

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ И ПЕРЕСЕЧЕНИЙ САМОГРАВИТИРУЮЩИХ ОБОЛОЧЕК В ПОЛЕ МАССИВНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

*М. В. Барков**, *В. А. Белинский***, *Г. С. Бисноватый-Коган****

*Институт космических исследований Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 13 марта 2002 г.

Рассмотрено движение с пересечениями релятивистских гравитирующих оболочек в шварцшильдовском гравитационном поле центрального тела. Получены формулы для вычисления параметров оболочек после пересечения через их параметры до пересечения. Рассмотрены такие частные случаи, как ньютоновское приближение, пересечение световых оболочек, пересечение пробной оболочки с гравитирующей и описан эффект выброса одной из оболочек на бесконечности в релятивистской области. Приведены результаты численного анализа уравнений движения оболочек.

PACS: 95.30.Sf, 95.10.Fh

1. ВВЕДЕНИЕ

Одно из интересных приложений теории гравитирующих сферически-симметричных оболочек связано с возможностью моделирования некоторых свойств звездного скопления эволюцией таких оболочек, каждая из которых движется в поле, создаваемом всеми остальными и центральным телом [1–6]. Пусть имеется установившееся движение большого количества гравитирующих частиц (звезд) вокруг покоящегося и невращающегося центрального тела. По причине большого количества частиц можно считать, что каждая из них движется в некотором усредненном стационарном сферически-симметричном поле (которое внутри скопления не является шварцшильдовским, но переходит в таковое за границами скопления). Каждая частица движется по траектории, являющейся обобщением эллиптических орбит ньютоновской механики, и у каждой частицы сохраняются полная энергия и полный угловой момент. Выделим внутри ско-

пления в некоторый произвольный момент времени t_0 сферу произвольного радиуса r_0 и выделим на этой сфере те частицы, у которых одинаковые радиальные скорости и одно и то же значение абсолютной величины полного углового момента на единицу массы покоя, откуда следует также равенство полных энергий на единицу массы покоя. Из первых интегралов геодезических в стационарном сферически-симметричном поле видно, что радиальное движение всех выделенных частиц происходит согласно одним и тем же уравнениям. Это означает, что все эти частицы в радиальном направлении движутся одинаково, т. е. все они образуют то, что и называется оболочкой. Если оболочка как целое движется только радиально, то частицы, ее образующие, движутся внутри оболочки еще и в тангенциальных направлениях. Когда число частиц велико, тангенциальные движения частиц можно рассматривать как хаотические с параметрами, распределенными однородно и изотропно на двумерной поверхности оболочки, и, следовательно, можно учесть эти движения гидродинамически как наличие тангенциального давления. В радиальном направлении поведение скопления моделируется движением дискретной совокупности бесконечно тонких оболочек, каждая из которых движется в вакууме. Радиальное движение учитывается точно путем решения уравнений гравити-

*E-mail: barmv@sai.msu.ru

**National Institute of Nuclear Physics (INFN) and International Center of Relativistic Astrophysics (ICRA), Rome, Italy; Institute des Hautes Études Scientifiques (IHES), Bures-sur-Yvette, France; belinski@icra.it

***E-mail: gkogon@mx.iki.rssi.ru

тации. Разумеется, не все свойства скопления можно описать с помощью такой модели, но ряд аспектов его динамики хорошо моделируются. К ним относятся, например, бурная релаксация звездного скопления [1, 5], а также механизм выброса части слоев кластера при его коллапсе после потери устойчивости.

Ясно, что основными определяющими элементами описанной выше модели являются следующие два: во-первых, движение одной оболочки в поле центральной массы, во-вторых, движение двух оболочек в поле центральной массы, включая возможные пересечения оболочек друг с другом. Решение первой задачи было получено Дж. Чейзом более тридцати лет назад [7]. В его работе вопрос о применениях к исследованию поведения скопления не ставился, а было получено уравнение движения одной оболочки с тангенциальным давлением (в общем случае еще и с электрическим зарядом) и исследован вопрос ее устойчивости по отношению к коллапсу. При этом уравнение движения оболочки было получено в общем виде, т. е. без учета каких-либо специальных предположений об уравнении состояния материи, составляющей оболочку.

Полное решение второй задачи в рамках общей теории относительности до сих пор отсутствовало, и мы надеемся, что настоящая статья в какой-то степени устраняет этот пробел. Подчеркнем, что пока оболочки не пересекаются, их уравнения движения являются тривиальным обобщением уравнения движения одной оболочки. Это происходит по той причине, что сферически-симметричная оболочка не создает гравитационного поля внутри себя и не оказывает поэтому влияния на все то, что находится внутри нее. Влияние же внутренней оболочки на внешнюю учитывается очень просто: меняются только массовые параметры шварцшильдовских метрик во внешних по отношению к внутренней оболочке областях. Таким образом, основная задача здесь связана именно с процессом пересечения оболочек и с учетом последствий большого числа таких пересечений. При этом мы рассматриваем процесс пересечения как чисто баллистический, т. е. каждая оболочка испытывает воздействие только со стороны окружающего ее гравитационного поля и какое-либо прямое взаимодействие негравитационного характера между веществом оболочек в момент их пересечения отсутствует. Для выполнения этого условия сшивка должна быть такой, чтобы в пределах пробных оболочек (гравитацией которых можно пренебречь) они пересекались бы, никак не реагируя на это, т. е. все параметры движения каждой из обо-

лочек в этом пределе оставались бы непрерывными при проходе через точку пересечения.

Отметим, что в рамках ньютоновской гравитации описанная задача была рассмотрена в работах [1–6, 8]. Одним из интересных результатов (впервые полученном в [4]) является эффект выброса одной из оболочек на пространственную бесконечность за счет обмена энергией между оболочками при их пересечении. В работе [8] также был описан этот эффект, но с некоторыми новыми деталями, и, кроме того, были приведены результаты численного решения уравнений движения двух оболочек с учетом большого числа их пересечений друг с другом. Было обнаружено, что после достаточно большого количества пересечений движение оболочек становится хаотическим с характерной для хаоса сильной чувствительностью к малому изменению начальных параметров.

Отметим также работы [9, 10], в которых рассматривалось движение и пересечение оболочек в сильном гравитационном поле. Приближенная процедура для описания пересечения, использованная в этих работах, как показывает сравнение с точным решением, представленным в настоящей статье, обладает хорошей точностью лишь тогда, когда какая-либо одна (или обе) из скоростей пересекающихся оболочек мала, а также при малых отношениях эффективных масс оболочек к массе центрального тела.

И, наконец, подчеркнем, что наша работа предназначена для конкретных астрофизических приложений и, разумеется, охватывает далеко не все стороны теории гравитирующих оболочек. В связи с этим приведенный нами список литературы весьма ограничен и отражает развитие непосредственно тех прикладных вопросов, которым посвящена наша статья. Из самых последних работ, имеющих прямое отношение к нашему исследованию особо следует отметить статью Березина и Охрименко [11], в которой также исследовано поведение гравитирующей оболочки, состоящей из частиц, движущихся в поле центральной массы, и рассмотрены как астрофизические, так и квантовые аспекты задачи. Однако вопрос о пересечении двух оболочек авторами не затрагивался. В работе Неронова [12] рассмотрена задача о неупругом столкновении произвольного числа n -мерных оболочек в $(n + 2)$ -мерном пространстве-времени и указан закон сохранения, связывающий определенную комбинацию параметров оболочек до столкновения с аналогичной комбинацией параметров оболочек после их столкновения. Этот результат применяется автором к случаю

столкновения трехмерных оболочек в пятимерном анти-де-ситтеровском пространстве-времени для исследования свойств так называемой «экспиротической» космологической модели [13, 14]. Для полноты отметим также работу [15], в основном повторяющую результаты Неронова. Интересующийся читатель найдет в цитированных статьях [11–15] достаточно широкий обзор литературы по различным аспектам теории тонких гравитирующих оболочек.

2. ГРАВИТИРУЮЩАЯ ОБОЛОЧКА С ТАНГЕНЦИАЛЬНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Чейз [7] получил результат с помощью геометрического метода, впервые использованного в работе [16], где таким способом было выведено уравнение движения пылевидной сферически-симметричной оболочки. Естественно, что то же можно получить и более привычным для физика путем, составив тензор энергии-импульса с соответствующим δ -образным источником и прямо проинтегрировав уравнения Эйнштейна с такой правой частью. Мы использовали именно такой способ вывода, и результат совпал с результатом Чейза. Разумеется, мы не станем приводить здесь наши выкладки в подробностях, а отметим лишь основные пункты, поскольку это не лишено методического интереса и, кроме того, дает удобный способ ввести все необходимые понятия и обозначения.

Пусть имеется центральное тело с массой m_{in} , и вне его движется сферически-симметричная оболочка. Еще до решения каких-либо уравнений ясно, что метрика внутри оболочки и вне ее будет шварцшильдовской, но с разными массовыми параметрами. Используя координаты $x^0 = ct$ и r , которые непрерывны при переходе через оболочку, мы можем записать интервалы¹⁾ под оболочкой, вне ее и на ней в виде

$$-(ds^2)_{in} = -e^{T(t)} f_{in}(r) c^2 dt^2 + f_{in}^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

$$-(ds^2)_{out} = -f_{out}(r) c^2 dt^2 + f_{out}^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2)$$

$$-(ds^2)_{on} = -c^2 d\tau^2 + r_0^2(\tau) d\Omega^2, \quad (3)$$

¹⁾ Интервал записывается в виде $-ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$, сигнатура метрики $(-+++)$, т.е. $g_{00} < 0$. Латинские индексы принимают значения 0, 1, 2, 3. Для сферических координат принято обозначение $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$. Ньютоновская гравитационная постоянная обозначена через k .

где обозначено

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

и

$$f_{in} = 1 - \frac{2km_{in}}{c^2 r}, \quad f_{out} = 1 - \frac{2km_{out}}{c^2 r}. \quad (4)$$

В интервале (3) τ — собственное время оболочки. Множитель e^T в (1) необходим, для того чтобы обеспечить непрерывность временной координаты t при переходе через оболочку. Параметр $m_{out} c^2$ — полная энергия системы.

Если уравнение движения оболочки есть

$$r = R_0(t),$$

то сшивка угловых частей всех трех интервалов (1)–(3) на оболочке дает

$$r_0(\tau) = R_0[t(\tau)], \quad (5)$$

где функция $t(\tau)$ описывает связь глобального времени с собственным временем оболочки. Сшивка радиально-временных частей интервалов (1)–(3) на оболочке требует выполнения следующих соотношений:

$$f_{in}(r_0) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 e^{T(t)} - f_{in}^{-1}(r_0) \left(\frac{dr_0}{cd\tau} \right)^2 = 1, \quad (6)$$

$$f_{out}(r_0) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - f_{out}^{-1}(r_0) \left(\frac{dr_0}{cd\tau} \right)^2 = 1. \quad (7)$$

Если уравнение движения оболочки (т.е. функция $r_0(\tau)$) известно, то из (7) следует функция $t(\tau)$, и после этого из (6) можно найти $T(t)$. Таким образом, задача состоит только в определении $r_0(\tau)$, что можно сделать путем прямого интегрирования уравнений Эйнштейна для метрики

$$-(ds^2) = g_{00}(t, r) c^2 dt^2 + g_{11}(t, r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (8)$$

и тензора энергии-импульса

$$T_i^k = \varepsilon u_i u^k + (\delta_i^2 \delta_2^k + \delta_i^3 \delta_3^k) p, \quad (9)$$

где $u_2 = u_3 = 0$, а величины ε, p, u_0 и u_1 зависят только от координат t и r , причем

$$u^0 u_0 + u^1 u_1 = -1.$$

Плотность энергии ε имеет следующий вид:

$$\varepsilon = \frac{M(t) c^2 \delta[r - R_0(t)]}{4\pi r^2 u^0 \sqrt{-g_{00} g_{11}}}, \quad (10)$$

где δ — стандартная δ -функция. При отсутствии тангенциального давления p величина M в (10) была бы константой, а плотность ε была бы суммой энергий покоя частиц оболочки в единице объема радиально-сопутствующей системы координат. В этом случае M представляла бы собой полную массу покоя оболочки или, как говорят, ее «голую» или «барионную» массу. При наличии давления величина $M c^2$ включает в себя, кроме энергии покоя, еще и энергию (в радиально-сопутствующей системе) тангенциальных движений частиц оболочки, создающих это давление. При этом $M c^2$ уже не может быть константой, но зависит от степени сжатия оболочки, т. е. от ее радиуса $R_0(t)$ или просто от времени t , что явно указано в (10).

Как и в любой сферически-симметричной задаче, в качестве полной системы уравнений можно выбрать уравнения гидродинамики $T_{i;k}^k = 0$ и $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{0}$ и $\binom{1}{0}$ -компоненты уравнений Эйнштейна, взятых в форме

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k$$

(все остальные компоненты этих уравнений удовлетворяются после этого тождественно либо в силу тождеств Бьянки, либо в силу симметрии задачи). Как видно из (9), указанные компоненты уравнений Эйнштейна не содержат давления и легко показать, что они действительно приводят²⁾ к решению (1)–(4) с произвольными константами m_{in} и m_{out} и, кроме того, к следующему уравнению первого порядка для функции $r_0(\tau)$:

$$\sqrt{f_{in}(r_0) + \left(\frac{dr_0}{cd\tau}\right)^2} + \sqrt{f_{out}(r_0) + \left(\frac{dr_0}{cd\tau}\right)^2} = \frac{2(m_{out} - m_{in})}{\mu(\tau)}, \quad (11)$$

где принято обозначение

$$\mu(\tau) = M[t(\tau)]. \quad (12)$$

Из четырех уравнений $T_{i;k}^k = 0$ два удовлетворяются тождественно в силу симметрии задачи. Два других приводятся к такому виду, что одно из них служит просто для определения давления:

$$p = -\frac{dM}{dt} \frac{cd[r - R_0(t)]}{8\pi r u^1 \sqrt{-g_{00}g_{11}}}, \quad (13)$$

²⁾ В процессе интегрирования уравнений рассматриваемой задачи необходимы лишь два стандартных правила работы с символическими функциями: $d\theta(x)/dx = \delta(x)$ (где θ — ступенчатая функция Хевисайда) и $F(x)\delta(x) = (1/2)[F(-0) + F(+0)]\delta(x)$.

а второе после подстановки в него этого выражения для p удовлетворяется тождественно (оно представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка по τ для функции $r_0(\tau)$, которое является ни чем иным, как результатом дифференцирования по τ уравнения (11)). Следует отметить, однако, что последнее обстоятельство имеет место только в общем нестационарном случае, когда $R_0 \neq \text{const}$.

Случай стационарного состояния оболочки $R_0 = \text{const}$ требует отдельного исследования. В этом частном случае все величины зависят только от одной переменной r и $u^1 = 0$. Из уравнений $T_{i;k}^k = 0$ три удовлетворяется тождественно, а четвертое опять же служит для определения давления, которое может быть записано в виде

$$p = \frac{M c^2}{32\pi R_0^2} \times \left[\frac{1 - f_{in}(R_0)}{\sqrt{f_{in}(R_0)}} + \frac{1 - f_{out}(R_0)}{\sqrt{f_{out}(R_0)}} \right] \delta(r - R_0). \quad (14)$$

Выражение (10) для плотности энергии теперь принимает вид

$$\varepsilon = \frac{M c^2}{8\pi R_0^2} \left[\sqrt{f_{in}(R_0)} + \sqrt{f_{out}(R_0)} \right] \delta(r - R_0). \quad (15)$$

Само же значение радиуса оболочки R_0 должно определяться из уравнения (11), в котором следует теперь положить $dr_0/d\tau = 0$ и $\mu = M = \text{const}$. Легко установить, что положительное решение для R_0 при положительных параметрах m_{in} и m_{out} существует только при выполнении неравенства

$$(m_{out} - m_{in})^2 < M^2 \quad (16)$$

и имеет вид

$$R_0 = \frac{kM^2}{2c^2} \frac{m_{out} + m_{in} + \sqrt{4m_{out}m_{in} + M^2}}{M^2 - (m_{out} - m_{in})^2}. \quad (17)$$

Выражения (14)–(17) дают решение задачи для стационарного состояния оболочки.

Вернемся к общему нестационарному случаю. Уравнение движения оболочки (11) может быть записано в нескольких эквивалентных формах. Укажем две следующие:

$$\sqrt{f_{in}(r_0) + \left(\frac{dr_0}{cd\tau}\right)^2} = \frac{m_{out} - m_{in}}{\mu(\tau)} + \frac{k\mu(\tau)}{2c^2 r_0}, \quad (18)$$

$$\sqrt{f_{out}(r_0) + \left(\frac{dr_0}{cd\tau}\right)^2} = \frac{m_{out} - m_{in}}{\mu(\tau)} - \frac{k\mu(\tau)}{2c^2 r_0}. \quad (19)$$

Учитывая выражения (4) для f_{in} и f_{out} , легко проверить, что как (18), так и (19) являются прямым следствием уравнения (11). Уравнение же (11) есть сумма уравнений (18) и (19). Еще одну эквивалентную форму уравнения движения оболочки можно вывести, возводя в квадрат каждое из соотношений (18), (19) и затем складывая их почленно. В результате получаем

$$1 + \left(\frac{dr_0}{cd\tau}\right)^2 = \frac{(m_{out} - m_{in})^2}{\mu^2(\tau)} + \frac{k(m_{out} + m_{in})}{c^2 r_0} + \frac{k^2 \mu^2(\tau)}{4c^4 r_0^2}. \quad (20)$$

Именно в этой форме уравнение движения оболочки приведено в работе Чейза [7]. Подчеркнем, что для реальных астрофизических применений все радикалы, встречающиеся в нашей работе, следует брать положительными.

Для того чтобы продвинуться дальше, необходимо задать функцию $\mu(\tau)$, что, как видно из (10) и (13), эквивалентно заданию уравнения состояния. Здесь, конечно, имеется широкий выбор возможностей, но мы ограничимся только той моделью оболочки, которая описана во Введении, т. е. оболочкой, состоящей из частиц, движущихся в поле центральной массы. Величина Mc^2 в (10) в случае отсутствия давления есть полная энергия покоя оболочки, т. е.

$$Mc^2 = \sum_a m_a c^2,$$

где сумма берется по всем частицам, а m_a — масса покоя отдельной частицы. Состояние покоя оболочки имеется в виду по отношению к ее радиальному движению и имеет место в радиально-сопутствующей системе. Поскольку тангенциальные движения нормальны к радиальному, их роль сводится только к созданию «эффективной массы покоя» по отношению к радиальному движению всей оболочки, т. е. при их наличии для Mc^2 имеем следующее выражение:

$$Mc^2 = \sum_a \sqrt{m_a^2 c^4 + p_a^2 c^2} = \sum_a \left(m_a c^2 \sqrt{1 + \frac{p_a^2}{m_a^2 c^2}} \right), \quad (21)$$

где p_a — тангенциальный импульс каждой частицы. По определению оболочки (см. Введение) все ее частицы находятся на одинаковом расстоянии R_0 от центра и у всех у них отношение $|l_a|/m_a$ (где l_a —

полный угловой момент a -ой частицы) одно и то же. Поскольку

$$\frac{p_a^2}{m_a^2} = \frac{l_a^2}{m_a^2 R_0^2} = \frac{\text{const}}{R_0}, \quad (22)$$

значение квадратного корня в (21) не зависит от индекса a , и этот корень может быть вынесен за знак суммы, а сумма

$$\sum_a m_a c^2 = m c^2,$$

где константа m есть полная масса покоя всей оболочки. В силу независимости отношения $|l_a|/m_a$ от индекса a имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_a m_a c^2\right)^2 \frac{p_a^2}{m_a^2 c^2} &= \frac{c^2}{R_0^2} \left(\frac{|l_a|}{m_a} \sum_a m_a\right)^2 = \\ &= \frac{c^2}{R_0^2} \left(\sum_a |l_a|\right)^2, \end{aligned} \quad (23)$$

и в результате формула (21) (с учетом обозначения (12)) может быть записана в виде

$$\mu(\tau) = \sqrt{m^2 + \frac{L^2}{c^2 r_0^2(\tau)}}, \quad (24)$$

где

$$L = \sum_a |l_a|$$

есть сумма абсолютных величин полных угловых моментов частиц, составляющих оболочку. Подстановка (24) в уравнение (11) (или в одно из эквивалентных ему (18)–(20)) дает окончательное уравнение, из которого определяется функция $r_0(\tau)$, если задан начальный радиус оболочки и четыре произвольные константы m_{in} , m_{out} , m и L .

Уравнение состояния, связывающее плотность энергии оболочки ε с тангенциальным давлением p , согласно (10), (12), (13) и (24), имеет вид

$$p = \frac{\varepsilon}{2} \frac{L^2}{m^2 c^2 R_0^2} \left(1 + \frac{L^2}{m^2 c^2 R_0^2}\right)^{-1}.$$

Из определения констант L и m , а также из формулы (23) следует соотношение

$$\frac{L^2}{m^2 c^2 R_0^2} = \frac{p_a^2}{m_a^2 c^2}$$

(напомним, что p_a^2/m_a^2 не зависят от номера частицы « a »), откуда видны предельные формы уравнения состояния: для нерелятивистских тангенциальных скоростей ($p_a^2 \ll m_a^2 c^2$) имеем пылевидное состояние $p \ll \varepsilon$, а в случае ультрарелятивистских тангенциальных движений частиц ($p_a^2 \gg m_a^2 c^2$) получим

$p = (1/2)\varepsilon$, как и должно быть для двумерного ультрарелятивистского газа. При расширении оболочки до бесконечности ($R_0 \rightarrow \infty$) уравнение состояния всегда стремится к пылевидному, так как вклад тангенциальных движений частиц становится пренебрежимо малым.

3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим теперь следующий по сложности случай, когда имеются две оболочки, двигающиеся в поле центральной массы. При отсутствии пересечения оболочек не составляет труда сразу же написать уравнения их движения, пользуясь полученными ранее уравнениями движения одной оболочки и тем обстоятельством, что сферически-симметричная оболочка не оказывает влияния на все, что находится внутри нее. При наличии пересечения этой информации уже недостаточно, так как в точке пересечения требуются некоторые дополнительные условия сшивки, не содержащиеся в теории движения одной оболочки.

Мы по-прежнему покрываем интересующую нас часть физического пространства-времени единой координатной системой $(r, x^0) = (r, ct)$ с непрерывными r и t . Пусть в начальный момент времени и в некоторой его окрестности оболочка 1 находится внутри оболочки 2, а затем в некоторой пространственно-временной точке (r^*, t^*) происходит их пе-

ресечение, так что после момента t^* оболочка 2 оказывается внутри оболочки 1, и такое их расположение сохраняется еще некоторое время после t^* . Процесс пересечения показан на рис. 1. Если $r = R_1(t)$ и $r = R_2(t)$ — уравнения движения первой и второй оболочек, то мы имеем четыре пространственно-временных района:

$$COB \quad (r > R_1, \quad r > R_2),$$

$$COA \quad (R_1 < r < R_2),$$

$$AOD \quad (r < R_1, \quad r < R_2),$$

$$BOD \quad (R_2 < r < R_1),$$

в каждом из которых метрика шварцшильдова, но дополнена дилатонным множителем $e^{T(t)}$, что необходимо, если мы хотим покрыть все четыре района единой непрерывной временной координатой t . При этом у нас остается возможность выбрать в любом из четырех указанных районов (но только в одном из них) метрический коэффициент g_{00} в чисто шварцшильдовском виде без дилатонного множителя, чем фиксируется выбор глобального времени t . Естественно ввести чисто шварцшильдовскую метрику вне оболочек, т. е. в области COB , примыкающей к пространственной бесконечности. Таким образом, во всех четырех указанных районах метрика имеет вид (8), но с различными метрическими коэффициентами g_{00} и g_{11} :

$$g_{00}^{(COB)} = -f_{out}(r), \quad g_{11}^{(COB)} = f_{out}^{-1}(r), \quad (25)$$

$$g_{00}^{(COA)} = -e^{T_1(t)} f_{12}(r), \quad g_{11}^{(COA)} = f_{12}^{-1}(r), \quad (26)$$

$$g_{00}^{(AOD)} = -e^{T_0(t)} f_{in}(r), \quad g_{11}^{(AOD)} = f_{in}^{-1}(r), \quad (27)$$

$$g_{00}^{(BOD)} = -e^{T_2(t)} f_{21}(r), \quad g_{11}^{(BOD)} = f_{21}^{-1}(r), \quad (28)$$

где f_{in} и f_{out} имеют тот же вид, что и в (4), а f_{12} и f_{21} даются аналогичными выражениями:

$$f_{12} = 1 - \frac{2km_{12}}{c^2 r}, \quad f_{21} = 1 - \frac{2km_{21}}{c^2 r}. \quad (29)$$

Массовые параметры m_{out} , m_{in} и m_{12} считаются заданными по начальным условиям, а массовый параметр m_{21} , образующийся в области между оболочками после пересечения, подлежит определению из динамики процесса и из условий сшивки в точке (r^*, t^*) .

Выпишем прежде всего уравнения движения оболочек до момента пересечения t^* . Чтобы сделать

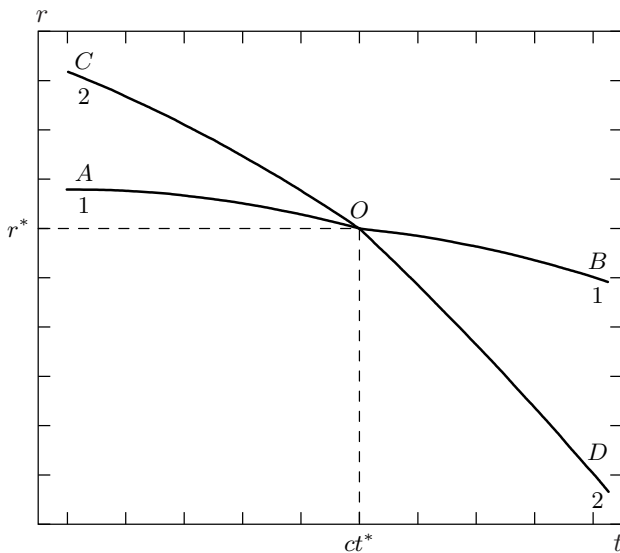


Рис. 1. Схематическое изображение пересечения двух гравитирующих оболочек. Координаты точки $O - ct^*$ и r^*

это, достаточно обратиться к уравнениям движения одной оболочки, например, в форме (18), (19) и учесть, что массовые параметры в районах AOD , COA и COB есть соответственно m_{in} , m_{12} и m_{out} . При этом удобно для оболочки 1 (внутренняя) использовать уравнение в форме (19), а для оболочки 2 (внешняя) — в форме (18):

$$\sqrt{f_{12}(r_1) + \left(\frac{dr_1}{cd\tau_1}\right)^2} = \frac{m_{12} - m_{in}}{M_1(r_1)} - \frac{kM_1(r_1)}{2c^2r_1}, \quad (30)$$

$$\sqrt{f_{12}(r_2) + \left(\frac{dr_2}{cd\tau_2}\right)^2} = \frac{m_{out} - m_{12}}{M_2(r_2)} + \frac{kM_2(r_2)}{2c^2r_2}, \quad (31)$$

$$M_1 = \sqrt{m_1^2 + \frac{L_1^2}{c^2r_1^2}}, \quad M_2 = \sqrt{m_2^2 + \frac{L_2^2}{c^2r_2^2}}, \quad (32)$$

где τ_1 и τ_2 — собственные времена первой и второй оболочек, а $r_1(\tau_1) = R_1[t(\tau_1)]$, $r_2(\tau_2) = R_2[t(\tau_2)]$. Выписанные уравнения необходимо дополнить условиями сшивки интервалов на обеих оболочках. Сшивка на первой оболочке (на кривой AO) дает

$$e^{T_1(t)} f_{12}(r_1) \left(\frac{dt}{d\tau_1}\right)^2 - f_{12}^{-1}(r_1) \left(\frac{dr_1}{cd\tau_1}\right)^2 = 1, \quad (33)$$

$$e^{T_0(t)} f_{in}(r_1) \left(\frac{dt}{d\tau_1}\right)^2 - f_{in}^{-1}(r_1) \left(\frac{dr_1}{cd\tau_1}\right)^2 = 1. \quad (34)$$

В результате сшивки на второй оболочке (на кривой CO) получаем

$$f_{out}(r_2) \left(\frac{dt}{d\tau_2}\right)^2 - f_{out}^{-1}(r_2) \left(\frac{dr_2}{cd\tau_2}\right)^2 = 1, \quad (35)$$

$$e^{T_1(t)} f_{12}(r_2) \left(\frac{dt}{d\tau_2}\right)^2 - f_{12}^{-1}(r_2) \left(\frac{dr_2}{cd\tau_2}\right)^2 = 1. \quad (36)$$

Если все свободные параметры (m_{in} , m_{out} , m_{12} , m_1 , m_2 , L_1 , L_2) и начальные данные к уравнениям (30)–(32) заданы и получены функции $r_1(\tau_1)$ и $r_2(\tau_2)$, то их подстановка в (33)–(36) позволяет определить зависимости $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ и функции $T_1(t)$, $T_0(t)$, т. е. все, что необходимо для определения движения оболочек до пересечения. Момент пересечения t^* соответствует некоторым значениям собственных времен $\tau_1(t^*)$ и $\tau_2(t^*)$. Координаты точки пересечения r^* , t^* находятся, следовательно, из двух соотношений

$$r^* = r_1(\tau_1(t^*)), \quad r^* = r_2(\tau_2(t^*)). \quad (37)$$

Разумеется, мы полагаем, что уравнения (37) имеют решение (те случаи, когда решения нет, отвечают движению без пересечений, но такие возможности нас здесь не интересуют).

Точно так же легко составить уравнения движения оболочек после момента пересечения t^* , опять же обратившись к уравнениям (18), (19) и учтя, что в районе BOD появился новый параметр m_{21} . Для оболочки 1 (теперь уже внешней) используем уравнение в форме (18), а для оболочки 2 (теперь уже внутренней) — в форме (19):

$$\sqrt{f_{21}(r_1) + \left(\frac{dr_1}{cd\tau_1}\right)^2} = \frac{m_{out} - m_{21}}{M_1(r_1)} + \frac{kM_1(r_1)}{2c^2r_1}, \quad (38)$$

$$\sqrt{f_{21}(r_2) + \left(\frac{dr_2}{cd\tau_2}\right)^2} = \frac{m_{21} - m_{in}}{M_2(r_2)} - \frac{kM_2(r_2)}{2c^2r_2}. \quad (39)$$

Здесь $M_1(r_1)$ и $M_2(r_2)$ даются теми же выражениями (32), но, естественно, со значениями функций $r_1(\tau_1)$ и $r_2(\tau_2)$ (а также времен τ_1 и τ_2) после пересечения.

Сшивка интервалов на первой оболочке (на кривой OB) дает

$$f_{out}(r_1) \left(\frac{dt}{d\tau_1}\right)^2 - f_{out}^{-1}(r_1) \left(\frac{dr_1}{cd\tau_1}\right)^2 = 1, \quad (40)$$

$$e^{T_2(t)} f_{21}(r_1) \left(\frac{dt}{d\tau_1}\right)^2 - f_{21}^{-1}(r_1) \left(\frac{dr_1}{cd\tau_1}\right)^2 = 1. \quad (41)$$

Сшивка на второй оболочке (на кривой OD) требует выполнения следующих соотношений:

$$e^{T_2(t)} f_{21}(r_2) \left(\frac{dt}{d\tau_2}\right)^2 - f_{21}^{-1}(r_2) \left(\frac{dr_2}{cd\tau_2}\right)^2 = 1, \quad (42)$$

$$e^{T_0(t)} f_{in}(r_2) \left(\frac{dt}{d\tau_2}\right)^2 - f_{in}^{-1}(r_2) \left(\frac{dr_2}{cd\tau_2}\right)^2 = 1. \quad (43)$$

Из уравнений (38)–(43) видно, что если бы параметр m_{21} был известен, то эволюция оболочек после пересечения (при $t > t^*$) полностью определялась бы их эволюцией до пересечения, так как начальные данные к уравнениям (38), (39) уже заданы (известно, что в момент t^* положение оболочек есть $r_1 = r_2 = r^*$, и значения координат точки пересечения r^* , t^* уже найдены из предыдущей эволюции). Таким образом, нам необходимо иметь дополнительное физическое условие, из которого можно было бы определить m_{21} .

В действительности мы еще не использовали условие непрерывности относительной скорости оболочек при переходе через точку пересечения. В необходимости такого условия можно убедиться следующим образом. Известно, что движение оболочек можно описывать в таких координатах, в которых все метрические коэффициенты всюду непрерывны, а разрывы (типа конечных скачков) терпят только их первые производные и вместе с ними и Γ -символы. Это означает, что ускорения оболочек в таких координатах могут иметь разрывы только типа конечных скачков, а скорости, следовательно, должны быть всюду непрерывными. Отсюда следует, что инварианты, выражающиеся только через скорости и метрические коэффициенты, будут всюду непрерывными не только в таких координатах, но и в любых других и, в частности, в используемых нами координатах r и t . Если имеется лишь одна оболочка, то существует лишь один такой инвариант — норма вектора 4-скорости оболочки. В координатах, в которых метрика всюду непрерывна, эта норма определена относительно метрики в самих точках траектории оболочки и полагается единичной. В любых других координатах остаются единичными предельные значения нормы при стремлении к оболочке с обеих ее сторон. Именно это обстоятельство выражают собой соотношения (6), (7), которые можно называть условиями сшивки.

При наличии двух оболочек все сказанное выше остается в силе по отношению к каждой из них, что выражается условиями сшивок (33)–(36) и (40)–(43). Однако теперь имеется еще один инвариант, который можно составить только из скоростей и метрических коэффициентов, а именно — скалярное произведение единичного вектора 4-скорости первой оболочки на единичный вектор 4-скорости второй оболочки. На стадии до пересечения (траектории CO и AO) такую величину можно определить всюду в области между оболочками (сектор COA), совершая подходящий параллельный перенос в точки этой области векторов 4-скоростей обеих оболочек с тех сторон оболочек, которые прилегают к сектору COA . Подчеркнем, что определить указанное скалярное произведение подобным образом в секторах COB и AOD невозможно, так как при этом пришлось бы переносить вектор 4-скорости одной из оболочек через траекторию другой, т. е. через точку разрывов Γ -символов, а такой параллельный перенос не определен однозначно. На стадии после пересечения скалярное произведение единичных 4-скоростей оболочек по этой же причине определяется однозначно только в области между оболочками, т. е. в секторе

BOD . В действительности у нас нет необходимости проводить все эти параллельные переносы, так как в момент пересечения оба вектора находятся в одной и той же точке пространства-времени, а именно эта точка нас только и интересует. Предыдущий же анализ служит лишь для того, чтобы показать, что предел скалярного произведения единичных векторов 4-скорости оболочек в точке пересечения O при подходе к ней со стороны «до пересечения» (т. е. при $t = t^* - 0$) следует вычислять относительно метрики в секторе COA , а при подходе к точке O со стороны «после пересечения» (т. е. при $t = t^* + 0$) — относительно метрики в секторе BOD . Непрерывность этого скалярного произведения в системе координат, где метрика непрерывна, а также его свойство инвариантности требуют, чтобы и в наших координатах указанные пределы совпадали. Это есть именно то дополнительное условие, из которого определяется параметр m_{21} . Получим теперь это условие в явном виде. Единичный касательный вектор к траектории AO есть

$$u_{AO}^i = (u_{AO}^0, u_{AO}^1, u_{AO}^2, u_{AO}^3) = \left(\frac{dt}{d\tau_1}, \frac{dr_1}{cd\tau_1}, 0, 0 \right)_{t \leq t^*}, \quad (44)$$

а единичный касательный вектор к траектории CO имеет вид

$$u_{CO}^i = (u_{CO}^0, u_{CO}^1, u_{CO}^2, u_{CO}^3) = \left(\frac{dt}{d\tau_2}, \frac{dr_2}{cd\tau_2}, 0, 0 \right)_{t \leq t^*}. \quad (45)$$

Тот факт, что эти векторы действительно единичные, следует из уравнений сшивки (33) и (36).

Из уравнений (30) и (33) легко выразить компоненты вектора (44) в следующем виде:

$$\left(\frac{dt}{d\tau_1} \right)_{t \leq t^*} = \frac{1}{f_{12}(r_1)} e^{-T_1(t)/2} \times \left[\frac{m_{12} - m_{in}}{M_1(r_1)} - \frac{kM_1(r_1)}{2c^2 r_1} \right] \quad (46)$$

$$\left(\frac{dr_1}{cd\tau_1} \right)_{t \leq t^*} = \delta_1 \sqrt{\left[\frac{m_{12} - m_{in}}{M_1(r_1)} - \frac{kM_1(r_1)}{2c^2 r_1} \right]^2 - f_{12}(r_1)}, \quad (47)$$

где

$$\delta_1 = \text{sign} \left(\frac{dr_1}{cd\tau_1} \right)_{t \leq t^*}, \quad (48)$$

а из уравнений (31) и (36) получаем следующие выражения для компонент вектора (45):

$$\left(\frac{dt}{d\tau_2}\right)_{t \leq t^*} = \frac{1}{f_{12}(r_2)} e^{-T_1(t)/2} \left[\frac{m_{out} - m_{12}}{M_2(r_2)} + \frac{kM_2(r_2)}{2c^2 r_2} \right], \quad (49)$$

$$\left(\frac{dr_2}{cd\tau_2}\right)_{t \leq t^*} = \delta_2 \sqrt{\left[\frac{m_{out} - m_{12}}{M_2(r_2)} + \frac{kM_2(r_2)}{2c^2 r_2} \right]^2 - f_{12}(r_2)}, \quad (50)$$

$$\delta_2 = \text{sign} \left(\frac{dr_2}{cd\tau_2} \right)_{t \leq t^*}. \quad (51)$$

Теперь, пользуясь метрикой (26) в районе COA , нам нужно вычислить величину

$$Q = \left\{ g_{00}^{(COA)} u_{AO}^0 u_{CO}^0 + g_{11}^{(COA)} u_{AO}^1 u_{CO}^1 \right\}_{t=t^*, r=r_1=r_2=r^*}. \quad (52)$$

Из предыдущих результатов получаем

$$Q = \frac{1}{f_{12}(r^*)} \left\{ - \left[\frac{m_{12} - m_{in}}{M_1(r^*)} - \frac{kM_1(r^*)}{2c^2 r^*} \right] \times \left[\frac{m_{out} - m_{12}}{M_2(r^*)} + \frac{kM_2(r^*)}{2c^2 r^*} \right] + \delta_1 \delta_2 \sqrt{\left[\frac{m_{12} - m_{in}}{M_1(r^*)} - \frac{kM_1(r^*)}{2c^2 r^*} \right]^2 - f_{12}(r^*)} \times \sqrt{\left[\frac{m_{out} - m_{12}}{M_2(r^*)} + \frac{kM_2(r^*)}{2c^2 r^*} \right]^2 - f_{12}(r^*)} \right\}. \quad (53)$$

Обратимся теперь к области после момента пересечения. Для единичных касательных векторов к траекториям OB и OD имеем

$$u_{OB}^i = (u_{OB}^0, u_{OB}^1, u_{OB}^2, u_{OB}^3) = \left(\frac{dt}{d\tau_1}, \frac{dr_1}{cd\tau_1}, 0, 0 \right)_{t \geq t^*}, \quad (54)$$

$$u_{OD}^i = (u_{OD}^0, u_{OD}^1, u_{OD}^2, u_{OD}^3) = \left(\frac{dt}{d\tau_2}, \frac{dr_2}{cd\tau_2}, 0, 0 \right)_{t \geq t^*}, \quad (55)$$

а из условия сшивок (41) и (42) видно, что эти векторы действительно единичные. Из уравнений (38)

и (41) получаем для компонент вектора (54) выражения, аналогичные (46), (47) с заменой $f_{12}(r_1)$ на $f_{21}(r_1)$, m_{12} на m_{21} , m_{in} на m_{out} , $T_1(t)$ на $T_2(t)$, δ_1 на δ'_1 , и $M_1(r_1)$ на $[-M_1(r_1)]$ и $t \leq t^*$ на $t \geq t^*$. Из уравнений (39) и (42) следуют компоненты вектора (55), выражения для которых получаются из (49), (50) при заменах $f_{12}(r_2)$ на $f_{21}(r_2)$, m_{12} на m_{21} , m_{out} на m_{in} , $T_1(t)$ на $T_2(t)$, δ_2 на δ'_2 , $M_2(r_2)$ на $[-M_2(r_2)]$ и $t \leq t^*$ на $t \geq t^*$.

Соответственно, δ'_1 и δ'_2 определяются как в (48) и (51), но при $t \geq t^*$. Пользуясь метрикой (28) в районе BOD , вычислим скалярное произведение

$$Q' = \left\{ g_{00}^{(BOD)} u_{OB}^0 u_{OD}^0 + g_{11}^{(BOD)} u_{OB}^1 u_{OD}^1 \right\}_{t=t^*, r=r_1=r_2=r^*}. \quad (56)$$

Легко получаем следующий результат:

$$Q' = \frac{1}{f_{21}(r^*)} \left\{ - \left[\frac{m_{out} - m_{21}}{M_1(r^*)} + \frac{kM_1(r^*)}{2c^2 r^*} \right] \times \left[\frac{m_{21} - m_{in}}{M_2(r^*)} - \frac{kM_2(r^*)}{2c^2 r^*} \right] + \delta'_1 \delta'_2 \sqrt{\left[\frac{m_{21} - m_{in}}{M_2(r^*)} - \frac{kM_2(r^*)}{2c^2 r^*} \right]^2 - f_{21}(r^*)} \times \sqrt{\left[\frac{m_{out} - m_{21}}{M_1(r^*)} + \frac{kM_1(r^*)}{2c^2 r^*} \right]^2 - f_{21}(r^*)} \right\}. \quad (57)$$

Необходимое условие непрерывности состоит теперь в требовании

$$Q = Q', \quad (58)$$

где Q дается формулой (53), а Q' — формулой (57). Поскольку значение координаты пересечения r^* считается известным, условие (58) представляет собой уравнение для определения параметра m_{21} .

Мы начали вывод уравнения (58), заранее назвав его условием непрерывности в точке (r^*, t^*) относительной скорости оболочек. Поясним это подробнее. Определим «физические» скорости оболочек v_1 и v_2 в районе COA как

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{g_{11}^{(COA)}(r_1) dr_1^2}{-g_{00}^{(COA)}(r_1) c^2 dt^2}, \quad (59)$$

$$\frac{v_2^2}{c^2} = \frac{g_{11}^{(COA)}(r_2) dr_2^2}{-g_{00}^{(COA)}(r_2) c^2 dt^2}.$$

Тогда с использованием уравнений шивки (33) и (36) получаем

$$g_{11}^{(COA)}(r_1) \left(\frac{dr_1}{cd\tau_1} \right)^2 = \frac{v_1^2/c^2}{1 - v_1^2/c^2}, \quad (60)$$

$$g_{00}^{(COA)}(r_1) \left(\frac{dt}{d\tau_1} \right)^2 = -\frac{1}{1 - v_1^2/c^2},$$

$$g_{11}^{(COA)}(r_2) \left(\frac{dr_2}{cd\tau_2} \right)^2 = \frac{v_2^2/c^2}{1 - v_2^2/c^2}, \quad (61)$$

$$g_{00}^{(COA)}(r_2) \left(\frac{dt}{d\tau_2} \right)^2 = -\frac{1}{1 - v_2^2/c^2}.$$

Теперь из (44), (45) и (52) следует

$$Q = \left\{ \frac{v_1 v_2 / c^2 - 1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2} \sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \right\}_{t=t^*, r_1=r_2=r^*}. \quad (62)$$

«Физические» скорости оболочек после пересечения v'_1 и v'_2 определяем аналогично:

$$\frac{v'^2_1}{c^2} = \frac{g_{11}^{(BOD)}(r_1) dr_1^2}{-g_{00}^{(BOD)}(r_1) c^2 dt^2}, \quad (63)$$

$$\frac{v'^2_2}{c^2} = \frac{g_{11}^{(BOD)}(r_2) dr_2^2}{-g_{00}^{(BOD)}(r_2) c^2 dt^2}.$$

Тогда из уравнений шивок (41) и (42) получаем

$$g_{11}^{BOD}(r_1) \left(\frac{dr_1}{cd\tau_1} \right)^2 = \frac{v'^2_1/c^2}{1 - v'^2_1/c^2}, \quad (64)$$

$$g_{00}^{BOD}(r_1) \left(\frac{dt}{d\tau_1} \right)^2 = -\frac{1}{1 - v'^2_1/c^2},$$

$$g_{11}^{BOD}(r_2) \left(\frac{dr_2}{cd\tau_2} \right)^2 = \frac{v'^2_2/c^2}{1 - v'^2_2/c^2}, \quad (65)$$

$$g_{00}^{BOD}(r_2) \left(\frac{dt}{d\tau_2} \right)^2 = -\frac{1}{1 - v'^2_2/c^2}.$$

Из (54), (55) и (56) следует

$$Q' = \left\{ \frac{v'_1 v'_2 / c^2 - 1}{\sqrt{1 - v'^2_1/c^2} \sqrt{1 - v'^2_2/c^2}} \right\}_{t=t^*, r_1=r_2=r^*}. \quad (66)$$

Естественно, что непрерывность величины Q при переходе через точку пересечения (r^*, t^*) означает также и непрерывность любой функции от Q и, в частности, величины

$$\frac{\sqrt{Q^2 - 1}}{Q} = \frac{v_1/c - v_2/c}{1 - v_1 v_2 / c^2}. \quad (67)$$

Последняя же есть не что иное, как относительная скорость двух «частиц», как она определяется в релятивистской механике. Это и дает основание называть условие (58) условием непрерывности относительной скорости оболочек.

Для работы с уравнением (58) удобно сначала упростить запись выражений (53) и (57) для величин Q и Q' , введя обозначения

$$\sigma_1 = \left[\frac{kM_1(r^*)}{c^2 r^*} \right]^2, \quad \sigma_2 = \left[\frac{kM_2(r^*)}{c^2 r^*} \right]^2 \quad (68)$$

и выразив с помощью формул (4) и (29) разности массовых параметров, входящих в Q и Q' , через разности функций $f(r)$, взятых в точке $r = r^*$, в соответствии с соотношением

$$m_a - m_b = \frac{c^2 r^*}{2k} [f_b(r^*) - f_a(r^*)], \quad (69)$$

где a и b означают индексы «in», «out», «12» и «21». Теперь Q и Q' можно представить в следующей форме:

$$Q = - (4\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} f_{12})^{-1} \times \\ \times [(f_{in} - f_{12} - \sigma_1)(f_{12} - f_{out} + \sigma_2) - \\ - \delta_1 \delta_2 \sqrt{(f_{in} - f_{12} - \sigma_1)^2 - 4\sigma_1 f_{12}} \times \\ \times \sqrt{(f_{12} - f_{out} + \sigma_2)^2 - 4\sigma_2 f_{12}}], \quad (70)$$

$$Q' = - (4\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} f_{21})^{-1} \times \\ \times [(f_{21} - f_{out} + \sigma_1)(f_{in} - f_{21} - \sigma_2) - \\ - \delta'_1 \delta'_2 \sqrt{(f_{21} - f_{out} + \sigma_1)^2 - 4\sigma_1 f_{21}} \times \\ \times \sqrt{(f_{in} - f_{21} - \sigma_2)^2 - 4\sigma_2 f_{21}}], \quad (71)$$

где для сокращения записи мы опустили аргумент r^* у функций f_a . Также и во всех дальнейших формулах этого параграфа величины f_a без указания аргумента будут означать их значения при $r = r^*$.

Если с использованием выражений (70) и (71) записать уравнение $Q = Q'$ и перенести первое слагаемое из Q' в левую часть этого уравнения, то после возведения результирующего соотношения в квадрат получается квадратное уравнение относительно неизвестной f_{21} , т. е. относительно параметра m_{21} . Такая процедура несколько громоздка и, кроме того, еще не дает ответа на вопрос о том, какое из двух решений следует выбрать. Существует, однако, способ не только легко найти решение уравнения $Q = Q'$ в простой форме, но и найти это решение однозначно, причем непосредственно из уравнений непрерывности, не прибегая к каким-либо дополнительным физическим соображениям. Дело в

том, что кроме уравнения (58) имеются и другие аналогичные ему требования непрерывности при переходе через точку пересечения оболочек, использование которых упрощает нахождение решения и выделяет его однозначно. Как мы видели, уравнение (58) получено в результате требования непрерывности скалярного произведения единичных векторов 4-скорости оболочек при переходе через точку их пересечения из сектора COA (до пересечения) в сектор BOD (после пересечения). Легко видеть, однако, что вся аргументация, сопровождающая вывод уравнения (58), в равной степени применима и к переходу через точку пересечения из сектора AOD в сектор COB , т. е. точно так же можно утверждать, что предел скалярного произведения единичных касательных векторов к траекториям AO и OD при подходе к точке O из сектора AOD должен совпадать с пределом скалярного произведения единичных касательных векторов к траекториям OB и CO при стремлении к точке O со стороны сектора COB . Это условие непрерывности нетрудно получить в явном виде, повторив процедуру, аналогичную той, которая привела к уравнению (58). Вычисляется скалярное произведение

$$P = \left\{ g_{00}^{(AOD)} u_{AO}^0 u_{OD}^0 + g_{11}^{(AOD)} u_{AO}^1 u_{OD}^1 \right\}_{t=t^*, r=r_1=r_2=r^*} \quad (72)$$

с использованием уравнений движения оболочек AO и OD в форме (18) и условий сшивок (34) и (43), затем вычисляется скалярное произведение

$$P' = \left\{ g_{00}^{(COB)} u_{CO}^0 u_{OB}^0 + g_{11}^{(COB)} u_{CO}^1 u_{OB}^1 \right\}_{t=t^*, r=r_1=r_2=r^*} \quad (73)$$

с использованием уравнений движения оболочек CO и OB в форме (19) и условий сшивок (35) и (40) и результаты приравниваются:

$$P' = P. \quad (74)$$

В тех же обозначениях, которые мы использовали для вывода выражений (70) и (71), величины P и P' имеют вид

$$P = - (4\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} f_{in})^{-1} \times \left[(f_{in} - f_{12} + \sigma_1)(f_{in} - f_{21} + \sigma_2) - \delta_1 \delta_2' \sqrt{(f_{in} - f_{12} + \sigma_1)^2 - 4\sigma_1 f_{in}} \times \sqrt{(f_{in} - f_{21} + \sigma_2)^2 - 4\sigma_2 f_{in}} \right], \quad (75)$$

$$P' = - (4\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} f_{out})^{-1} \times \left[(f_{21} - f_{out} - \sigma_1)(f_{12} - f_{out} - \sigma_2) - \delta_1' \delta_2 \sqrt{(f_{21} - f_{out} - \sigma_1)^2 - 4\sigma_1 f_{out}} \times \sqrt{(f_{12} - f_{out} - \sigma_2)^2 - 4\sigma_2 f_{out}} \right]. \quad (76)$$

Кроме того, очевидно, что все сказанное до сих пор об условиях непрерывности в точке пересечения не ограничивается только переходами из COA в BOD и из AOD в COB , но в равной мере применимо к переходам вообще из любого сектора в любой другой. Это означает, что в действительности все четыре величины Q, Q', P и P' должны совпадать, и в дополнение к условиям (58) и (74) мы должны потребовать выполнения еще одного равенства, например $P = Q$. Таким образом, полный набор условий непрерывности в точке пересечения можно записать в виде

$$Q = Q', \quad Q = P, \quad Q = P'. \quad (77)$$

Оказывается, что эти три квадратных уравнения для одной неизвестной f_{21} действительно имеют один единственный общий корень. Этот корень легко находится³⁾ из первых двух уравнений из (77) и имеет вид

$$f_{21} = f_{out} + f_{in} - f_{12} - (2f_{12})^{-1} \times \left[(f_{in} - f_{12} - \sigma_1)(f_{12} - f_{out} + \sigma_2) - \delta_1 \delta_2 \sqrt{(f_{in} - f_{12} - \sigma_1)^2 - 4\sigma_1 f_{12}} \times \sqrt{(f_{12} - f_{out} + \sigma_2)^2 - 4\sigma_2 f_{12}} \right]. \quad (78)$$

Третье же уравнение из (77) после подстановки в него этого выражения для f_{21} удовлетворяется тождественно.

Формула (78) и решает задачу определения массового параметра m_{21} по величинам, заданным на этапе эволюции до пересечения. Вместе с этим определяется и обмен энергией между оболочками в процессе пересечения. Действительно, на этапе до пересечения полные сохраняющиеся энергии оболочек определяются как

$$E_1 = (m_{12} - m_{in})c^2, \quad E_2 = (m_{out} - m_{12})c^2, \quad (79)$$

³⁾ Для этого следует выразить компоненты единичных векторов 4-скорости через гиперболические функции. Так, например, если ввести «углы» α_1 и α_2 согласно $\delta_1 \sqrt{(f_{in} - f_{12} + \sigma_1)^2 - 4\sigma_1 f_{in}} = \sqrt{4\sigma_1 f_{12}} \operatorname{sh} \alpha_1$ и $\delta_2 \sqrt{(f_{12} - f_{out} + \sigma_2)^2 - 4\sigma_2 f_{12}} = \sqrt{4\sigma_2 f_{12}} \operatorname{sh} \alpha_2$, то окажется, что $Q = -\operatorname{ch}(\alpha_1 - \alpha_2)$. Аналогичные обозначения необходимо ввести и для величин, из которых составлены скалярные произведения P, P', Q' . После этого уравнения (77) легко разрешаются относительно «углов», которые содержат неизвестную f_{21} .

где E_1 — энергия оболочки «1» (внутренней), и E_2 — энергия оболочки «2» (внешней). При пересечении энергия каждой оболочки испытывает скачок, их энергии после этого становятся равными соответственно E'_1 и E'_2 :

$$E'_1 = (m_{out} - m_{21})c^2, \quad E'_2 = (m_{21} - m_{in})c^2. \quad (80)$$

Из этих выражений автоматически следует закон сохранения суммарной энергии оболочек при переходе через точку пересечения:

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2. \quad (81)$$

С учетом этого соотношения энергии оболочек после пересечения могут быть записаны в виде

$$E'_1 = E_1 - \Delta E, \quad E'_2 = E_2 + \Delta E, \quad (82)$$

и из (80), (81), а также из (69), следует

$$\Delta E = \frac{c^4 r^*}{2k} (f_{in} + f_{out} - f_{12} - f_{21}). \quad (83)$$

Подставляя сюда решение (78) для f_{21} , получим

$$\begin{aligned} \Delta E = & \frac{c^4 r^*}{4k f_{12}} [(f_{in} - f_{12} - \sigma_1)(f_{12} - f_{out} + \sigma_2) - \\ & - \delta_1 \delta_2 \sqrt{(f_{in} - f_{12} - \sigma_1)^2 - 4\sigma_1 f_{12}} \times \\ & \times \sqrt{(f_{12} - f_{out} + \sigma_2)^2 - 4\sigma_2 f_{12}}]. \quad (84) \end{aligned}$$

Заметим, что в формулах (78) и (84) квадратная скобка, умноженная на фактор f_{12}^{-1} , весьма просто выражается через скалярное произведение Q (см. формулу (70)), которое, в свою очередь, просто выражается через значения скоростей v_1 и v_2 оболочек в точке пересечения (соотношение (80)). Это представление величины ΔE имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta E = & - \frac{k M_1(r^*) M_2(r^*)}{r^*} Q = \\ = & \left(\frac{k M_1 M_2}{r} \frac{1 - v_1 v_2 / c^2}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2} \sqrt{1 - v_2^2 / c^2}} \right)_{r=r^*}, \quad (85) \end{aligned}$$

и в некоторых случаях удобно (в частности, для получения нерелятивистского приближения). Соответствующее выражение для метрического коэффициента f_{21} можно записать в виде

$$f_{21} = f_{out} + f_{in} - f_{12} - \frac{2k}{c^4 r^*} \Delta E. \quad (86)$$

4. НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ (НЬЮТОНОВСКОЕ) ПРИБЛИЖЕНИЕ

В нерелятивистском приближении полные энергии оболочек (79) и (80) имеют разложения вида

$$E = mc^2 + \mathcal{E} + o(1/c^2),$$

где m и \mathcal{E} не зависят от c . Это значит, что разности массовых параметров с точностью до $1/c^2$ включительно имеют вид

$$m_{12} - m_{in} = m_1 + \frac{\mathcal{E}_1}{c^2}, \quad m_{out} - m_{12} = m_2 + \frac{\mathcal{E}_2}{c^2}, \quad (87)$$

$$m_{out} - m_{21} = m_1 + \frac{\mathcal{E}'_1}{c^2}, \quad m_{21} - m_{in} = m_2 + \frac{\mathcal{E}'_2}{c^2}, \quad (88)$$

где m_1 и m_2 — массы покоя оболочек, те самые, которые фигурируют в формулах (32) для эффективных масс M_1 и M_2 . Величины \mathcal{E} в (87), (88) есть полные нерелятивистские энергии оболочек, и из (87), (88) следует закон их сохранения:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2. \quad (89)$$

Соотношения (82) теперь принимают форму

$$\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 - \Delta \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}_2 + \Delta \mathcal{E}, \quad (90)$$

где $\Delta \mathcal{E} = (\Delta E)_{c=\infty}$ и следует из выражения (85). Учитывая, что $M_1 = m_1$ и $M_2 = m_2$ в первом неисчезающем порядке по $1/c^2$, получаем из (85) нерелятивистскую формулу для обмена энергиями при пересечении:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{k m_1 m_2}{r^*}. \quad (91)$$

Нерелятивистские уравнения движения оболочек на стадии до пересечения легко получить из точных уравнений (30)–(32). Собственные времена τ_1 и τ_2 в главном порядке совпадают с глобальным временем t , так что величины $(dr_1/cd\tau_1)^2$ и $(dr_1/cd\tau_2)^2$ в этих уравнениях есть не что иное, как v_1^2/c^2 и v_2^2/c^2 , соответственно, где

$$v_1 = \frac{dr_1}{dt}, \quad v_2 = \frac{dr_2}{dt}. \quad (92)$$

Разложение уравнений (30)–(32) до порядка $1/c^2$ включительно дает

$$\mathcal{E}_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{k m_1 (m_{in} + m_1/2)}{r_1} + \frac{L_1^2}{2r_1^2 m_1}, \quad (93)$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{k m_2 (m_{in} + m_2/2 + m_1)}{r_2} + \frac{L_2^2}{2r_2^2 m_2}. \quad (94)$$

Аналогичная операция с уравнениями (38), (39) приводит к следующим уравнениям движения оболочек после их пересечения:

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{km_1(m_{in} + m_1/2 + m_2)}{r_1} + \frac{L_1^2}{2r_1^2 m_1}, \quad (95)$$

$$\mathcal{E}'_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{km_2(m_{in} + m_2/2)}{r_2} + \frac{L_2^2}{2r_2^2 m_2}. \quad (96)$$

Вместе с соотношениями (90), (91) и начальными данными $r_1 = r_2 = r^*$ при $t = t^*$ уравнения (95), (96) полностью определяют эволюцию оболочек непосредственно после момента t^* (т. е. на этапе до следующего возможного пересечения).

Из уравнений (93)–(96), примененных к точке $r_1 = r_2 = r^*$, следует

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1 &= \frac{m_1}{2} [v_1^2(r^*) - v_1'^2(r^*)] + \frac{km_1 m_2}{r^*}, \\ \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}'_2 &= \frac{m_2}{2} [v_2^2(r^*) - v_2'^2(r^*)] - \frac{km_1 m_2}{r^*}, \end{aligned} \quad (97)$$

где через $v'_{1,2}(r^*)$ мы обозначили пределы скоростей $v_{1,2}$ в точке r^* со стороны «после пересечения», в то время как $v_{1,2}(r^*)$ есть пределы этих скоростей в точке r^* со стороны «до пересечения». Соотношения (97) и закон изменения энергии (90), (91) показывают, что в нерелятивистском приближении скорости оболочек непрерывны в точке пересечения:

$$v'_1(r^*) = v_1(r^*), \quad v'_2(r^*) = v_2(r^*) \quad (98)$$

(случаи изменения знака скоростей исключаются из тех дополнительных физических требований к сшивке эволюций, о которых мы уже говорили во Введении). Разумеется, условие (98) заранее очевидно и не требует обсуждения. Мы вывели его здесь только с целью показать согласованность всей процедуры. Заметим, что при исследовании ньютоновского приближения можно прямо начинать с условия (98) как с основного постулата (в работе [8] мы так и поступали).

Точная формула (84) для ΔE , записанная через скорости в форме (85), позволяет также легко найти постньютоновскую поправку к переданной энергии. Раскладывая правую часть выражения (85) с точностью до порядка $1/c^2$ включительно, получим

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{km_1 m_2}{r^*} + \frac{1}{2c^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{km_1 m_2}{r^*} [v_1(r^*) - v_2(r^*)]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{km_2 L_1^2}{m_1 r^{*3}} + \frac{km_1 L_2^2}{m_2 r^{*3}} \right\}. \quad (99) \end{aligned}$$

Скорости $v_1(r^*)$ и $v_2(r^*)$ в этой формуле следует находить из уравнений (93), (94), примененных к точке $r_1 = r_2 = r^*$, т. е. это есть обычные скорости ньютоновского приближения. Разумеется, если мы принимаем во внимание постньютоновскую поправку к ΔE , то необходимо учитывать такие поправки и во всех энергиях E , т. е. необходимо выписать следующие члены разложения по $1/c^2$ в энергиях после ньютоновских (93)–(96). Соответствующие вычисления нами проделаны, но мы не будем приводить здесь их результат из-за его относительной громоздкости и отсутствия необходимости в нем на настоящем этапе исследований.

5. ОБОЛОЧКИ С НУЛЕВОЙ ЭФФЕКТИВНОЙ МАССОЙ ПОКОЯ

Если частицы, составляющие оболочки, движутся только радиально и имеют нулевую массу покоя, то $m_1 = m_2 = 0$ и $L_1 = L_2 = 0$. В этом случае обе оболочки имеют нулевую эффективную массу покоя, т. е. $M_1 = M_2 = 0$. Пересечение оболочек по-прежнему соответствует рисунку 1 с той лишь разницей, что теперь траектории CO , AO , OB и OD являются изотропными. Во всех четырех секторах метрика дается теми же формулами (25)–(28), в которых функции f имеют тот же вид (4), (29). Задача по-прежнему состоит в нахождении радиуса r^* точки пересечения оболочек и затем массового параметра m_{21} , или, что то же, величины $f_{21}(r^*)$. Естественно, что последняя должна следовать из формулы (78), в которой следует положить $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ и считать $\delta_1 \delta_2 = -1$, поскольку пересечение таких « s -волновых» светоподобных оболочек возможно, только если вначале они движутся навстречу друг другу. Учитывая также, что в физической области массовые параметры расположены в порядке

$$m_{out} > m_{12} > m_{in}, \quad m_{out} > m_{21} > m_{in}, \quad (100)$$

или, что то же самое,

$$f_{out} < f_{12} < f_{in}, \quad f_{out} < f_{21} < f_{in}, \quad (101)$$

получаем из (78) следующий результат:

$$f_{21}(r^*) f_{12}(r^*) = f_{in}(r^*) f_{out}(r^*). \quad (102)$$

Это есть не что иное, как соотношение, полученное Дреем и 'т Хофтом в работе [17], в которой они рассматривали процесс пересечения двух световых сферически-симметричных оболочек с чисто радиальным движением составляющих их «фотонов».

Для полного описания поведения световых оболочек нужно еще составить уравнения их движения. Теперь в этих уравнениях нельзя использовать собственное время τ , так как его не существует. Если имеется только одна оболочка, то выражения для интервалов (1), (2) остаются теми же, а вместо выражения (3) будем иметь

$$-(ds^2)_{on} = R_0^2(t)d\Omega^2. \quad (103)$$

Таким образом, условия сшивки теперь означают, что радиально-временная часть интервала должна обращаться в нуль на обеих сторонах оболочки, т. е. вместо (6), (7) получим

$$f_{in}(R_0)e^{T(t)} - f_{in}^{-1}(R_0) \left(\frac{dR_0}{cdt}\right)^2 = 0, \quad (104)$$

$$f_{out}(R_0) - f_{out}^{-1}(R_0) \left(\frac{dR_0}{cdt}\right)^2 = 0. \quad (105)$$

Уравнение движения оболочки $r = R_0(t)$ следует уже из (105):

$$\left(\frac{dR_0}{cdt}\right) = f_{out}^2(R_0), \quad (106)$$

а (104) после этого определяет дилатонный множитель $e^{T(t)}$:

$$e^{T(t)} = \frac{f_{out}^2(R_0)}{f_{in}^2(R_0)}. \quad (107)$$

Легко видеть, что уравнение движения в формах (18)–(20) теперь уже не требуется, так как оно просто повторяет уравнение (106). Это легко показать, сначала (при $\mu \neq 0$) перейдя в уравнениях к глобальному времени t вместо τ , а затем перейдя к пределу $\mu \rightarrow 0$.

В случае двух оболочек уравнения движения второй оболочки до пересечения (внешней) следуют из равенства нулю радиально-временного интервала на обеих ее сторонах:

$$f_{out}(R_2) - f_{out}^{-1}(R_2) \left(\frac{dR_2}{cdt}\right)^2 = 0, \quad (108)$$

$$e^{T_1(t)} f_{12}(R_2) - f_{12}^{-1}(R_2) \left(\frac{dR_2}{cdt}\right)^2 = 0, \quad (109)$$

откуда следует

$$\left(\frac{dR_2}{cdt}\right)^2 = f_{out}^2(R_2), \quad e^{T_1(t)} = \frac{f_{out}^2(R_2)}{f_{12}^2(R_2)}. \quad (110)$$

Для оболочки 1 (внутренней) до пересечения должно быть

$$e^{T_1(t)} f_{12}(R_1) - f_{12}^{-1}(R_1) \left(\frac{dR_1}{cdt}\right)^2 = 0, \quad (111)$$

$$e^{T_0(t)} f_{in}(R_1) - f_{in}^{-1}(R_1) \left(\frac{dR_1}{cdt}\right)^2 = 0, \quad (112)$$

Подставляя в (111) e^{T_1} из (110), получаем

$$\left(\frac{dR_1}{cdt}\right)^2 = \frac{f_{out}^2(R_2)f_{12}^2(R_1)}{f_{12}^2(R_2)}, \quad (113)$$

$$e^{T_0(t)} = \frac{f_{out}^2(R_2)f_{12}^2(R_1)}{f_{12}^2(R_2)f_{in}^2(R_1)}.$$

После пересечения для оболочки 1 (теперь уже внешней) имеем

$$f_{out}(R_1) - f_{out}^{-1}(R_1) \left(\frac{dR_1}{cdt}\right)^2 = 0, \quad (114)$$

$$e^{T_2(t)} f_{21}(R_1) - f_{21}^{-1}(R_1) \left(\frac{dR_1}{cdt}\right)^2 = 0, \quad (115)$$

откуда следует

$$\left(\frac{dR_1}{cdt}\right)^2 = f_{out}^2(R_1), \quad e^{T_2(t)} = \frac{f_{out}^2(R_1)}{f_{21}^2(R_1)}. \quad (116)$$

Для оболочки 2 (после пересечения — внутренней)

$$e^{T_2(t)} f_{21}(R_2) - f_{21}^{-1}(R_2) \left(\frac{dR_2}{cdt}\right)^2 = 0, \quad (117)$$

$$e^{T_0(t)} f_{in}(R_2) - f_{in}^{-1}(R_2) \left(\frac{dR_2}{cdt}\right)^2 = 0, \quad (118)$$

Подставляя в (117) e^{T_2} из (116), получаем

$$\left(\frac{dR_2}{cdt}\right)^2 = \frac{f_{out}^2(R_1)f_{21}^2(R_2)}{f_{21}^2(R_1)}, \quad (119)$$

$$e^{T_0(t)} = \frac{f_{out}^2(R_1)f_{21}^2(R_2)}{f_{21}^2(R_1)f_{in}^2(R_2)}.$$

Если начальные данные к первому из уравнений (110) и первому из (113) заданы, а также заданы массовые параметры m_{12} , m_{in} и m_{out} , то траектории $r = R_1(t)$ и $r = R_2(t)$ оболочек до пересечения полностью определяются, и вместе с этим определяется точка их пересечения $r^* = R_1(t^*) = R_2(t^*)$. После этого из (102) находится массовый параметр m_{21} , и из первых

уравнений (116) и (119) полностью определяются траектории оболочек после их пересечения.

Переданную энергию легко найти из (83), подставив туда величину $f_{21}(r^*)$, выраженную из соотношения (102):

$$\Delta E = \frac{2k(m_{12} - m_{in})(m_{out} - m_{12})}{r^* f_{12}(r^*)}. \quad (120)$$

Отметим также, что если бы мы взяли $\delta_1 \delta_2 = 1$, то получили бы

$$f_{21}(r^*) = f_{in}(r^*) + f_{out}(r^*) - f_{12}(r^*), \quad (121)$$

а переданная энергия ΔE обратилась бы в нуль, что отражает невозможность пересечения таких световых оболочек, движущихся в одну сторону. Действительно, простое рассмотрение уравнений (110) и (113) показывает, что при $\delta_1 \delta_2 = 1$ пересечение невозможно, что, разумеется, очевидно заранее. Существование же решения (121), а значит, и области 21 после пересечения связано в этом случае с тем, что точное решение для нулевых эффективных масс может рассматриваться как первое приближение для случая массивных оболочек, но находящихся в ультрарелятивистском режиме, когда эффективные массы покоя M_1 и M_2 несущественны и решение может быть разложено по малым параметрам σ_1 и σ_2 . Пересечение при этом возможно, даже если оболочки движутся в одну сторону, и переданная энергия в первом исчезающем порядке будет малой величиной, линейной по параметрам σ_1 и σ_2 , т. е. по M_1^2 и M_2^2 . Вычисление дает

$$\Delta E = \frac{kM_1^2(m_{out} - m_{12})^2 + kM_2^2(m_{12} - m_{in})^2}{2r^*(m_{12} - m_{in})(m_{out} - m_{12})}, \quad (122)$$

$$\delta_1 \delta_2 = 1,$$

именно к этой ситуации относится решение (121) для $f_{21}(r^*)$.

Заметим в заключение, что если «фотоны», составляющие оболочки, движутся не радиально, то при нулевых значениях m_1 и m_2 параметры L_1 и L_2 отличны от нуля. В этом случае эффективные массы покоя M_1 и M_2 отличны от нуля и такие световые оболочки качественно ведут себя так же, как и массивные.

6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРОБНОЙ ОБОЛОЧКИ С ГРАВИТИРУЮЩЕЙ

Очевидно, что движения и пересечения двух пробных оболочек интереса не представляют. Каждая из них движется так, как если бы другой вообще

не существовало. Нетривиальная ситуация возникает тогда, когда только одна из оболочек пробная, а гравитационное поле второй учитывается в полной мере. Естественно, что решение такой задачи должно следовать из общего случая с помощью соответствующего предельного перехода. Рассмотрим сначала, как осуществляется предельный переход к пробной оболочке в том случае, когда имеется всего лишь одна оболочка. Для получения такого предела необходимо переобозначить постоянные параметры следующим образом:

$$m = \lambda m_p, \quad L = \lambda L_p, \quad m_{out} = m_{in} + \lambda \frac{E_p}{c^2}, \quad (123)$$

и считать константы m_p , L_p и E_p независимыми от λ . После этого необходимо осуществить предельный переход $\lambda \rightarrow 0$.

В пределе $\lambda \rightarrow 0$ имеем $m_{out} = m_{in}$ и из уравнений сшивки (6), (7) следует $e^{T(t)} = 1$. Из (1), (2) теперь видно, что метрика как внутри оболочки, так и вне ее одна и та же (как и должно быть, если оболочка пробная):

$$-ds^2 = f_{in}(r)c^2 dt^2 + f_{in}^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (124)$$

Из условий сшивки теперь остается только одно соотношение:

$$f_{in}(r_0) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - f_{in}^{-1}(r_0) \left(\frac{dr_0}{cd\tau} \right)^2 = 1, \quad (125)$$

которое уже нет смысла называть условием сшивки. Это есть просто условие нормировки на единицу 4-скорости пробной «частицы».

Эффективную массу $\mu(\tau)$ записываем в виде

$$\mu(\tau) = \lambda \mu_p(\tau), \quad (126)$$

и тогда соотношение (24) определяет μ_p :

$$\mu_p(\tau) = \sqrt{m_p^2 + \frac{L_p^2}{c^2 r_0^2(\tau)}}. \quad (127)$$

Подстановка (126), (127) в уравнение (18) и переход к пределу $\lambda \rightarrow 0$ дает следующее уравнение движения пробной оболочки в поле центральной массы m_{in} :

$$\frac{E_p}{c^2} = \mu_p(\tau) \cdot \sqrt{f_{in}(r_0) + \left(\frac{dr_0}{cd\tau} \right)^2}. \quad (128)$$

Как видно, из окончательных уравнений (124), (125) и (127), (128) нулевые параметры исчезли и остались только конечные константы m_p , L_p , m_{in} и E_p , которые и характеризуют пробную оболочку.

Естественно ожидать, что уравнение движения пробной оболочки должно совпадать с уравнением геодезической в поле центральной массы. Оказывается, что это действительно так. Пользуясь соотношением (125), легко записать уравнение движения (128) не в собственном, а в шварцшильдовском времени t :

$$\frac{E_p}{c^2} = \sqrt{m_p^2 + \frac{L_p^2}{c^2 R_0^2(t)}} \sqrt{\frac{f_{in}^3(R_0)}{f_{in}^2(R_0) - \left(\frac{dR_0}{cdt}\right)^2}}. \quad (129)$$

Это выражение уже легко сравнить с тем, которое следует из решения уравнений геодезической в метрике (124). Для пробной оболочки уравнение (129) является единственным интегралом движения в том смысле, что у оболочки как целого нет никаких движений, кроме радиального. Поэтому речь идет о совпадении (129) с тем первым интегралом уравнений геодезической, который описывает именно радиальную часть движения пробной частицы (хотя частица имеет, разумеется, и тангенциальное движение). Хорошо известно, что такой интеграл уравнений геодезической существует, и легко показать, что он в точности совпадает с (129), если полную сохраняющуюся энергию частицы отождествить с E_p , массу покоя частицы — с m_p , а квадрат нормы сохраняющегося углового момента частицы — с величиной L_p^2 .

Рассмотрим теперь ситуацию с двумя оболочками, показанную на рис. 1, и будем считать, что оболочка 2 (траектории CO и OD) является пробной. Параметры оболочки 1 оставляем неизменными, а параметры оболочки 2 переобозначим в соответствии с (123):

$$m_2 = \lambda m_p, \quad L_2 = \lambda L_p, \quad E_2 = \lambda E_p, \quad E'_2 = \lambda E'_p.$$

Отсюда следует, что

$$M_2(r) = \lambda M_p(r),$$

где

$$M_p(r) = \sqrt{m_p^2 + \frac{L_p^2}{c^2 r^2}}. \quad (130)$$

Соотношения (79) и (80) теперь дают

$$m_{12} = m_{out} - \lambda \frac{E_p}{c^2}, \quad m_{21} = m_{in} + \lambda \frac{E'_p}{c^2},$$

откуда видно, что в пределе $\lambda = 0$ массовые параметры по обе стороны от оболочки 2 как до пересечения, так и после него, совпадают:

$$m_{12} = m_{out}, \quad m_{21} = m_{in}. \quad (131)$$

Из условий сшивок (35), (36) и (42), (43) в пределе $\lambda = 0$ следует

$$e^{T_1} = 1, \quad e^{T_2} = e^{T_0}. \quad (132)$$

Таким образом, как видно из (25), (26) и (27), (28), метрики в областях COB и COA совпадают, а также совпадают метрики в областях AOD и BOD . Иными словами, метрики при переходе через траектории CO и OD непрерывны, что и должно иметь место для пробной оболочки.

Подставляя переобозначенные параметры в уравнения (30) и (31) и переходя в них к пределу $\lambda = 0$, получаем следующие уравнения движения оболочек до пересечения:

$$\begin{aligned} \sqrt{f_{out}(r_1) + \left(\frac{dr_1}{cd\tau_1}\right)^2} &= \\ &= \frac{m_{out} - m_{in}}{M_1(r_1)} - \frac{kM_1(r_1)}{2c^2 r_1}, \end{aligned} \quad (133)$$

$$\sqrt{f_{out}(r_2) + \left(\frac{dr_2}{cd\tau_2}\right)^2} = \frac{E_p}{c^2 M_p(r_2)}, \quad (134)$$

Аналогично из (38), (39) получаем уравнения движения после пересечения:

$$\begin{aligned} \sqrt{f_{in}(r_1) + \left(\frac{dr_1}{cd\tau_1}\right)^2} &= \\ &= \frac{m_{out} - m_{in}}{M_1(r_1)} + \frac{kM_1(r_1)}{2c^2 r_1}, \end{aligned} \quad (135)$$

$$\sqrt{f_{in}(r_2) + \left(\frac{dr_2}{cd\tau_2}\right)^2} = \frac{E'_p}{c^2 M_p(r_2)}. \quad (136)$$

Уравнения движения (133) и (135) гравитирующей оболочки 1 в действительности являются одним и тем же уравнением, просто первое записано в форме (19), а второе в форме (18), т. е. вся эволюция оболочки 1 может быть описана только одним из этих уравнений, распространенным на оба этапа движения, как до пересечения, так и после него. Таким образом, гравитирующая оболочка движется, не испытывая никакого влияния со стороны пробной, как и должно быть. Не так обстоит дело с пробной оболочкой 2. Уравнения ее движения (134) и (136) существенно различны, кроме того, необходимо еще определить ее энергию E'_p после пересечения через параметры, заданные на этапе до пересечения. Последнее осуществляется с помощью уравнения (78),

в которое необходимо подставить переобозначенные параметры и затем перейти к пределу $\lambda = 0$. Эта операция приводит к следующему результату:

$$E'_p = E_p + \frac{1}{2f_{out}} [(f_{in} - f_{out} - \sigma_1)E_p - \delta_1 \delta_2 \sqrt{(f_{in} - f_{out} - \sigma_1)^2 - 4\sigma_1 f_{out}} \times \sqrt{E_p^2 - f_{out} M_p^2 c^4}], \quad (137)$$

где f_{in} , f_{out} и M_p — также значения этих функций в точке пересечения $r = r^*$.

Уравнение (137) дает скачок энергии пробной оболочки. При необходимости можно определить также и скачок ее скорости. Во избежание недоразумений, отметим предварительно следующее обстоятельство. Для гравитирующей оболочки 1 в силу тождественного совпадения уравнений ее движения до пересечения и после него производная $dr_1/d\tau_1$ непрерывна в точке пересечения. Скорость же этой оболочки, определяемая формулами (60) и (64), разрывна, так как

$$g_{11}^{COA}(r^*) \neq g_{11}^{BOD}(r^*).$$

Разумеется, этот разрыв является нефизическим и связан только с различным определением скорости на этапах до пересечения и после него: скорость гравитирующей оболочки до пересечения определяется по отношению к метрике вне ее (сектор COB), а после пересечения — по отношению к метрике внутри нее (сектор BOD). Легко проверить, что если бы мы продолжали определять скорость оболочки 1 после пересечения относительно метрики вне ее (т. е. в секторе COB), то такая скорость оказалась бы непрерывной в точке пересечения. Точно так же оказалась бы непрерывной и скорость оболочки 1, определяемая всюду по отношению к метрике под оболочкой. Поскольку гравитирующая оболочка никак не чувствует присутствие пробной, ее пересечение с последней ничем не выделено, а изменение в определении каких-либо величин в ничем не выделенный момент эволюции, естественно, не имеет отношения к физике процесса. Разумеется, могут существовать причины, по которым такое «странное» определение скоростей, тем не менее, удобно, но это совсем другое дело. В нашей работе это понадобилось только для того, чтобы связать условия соединения в точке пересечения с понятием непрерывности относительной скорости, чего можно было бы и не делать. Вычисление скалярных произведений Q , Q' , P и P' и условия их непрерывности вовсе не требуют введения каких-либо скоростей.

По-другому обстоит дело с пробной оболочкой, на обеих сторонах которой метрика одна и та же. «Физическая» скорость такой оболочки по отношению к этой метрике всюду определяется однозначно и не может иметь фиктивных разрывов описанного выше типа. Поэтому наличие разрыва такой скорости в точке пересечения действительно является физически реальным. До пересечения скорость пробной оболочки определяется формулами (61) и (26), в которых также следует перейти к пределу $\lambda = 0$. После этого с помощью (134) получаем

$$\frac{M_p c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{E_p}{\sqrt{f_{out}}}. \quad (138)$$

Те же действия с (65), (28) и (136) дают

$$\frac{M_p c^2}{\sqrt{1 - v_2'^2/c^2}} = \frac{E'_p}{\sqrt{f_{in}}}. \quad (139)$$

В этих формулах, как и ранее, все функции от r берутся в точке пересечения $r = r^*$. Поскольку скачок энергии известен (соотношение (137)), из (138), (139) можно найти скачок скорости пробной оболочки.

7. О ВЫБРОСЕ ВЕЩЕСТВА ИЗ СКОПЛЕНИЯ

Динамические процессы в окрестностях сверхмассивных черных дыр (СЧД), квазаров, блазаров и активных ядер галактик характеризуются бурными явлениями, ведущими к образованию джетов и выбросов. Образование джетов часто ассоциируется с процессами, происходящими в замагниченных аккреционных дисках [18, 19]. Образование квазисферических выбросов, которые, возможно, наблюдаются в широких абсорбционных линиях, может оказаться связанным с другими механизмами выброса. В этом разделе мы отметим возможность выброса оболочек из окрестности СЧД, окруженной плотным массивным звездным скоплением, основываясь на баллистическом взаимодействии гравитирующих оболочек, описанном в предыдущих разделах.

Численный расчет коллапса звездного скопления в оболочечном приближении [4, 9, 10] показал, что даже если все оболочки первоначально связаны, после ряда пересечений некоторые оболочки приобретают достаточно энергии, чтобы стать не связанными и улечь на бесконечность. В ньютоновском приближении остатком окажется стационарное звездное скопление, а в ОТО остатком может оказаться СЧД.

Образование выбросов может оказаться результатом взаимодействия оболочек, двигающихся в окрестности СЧД. В однородном звездном скоплении с или без СЧД звезды испаряются вследствие парных столкновений с небольшой передачей кинетической энергии. Образование быстро вылетающих звезд приблизительно в 100 раз менее вероятно вследствие превалирования столкновений со слабой передачей импульса [20]. Если скопление более плотное и содержит несколько компактных частей, то столкновения между этими частями будут совершенно иными, значительная передача импульса при столкновении становится возможной. В этом случае гравитационное взаимодействие между компактными частями может привести к выбросам с большими скоростями, и если такое пересечение происходит вблизи СЧД, то скорость вылета оболочки из скопления может составлять заметную часть скорости света c . Такая ситуация может возникнуть в результате столкновения галактик при тесном сближении их ядер. Тогда одно ядро может натянуть на себя часть вещества с другого в виде коллапсирующих оболочек. Взаимодействие таких оболочек со звездным скоплением может привести не только к коллапсу на СЧД, но и к обратному явлению: выбрасывания оболочки со скоростью, много большей, чем скорость падения на данном радиусе, причем оболочка не упадет на СЧД благодаря большому угловому моменту ее звезд.

Механизм выброса проявляется уже на примере взаимодействия двух оболочек в ньютоновском приближении, рассмотренном нами в разд. 4. Если две гравитационно связанные оболочки с энергиями $\mathcal{E}_1 < 0$ и $\mathcal{E}_2 < 0$, подчиняясь уравнениям движения (93), (94), пересекаются в точке $r = r_1^*$, то может случиться, что их следующее пересечение произойдет в точке $r = r_2^*$, более удаленной от центра, т. е. при $r_2^* > r_1^*$. После первого пересечения энергии оболочек в соответствии с (90) и (91) будут

$$\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{km_1m_2}{r_1^*}, \quad \mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}_2 + \frac{km_1m_2}{r_1^*}, \quad (140)$$

а после второго они окажутся равными

$$\begin{aligned} \mathcal{E}''_1 &= \mathcal{E}'_1 + \frac{km_1m_2}{r_2^*} = \mathcal{E}_1 - km_1m_2 \left(\frac{1}{r_1^*} - \frac{1}{r_2^*} \right), \\ \mathcal{E}''_2 &= \mathcal{E}'_2 - \frac{km_1m_2}{r_2^*} = \mathcal{E}_2 + km_1m_2 \left(\frac{1}{r_1^*} - \frac{1}{r_2^*} \right). \end{aligned} \quad (141)$$

Если абсолютные значения \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 достаточно малы, а r_1^* не очень велико и не слишком близко к r_2^* , то $\mathcal{E}''_2 > 0$, и оболочка 2 (внешняя после пересечения)

может уйти на бесконечность. Ясно, что существует достаточно широкий класс таких решений, и один конкретный пример (в котором скорость выброса по возможности наибольшая) приведен в [8].

Естественно, что этот эффект остается и в релятивистской теории гравитации. Если две гравитационно связанные оболочки с энергиями $E_1 < m_1c^2$ и $E_2 < m_2c^2$, двигаясь в согласии с уравнениями (30)–(32), пересекаются в точке $r = r_1^*$, то обмен энергией описывается формулами (82) и (84), (85):

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 - \frac{kM_1(r_1^*)M_2(r_1^*)}{r_1^*} (-Q), \\ E'_2 &= E_2 + \frac{kM_1(r_1^*)M_2(r_1^*)}{r_1^*} (-Q), \end{aligned} \quad (142)$$

где Q дается выражением (70), в котором все функции от r берутся в точке r_1^* . Для простоты рассмотрим только те случаи, когда второе пересечение происходит при $r_2^* > r_1^*$, но при настолько большом r_2^* , что для оценок уже можно использовать в этой области ньютоновское приближение. Таким образом, после второго пересечения энергии оболочек будут

$$\begin{aligned} E''_1 &= E'_1 + \frac{km_1m_2}{r_2^*} = \\ &= E_1 - \left[\frac{kM_1(r_1^*)M_2(r_1^*)}{r_1^*} (-Q) - \frac{km_1m_2}{r_2^*} \right], \\ E''_2 &= E'_2 - \frac{km_1m_2}{r_2^*} = \\ &= E_2 + \left[\frac{kM_1(r_1^*)M_2(r_1^*)}{r_1^*} (-Q) - \frac{km_1m_2}{r_2^*} \right]. \end{aligned} \quad (143)$$

Существенным теперь является то обстоятельство, что каково бы ни было значение r_1^* , первое слагаемое в квадратных скобках в (143) удовлетворяет неравенству

$$\frac{kM_1(r_1^*)M_2(r_1^*)}{r_1^*} (-Q) > \frac{km_1m_2}{r_1^*}. \quad (144)$$

Это следует из того, что $M_1(r) > m_1$ и $M_2(r) > m_2$ при любых r и, кроме того, модуль Q всегда больше единицы (см. сноску 3). Сравнение выражений (143), (144) и (141) показывает, что в релятивистской области эффекты выброса оболочек не только остаются, но могут осуществляться даже с большей интенсивностью.

8. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим теперь численное решение точных уравнений движения для случая двух оболочек с

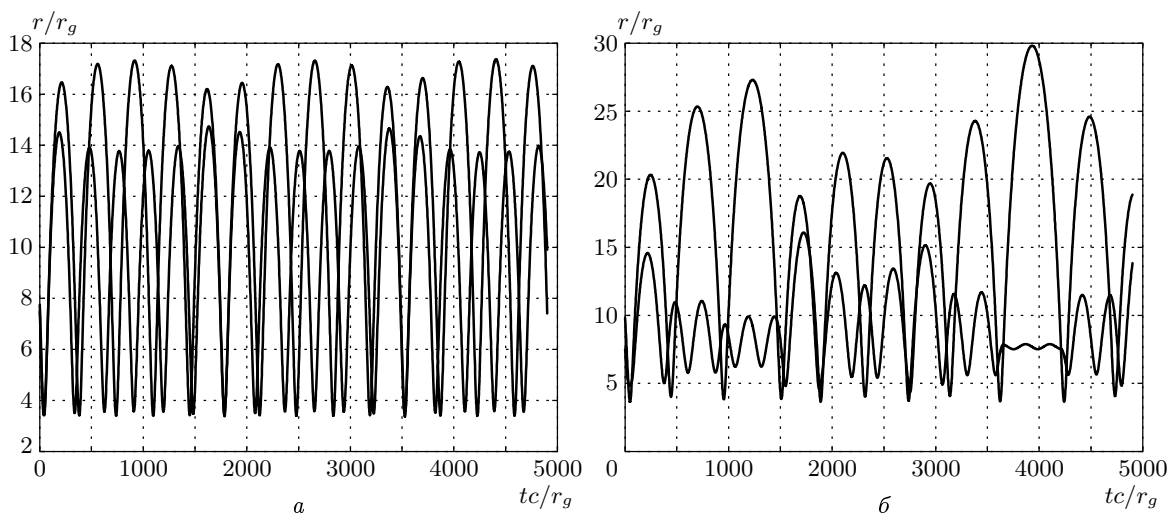


Рис. 2. Движение двух гравитационно связанных оболочек с пересечениями, когда масса каждой оболочки составляет 1% от массы центрального тела, $m_1 = m_2 = 0.01m_{in}$ (а) и $0.15m_{in}$ (б)

учетом пересечения их друг с другом. Для расчета движения оболочек между пересечениями использовались уравнения (29)–(36), где m_{in} , m_{12} , m_{out} , m_1 , m_2 , L_1 , L_2 — свободные начальные параметры системы. Требуется также задать начальные радиусы оболочек, при этом момент времени начала счета можно принять равным нулю. Из системы (33)–(36) находим выражения для производных от собственных времен τ_1 и τ_2 по t и, подставив их в уравнения (30), (31), получаем уравнения движения оболочек во времени относительно наблюдателя, находящегося на бесконечном удалении.

При пересечении происходит перераспределение энергии оболочек, которое может быть учтено при помощи уравнения (78). После пересечения произошло переименование оболочек, что позволяет нам считать сколько угодно много пересечений, не заботясь в дальнейшем о номерах оболочек (оболочка 2 всегда внешняя).

На рис. 2 изображено движение двух оболочек вокруг центрального тела. Массы покоя оболочек принимались одинаковыми, равными 1% и 15% от массы центрального тела, и начальные относительные энергии $E_i/m_i c^2$ в обоих случаях равнялись 0.975. На рис. 2а хорошо наблюдаются «биения» оболочек, перетекание энергии от одной оболочки к другой, что проявляется в изменениях радиуса максимального удаления оболочек от центра. Но при больших массах оболочек на рис. 2б уже после одного пересечения энергии и траектории оболочек меняются настолько сильно, что следующее пересечение

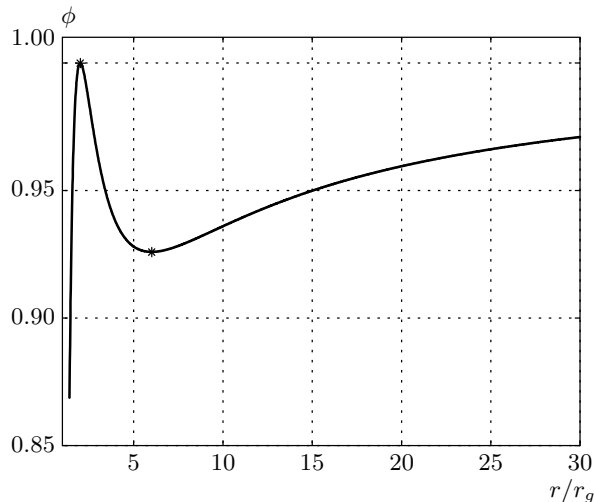


Рис. 3. Полный эффективный потенциал Φ (гравитационный плюс центробежный) для движения одной оболочки, $r_g = 2km_{in}/c^2$

может произойти при существенно других значениях радиуса и направлениях скоростей оболочек (т. е. изменение фазы сравнимо с самим периодом колебания оболочек). На этом примере ясно видна хаотизация движения оболочек. Иллюстрация хаотических движений при различных параметрах оболочек в ньютоновском случае приведена в работе [8].

Для того чтобы добиться наибольшего выигрыша в энергии улетающей оболочки, по аналогии с ньютоновским случаем надо подобрать параметры

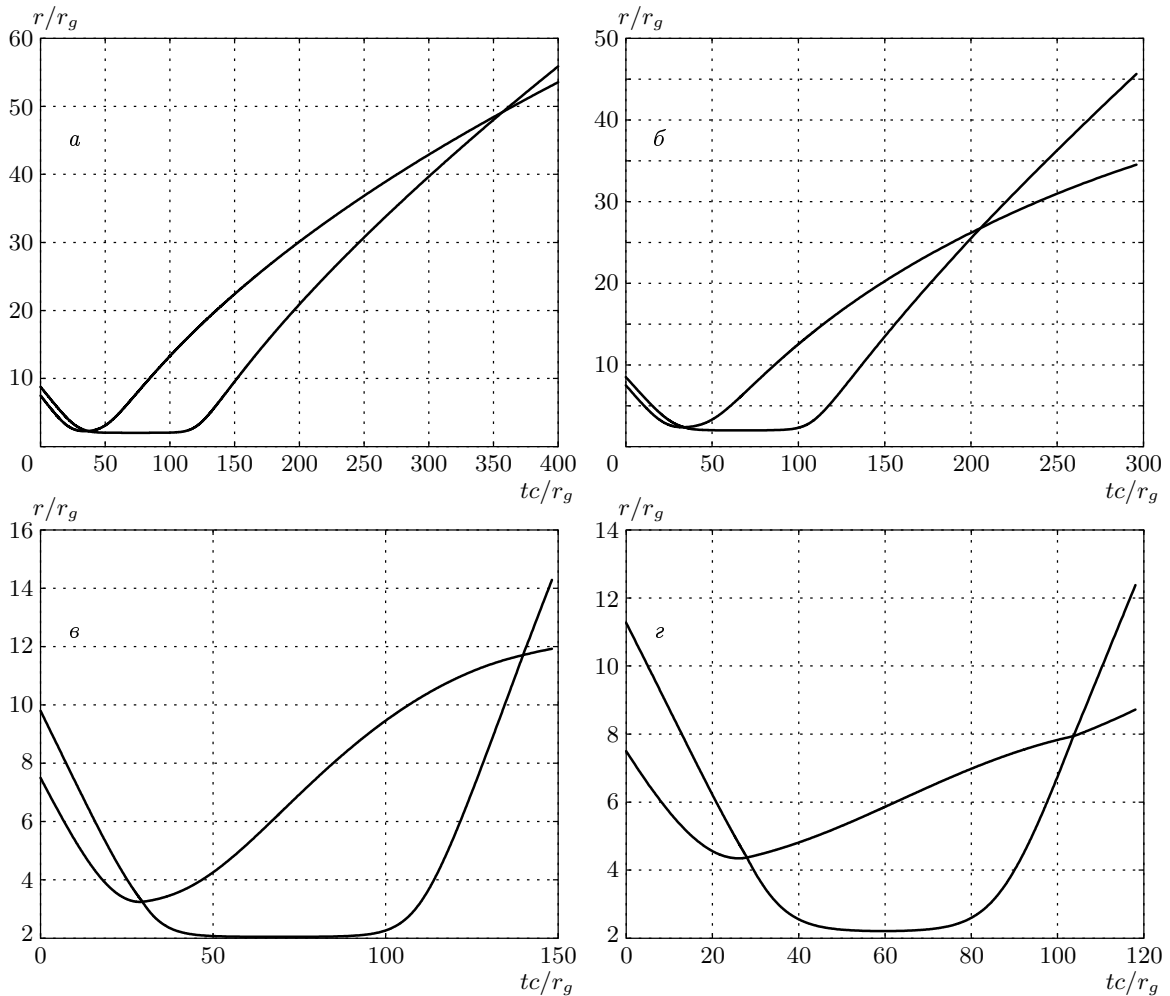


Рис. 4. Выброс одной из оболочек после двух пересечений в условиях, наиболее благоприятных для достижения максимальной скорости выброса, $m_1 = m_2 = 0.01m_{in}$ (а), $0.03m_{in}$ (б), $0.15m_{in}$ (в) и $0.30m_{in}$ (г)

оболочек следующим образом: во-первых, начальные полные энергии должны быть близки к энергиям покоя m_1c^2 и m_2c^2 ; во-вторых, первое пересечение должно произойти в точке, как можно более близкой к гравитирующему центру, а второе пересечение — как можно дальше от него. Для выполнения этих условий можно воспользоваться характерной формой потенциала в релятивистском случае. Вблизи максимума кривой потенциала (в районе $2r_g$) одна из оболочек может находиться сколь угодно долго, оболочка как бы прилипает к радиусу максимума потенциала, что дает время другой оболочке улететь достаточно далеко (см. рис. 3).

На рис. 4 изображено движение оболочек с пересечением и выбросом одной оболочки после второго пересечения. Массы покоя оболочек принимались одинаковыми, равными одному проценту от

массы центрального тела $m_1 = m_2 = 0.01 m_{in}$ (рис. 4а). Другие начальные параметры принимались равными $r_1 = 7.5$, $r_2 = 7.75$, $L_1 = 2.013$, $L_2 = 2.0279481$, $m_{out} - m_{12} = (1 - 10^{-12})m_2$, $m_{12} - m_{in} = (1 - 10^{-12})m_1$. Здесь r_i , L_i приведены в единицах r_g , $m_i r_g c$, причем $r_g = 2km_{in}/c^2$. Первое пересечение происходит на радиусе $r_1^* = 2.126104$, а второе — на радиусе $r_2^* = 43.8996$. Улетающая оболочка приобретает энергию $\Delta m c^2$, примерно равную ее кинетической энергии $mv^2/2 = \Delta m c^2$, $\Delta m = 4.3604 \cdot 10^{-5} m_{in} \approx 4.4 \cdot 10^{-3} m_1$, что соответствует скорости на бесконечности $v = 0.0931 c$. Начальные и результирующие параметры для различных вариантов расчетов, приведенных на рис. 4а–г и рис. 5, даны в таблице. На рис. 6–8 приведены зависимости изменения радиусов первого и второго пересечений, а также скорости вылета на бесконечность

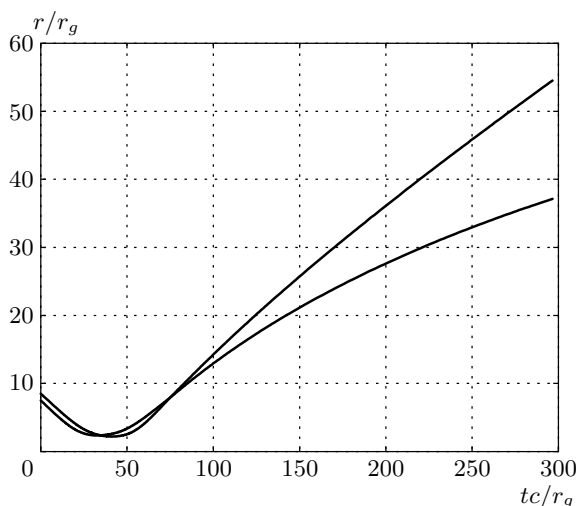


Рис. 5. Выброс одной из оболочек после двух пересечений для начальных параметров, совпадающих с таковыми на рис. 4б, при увеличении на 0.5% углового момента частиц, составляющих вторую оболочку, что нарушает условия наибольшего благоприятствования для выброса

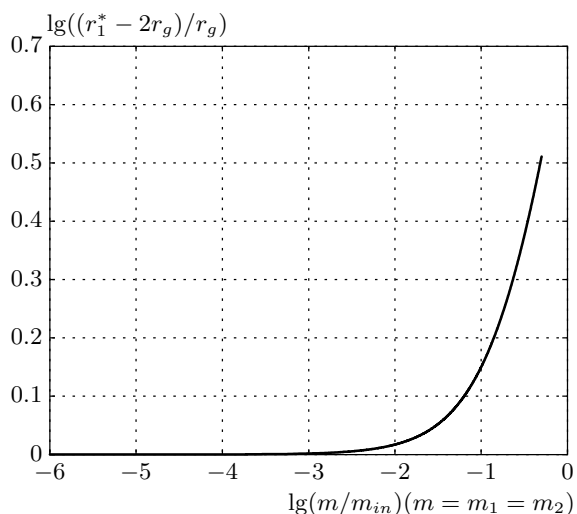


Рис. 6. Зависимость $\lg[(r_1^* - 2r_g)/r_g]$ от логарифма отношения масс $\lg(m_1/m_{in})$, r_1^* — радиус первого пересечения при равенстве масс покоя оболочек $m_1 = m_2$ в условиях наиболее благоприятных для выброса

одной из оболочек для условий, наиболее благоприятных для выброса оболочки.

На рис. 5 изображено движение тех же оболочек, что и на рис. 4б, но с увеличенным на полпроцента угловым моментом у оболочки 2, что приводит к исчезновению фазы «прилипания», вследствие че-

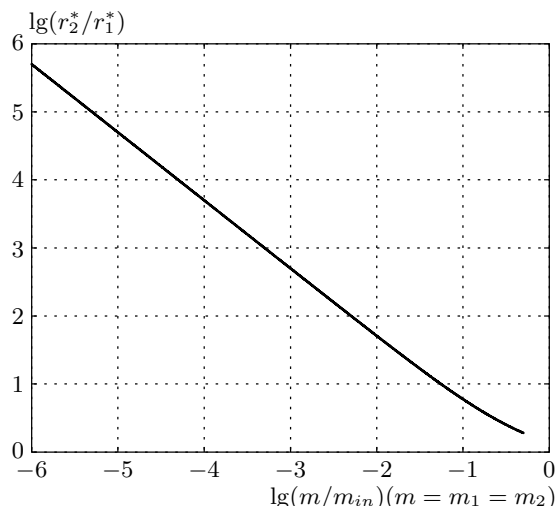


Рис. 7. Зависимость $\lg(r_2^*/r_1^*)$ от $\lg(m/m_{in})$, r_2^* — радиус второго пересечения для тех же условий, что на рис. 6

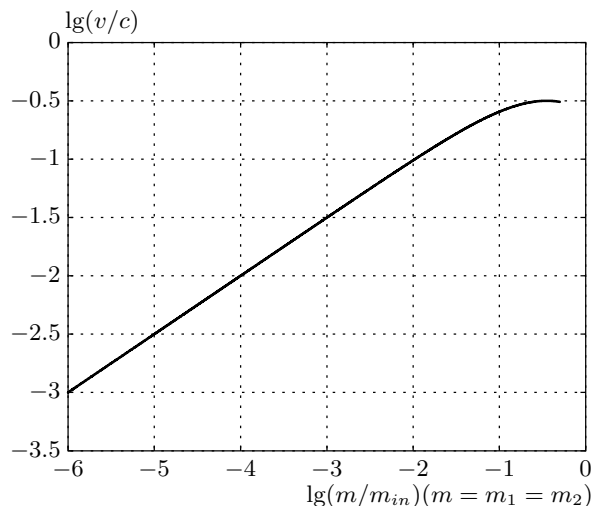


Рис. 8. Зависимость логарифма скорости выброса на бесконечность $\lg(v/c)$ от $\lg(m/m_{in})$, для тех же условий, что на рис. 6

го второе пересечение происходит много раньше и эффективность механизма резко падает. Изменение энергии оказалось равным $\Delta m = 2.634 \cdot 10^{-4} m_{in}$, что составляет около 0.88% от массы покоя оболочки, т.е. эффективность механизма упала на 17% процентов (см. таблицу).

В заключение отметим, что с ростом массы оболочек эффективность баллистического механизма выброса сначала возрастает, но при достижении оболочками массы покоя порядка 20% от массы центрального тела из-за сильного взаимодействия обо-

	Рис. 4а	Рис. 4б	Рис. 4в	Рис. 4г	Рис. 5
m_1/m_{in}	0.01	0.03	0.015	0.30	0.03
m_2/m_{in}	0.01	0.03	0.015	0.30	0.03
r_1/r_g	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5
r_2/r_g	7.75	8.5	9.8	11.27	8.5
r_1^*/r_g	2.126104	2.3638	3.249	4.3698	2.3765
r_2^*/r_g	43.8996	26.986	11.7076	7.9374	7.9345
L_1/m_1cr_g	2.013	2.05	2.285	2.61	2.05
L_2/m_2cr_g	2.0279481	2.0753315	2.305431	2.5393	2.0857082
$(m_{out} - m_{12})/m_2$	$1-10^{-12}$	$1-10^{-12}$	$1-10^{-12}$	$1-10^{-12}$	$1-10^{-12}$
$(m_{12} - m_{in})/m_1$	$1-10^{-12}$	$1-10^{-12}$	$1-10^{-12}$	$1-10^{-12}$	$1-10^{-12}$
$\Delta m/m_{in}$	$4.3604 \cdot 10^{-5}$	$3.1889 \cdot 10^{-4}$	$4.22686 \cdot 10^{-3}$	$7.52 \cdot 10^{-3}$	$2.634 \cdot 10^{-4}$
v/c	0.0931	0.1447	0.2336	0.2198	0.1384
$\Delta m/m_2, \%$	0.44	1.06	2.8	2.5	0.88

лочек минимально возможный радиус первого пересечения растёт, а максимально возможный радиус второго пересечения уменьшается, что приводит к падению эффективности данного сценария (см. рис. 6–8). В свою очередь, выше упоминалось, что отклонение от оптимального положения параметров на малую величину приводит к существенному отклонению от предельной скорости вылета оболочки.

Расчеты движения оболочек с упрощенными условиями при пересечениях из работ [9, 10] (см. Приложение) оказались в хорошем соответствии с точными расчетами для малых масс оболочек $m_{1,2}/m_{in} \leq 0.03$. Это обусловлено тем, что при условиях, наиболее благоприятных для вылета, первое пересечение происходит вблизи точки минимального радиуса, где либо $v_1 \ll c$, либо $v_2 \ll c$ (необходимое условие применимости упрощенного условия), а второе пересечение происходит далеко от центра в нерелятивистской области, где также $v_1, v_2 \ll c$. Таким образом, условия, при которых приближенное решение дает хорошее согласие с точным, оказываются выполненными.

Для оболочек малой массы $m_1, m_2 \ll m_{in}$ можно принять радиус первого пересечения равным $r_1^* = 2r_g$, а радиус второго пересечения отнести на бесконечность. Вследствие этого максимальная энергия, уносимая оболочкой малой массы в результате пересечений с оболочкой той же массы покоя, пропорциональна массе оболочки, а скорость вылета пропорциональна квадратному корню из ее массы.

С учетом первой строчки в таблице имеем

$$\frac{\Delta m}{m} \approx 0.044 \sqrt{\frac{m}{m_{in}}}, \quad \frac{v}{c} \approx 0.931 \sqrt{\frac{m}{m_{in}}}$$

при $m/m_{in} \ll 1$, где $m = m_1 = m_2$.

Работа Г. С. Б.-К. и М. В. Б. была поддержана частично РФФИ (проект 99-02-18180) и ИНТАС-ЕСО (проект 120) и ИНТАС (проект 00-491).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поскольку во время выполнения работ [9, 10] не было точного решения задачи о пересечении релятивистских гравитирующих оболочек, авторами этих работ были предложены следующие приближенные условия непрерывности в точке пересечения:

$$\frac{E_1}{\sqrt{1 - r_{g1}/r^*}} = \frac{E'_1}{\sqrt{1 - r'_{g1}/r^*}}, \quad (A.1),$$

$$E'_1 + E'_2 = E_1 + E_2, \quad (A.2)$$

где полные энергии оболочек E_1, E_2, E'_1, E'_2 определены формулами (79), (80), а величины r_{g1}, r_{g2}

есть⁴⁾

$$\begin{aligned} r_{g1} &= \frac{2k}{c^2} \left(m_{in} + \frac{E_1}{2c^2} \right), \\ r'_{g1} &= \frac{2k}{c^2} \left(m_{in} + \frac{E'_2}{c^2} + \frac{E'_1}{2c^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Соотношение (A.2) является точным уравнением сохранения энергии (81) и обсуждения не требует. Уравнение же (A.1), как показывает приводимое ниже сравнение с точной теорией, имеет приближенный характер и может применяться лишь при достаточно малых эффективных массах покоя оболочек M_1 и M_2 (по сравнению с массой центрального тела) вместе с условием малости (по сравнению со скоростью света) скорости хотя бы одной из оболочек в момент пересечения. Полученное в настоящей работе точное решение с наиболее благоприятными для вылета условиями соответствует варианту, когда первое пересечение происходит вблизи точки поворота (минимального возможного расстояния от центрального тела) одной из оболочек, т. е. там, где скорость этой оболочки близка к нулю. Величина обмена энергией, ответственная за выброс одной из оболочек на бесконечность, определяется именно этим первым пересечением, так как второе происходит на достаточно большом расстоянии от центра, когда передача энергии незначительна. По этим причинам, результаты проведенных нами численных расчетов с использованием условий (A.1), (A.2) для достаточно малых масс оболочек оказались близкими к тем, которые сделаны на основе точной теории при описании вариантов, соответствующих максимальным скоростям вылета оболочек.

Поясним вкратце вывод приближенного условия (A.1) из точного решения. Рассмотрим изложенный в разд. 3 процесс пересечения оболочек для случая малых по сравнению с $m_{in}c^2$ энергий E_1 и E_2 . Будем считать, кроме того, что пересечение не происходит слишком близко к гравитационному радиусу центрального тела, а скорости оболочек в момент пересечения, хотя и могут составлять значительную часть от скорости света, не являются, тем не менее, ультрарелятивистскими. Это значит, что

$$\begin{aligned} E_1, E_2 \ll m_{in}c^2, \quad f_{in}(r^*) \sim 1, \\ \sqrt{1 - v_1^2/c^2}, \sqrt{1 - v_2^2/c^2} \sim 1. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

⁴⁾ В действительности в [9, 10] члены $E_1/2c^2$ и $E'_1/2c^2$, связанные с самогравитацией оболочек, брались без множителя 1/2. Более правильные выражения (A.3) были приняты позже.

Здесь и далее v_1 и v_2 — скорости, определяемые соотношениями (59)–(61), но взятые в точке $r = r^*$. Нетрудно показать, что при условиях (A.4) уравнения движения (30), (31) в первом приближении дают

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(\frac{M_1 c^2 \sqrt{f_{in}}}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \right)_{r=r^*}, \\ E_2 &= \left(\frac{M_2 c^2 \sqrt{f_{in}}}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \right)_{r=r^*}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

откуда следует также, что условия (A.4) означают и условия $M_1, M_2 \ll m_{in}$. В этом приближении формула (85) для обмена энергией может быть записана в виде

$$\Delta E = \frac{k(1 - v_1 v_2 / c^2)}{c^4 r^* f_{in}(r^*)} E_1 E_2. \quad (\text{A.6})$$

Если добавить еще и требование, чтобы пересечение происходило вблизи точки поворота одной из оболочек, т. е. при $v_1 v_2 / c^2 \ll 1$, то из (A.6) следует

$$\Delta E = \frac{k E_1 E_2}{c^4 r^* f_{in}(r^*)}. \quad (\text{A.7})$$

Легко показать, что точно такое же выражение для ΔE следует и из уравнений (A.1), (A.2), если выразить из них $E_1 - E'_1 = \Delta E$ как функцию от E_1, E_2 и m_{in} и взять первый член ее разложения по малым параметрам $E_1/m_{in}c^2$ и $E_2/m_{in}c^2$ при условии $f_{in}(r^*) \sim 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Hénon, *Ann. Astrophys.* **27**, 83 (1964).
2. M. Hénon, *Astron. Ap.* **24**, 229 (1973).
3. S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.* **298**, 34 (1985).
4. L. R. Yangurazova and G. S. Bisnovaty-Kogan, *Ap. Sp. Sci.* **100**, 319 (1984).
5. J. R. Gott, *Astrophys. J.* **201**, 296 (1975).
6. J. L. Spitzer and H. M. Hart, *Astrophys. J.* **164**, 399 (1971).
7. J. E. Chase, *Nouvo Cimento B* **67**, 136 (1970).
8. M. V. Barkov, V. A. Belinski, and G. S. Bisnovaty-Kogan, E-print archives astro-ph/0107051; submitted to *Monthly Notices*.
9. Г. С. Бисноватый-Коган, Л. Р. Янгуразова, *Астрофизика* **27**, 79 (1987).

10. G. S. Bisnovatyι-Kogan and L. R. Yangurazova, *Ap. Sp. Sci.* **147**, 121 (1988).
11. V. Berezin and M. Okhrimenko, *Class. Quantum Grav.* **18**, 2195 (2001).
12. A. Neronov, E-print archives hep-th/0109090.
13. J. Khoury, B. Ovrut, P. Stainhardt, and N. Turok, E-print archives hep-th/0103239.
14. M. Bucher, E-print archives hep-th/0107148.
15. D. Langlois, K. Maeda, and D. Wands, E-print archives gr-qc/0111013.
16. W. Israel, *Nouvo Cimento B* **44**, 1 (1966).
17. T. Dray and G. 't Hooft, *Comm. Math. Phys.* **99**, 613 (1985).
18. R. V. E. Lovelace, *Nature* **262**, 649 (1976).
19. Г. С. Бисноватый-Коган, С. И. Блинников, *Письма в Астрон. Ж.* **2**, 489 (1976).
20. В. А. Амбарцумян, *Uch. Zap. LGU* **22**, 19 (1938).