$\frac{J_n}{\tilde{J}_n} = \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{n^{2m-1}}\right) =$$

$$= 1 - \frac{a_1}{n} + \frac{a_1^2}{2n^2} - \left(a_2 + \frac{1}{6}a_1^3\right) \frac{1}{n^3} + \dots, \quad (Б.5)$$

$$a_m = \frac{B_{2m}}{2m(2m - 1)} \times$$

$$\times \{1 + (K - 1)^{1-2m} + K^{1-2m} - (2K)^{1-2m}\}.$$

Поскольку [49]

$$B_{2m} \approx (-1)^{m+1} 2(2m)! (2\pi)^{-2m} \times$$

$$\times [1 + O(2^{-2m})], \quad m \gg 1, \quad (Б.6)$$

ряд в экспоненте (Б.5) — знакопеременный и при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{J_n}{\tilde{J}_n} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{n^j} \approx$$

$$\approx \exp\left\{-\frac{s}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \frac{(k - 1)!}{(2\pi n)^k}\right\}, \quad (Б.7)$$

где  $s = 2$  при  $K = 2$ ,  $s = 1$  при  $K \geq 3$ . Таким образом, асимптотика коэффициентов  $c_j$  практически не зависит от степени нелинейности поля  $\varphi_{(0)}^{2K}$  в (24).

Остается разложить экспоненту (Б.7) в степенной ряд. Для этого воспользуемся формулой [50], связывающей между собой коэффициенты  $c_j$  степенного разложения с коэффициентами  $a_m$  из (Б.5):

$$c_j = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots \\ \dots+jk_j=j}} \frac{1}{k_1!k_2!\dots k_j!} \times$$

$$\times b_1^{k_1} b_2^{k_2} \dots b_j^{k_j}, \quad k_i \geq 0, \quad (Б.8)$$

где  $b_i = a_{(i+1)/2}$ , если  $i = 2m - 1$ , и  $b_j = 0$ , для  $i = 2m$ . Уравнение (Б.8) позволяет определить асимптотику коэффициентов  $c_j$  при  $j \rightarrow \infty$  исходя из асимптотики  $b_k$ . Действительно, если коэффициенты  $b_k$  растут факториально,  $b_k \sim [1 + (-1)^k](k - 1)!(2\pi)^{-k}$  при  $k \rightarrow \infty$ , то ведущий вклад в сумму (Б.8) вносит  $b_j$ . Другие вклады вида  $b_{j-1}b_1, b_{j-2}b_2$  и т. д. подавлены степенным образом, а вклады вида  $b_{j/2}b_{j/2}$  и т. д. подавлены экспоненциально ( $b_{j/2}^2/b_j \sim 2^{-j}$ ). В том случае, когда коэффициент  $b_j$  отсутствует, как в нашем случае для четных  $j$ , ведущий вклад определяется следующим членом,  $b_{j-1}b_1$ . Поэтому коэффициенты  $c_j$  ведут себя как

$$c_j \sim \left(\frac{j - 1}{2}\right)! (2\pi)^{-(j+1)/2}, \quad j \rightarrow \infty \quad (Б.9)$$

для нечетных  $j$  и относительно подавлены как  $1/j$  по сравнению с (Б.9) для четных  $j$ , что подтверждается и численным расчетом.

Заметим, наконец, что для интеграла (24) при  $g \rightarrow \infty$

$$J(g; K) = c_{\infty} g^{-1/2K} [1 - kg^{-1/K} + O(g^{-2/K})], \quad (Б.10)$$

$$c_{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(\frac{2K + 1}{2K}\right) [(2K)!]^{1/2K}, \quad (Б.11)$$

$$k = \frac{\Gamma(3/2K)}{2 \Gamma(1/2K)} [(2K)!]^{1/K}.$$

При  $K = 2$ , т. е. для модели  $\varphi_{(0)}^4$ , эти формулы совпадают с (23).

Как видно из (Б.10), асимптотика  $\tilde{J}(g; K) = c_{\infty} g^{-1/2K}$  устанавливается только при  $g \gg g_0 = K^K \sim (K!)^2 (2/3)^K$ , причем  $g_0 \gg 1$ , если  $K \geq 3$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Здесь мы обсудим вычисление высших порядков ТВ и асимптотик для задачи об эффекте Штарка.

В модели трехмерного  $\delta$ -потенциала комплексная энергия  $E(F)$  уровня может быть найдена из решения уравнения [51, 52]

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi i}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} \times \left\{ 1 - \exp \left[ -i \left( \varepsilon\tau + \frac{1}{3} F^2 \tau^3 \right) \right] \right\} = 1, \quad (B.1)$$

где  $\varepsilon = E/E_0 = -2E_r + i\Gamma$  — приведенная энергия,  $F = \mathcal{E}/\kappa_0^3$ , и далее мы полагаем  $\kappa_0 = 1$  и  $E_0 = -1/2$ . Поскольку  $\text{Im} \varepsilon = \Gamma > 0$ , этот интеграл расходится на верхнем пределе (эта расходимость отнюдь не случайна и связана с экспоненциальным ростом при  $r \rightarrow \infty$  гамовской волновой функции квазистационарного состояния [33]). Поэтому уравнение (B.1) требует регуляризации, в качестве которой достаточно сместить контур интегрирования с вещественной оси  $\tau$  в нижнюю полуплоскость<sup>13)</sup> в пределах угла  $-\pi/3 < \arg \tau < 0$ . Естественно выбрать линию наискорейшего спуска, полагая  $\tau = t \exp(-i\pi/6)$ ,  $0 < t < \infty$ , что дает

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( e^{i\pi/3} \varepsilon t + \frac{F^2 t^3}{3} \right) \right] \right\} = \sqrt{4\pi \exp \left( \frac{i\pi}{3} \right)}. \quad (B.2)$$

Теперь интеграл сходится при любых комплексных  $\varepsilon$ , и уравнение (B.2) легко может быть решено на компьютере (см. кривую 3 на рис. 3).

Разлагая  $\exp(-F^2 t^3/3)$  в ряд и интегрируя почленно, приходим к уравнению

$$\sqrt{\varepsilon} \left\{ 1 - \sum_{k=1}^\infty \frac{\Gamma(3k-1/2)}{k! 3^k \sqrt{4\pi}} \left( \frac{F^2}{\varepsilon^3} \right)^k \right\} = 1, \quad (B.3)$$

из которого высшие порядки ТВ  $\alpha_n$  определяются последовательно. Гиперполяризуемости  $\alpha_n$  при  $n \leq 14$  были сосчитаны точно (в виде рациональных дробей), а вплоть до  $n = 200$  численно (см. табл. 2).

Из (B.2) вытекает, что при  $F \rightarrow \infty$

$$\varepsilon(F) = F^{2/3} \left\{ \xi_0 \exp \left( \frac{2\pi i}{3} \right) + \xi_1 F^{-1/3} \exp \left( -\frac{\pi i}{6} \right) + O(F^{-2/3}) \right\},$$

<sup>13)</sup> Авторы благодарны В. Д. Муру за обсуждение этого вопроса. К уравнению (B.1) можно было бы применить и более универсальный метод регуляризации Зельдовича [33, 53], но он требует значительно большего времени счета, чем по формуле (B.2).

где  $\xi_0 = 3^{-1/3} \xi$ , а  $\xi$  — корень уравнения

$$\int_0^\infty [1 - \exp(\xi x - x^3)] x^{-3/2} dx = -0, \quad (B.4)$$

$$\xi = 1.010\ 396 \dots,$$

откуда окончательно

$$\Gamma(F) = \text{Im} \varepsilon(F) = \gamma_\infty F^{2/3} \{ 1 - q F^{-1/3} + O(F^{-2/3}) \}, \quad (B.5)$$

где  $\gamma_\infty = 2^{-1} \cdot 3^{1/6} \xi = 0.606\ 711 \dots$ ,  $q = 1.342\ 964 \dots$ . Эта асимптотика не содержит  $\ln F$ , что отличает трехмерный  $\delta$ -потенциал от одномерного (ср. с (37)). В случае размерности  $D = 1$  уравнение для  $E(F)$  выражается через функции Эйри (см. (A.3) и (A.4) в работе [37]). Используя для них асимптотические разложения, получаем

$$\sqrt{\varepsilon} = \sum_{k=0}^\infty a_k \left( \frac{F^2}{\varepsilon^3} \right)^k, \quad (B.6)$$

где

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 5/8,$$

$$a_{k+1} = [(2k+1)(6k+1)(6k+5)/8(k+1)] a_k.$$

Отсюда легко определяются гиперполяризуемости  $\alpha_n$  для одномерного  $\delta$ -потенциала.

Наконец, коэффициенты  $\alpha_n$  для атома водорода были рассчитаны с помощью рекуррентных соотношений, приведенных ниже (при  $n \leq 160$  наши вычисления согласуются с [46, 54], а при  $n \leq 30$  — с работой [55]). Часть полученных результатов приведена в табл. 2, наглядно демонстрирующей факториальный рост высших порядков ТВ. Из трех рассмотренных выше систем атом водорода является наиболее «рыхлым»: его поляризуемость  $\alpha_2$  в 18 раз превышает поляризуемость уровня, связанного силами нулевого радиуса [51]. Эта тенденция сохраняется с ростом порядка ТВ  $n$ , причем при  $n \sim 200$  различие в численных значениях  $\alpha_n$  достигает уже шести порядков. Отметим, что все коэффициенты  $\alpha_n$  вещественные. Мнимая часть энергии,  $\Gamma(F)$ , отлична от нуля и возникает при суммировании рядов ТВ только вследствие расходимости этих рядов при любом  $F \neq 0$ .

Асимптотика  $\alpha_n$  следует из дисперсионного соотношения [56, 57]

$$\alpha_n = [1 + (-1)^n] \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Gamma(F) F^{-(n+1)} dF \quad (B.7)$$

с учетом того, что в слабых полях, где осуществляется туннельная ионизация, ширина уровня равна

$$\Gamma(F) = A \exp(-1/aF) \times F^{-(b+1)} (1 - h_1 F + h_2 F^2 - \dots), \quad F \rightarrow 0 \quad (\text{B.8})$$

(параметры  $A$ ,  $a$  и т. д. зависят от конкретного атомного уровня, см. табл. 3). Подставляя это разложение в (B.7), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2A}{\pi} a^{n+b+1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \Gamma(n+b+1-j) a^{-j} h_j = \\ &= \tilde{\alpha}_n \left\{ 1 - \frac{h_1}{a(n+b)} + \frac{h_2}{a^2(n+b)(n+b-1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{h_3}{a^3(n+b)(n+b-1)(n+b-2)} + \dots \right\} \end{aligned}$$

и, переразлагая по степеням  $1/n$ , приходим к стандартной форме (3). При этом  $n$  — четное (для основного уровня) и

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{2A}{\pi} a^{b+1} \Gamma(n+b+1) a^n \equiv (n+b)! a^n c_0, \quad (\text{B.9})$$

а коэффициенты  $c_j$  и  $h_j$  связаны линейными соотношениями. Так, для атома водорода (основное состояние) имеем  $a = 3/2$ ,  $b = 0$ ,  $\tilde{\alpha}_n \equiv \tilde{\alpha}_n$  и

$$\begin{aligned} c_1 &= u_1, \quad c_2 = u_2, \quad c_3 = u_3 + u_2, \\ c_4 &= u_4 + 3u_3 + u_2, \\ c_5 &= u_5 + 6u_4 + 7u_3 + u_2, \\ c_k &= \sum_{j=2}^k \sigma_{k-1}^{(j-1)} u_j = u_k + \frac{1}{2}(k-1)(k-2) \times \\ &\quad \times u_{k-1} + \dots + (2^{k-2} - 1)u_3 + u_2, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

где  $u_j = h_j(-2/3)^j$ , а  $\sigma_n^{(m)}$ ,  $n \geq m$  — известные из комбинаторики числа Стирлинга второго рода (в частности,  $\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(n)} = 1$ ). Коэффициенты  $h_j$  были взяты из [46, 57], а  $c_j$  рассчитаны по этим формулам. Заметим, что главный член в (B.8) определяется квазиклассической проницаемостью барьера, а

вычисление  $h_j$  связано с нахождением высших поправок по параметру квазиклассичности.

Атом водорода в  $D$  измерениях рассматривался многими авторами (см., например, [58–60]). В случае основного состояния  $E_0 = -2/(D-1)^2$ , а ряд ТВ для эффекта Штарка имеет вид (25), где

$$F = (-2E_0)^{-3/2} \mathcal{E} = \frac{1}{8}(D-1)^3 \mathcal{E}$$

— приведенное электрическое поле. Вероятность ионизации этого уровня в слабом поле находится с помощью метода ВКБ:

$$\begin{aligned} \Gamma_D(F) &= \frac{2^{D+1}}{(D-1)^2 \Gamma((D+1)/2)} \times \\ &\quad \times F^{-(D-1)/2} \exp\left(-\frac{2}{3F}\right) \times \\ &\quad \times \left[ 1 - \frac{1}{48}(33D^2 + 42D + 5)F + O(F^2) \right], \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

откуда с учетом (B.7) следует асимптотика (31) для гиперполяризуемостей  $\alpha_n$ .

Вычисление  $\alpha_n$  в точном виде можно свести к рекуррентным соотношениям, задающим процедуру спуска по индексу  $j$ :

$$A_n^{(n)} = (2n-2)!/n!(n-1)!,$$

$$\begin{aligned} A_{j-1}^{(n)} &= \left( j + \frac{D-1}{2} \right) A_j^{(n)} + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{p+q=j-1} A_p^{(m)} A_q^{(n-m)}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

начиная с  $j = n$  ( $A_n^{(n)} = 1, 1, 2, 5, 14, \dots$  при  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ). Здесь  $p, q \geq 0$ , а  $n$ -й порядок ТВ равен<sup>14)</sup>

$$\alpha_n = \begin{cases} 2^{1-2n} \left[ (D+1)A_1^{(n)} + 2 \sum_{m=1}^{n-1} A_0^{(m)} A_0^{(n-m)} \right], & n = 2, 4, 6, \dots, \\ 0, & n - \text{нечетное.} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

<sup>14)</sup> Здесь исправлены опечатки, допущенные в работе [60]. Если  $D = 3$ , то  $F \equiv \mathcal{E}$ , а (B.12), (B.13) сводятся после некоторых преобразований к уравнениям из [46, 54] для безузельных состояний с параболическими квантовыми числами  $n_1 = n_2 = 0$ ,  $m = (D-3)/2$ .

При этом для нечетных  $n$  имеем  $A_0^{(n)} = (D + 1)A_1^{(n)}/2$ , а при четных  $n$  в уравнениях (В.12), (В.13) следует считать  $A_0^{(n)} \equiv 0$ .

Тем самым задана чисто алгебраическая схема вычислений, весьма удобная для расчетов на компьютере (все  $A_j^{(n)}$  — положительные рациональные дроби, поэтому при расчете по рекуррентным соотношениям не возникает сокращений и не происходит потери точности). Это позволило достичь рекордных значений  $n \sim 200$  (см. табл. 2), что вряд ли возможно в квантовой теории поля в обозримом будущем (впрочем, и в квантовой механике такое упрощение в вычислениях высоких порядков ТВ возможно только для простых систем с полиномиальным или кулоновским потенциалом). В случае возбужденных состояний уравнения, как правило, усложняются, а нечетные порядки ТВ  $\alpha_n$  уже отличны от нуля.

Отметим еще, что для трех параметризации,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_n &= \Gamma(n + 1/2)a^n n^{(D-2)/2} c_0, \\ \tilde{\alpha}_n &= n! a^n n^{(D-3)/2} c_0, \\ \tilde{\tilde{\alpha}}_n &= \Gamma\left(n + \frac{D-1}{2}\right) a^n c_0, \end{aligned} \tag{В.14}$$

при  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\tilde{\alpha}}_n}{\tilde{\alpha}_n} &= 1 + \frac{(D-1)(D-3)}{8n} + \dots, \\ \frac{\tilde{\tilde{\alpha}}_n}{\bar{\alpha}_n} &= 1 + \frac{(D-2)^2}{8n} + \dots \end{aligned} \tag{В.15}$$

с точностью до членов порядка  $1/n^2$ . Отсюда понятно, почему для размерностей  $D = 2$  и  $3$  все параметризации близки друг к другу, как это видно из рис. 6.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford Univ. Press, Oxford (1967) [перевод: Г. Харди, *Расходящиеся ряды*, Изд-во иностр. лит., Москва (1951)].
2. М. А. Евграфов, серия *Современные проблемы математики*, ВИНТИ, Москва (1986), т. 13, с. 5.
3. F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **85**, 631 (1952).
4. D. I. Kazakov and D. V. Shirkov, *Fortsch. der Phys.* **28**, 465 (1980).
5. Л. Н. Липатов, Письма в ЖЭТФ **25**, 116 (1977); ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
6. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. D* **15**, 1544, 1558 (1977).
7. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford (1989).
8. V. S. Popov, V. L. Eletsky, and A. V. Turbiner, *Phys. Lett.* **72B**, 99 (1977); ЖЭТФ **74**, 445 (1978).
9. V. L. Eletsky and V. S. Popov, *Phys. Lett.* **77B**, 411 (1978).
10. Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, Д. В. Ширков, ТМФ **38**, 15 (1979).
11. Ю. А. Кубышин, ТМФ **58**, 137 (1984).
12. Д. И. Казаков, А. И. Онищенко, ТМФ **110**, 291 (1997).
13. И. М. Суслев, Письма в ЖЭТФ **71**, 315 (2000); ЖЭТФ **120**, 5 (2001).
14. И. М. Суслев, Письма в ЖЭТФ **74**, 211 (2001).
15. И. М. Суслев, ЖЭТФ **117**, 659 (2000).
16. И. М. Суслев, УФН **168**, 503 (1998).
17. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН СССР **95**, 773, 1177; **96**, 261 (1954).
18. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ **28**, 750 (1955).
19. А. А. Владимиров, Д. В. Ширков, УФН **129**, 407 (1979).
20. Я. Б. Зельдович, В. В. Соколов, УФН **146**, 493 (1985).
21. C. M. Bender and T. T. Wu, *Phys. Rev.* **184**, 1231 (1969).
22. C. M. Bender and T. T. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 461 (1971); *Phys. Rev. D* **7**, 1620 (1973).
23. B. Simon, *Ann. Phys.* **58**, 76 (1970).
24. F. T. Hioe, Don McMillan, and E. W. Montroll, *Phys. Rep.* **43**, 305 (1978).
25. A. D. Dolgov and V. S. Popov, *Phys. Lett.* **79B**, 403 (1978).
26. V. L. Eletsky and V. S. Popov, *Phys. Lett.* **94B**, 65 (1980).
27. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **71**, 2010 (1976).
28. E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita et al., *Phys. Rev. D* **17**, 3090 (1978); **21**, 203, 313 (1980).
29. C. Quigg and J. Rosner, *Phys. Rep.* **56**, 169 (1979).
30. E. Eichten and C. Quigg, *Phys. Rev.* **49**, 5845 (1994).
31. V. L. Eletsky, V. S. Popov, and V. M. Weinberg, *Phys. Lett.* **84A**, 235 (1981); ЖЭТФ **81**, 1567 (1981).

32. V. S. Popov and V. M. Weinberg, Phys. Lett. **90A**, 107 (1982).
33. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971).
34. V. Franceschini, V. Grecchi, and H. J. Silverstone, Phys. Rev. A **32**, 1338 (1985).
35. В. М. Вайнберг, В. Д. Мур, В. С. Попов, ЖЭТФ **93**, 450 (1987).
36. V. S. Popov, V. D. Mur, A. V. Sergeev et al., Phys. Lett. **124A**, 77 (1987); **149A**, 418 (1990).
37. V. S. Popov, Phys. Lett. **173A**, 63 (1993).
38. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Наука, Москва (1974).
39. L. Benassi, V. Grecchi, E. Harrell, and B. Simon, Phys. Rev. Lett. **42**, 704, 1430 (1979).
40. A. Scrinzi, M. Geissler, and T. Brabec, Phys. Rev. Lett. **83**, 706 (1999).
41. Ф. М. Диттес, Ю. А. Кубышин, О. В. Тарасов, ТМФ **37**, 66 (1978).
42. А. А. Владимиров, Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, ЖЭТФ **77**, 1035 (1979).
43. K. G. Chetyrkin, S. G. Gorishny, S. A. Larin, and F. V. Tkachov, Phys. Lett. **132B**, 351 (1983); D. I. Kazakov, Phys. Lett. **133B**, 406 (1983); H. Kleinert, J. Neu, V. Schulte-Frohlinde, K. G. Chetyrkin, and S. A. Larin, Phys. Lett. **272B**, 39 (1991); **319B**, 545 (1993); E-print archives hep-th/9503230.
44. В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе, ТМФ **109**, 51 (1996).
45. V. W. Hughes and T. Kinoshita, Rev. Mod. Phys. **71**, S133 (1999).
46. В. Л. Елецкий, В. С. Попов, ДАН СССР **250**, 74 (1980).
47. S. G. Gorishny, A. L. Kataev, S. A. Larin, and L. R. Surguladze, Phys. Lett. **256B**, 81 (1991).
48. E. V. Bogomolny and V. A. Fateyev, Phys. Lett. **76B**, 210 (1978).
49. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, Москва, Наука (1974).
50. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды (дополнительные главы)*, Наука, Москва (1986), с. 754.
51. Ю. Н. Демков, Г. Ф. Друкарев, ЖЭТФ **47**, 918 (1964).
52. С. П. Андреев, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. А. Полунин, ЖЭТФ **86**, 866 (1984).
53. В. Д. Мур, С. Г. Поздняков, В. С. Попов, С. В. Попруженко, Письма в ЖЭТФ **75**, 294 (2002).
54. S. P. Alliluev, V. L. Eletsky, and V. S. Popov, Phys. Lett. **73A**, 103 (1979).
55. V. Privman, Phys. Rev. A **22**, 1833 (1980).
56. I. W. Herbst and B. Simon, Phys. Rev. Lett. **41**, 67 (1978).
57. H. J. Silverstone, B. G. Adams, J. Čizek, and P. Otto, Phys. Rev. Lett. **43**, 1498 (1979).
58. С. П. Аллилуев, ЖЭТФ **33**, 200 (1957); Г. Дьерди, Я. Реван, ЖЭТФ **48**, 1445 (1965); M. Bander and C. Itzykson, Rev. Mod. Phys. **38**, 330, 346 (1966); D. R. Herschbach, J. Chem. Phys. **84**, 838 (1986); X. L. Yang, S. H. Guo, F. Y. Chan et al., Phys. Rev. A **43**, 1186 (1991).
59. В. С. Попов, в сб. *Физика высоких энергий и теория элементарных частиц*, Наукова Думка, Киев (1967), с. 702.
60. С. П. Аллилуев, В. С. Попов, ЖЭТФ **104**, 3569 (1993).