ЖЭТФ, 2002, том 122, вып. 2 (8), стр. 328–340

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ ЧИСЛА МАЛОИНЕРЦИОННЫХ ЧАСТИЦ В СЛУЧАЙНЫХ БЕЗДИВЕРГЕНТНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

В. И. Кляцкин [a,b]*, *Т. Эльперин* [c]

[a] *Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук 109017, Москва, Россия*

[b] *Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева Дальневосточного отделения Российской академии наук 690041, Владивосток, Россия*

[c] *The Pearlstone Center for Aeronautical Engineering Studies, Department of Mechanical Engineering, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva 84105, P. O. Box 653, Israel*

Поступила в редакцию 18 февраля 2002 г.

Рассматривается диффузия поля плотности числа малоинерционных частиц в случайных бездивергентных гидродинамических потоках. Принципиальной особенностью такой диффузии является дивергентность поля скоростей частиц, что и приводит к кластеризации поля плотности числа частиц. Это явление является когерентным, осуществляется с вероятностью единица и должно проявляться почти во всех реализациях динамики процесса. В работе вычисляются статистические параметры, характеризующие кластеризацию в трехмерном и двумерном случайных потоках жидкости, а также в быстро вращающемся двумерном случайном потоке. В первом случае вихревая компонента случайного бездивергентного потока генерирует вихревую компоненту поля скоростей малоинерционных частиц, которая через механизм адвекции генерирует потенциальную компоненту поля скоростей. В случае же быстрого вращения потенциальная компонента поля скоростей генерируется непосредственно вихревой компонентой случайного бездивергентного потока (линейная задача).

PACS: 02.50.-r, 05.40.-a, 05.45.-a

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с классической работы Стокса 1851 года [1] (см. также классическую книгу [2]) исследование динамики инерционных частиц в гидродинамических потоках привлекает внимание многочисленных исследователей ввиду ее важности для различных экологических задач в атмосфере и океане Земли, а также благодаря многочисленным техническим применениям (см., например, книги [3, 4] и работы последнего десятилетия [5–10], где содержится обширная библиография). Отметим, что в работе [7], по-видимому, впервые было обращено внимание на то, что поле скоростей инерционных частиц в бездивергентном поле скоростей гидродинамического потока является дивергентным в отличие от безынерционных пассивных частиц. И это обстоятельство широко использовалось в работах [11, 12] для анализа многочисленных приложений в гидродинамике, геофизике и астрофизике.

2.1. Основные уравнения и постановка задачи

Диффузия поля плотности числа частиц, приходящихся на единицу объема, $n(\mathbf{r},t)$, движущихся в случайных гидродинамических потоках, описывается уравнением непрерывности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{V}(\mathbf{r},t)\right) n(\mathbf{r},t) = 0, \quad n(\mathbf{r},0) = n_0(\mathbf{r}), \quad (1)$$

*E-mail: klyatskin@hotmail.com

где поле скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ будем описывать уравнением (см., например, [5–10])

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{V}(\mathbf{r},t) = -\lambda\left[\mathbf{V}(\mathbf{r},t)-\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right], \quad (2)$$

которое будем рассматривать как феноменологическое. Параметр $\tau = 1/\lambda$ есть известное время Стокса, зависящее от размера частиц и молекулярной вязкости.

Общее число частиц сохраняется в процессе эволюции, т. е.

$$N_0 = \int n(\mathbf{r},t)d\mathbf{r} = \int n_0(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \text{const}.$$

Уравнения в частных производных первого порядка (1) и (2) (эйлерово описание) эквивалентны системе обыкновенных дифференциальных характеристических уравнений (лагранжево описание)

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{V}\left(\mathbf{r}(t),t\right), \quad \mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0,\\ \frac{d}{dt}\mathbf{V}(t) = -\lambda\left[\mathbf{V}(t)-\mathbf{u}\left(\mathbf{r}(t),t\right)\right],\\ \mathbf{V}(0)=\mathbf{V}_0(\mathbf{r}_0),\\ \frac{d}{dt}n(t) = -n(t)\frac{\partial \mathbf{V}\left(\mathbf{r}(t),t\right)}{\partial \mathbf{r}}, \quad n(0)=n_0(\mathbf{r}_0).\end{gathered} \quad (3)$$

Решение этой системы зависит от начального параметра $\mathbf{r}_0$ (будем это обозначать вертикальной чертой):

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{V}(t)=\mathbf{V}(t|\mathbf{r}_0), \quad n(t)=n(t|\mathbf{r}_0),$$

и тогда эйлерово поле плотности числа инерционных частиц $n(\mathbf{r},t)$ описывается выражением

$$n(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{r}_0 n_0(\mathbf{r}_0)\delta\left(\mathbf{r}\left(t|\mathbf{r}_0\right)-\mathbf{r}\right).$$

Будем считать, что дисперсия случайного поля скоростей $\sigma^2_{\mathbf{u}} = \left\langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle$ достаточно мала и определяет основной малый параметр задачи. Для большого значения параметра λ (малая инерционность частиц) можно линеаризовать уравнение (2) относительно функции

$$\mathbf{V}(\mathbf{r},t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r},t) \quad (4)$$

и перейти к более простому векторному уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{V}(\mathbf{r},t) = = -\left(\mathbf{V}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{u}(\mathbf{r},t) - \lambda\left[\mathbf{V}(\mathbf{r},t)-\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right],$$

которое запишем в координатном представлении:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda\right)V_i(\mathbf{r},t) = -u_k(\mathbf{r},t)\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k} - \frac{\partial u_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}V_k(\mathbf{r},t) + \lambda u_i(\mathbf{r},t). \quad (5)$$

По повторяющимся индексам, как всегда, предполагается суммирование.

Прежде всего возникает вопрос, что означает равенство (4) в статистическом смысле и каковы условия его применимости. Ниже будет показано, что справедливость этого равенства в статистических задачах существенно зависит от последовательности предельных переходов.

Чтобы описать поле плотности числа частиц в эйлеровом представлении, введем индикаторную функцию

$$\Phi(t,\mathbf{r};n) = \delta\left(n(\mathbf{r},t)-n\right), \quad (6)$$

сосредоточенную на поверхности $n(\mathbf{r},t)=n=\text{const}$ в трехмерном случае или на контуре в двумерном случае. Динамика этой функции описывается уравнением Лиувилля

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\Phi(t,\mathbf{r};n) = \\ = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial n}n\Phi(t,\mathbf{r};n),\\ \Phi(0,\mathbf{r};n) = \delta\left(n_0(\mathbf{r})-n\right),\end{gathered} \quad (7)$$

если поле скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ дивергентно, т. е. если $\partial\mathbf{V}(\mathbf{r},t)/\partial\mathbf{r} \neq 0$.

Индикаторная функция характеризует геометрическую структуру поля плотности числа частиц, $n(\mathbf{r},t)$ [13–15]. Через функцию (6), например, в двумерном случае выражаются такие величины, как общая площадь области, ограниченная линиями уровня, где $n(\mathbf{r},t) > n$:

$$S(t;n) = \int\limits_n^\infty dn' \int d\mathbf{r}\, \Phi(t,\mathbf{r};n'), \quad (8)$$

и общее число частиц, содержащихся в этих областях:

$$N(t;n) = \int\limits_n^\infty n'dn' \int d\mathbf{r}\, \Phi(t,\mathbf{r};n'). \quad (9)$$

Если поле скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ является случайным дивергентным полем, то с вероятностью, равной единице, образуются кластерные структуры поля $n(\mathbf{r},t)$

и величины $S(t;n) \to 0$, $N(t;n) \to N_0$. Это — когерентное физическое явление, и оно осуществляется почти во всех реализациях процесса. Сами когерентные явления не зависят от той или иной модели флуктуирующих параметров. Однако конкретные значения параметров, характеризующие данное явление (например, характерные временные и пространственные масштабы кластерных структур), существенно могут зависеть от модели. Отметим, что численное моделирование диффузии пассивной примеси в случайных потоках проводилось в работах [17–19].

2.2. Результаты статистического анализа образования кластерной структуры

Легко выполняются вычисления для модели случайного гауссового поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$, статистически однородного и изотропного в пространстве и стационарного во времени, имеющего нулевое среднее значение и корреляционный тензор

$$\langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}',t')\rangle = B_{ij}^{(\mathbf{V})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t').$$

Одноточечная плотность вероятностей для решения динамического уравнения (1) совпадает с индикаторной функцией, усредненной по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$:

$$P(t,\mathbf{r};n) = \langle \Phi(t,\mathbf{r};n)\rangle,$$

и в приближении дельта-коррелированного во времени поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ описывается уравнением [13–16]

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\right)P(t,\mathbf{r};n) = \\ = D^{(\mathbf{V})}\frac{\partial^2}{\partial n^2}n^2 P(t,\mathbf{r};n), \\ P(0,\mathbf{r};n) = \delta\left(n_0(\mathbf{r}) - n\right),\end{gathered} \qquad (10)$$

где коэффициенты диффузии

$$\begin{gathered}D_0 = \frac{1}{N}\int\limits_0^\infty d\tau\,\langle \mathbf{V}(\mathbf{r},t+\tau)\mathbf{V}(\mathbf{r},t)\rangle = \\ = \frac{1}{N}\tau_{\mathbf{V}}\left\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle, \\ D^{(\mathbf{V})} = \int\limits_0^\infty d\tau\left\langle \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r},t+\tau)}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\right\rangle = \\ = \tau_{\operatorname{div}\mathbf{V}}\left\langle\left(\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\right)^2\right\rangle,\end{gathered} \qquad (11)$$

N — размерность пространства, а $\tau_{\mathbf{V}}$ и $\tau_{\operatorname{div}\mathbf{V}}$ — временные радиусы корреляции для случайных полей $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ и $\partial\mathbf{V}(\mathbf{r},t)/\partial\mathbf{r}$.

Зная решение уравнения (10), можно вычислить временную эволюцию таких функционалов поля плотности числа частиц, как средние значения выражений (8) и (9), и, в частности, при $D^{(\mathbf{V})}t \gg 1$ среднее значение площади, где поле плотности числа частиц превышает заданный уровень n, уменьшается со временем как

$$\langle S(t;n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi n D^{(\mathbf{V})}t}}\exp\left(-\frac{D^{(\mathbf{V})}t}{4}\right)\int\sqrt{n_0(\mathbf{r})}\,d\mathbf{r},$$

в то время как среднее число частиц, находящихся в этой области,

$$\begin{gathered}\langle N(t;n)\rangle = N_0 - \sqrt{\frac{n}{\pi D^{(\mathbf{V})}t}}\times \\ \times\exp\left(-\frac{D^{(\mathbf{V})}t}{4}\right)\int\sqrt{n_0(\mathbf{r})}\,d\mathbf{r},\end{gathered}$$

монотонно стремится к полному числу частиц $N_0 = \int n_0(\mathbf{r})d\mathbf{r}$. Это означает, что инерционные частицы примеси со временем стремятся собраться в кластеры — компактные области повышенной плотности числа частиц $n(\mathbf{r},t)$ в случайном поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$, окруженные разреженными областями.

Таким образом, задача сводится к оценке коэффициентов диффузии (11) из стохастических уравнений (2), (5), т. е. к вычислению временных радиусов корреляций $\tau_{\mathbf{V}}$ и $\tau_{\operatorname{div}\mathbf{V}}$ случайных полей $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ и $\partial\mathbf{V}(\mathbf{r},t)/\partial\mathbf{r}$, их пространственных масштабов корреляций и дисперсий. Это удается сделать для определенной статистической модели случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$.

В дальнейшем будем вычислять статистические характеристики поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ в первом неисчезающем порядке малости по параметру $\sigma_{\mathbf{u}}^2$. Отметим, что статистика поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$, описываемого стохастическими уравнениями (2), (5), в общем случае не является гауссовой. Однако легко видеть, что высшие кумулянты поля $\operatorname{div}\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ будут более высокого порядка малости, чем второй кумулянт, и, следовательно, при выводе уравнения (10) действительно можно воспользоваться приближением гауссового поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$.

Будем считать, что поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ — бездивергентное, т. е.

$$\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = 0,$$

однородное и изотропное в пространстве и стационарное во времени гауссово случайное поле с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \langle u_i(\mathbf{r},t) u_j(\mathbf{r}',t')\rangle .$$

Временной радиус корреляции поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ определим равенством

$$\tau_0 B_{ii}(0,0) = \int\limits_0^\infty d\tau B_{ii}(0,\tau) = \int\limits_0^\infty d\tau \, \langle \mathbf{u}(\mathbf{r},t+\tau)\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle .$$

Для такой модели можно ввести пространственную спектральную функцию и пространственно-временную спектральную функцию поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ с помощью интегралов

$$B_{ij}(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k},t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad B_{ij}(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \Phi_{ij}(\mathbf{k},\omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t}, \tag{12}$$

где

$$E_{ij}(\mathbf{k},t) = E(k,t)\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}\right), \quad \Phi_{ij}(\mathbf{k},\omega) = \Phi(k,\omega)\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right). \tag{13}$$

Отметим, что величина

$$B_{ij}(0,t) = \frac{N-1}{N}\int d\mathbf{k} E(k,t)\delta_{ij}, \tag{14}$$

а для важного в дальнейшем тензора четвертого порядка имеем представление

$$-\frac{\partial^2 B_{ij}(0,\tau)}{\partial r_k \partial r_l} = \frac{D(\tau)}{N(N+2)} \times [(N+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}], \tag{15}$$

где коэффициент

$$D(\tau) = \int d\mathbf{k}\, \mathbf{k}^2 E(k,\tau) = -\frac{1}{N-1}\langle \mathbf{u}(\mathbf{r},t+\tau)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle . \tag{16}$$

Величина

$$D(0) = -\frac{1}{N-1}\langle \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle$$

связана с вихревой структурой случайного бездивергентного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$.

Итак, в данной работе мы вычислим параметры (11), характеризующие временную эволюцию образования кластерной структуры плотности числа частиц $n(\mathbf{r},t)$.

3. СЛУЧАЙНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ ПОТОКИ

Изучим статистические характеристики уравнения (5) в эйлеровом описании в диффузионном приближении.

3.1. Диффузионное приближение

Случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ коррелирует с функцией $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$, которая является функционалом поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$. Расщепление корреляций для гауссова поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ основано на формуле Фурутцу–Новикова

$$\langle u_k(\mathbf{r},t) R[t;\mathbf{u}(\mathbf{r},\tau)]\rangle = \int d\mathbf{r}' \int\limits_0^t dt' B_{kl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') \times \left\langle \frac{\delta}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')} R[t;\mathbf{u}(\mathbf{r},\tau)]\right\rangle , \tag{17}$$

которая справедлива для гауссова случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ с нулевым средним значением и произвольным функционалом $R[t;\mathbf{u}(\mathbf{r},\tau)]$ $(0 \le \tau \le t)$ [20, 21] (см. также [16]).

Уравнения для соответствующих средних значений в диффузионном приближении выписываются точно. Соответствующее упрощение задачи осуществляется на уровне функциональной зависимости решения задачи от флуктуирующих параметров [22] (см. также [14, 16, 23]).

Для вариационных производных в диффузионном приближении имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right)\frac{\delta V_i(\mathbf{r},t)}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')} = 0$$

с начальным условием при $t = t'$

$$\left.\frac{\delta V_i(\mathbf{r},t)}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')}\right|_{t=t'+0} = -\left[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t')}{\partial r_l} + \delta_{il}\frac{\partial \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_k} V_k(\mathbf{r},t')\right] + \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\lambda\delta_{il},$$

которое следует из уравнения (5). Решение этих уравнений имеет вид

$$\frac{\delta V_i(\mathbf{r},t)}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')} = e^{-\lambda(t-t')}\left\{-\left[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t')}{\partial r_l} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_k}\delta_{il} V_k(\mathbf{r},t')\right] + \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\lambda\delta_{il}\right\}.$$

Само поле $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ в диффузионном приближении имеет структуру

$$\mathbf{V}(\mathbf{r},t) = e^{-\lambda(t-t')}\mathbf{V}(\mathbf{r},t')$$

и, следовательно,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r},t') = e^{\lambda(t-t')}\mathbf{V}(\mathbf{r},t).$$

Таким образом, для вариационной производной получаем выражение

$$\frac{\delta V_i(\mathbf{r},t)}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')} = -\left[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_l} + \right. \\ \left. + \delta_{il}\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_\mu}V_\mu(\mathbf{r},t)\right] + \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\lambda e^{-\lambda(t-t')}\delta_{il}. \quad (18)$$

3.2. Пространственный корреляционный тензор поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$

Из уравнения (5) следует уравнение для одновременного пространственного корреляционного тензора поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\lambda\right)\langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle = \\ = -\frac{\partial}{\partial r_k}\langle u_k(\mathbf{r},t)V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle - \\ - \frac{\partial}{\partial r_{1k}}\langle u_k(\mathbf{r}_1,t)V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle - \\ - \left\langle\frac{\partial u_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}V_k(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\right\rangle - \\ - \left\langle\frac{\partial u_j(\mathbf{r}_1,t)}{\partial r_{1k}}V_k(\mathbf{r}_1,t)V_i(\mathbf{r},t)\right\rangle + \\ + \lambda\left[\langle u_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle + \langle u_j(\mathbf{r}_1,t)V_i(\mathbf{r},t)\rangle\right].$$

Используя формулу Фурутцу–Новикова (17) и выражение (18) для вариационной производной, получаем уравнение для стационарного корреляционного тензора $F_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) = \langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle$, не зависящего от времени $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r})$:

$$2\lambda F_{ij}(\mathbf{r}) = 2\int_0^\infty d\tau\left[B_{\beta\gamma}(0,\tau) - B_{\beta\gamma}(\mathbf{r},\tau)\right]\frac{\partial^2}{\partial r_\beta\partial r_\gamma}F_{ij}(\mathbf{r}) - \int_0^\infty d\tau\frac{\partial B_{\beta j}(\mathbf{r},\tau)}{\partial r_\gamma}\frac{\partial}{\partial r_\beta}F_{i\gamma}(\mathbf{r}) - \\ - \int_0^\infty d\tau\frac{\partial B_{\beta i}(\mathbf{r},\tau)}{\partial r_\gamma}\frac{\partial}{\partial r_\beta}F_{\gamma j}(\mathbf{r}) - \int_0^\infty d\tau\frac{\partial B_{i\gamma}(\mathbf{r},\tau)}{\partial r_\beta}\frac{\partial}{\partial r_\gamma}F_{\beta j}(\mathbf{r}) - \int_0^\infty d\tau\frac{\partial B_{j\gamma}(\mathbf{r},\tau)}{\partial r_\beta}\frac{\partial}{\partial r_\gamma}F_{i\beta}(\mathbf{r}) - \\ - 2\int_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{r},\tau)}{\partial r_\beta\partial r_\gamma}F_{\beta\gamma}(\mathbf{r}) + 2\lambda^2\int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}B_{ij}(\mathbf{r},\tau). \quad (19)$$

Для стационарного значения корреляции $\langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r},t)\rangle$ в диффузионном приближении, полагая $\mathbf{r}=0$ в уравнении (19), получаем уравнение

$$\lambda\langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r},t)\rangle = \\ = -\int_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{ij}(0,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_\gamma}\langle V_\beta(\mathbf{r},t)V_\gamma(\mathbf{r},t)\rangle + \\ + \lambda^2\int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}B_{ij}(0,\tau), \quad (20)$$

которое с помощью формулы (15) можно переписать в виде

$$\lambda\langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r},t)\rangle = \lambda^2\int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}B_{ij}(0,\tau) + \\ + \frac{D_1}{N(N+2)}\left[(N+1)\left\langle\mathbf{V}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle\delta_{ij} - \right. \\ \left. -2\langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r},t)\rangle\right],$$

где коэффициент

$$D_1 = \int_0^\infty d\tau D(\tau) = \int_0^\infty d\tau\int d\mathbf{k}\,\mathbf{k}^2E(k,\tau) = \\ = -\frac{1}{N-1}\int_0^\infty d\tau\left\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t+\tau)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right\rangle. \quad (21)$$

Следовательно,

$$\left(\lambda - \frac{N-1}{N}D_1\right)\left\langle\mathbf{V}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle = \\ = \lambda^2\int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}B_{ii}(0,\tau), \quad (22)$$

если параметр $\lambda > D_1(N-1)/N$.

Таким образом, мы видим, что есть критическое значение параметра λ, $\lambda - \lambda_{cr} = D_1(N-1)/N$, и стационарное значение существует только, если $\lambda > \lambda_{cr}$.

Если выполняется неравенство

$$\lambda \gg D_1 \sim \sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0 / l_0^2, \tag{23}$$

где l_0 — пространственный масштаб поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$, то получаем выражение

$$\left\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle = \lambda \int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} B_{ii}(0,\tau) = \\ = \lambda(N-1)\int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}\int d\mathbf{k} E(k,\tau). \tag{24}$$

В дальнейшем будем считать, что неравенство (23) выполняется всегда.

Из равенства (24) можно оценить дисперсию поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$. В результате получаем при $\lambda t \gg 1$

$$\sigma_{\mathbf{V}}^2 = \begin{cases} \sigma_{\mathbf{u}}^2, & \lambda\tau_0 \gg 1, \\ \lambda\tau_0\sigma_{\mathbf{u}}^2, & \lambda\tau_0 \ll 1, \end{cases} \tag{25}$$

где τ_0 — временной радиус корреляции поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$. Таким образом, мы видим, что последовательность предельных переходов $\tau_0 \to 0$ и $\lambda \to \infty$ неперестановочна.

3.3. Корреляционный тензор пространственных производных поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$

Обсудим теперь такие статистические характеристики пространственных производных поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$, как

$$\left\langle \frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}\frac{\partial V_j(\mathbf{r},t)}{\partial r_l}\right\rangle = -\left.\frac{\partial^2 F_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_k \partial r_l}\right|_{\mathbf{r}=0}.$$

Для этих величин из уравнения (19) следует уравнение

$$2\lambda\frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_k\partial r_l} = 2\lambda^2\int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}\frac{\partial^2 B_{ij}(0,\tau)}{\partial r_k\partial r_l} - 2\int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{\beta\gamma}(0,\tau)}{\partial r_k\partial r_l}\frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_\beta\partial r_\gamma} - \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{\beta j}(0,\tau)}{\partial r_\gamma\partial r_k}\frac{\partial^2 F_{i\gamma}(0)}{\partial r_\beta\partial r_l} - \\ - \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{\beta j}(0,\tau)}{\partial r_\gamma\partial r_l}\frac{\partial^2 F_{i\gamma}(0)}{\partial r_\beta\partial r_k} - \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{\beta i}(0,\tau)}{\partial r_\gamma\partial r_k}\frac{\partial^2 F_{\gamma j}(0)}{\partial r_\beta\partial r_l} - \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{\beta i}(0,\tau)}{\partial r_\gamma\partial r_l}\frac{\partial^2 F_{\gamma j}(0)}{\partial r_\beta\partial r_k} - \\ - \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{i\gamma}(0,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_k}\frac{\partial^2 F_{\beta j}(0)}{\partial r_\gamma\partial r_l} - \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{i\gamma}(0,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_l}\frac{\partial^2 F_{\beta j}(0)}{\partial r_\gamma\partial r_k} - \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{j\gamma}(0,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_k}\frac{\partial^2 F_{i\beta}(0)}{\partial r_\gamma\partial r_l} - \\ - \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{j\gamma}(0,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_l}\frac{\partial^2 F_{i\beta}(0)}{\partial r_\gamma\partial r_k} - 2\int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{ij}(0,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_\gamma}\frac{\partial^2 F_{\beta\gamma}(0)}{\partial r_k\partial r_l} - 2\int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^4 B_{ij}(0,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_\gamma\partial r_k\partial r_l}F_{\beta\gamma}(0). \tag{26}$$

Отметим, что последний член в правой части уравнения (26) является источником порядка $\sigma_{\mathbf{u}}^4$ и может быть опущен.

Положим в уравнении (26) $i = k$, $j = l$. В этом случае с помощью равенства (15) при $\lambda \gg D_1$ получаем стационарное уравнение

$$\lambda\left\langle\left(\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\right)^2\right\rangle = \\ = \frac{4(N+1)D_1}{N(N+2)}\left\langle\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}\right\rangle. \tag{27}$$

Величина

$$\left\langle\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}\right\rangle = \\ = -\frac{\partial^2 F_{ii}(0)}{\partial \mathbf{r}^2} = -\left\langle \mathbf{V}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{V}(\mathbf{r},t)\right\rangle$$

связана с вихревой структурой поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$, и можно переписать уравнение (27) в виде

$$\left\langle\left(\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\right)^2\right\rangle = \\ = -\frac{4(N+1)D_1}{\lambda N(N+2)}\left\langle \mathbf{V}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{V}(\mathbf{r},t)\right\rangle. \tag{28}$$

Пусть теперь $i = j$, $k = l$ в уравнении (26). С помощью формулы (15) при условии $\lambda \gg D_1$ получаем

$$\frac{\partial^2 F_{ii}(0)}{\partial \mathbf{r}^2} = \lambda \int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2 B_{ii}(0,\tau)}{\partial \mathbf{r}^2},$$

т. е.

$$\langle \mathbf{V}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{V}(\mathbf{r},t)\rangle = \lambda \int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2 B_{ii}(0,\tau)}{\partial \mathbf{r}^2} =$$
$$= -(N-1)D_2(\lambda) = \lambda \int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle, \tag{29}$$

где коэффициент

$$D_2(\lambda) = \int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} D(\tau) =$$
$$= \int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \int d\mathbf{k}\, \mathbf{k}^2 E(k,\tau). \tag{30}$$

Следовательно, для дивергенции поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ при условии $\lambda/D_1 \gg 1$ получаем выражение

$$\left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 \right\rangle = \frac{4\left(N^2-1\right)}{N(N+2)} D_1 D_2(\lambda). \tag{31}$$

Отметим, что коэффициент

$$D_1 = -\frac{\tau_0}{N-1} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle$$

не зависит от параметра λ. Коэффициент же $D_2(\lambda)$ при $\lambda\tau_0 \gg 1$ определяется выражением

$$D_2(\lambda) = -\frac{1}{\lambda(N-1)} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle.$$

Таким образом, для трехмерного и двумерного случаев получаем равенства

$$\left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 \right\rangle = \frac{32}{15} D_1 D_2(\lambda),$$
$$\left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 \right\rangle = \frac{3}{2} D_1 D_2(\lambda), \tag{32}$$

которые в предельном случае малой инерционности частиц $\lambda\tau_0 \gg 1$ переходят в

$$\left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 \right\rangle =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{8}{15}\dfrac{\tau_0}{\lambda} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle^2, \\ \dfrac{3}{2}\dfrac{\tau_0}{\lambda} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle^2 \end{cases} \tag{33}$$

соответственно для трехмерного и двумерного случаев.

На основе выражения (29) можно оценить пространственный корреляционный масштаб l_{cor} поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$. А именно, с помощью равенства (25) получаем, что

$$l_{cor} \sim l_0 \tag{34}$$

независимо от условий $\lambda\tau_0 \ll 1$ или $\lambda\tau_0 \gg 1$.

3.4. Временной корреляционный тензор поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$

Для временной корреляционной функции при $t > t_1$ имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) \langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle = \lambda \langle u_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle -$$
$$- \frac{\partial}{\partial r_k} \langle u_k(\mathbf{r},t)V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle -$$
$$- \left\langle \frac{\partial u_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k} V_k(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t_1)\right\rangle.$$

С помощью формулы Фурутцу–Новикова (17) и выражения для вариационной производной (18) получаем в стационарном режиме уравнение с начальным условием для функции $\langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \lambda\right) \langle V_i(\mathbf{r},t+\tau)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle =$$
$$= \lambda e^{\lambda\tau} \int\limits_\tau^\infty d\tau_1 B_{ii}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\tau_1) e^{-\lambda\tau_1}, \tag{35}$$
$$\langle V_i(\mathbf{r},t+\tau)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle_{\tau=0} = \langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle,$$

где стационарное значение $\langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle$, естественно, не зависит от времени t. В уравнении (35) опущены члены порядка $\sigma_{\mathbf{u}}^4$. Это можно сделать для достаточно большого значения параметра λ (23).

Теперь мы можем вычислить временные радиусы корреляции в выражениях (11). Интегрируя уравнение (35) по параметру τ в интервале $(0,\infty)$, получаем выражение

$$\lambda \int\limits_0^\infty d\tau \langle V_i(\mathbf{r},t+\tau)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle = \langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle +$$
$$+ \lambda \int\limits_0^\infty d\tau B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\tau)\left[1-e^{-\lambda\tau}\right]. \tag{36}$$

Полагая в равенстве (36) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ и $i = j$, получаем выражение для временного радиуса корреляции поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$:

$$\lambda\tau_{\mathbf{V}} \left\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \right\rangle = \\ = \left\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \right\rangle + \lambda \int\limits_0^\infty d\tau B_{ii}(0, \tau) \left[1 - e^{-\lambda\tau}\right],$$

которое с использованием равенства (24) может быть записано в виде

$$\tau_{\mathbf{V}} \left\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \right\rangle = \tau_0 B_{ii}(0, 0), \tag{37}$$

не зависящим от параметра λ.

Дифференцируя теперь выражение (36) по r_i и r_{1j} и полагая $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$, получаем выражение для временного радиуса корреляции поля $\partial\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)/\partial\mathbf{r}$:

$$\tau_{\operatorname{div}\mathbf{V}} = \frac{1}{\lambda}, \tag{38}$$

справедливое для всех достаточно больших значений параметра λ и, в частности, для случая $\lambda\tau_0 \gg 1$, когда $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и, следовательно, $\tau_{\mathbf{V}} = \tau_0$.

Теперь мы уже в состоянии вычислить коэффициенты (11) в уравнении для плотности вероятностей (10) с помощью равенств (37), (38) и (31):

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{N}\tau_{\mathbf{V}} \left\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{N}\tau_0 B_{ii}(0, 0) = \frac{N-1}{N}\tau_0 \int d\mathbf{k} E(k, 0), \\ D^{(\mathbf{V})} &= \tau_{\operatorname{div}\mathbf{V}} \left\langle \left(\frac{\partial\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial\mathbf{r}}\right)^2 \right\rangle = \\ &= \frac{4}{\lambda}\frac{N^2 - 1}{N(N+2)} D_1 D_2(\lambda). \end{aligned} \tag{39}$$

В частности, в трехмерном случае при $\lambda\tau_0 \gg 1$ получаем

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{3}\tau_{\mathbf{V}} \left\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{3}\tau_0 B_{ii}(0, 0) = \frac{2}{3}\tau_0 \int d\mathbf{k} E(k, 0), \\ D^{(\mathbf{V})} &= \tau_{\operatorname{div}\mathbf{V}} \left\langle \left(\frac{\partial\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial\mathbf{r}}\right)^2 \right\rangle = \\ &= \frac{8}{15}\frac{\tau_0}{\lambda^2} \left\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right\rangle^2. \end{aligned} \tag{40}$$

В двумерном случае при $\lambda\tau_0 \gg 1$ имеем

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{2}\tau_{\mathbf{V}} \left\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\tau_0 B_{ii}(0, 0) = \tau_0 \int d\mathbf{k} E(k, 0), \\ D^{(\mathbf{V})} &= \tau_{\operatorname{div}\mathbf{V}} \left\langle \left(\frac{\partial\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial\mathbf{r}}\right)^2 \right\rangle = \\ &= \frac{3}{2}\frac{\tau_0}{\lambda^2} \left\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right\rangle^2. \end{aligned} \tag{41}$$

Таким образом, мы видим, что коэффициент $D^{(\mathbf{V})} \sim \sigma_{\mathbf{u}}^4$. Сначала вихревая компонента поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ генерирует вихревую компоненту поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ прямым линейным механизмом без участия адвекции, а уже затем вихревая компонента поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ генерирует дивергентную компоненту поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ через механизм адвекции.

3.5. Условия применимости

Условия применимости полученных результатов складываются из нескольких ограничений.

1. Условия применимости диффузионного приближения для уравнения (5) имеют вид

$$\lambda > D_1 \frac{N-1}{N} \quad \text{и} \quad D_1\tau_0 \ll 1, \quad D_2(\lambda)\tau_0 \ll 1,$$

а величины D_1 и D_2 —

$$D_1 \sim \frac{\sigma_{\mathbf{u}}^2\tau_0}{l_0^2}, \quad D_2(\lambda) \sim \begin{cases} \sigma_{\mathbf{u}}^2\tau_0/l_0^2, & \lambda\tau_0 \ll 1, \\ \sigma_{\mathbf{u}}^2/\lambda l_0^2, & \lambda\tau_0 \gg 1, \end{cases}$$

где l_0 — пространственный корреляционный масштаб и τ_0 — временной радиус корреляции поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Таким образом, получаем условие

$$\frac{\sigma_{\mathbf{u}}^2\tau_0^2}{l_0^2} \ll 1. \tag{42}$$

2. Условие применимости приближения дельта-коррелированности поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ для уравнения (10) имеет вид $D^{(\mathbf{V})}/\lambda \ll 1$, т. е.

$$\frac{D_1 D_2(\lambda)}{\lambda^2} \ll 1.$$

Таким образом, получаем условия в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{\mathbf{u}}^2\tau_0^2/l_0^2 \ll \lambda\tau_0, \quad \lambda\tau_0 \ll 1, \\ &\sigma_{\mathbf{u}}^2\tau_0^2/l_0^2 \ll (\lambda\tau_0)^{3/2}, \quad \lambda\tau_0 \gg 1. \end{aligned} \tag{43}$$

3. Во всех вычислениях использовалось условие (23), которое справедливо при выполнении условия

$$\frac{\sigma_{\mathbf{u}}^2\tau_0^2}{l_0^2} \ll \lambda\tau_0. \tag{44}$$

Следовательно, для малоинерционных частиц ($\lambda\tau_0 \gg 1$) условия применимости приближений, использованных выше, сводятся к условию (42).

4. ДВУМЕРНЫЙ ПОТОК С БЫСТРЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Обсудим теперь двумерное уравнение с вращением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) V_i(\mathbf{r},t) = \\ = -\lambda\left[V_i(\mathbf{r},t) - u_i(\mathbf{r},t)\right] + 2\Omega\Gamma_{i\mu}V_\mu(\mathbf{r},t),$$

где матрица

$$\Gamma = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \Gamma^2 = -E,$$

а E — единичная матрица. Это уравнение можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{V}(\mathbf{r},t) = \\ = -\Lambda\left[\mathbf{V}(\mathbf{r},t) - \mathbf{U}(\mathbf{r},t)\right], \quad (45)$$

где матрица $\Lambda = \lambda E - 2\Omega\Gamma$, а случайное поле скоростей имеет структуру

$$\mathbf{U}(\mathbf{r},t) = \lambda\Lambda^{-1}\mathbf{u}(\mathbf{r},t), \quad \Lambda^{-1} = \frac{\lambda E + 2\Omega\Gamma}{\lambda^2 + 4\Omega^2}. \quad (46)$$

В случае, когда $\{\lambda$ или $\Omega\} \to \infty$, приближенно получаем выражение

$$\mathbf{V}(\mathbf{r},t) \approx \mathbf{U}(\mathbf{r},t). \quad (47)$$

Отметим, что можно ввести новый вектор $\mathbf{W}(\mathbf{r},t) = \Gamma\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$, и тогда величина

$$\xi(\mathbf{r},t) = \frac{\partial W_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_i} = \frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}} = \\ = \frac{\partial V_2(\mathbf{r},t)}{\partial r_1} - \frac{\partial V_1(\mathbf{r},t)}{\partial r_2}$$

описывает вихревую компоненту поля скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$.

Уравнение (45) отличается от уравнения (2) тензорным характером параметра Λ. Кроме того, в уравнении (45) поле $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ является дивергентным полем и для бездивергентного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ величина

$$\operatorname{div}\mathbf{U}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}} = \lambda\frac{\partial}{\partial r_k}\Lambda^{-1}_{k\mu}u_\mu(\mathbf{r},t) = \\ = \frac{2\lambda\Omega}{\lambda^2+4\Omega^2}\Gamma_{k\mu}\frac{\partial u_\mu(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}$$

связана с вихревой компонентой поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$.

Будем предполагать, как и ранее, что дисперсия $\sigma^2_{\mathbf{u}} = \left\langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle$ имеет малое значение и для больших значений параметров $\{\lambda,\ \Omega\}$ можно линеаризовать уравнение (45) относительно потока (47). В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}(\mathbf{r},t) + \left(\mathbf{U}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{V}(\mathbf{r},t) + \\ + \left(\mathbf{V}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{U}(\mathbf{r},t) = -\Lambda\left[\mathbf{V}(\mathbf{r},t) - \mathbf{U}(\mathbf{r},t)\right],$$

которое в координатной форме имеет вид

$$\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \Lambda_{i\mu}V_\mu(\mathbf{r},t) = -U_k(\mathbf{r},t)\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k} - \\ - \frac{\partial U_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}V_k(\mathbf{r},t) + \Lambda_{i\mu}U_\mu(\mathbf{r},t).$$

Если параметры $\{\lambda,\Omega\} \gg \sigma^2_{\mathbf{u}}\tau_0/l^2_{cor}$, где, как и ранее, l_{cor} — пространственный корреляционный масштаб поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$, то можно опустить адвективные члены и перейти к простейшему линейному уравнению

$$\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \Lambda_{i\mu}V_\mu(\mathbf{r},t) = \lambda u_i(\mathbf{r},t). \quad (48)$$

Для вариационной производной при $t > t'$ имеем матричное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta V_i(\mathbf{r},t)}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')} + \Lambda_{i\mu}\frac{\delta V_\mu(\mathbf{r},t)}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')} = 0,$$

которое в координатной форме имеет вид системы уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right)\frac{\delta V_i(\mathbf{r},t)}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')} = 2\Omega\frac{\delta W_i(\mathbf{r},t)}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right)\frac{\delta W_i(\mathbf{r},t)}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')} = -2\Omega\frac{\delta V_i(\mathbf{r},t)}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')}$$

с начальными условиями при $t = t'$

$$\frac{\delta V_i(\mathbf{r},t')}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')} = \lambda\delta_{il}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad \frac{\delta W_i(\mathbf{r},t')}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')} = \lambda\Gamma_{il}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

Решение этой системы имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')}\begin{pmatrix} V_i(\mathbf{r},t) \\ W_i(\mathbf{r},t)\end{pmatrix} = \\ = \lambda e^{-\lambda(t-t')}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')A(t-t')\begin{pmatrix}\delta_{il} \\ \Gamma_{il}\end{pmatrix},$$

где матрица

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) \\ -\sin(2\Omega t) & \cos(2\Omega t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для вариационной производной получаем окончательное выражение

$$\frac{\delta V_i(\mathbf{r},t)}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')} = \lambda\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')e^{-\lambda(t-t')} \times \\ \times \{\delta_{il}\cos[2\Omega(t-t')] + \Gamma_{il}\sin[2\Omega(t-t')]\}. \quad (49)$$

4.1. Пространственный корреляционный тензор поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$

Из уравнения (48) для одновременного пространственного корреляционного тензора следует уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle + \\ + \Lambda_{i\mu}\langle V_\mu(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle + \Lambda_{j\mu}\langle V_i(\mathbf{r},t)V_\mu(\mathbf{r}_1,t)\rangle = \\ = \lambda\langle u_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle + \lambda\langle u_j(\mathbf{r}_1,t)V_i(\mathbf{r},t)\rangle. \quad (50)$$

С помощью формулы Фурутцу–Новикова (17) и выражения (49) получаем, что стационарный корреляционный тензор описывается уравнением

$$2\lambda\langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle - \\ - 2\Omega[\langle W_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle + \langle V_i(\mathbf{r},t)W_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle] = \\ = 2\lambda^2\int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}\cos(2\Omega\tau)B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\tau) + \\ + \lambda^2\int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}\sin 2\Omega\tau \times \\ \times[\Gamma_{j\mu}B_{i\mu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\tau) + \Gamma_{i\mu}B_{j\mu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\tau)]. \quad (51)$$

Следовательно, полагая в (51) $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$ и $i=j$, можно получить стационарное значение для дисперсии $\langle\mathbf{V}^2(\mathbf{r},t)\rangle$:

$$\langle\mathbf{V}^2(\mathbf{r},t)\rangle = \lambda\int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}\cos(2\Omega\tau)B_{ii}(0,\tau), \quad (52)$$

в силу того что

$$B_{il}(0,\tau)\Gamma_{il}\equiv 0, \quad \Gamma_{i\mu}\langle V_i(\mathbf{r},t)V_\mu(\mathbf{r},t)\rangle\equiv 0.$$

Обсудим теперь статистические характеристики пространственных производных поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ типа $\langle(\partial V_i(\mathbf{r},t)/\partial r_k)(\partial V_j(\mathbf{r},t)/\partial r_l)\rangle$. Для двумерного поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ с помощью равенства (15) получаем выражение

$$-\frac{\partial^2 B_{ij}(0,\tau)}{\partial r_k\partial r_l} = \frac{1}{8}D(\tau)(3\delta_{kl}\delta_{ij}-\delta_{ki}\delta_{lj}-\delta_{kj}\delta_{li}), \quad (53)$$

где $D(\tau)=\int d\mathbf{k}\,\mathbf{k}^2E(k,\tau)$ и, следовательно, из уравнения (51) приходим к уравнению

$$2\lambda\left\langle\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}\frac{\partial V_j(\mathbf{r},t)}{\partial r_l}\right\rangle - \\ - 2\Omega\left[\left\langle\frac{\partial W_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}\frac{\partial V_j(\mathbf{r},t)}{\partial r_l}\right\rangle + \\ + \left\langle\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}\frac{\partial W_j(\mathbf{r},t)}{\partial r_l}\right\rangle\right] = \\ = \frac{\lambda^2}{4}D_2(\lambda,\Omega)(3\delta_{kl}\delta_{ij}-\delta_{ki}\delta_{lj}-\delta_{kj}\delta_{li}) - \\ -\frac{\lambda^2}{8}D_3(\lambda,\Omega)(\delta_{ki}\Gamma_{jl}+\delta_{li}\Gamma_{jk}+\delta_{lj}\Gamma_{ik}+\delta_{kj}\Gamma_{il}), \quad (54)$$

где коэффициенты

$$D_2(\lambda,\Omega) = \int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}\cos(2\Omega\tau)D(\tau),$$

$$D_3(\lambda,\Omega) = \int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}\sin(2\Omega\tau)D(\tau).$$

Положим $i=k$, $j=l$ в уравнении (54). В этом случае получим стационарное уравнение

$$\lambda\langle d^2(\mathbf{r},t)\rangle = 2\Omega\langle\xi(\mathbf{r},t)d(\mathbf{r},t)\rangle, \quad (55)$$

где

$$d(\mathbf{r},t) = \frac{\partial\mathbf{V}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}, \quad \xi(\mathbf{r},t) = \frac{\partial\mathbf{W}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}.$$

Положим теперь $i=j$, $k=l$ в уравнении (54). Получим стационарное выражение для вихревой части поля скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$:

$$-\langle\mathbf{V}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{V}(\mathbf{r},t)\rangle = \lambda D_2(\lambda,\Omega). \quad (56)$$

Теперь выпишем уравнение для матрицы $\left\langle\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}d(\mathbf{r},t)\right\rangle$:

$$\lambda\left\langle\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}d(\mathbf{r},t)\right\rangle - \\ -\Omega\Gamma_{i\mu}\left\langle\frac{\partial V_\mu(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}d(\mathbf{r},t)\right\rangle - \Omega\left\langle\xi(\mathbf{r},t)\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}\right\rangle = 0,$$

и, умножая его на Γ_{ki}, получаем уравнение:

$$\lambda\langle\xi(\mathbf{r},t)d(\mathbf{r},t)\rangle = \Omega\left[\langle\xi^2(\mathbf{r},t)\rangle - \langle d^2(\mathbf{r},t)\rangle\right]. \quad (57)$$

Умножая теперь уравнение (54) на $\Gamma_{ki}\Gamma_{lj}$, получаем третье стационарное уравнение:

$$\lambda \left\langle \xi^2(\mathbf{r},t)\right\rangle + 2\Omega \left\langle d(\mathbf{r},t)\xi(\mathbf{r},t)\right\rangle = \lambda^2 D_2(\lambda,\Omega). \quad (58)$$

Таким образом, мы получили систему уравнений (55)–(58), решение которой

$$\begin{aligned}
\left\langle \xi^2(\mathbf{r},t)\right\rangle &= \lambda\frac{\lambda^2+2\Omega^2}{\lambda^2+4\Omega^2}D_2(\lambda,\Omega),\\
\left\langle d^2(\mathbf{r},t)\right\rangle &= \frac{2\lambda\Omega^2}{\lambda^2+4\Omega^2}D_2(\lambda,\Omega),\\
\left\langle \xi(\mathbf{r},t)d(\mathbf{r},t)\right\rangle &= \frac{\lambda^2\Omega}{\lambda^2+4\Omega^2}D_2(\lambda,\Omega).
\end{aligned} \quad (59)$$

Если $\lambda/\Omega \ll 1$ и $\Omega\tau_0 \gg 1$, то $D_2(\lambda,\Omega)\approx(\lambda/4\Omega^2)D(0)$ и мы получаем

$$\begin{aligned}
\left\langle \xi^2(\mathbf{r},t)\right\rangle = \left\langle d^2(\mathbf{r},t)\right\rangle &= \frac{\lambda^2}{8\Omega^2}D(0),\\
\left\langle \xi(\mathbf{r},t)d(\mathbf{r},t)\right\rangle &= \frac{\lambda^3}{16\Omega^3}D(0).
\end{aligned} \quad (60)$$

Если же $\lambda/\Omega \gg 1$, но $\Omega\tau_0 \gg 1$, то $D_2(\lambda,\Omega)\approx D(0)/\lambda$, и, следовательно,

$$\begin{aligned}
&\left\langle \xi^2(\mathbf{r},t)\right\rangle = D(0), \quad \left\langle d^2(\mathbf{r},t)\right\rangle = \frac{2\Omega^2}{\lambda^2}D(0),\\
&\left\langle \xi(\mathbf{r},t)d(\mathbf{r},t)\right\rangle = \frac{\Omega}{\lambda}D(0).
\end{aligned} \quad (61)$$

Таким образом, решение задачи имеет порядок $\sigma_{\mathbf{u}}^2$. Если же параметр $\Omega\to 0$, то, как мы видели ранее, решение задачи имеет порядок $\sigma_{\mathbf{u}}^4$ и необходимо учитывать адвективные эффекты.

4.2. Временной корреляционный тензор поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$

При $t > t_1$ мы имеем уравнение для пространственно-временного корреляционного тензора:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t_1)\right\rangle + \Lambda_{i\mu}\left\langle V_\mu(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t_1)\right\rangle = \\ = \lambda\left\langle u_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t_1)\right\rangle,$$

которое, после использования формулы Фурутцу–Новикова (17) и равенства (49) может быть записано в стационарном режиме в виде

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\langle V_i(\mathbf{r},t+\tau)V_j(\mathbf{r}_1,t)\right\rangle + \\ +\lambda\left\langle V_i(\mathbf{r},t+\tau)V_j(\mathbf{r}_1,t)\right\rangle - 2\Omega\Gamma_{i\mu}\left\langle V_\mu(\mathbf{r},t+\tau)V_j(\mathbf{r}_1,t)\right\rangle = \\ = \lambda^2 e^{\lambda\tau}\int\limits_\tau^\infty d\tau_1 B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\tau_1)e^{-\lambda\tau_1}\cos(2\Omega\tau) + \\ + \lambda^2 e^{\lambda\tau}\Gamma_{j\mu}\int\limits_\tau^\infty d\tau_1 B_{i\mu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\tau_1)e^{-\lambda\tau_1}\sin(2\Omega\tau) \quad (62)$$

с начальным условием при $\tau = 0$

$$\left\langle V_i(\mathbf{r},t+\tau)V_j(\mathbf{r}_1,t_1)\right\rangle_{\tau=0} = \left\langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t_1)\right\rangle.$$

Нас интересует величина

$$K_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) = \int\limits_0^\infty d\tau\left\langle V_i(\mathbf{r},t+\tau)V_j(\mathbf{r}_1,t)\right\rangle \quad (63)$$

и величины (11)

$$D_0 = \frac{1}{2}K_{ii}(0) = \frac{1}{2}\tau_{\mathbf{V}}\left\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle,$$

$$D^{(\mathbf{V})} = \left.\frac{\partial^2 K_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)}{\partial r_i\partial r_{1j}}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} = \tau_{\operatorname{div}\mathbf{V}}\left\langle\left(\frac{\partial\mathbf{V}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\right)^2\right\rangle,$$

определяющие коэффициенты диффузии в уравнении (10).

Для величины (63) мы получаем из уравнения (62) выражение

$$\lambda K_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) - 2\Omega\Gamma_{i\mu}K_{\mu j}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) = \left\langle V_i(\mathbf{r},t)V_j(\mathbf{r}_1,t)\right\rangle + \\ + \lambda\int\limits_0^\infty d\tau B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\tau)\left[1-e^{-\lambda\tau}\right]\cos(2\Omega\tau) + \\ + \lambda\Gamma_{j\mu}\int\limits_0^\infty d\tau B_{i\mu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\tau)\left[1-e^{-\lambda\tau}\right]\sin(2\Omega\tau). \quad (64)$$

Положим $i = j$ и $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ в (64). В результате получаем равенство

$$\lambda\tau_{\mathbf{V}}\left\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle = \left\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle + \\ + \lambda\int\limits_0^\infty d\tau B_{ii}(0,\tau)\left[1-e^{-\lambda\tau}\right]\cos(2\Omega\tau),$$

где $\tau_{\mathbf{V}}$ — временной радиус корреляции поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$. Принимая во внимание выражение (52), можно переписать последнее равенство в виде

$$D_0 = \frac{1}{2}\tau_{\mathbf{V}}\left\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty d\tau B_{ii}(0,\tau)\cos(2\Omega\tau) = \frac{\pi}{2}\int d\mathbf{k}\Phi(k,2\Omega), \quad (65)$$

где $\Phi(k,\omega)$ — пространственно-временная спектральная функция (12), (13) поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$.

Подействуем оператором $\partial^2/\partial r_k\partial r_{1l}$ на уравнение (64) и положим $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ и $j = l$. В результате для матрицы $\langle(\partial V_i(\mathbf{r},t)/\partial r_k)d(\mathbf{r},t)\rangle$ с помощью выражения (53) получаем уравнение в виде

$$\lambda\int_0^\infty d\tau\left\langle\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t+\tau)}{\partial r_k}d(\mathbf{r},t)\right\rangle-2\Omega\Gamma_{i\mu}\times\\ \times\int_0^\infty d\tau\left\langle\frac{\partial V_\mu(\mathbf{r},t+\tau)}{\partial r_k}d(\mathbf{r},t)\right\rangle=\\ =\left\langle\frac{\partial V_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}d(\mathbf{r},t)\right\rangle. \quad (66)$$

Положим теперь $i=k$ в уравнении (66). В этом случае приходим к стационарному уравнению

$$\lambda\int_0^\infty d\tau\,\langle d(\mathbf{r},t+\tau)d(\mathbf{r},t)\rangle-\\ -2\Omega\int_0^\infty d\tau\,\langle\xi(\mathbf{r},t+\tau)d(\mathbf{r},t)\rangle=\left\langle d^2(\mathbf{r},t)\right\rangle. \quad (67)$$

Умножая (66) на Γ_{ki}, имеем уравнение

$$\lambda\int_0^\infty d\tau\,\langle\xi(\mathbf{r},t+\tau)d(\mathbf{r},t)\rangle+\\ +2\Omega\int_0^\infty d\tau\,\langle d(\mathbf{r},t+\tau)d(\mathbf{r},t)\rangle=\langle\xi(\mathbf{r},t)d(\mathbf{r},t)\rangle. \quad (68)$$

Таким образом, мы получили систему уравнений (67) и (68), решение которой с помощью выражений (59) можно записать в виде

$$D^{(\mathbf{V})}=\int_0^\infty d\tau\,\langle d(\mathbf{r},t+\tau)d(\mathbf{r},t)\rangle=\\ =\frac{\lambda\left\langle d^2(\mathbf{r},t)\right\rangle+2\Omega\,\langle\xi(\mathbf{r},t)d(\mathbf{r},t)\rangle}{\lambda^2+4\Omega^2}=\\ =\frac{4\lambda^2\Omega^2}{(\lambda^2+4\Omega^2)^2}\int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}\cos(2\Omega\tau)D\left(\tau\right).$$

Если параметры $\{\lambda,\Omega\}\,\tau_0\gg1$, то

$$D^{(\mathbf{V})}=\frac{4\lambda^3\Omega^2D(0)}{(\lambda^2+4\Omega^2)^3}=\\ =\begin{cases}4\Omega^2D(0)/\lambda^3, & \lambda\gg\Omega,\\ \lambda^3D(0)/16\Omega^4, & \lambda\ll\Omega,\end{cases} \quad (69)$$

где, как и ранее,

$$D(0)=\int d\mathbf{k}k^2E(k,0)=-\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle.$$

Таким образом, при выполнении условий $\{\lambda,\Omega\}\,\tau_0\gg1$ видим, что в рассматриваемой задаче процесс генерации дивергентной части поля $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ описывается линейным уравнением без учета адвективных членов. Если к тому же параметр $\lambda\gg\Omega$, необходимо принять во внимание следующие поправочные члены порядка $\sigma_{\mathbf{u}}^4$ (41), которые могут быть в некоторых случаях сравнимы с (69), т. е. в этом случае мы получаем

$$D^{(\mathbf{V})}=\frac{3}{2}\frac{\tau_0}{\lambda^2}\,\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle^2-\\ -\frac{4\Omega^2}{\lambda^3}\,\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle=\\ =-\frac{4\Omega^2}{\lambda^3}\,\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle\times\\ \times\left\{1-\frac{3\lambda\tau_0}{2\Omega^2}\,\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle\right\}. \quad (70)$$

Пространственный коэффициент диффузии D_0 не зависит от параметра λ и описывается выражением (65).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена выводу выражений для коэффициентов диффузии, характеризующих кластеризацию плотности числа малоинерционных частиц в гидродинамических потоках в различных асимптотических режимах. Мы не ставили своей целью изучение этих коэффициентов (и, следовательно, самого явления кластеризации) для конкретных геофизических или астрофизических задач. Это совершенно самостоятельные задачи, которые можно решать на основе полученных выражений. Исходным для нас было феноменологическое нелинейное уравнение (2) в эйлеровом представлении. Несмотря на то что в лагранжевом представлении характеристические уравнения (3) имеют очень простой вид, исходная задача (2) очень сложна. Это ясно хотя бы из того, что уравнение (2) является квазилинейным уравнением в частных производных, и в общем случае возможны неединственность решения задачи, существование в них разрывов и т. п. В асимптотическом случае малой инерции частиц ситуация существенно упрощается и мы переходим к линейной задаче в эйлеровом представлении. Однако даже для нее не просто сразу указать возможные порядки малости соответствующих коэффициентов диффузии, что связано с существованием нескольких безразмерных параметров. Так, например, для задачи с вращением у нас существует три временных масштаба уже только при постановке задачи. Кроме того, возникают два статистических масштаба — коэффициенты диффузии, также имеющие размерность обратного времени. Поэтому и приходится проводить детальный анализ проблемы, что и было сделано в этой работе.

Работа была выполнена при частичной поддержке немецко-израильского проекта (DIP) Федерального Министерства образования и исследований (BMBF), а также INTAS (грант № 00-0309). Один из авторов (В. И. К.) благодарен специальному фонду для молодых ученых технического факультета Университета им. Бен-Гуриона (Faculty of Engineering of the Ben-Gurion University of the Negev) и РФФИ (проекты 00-15-98608, 01-05-64042 и 02-05-64375).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. G. Stokes, Cambr. Trans. **8**, (1851).
2. H. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover Publications, New York (1932).
3. M. Ungarish, *Hydrodynamics of Suspensions: Fundamentals of Centrifugal and Gravity Separation*, Springer-Verlag, New York (1993).
4. *Sedimentation of Small Particles in a Viscous Fluid*, ed. by E. M. Tory, Advances in Fluid Mechanics **7**, Computational Mechanics, Publications Southampton Boston, UK (1996).
5. M. R. Maxey and J. J. Riley, Phys. Fluids **26**, 883 (1983).
6. M. R. Maxey and S. Corsin, J. Atmos. Sci. **43**, 1112 (1986).
7. M. R. Maxey, J. Fluid Mech. **174**, 441 (1987).
8. M. R. Maxey, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A **333**, 289 (1990).
9. L. P. Wang and M. R. Maxey, J. Fluid Mech. **256**, 27 (1993).
10. M. R. Maxey, E. J. Chang, and L.-P. Wang, Exp. Therm. Fluid Sci. **12**, 417 (1996).
11. T. Elperin, N. Kleeorin and I. Rogachevskii, Phys. Rev. E **53**, 3431 (1996), **58**, 3113 (1998); Phys. Rev. Lett. **76**, 224 (1996), **77**, 5373 (1996), **81**, 2898 (1998); Atmos. Research **53**, 117 (2000).
12. E. Balkovsky, G. Falkovich, and A. Fouxon, Phys. Rev. Lett. **86**, 2790 (2001).
13. В. И. Кляцкин, А. И. Саичев, ЖЭТФ **111**, 1297 (1997).
14. В. И. Кляцкин, Д. Гурарий, УФН **169**, 171 (1999).
15. В. И. Кляцкин, Известия АН, Физ. атм. и океана **36**, 177 (2000).
16. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения глазами физика* (*Основные идеи, точные результаты и асимптотические приближения*), Наука, Москва (2001).
17. C. L. Zirbel and E. Çinlar, *Stochastic Models in Geosystems*, ed. by S. A. Molchanov, W. A. Woyczynski, IMA Volumes in Mathematics and its Applications **85**, 459, Springer-Verlag, New York (1996).
18. К. В. Кошель, О. В. Александрова, Изв. РАН, Физ. атм. и океана **35**, 638 (1999).
19. В. И. Кляцкин, К. В. Кошель, УФН **170**, 771 (2000).
20. K. Furutsu, J. Res. NBS **D-67**, 303 (1963).
21. Е. А. Новиков, ЖЭТФ **47**, 1919 (1964).
22. V. I. Klyatskin, *Mathematics of Random Media*, ed. by W. Kohler and B. S. White, Lectures in Appl. Math. **27**, 447, AMS, Providence RI (1991).
23. В. И. Кляцкин, И. Г. Якушкин, ЖЭТФ **118**, 849 (2000).