

ДИНАМИКА ЧАСТИЦ ПРИ АДИАБАТИЧЕСКОМ РАЗЛЕТЕ ПЛАЗМЕННОГО СГУСТКА

В. Ф. Ковалев^{*a}, *В. Ю. Быченков*^b, *В. Т. Тихончук*^{**c}

^a *Институт математического моделирования Российской академии наук
125047, Москва, Россия*

^b *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

^c *Институт фундаментальной физики,
Университет Бордо, Франция*

Поступила в редакцию 7 февраля 2002 г.

С использованием ренормгруппового подхода получено точное решение самосогласованных кинетических уравнений Власова для частиц плазмы в квазинейтральном приближении, описывающее одномерный адиабатический разлет плазменного сгустка в вакуум для произвольных начальных распределений частиц по скоростям. Изучено ускорение ионов для двухтемпературного максвелловского и супергауссова начальных распределений электронов, которые предопределяют существенно различные ионные спектры. Найденное решение использовано для описания ускорения ионов двух сортов. Исследована относительная эффективность ускорения легких и тяжелых ионов в зависимости от атомных весов и концентраций. Полученные решения имеют практическое значение для описания ускорения ионов при взаимодействии ультракороткого лазерного импульса с наноплазмой, например, кластерной или образующейся при облучении лазером тонких фольг.

PACS: 52.20.-j, 52.25.Dg

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то что со времени публикации первых работ [1, 2] по теории разлета плазмы в вакуум прошло более тридцати лет, физика этого процесса все еще является предметом исследований. Прежде всего, это обусловлено необходимостью не только понимания физики процесса ускорения ионов при взаимодействии лазерного излучения с плазмой, но и количественного описания характеристик ускоренных частиц. Проблема ускорения ионов является одной из ключевых для различных приложений с использованием мощных лазеров, таких как лазерный термоядерный синтез, инжектор быстрых частиц, в том числе для проблемы быстрого поджига («fast ignitor»), сверхгорячая кластерная плазма, радиационный источник для медицины, материаловедения и

ядерной физики. Несмотря на то что процесс ускорения ионов в разлетающейся горячей лазерной плазме описан достаточно подробно [3, 4], недавние эксперименты с наноплазменными образованиями [5, 6] и тонкими фольгами [7] обнаружили, что ионы могут достигать энергий, превышающих предсказанный предел.

Наибольшее число работ по расширению плазмы в вакуум выполнено на основе модели полуограниченной среды с изотермическими электронами и холодными ионами [8–12], подразумевающей наличие постоянного источника частиц и допускающей существование режима изотермического разлета плазмы. Эта модель заведомо неадекватна при изучении режима разлета малых плазменных образований, например, кластеров [13] или фольг. Такой режим сопровождается адиабатическим охлаждением частиц и, как показано ниже, отличается от изученного ранее расширения полуограниченной плазмы в вакуум существенно другими закономерностями в рас-

*E-mail: kovalev@imamod.ru

**Institute de Physic Fondamentale, Université Bordeaux, B. P. 120, 33175, Gradignan cedex, France.

пределении числа ионов и их температуры. Он изучался с помощью феноменологической теории гидродинамического типа [14] и численного моделирования [15, 16]. Важным шагом в его изучении явилась работа [17], в которой получено точное автомодельное решение уравнений Власова для электронов и ионов в квазинейтральном приближении. Однако найденное в [17] кинетическое решение о разлете плазменного сгустка в вакуум отвечает частному случаю квадратичной пространственной зависимости электростатического потенциала плазмы и, соответственно, начальных условий, которые описываются одинаковыми зависимостями от координаты и скорости функций распределения электронов и ионов. Последнее условие существенно ограничивает использование результатов аналитической теории для интерпретации экспериментов.

В данной работе, развивающей и детализирующей идеи, сформулированные нами в сообщении [18], найден более общий по сравнению с [17] класс решений задачи Коши для уравнений Власова в квазинейтральном приближении для произвольных начальных распределений частиц, электронов и ионов по скоростям. Это достигается благодаря использованию ренормгруппового подхода [19, 20], при котором решение начальной задачи по теории возмущений на малых временах, $t \rightarrow 0$, продолжается на область конечных t с помощью ренормгрупповых симметрий. Показано, что решение Дорожкиной и Семенова [17] представляет собой частный случай этого решения. Общий ренормгрупповой подход применен в данной работе к задаче плоского разлета. Обобщение на трехмерный случай не представляет принципиальных затруднений, хотя и требует более громоздких вычислений. В качестве начальных функций распределения электронов по скоростям мы обсуждаем три типичных случая распределений: максвелловского, двухтемпературного максвелловского и супергауссова, характерных для определенных режимов взаимодействия лазерного излучения с плазмой. Можно надеяться, что полученные результаты помогут пролить свет на природу экспериментально обнаруженной высокой отсечки ионного спектра по энергии [5, 6], поскольку данный метод позволяет рассматривать существенно неравновесные функции распределения электронов, подобные тем, которые возникают в условиях экспериментов [5, 6], где имеет место генерация ускоренных электронов при взаимодействии лазерного излучения с плазмой.

Кроме того, решена задача Коши применительно к разлету плазменного сгустка с двумя сортами

ионов. В последнее время в связи с экспериментами по лазерно-плазменному методу ускорения ионов и ядерным процессам на его основе [7, 21] возникла необходимость предсказания энергии заданного сорта ионов при учете, что облучаемая лазером плазма может содержать ионы другого сорта. При этом наиболее актуальным является учет водородной примеси, которая всегда присутствует из-за адсорбции водяных паров на поверхности лазерной мишени. Будучи наиболее легкой компонентой, протоны хорошо захватываются полем и ускоряются наиболее эффективно, подавляя тем самым ускорение более тяжелых ионов, летящих позади. Так, например, в эксперименте по ускорению дейтронов [7], где не принимались специальные меры по очистке поверхности мишени от воды, энергия дейтронов составляла 2 МэВ, тогда как протоны, возникающие из-за загрязнения поверхности, ускорялись до 9 МэВ. Естественно, что для такого рода задач крайне желательна формулировка требований к чистоте поверхности (концентрации водорода) для эффективного ускорения ионов мишени. С другой стороны, даже при хорошей очистке поверхности [22], но с использованием мишеней, включающих различные химические элементы, необходимы количественные критерии ускорения ионов разных сортов заданной концентрации. Развитая ниже аналитическая теория разлета многокомпонентной плазмы является существенным шагом в этом направлении.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для описания динамики плазменного образования, неоднородного по координате x , рассмотрим стандартную систему кинетических уравнений

$$\partial_t f^\alpha + v \partial_x f^\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E \partial_v f^\alpha = 0 \quad (1)$$

для функций распределения f^α частиц сорта α (с зарядом e_α и массой m_α), которые зависят от времени t , координаты x и одной компоненты скорости v вдоль направления неоднородности плазмы. Величина $E(t, x)$ представляет собой самосогласованное электрическое поле, определяющееся условием квазинейтральности плазменного течения. В рамках такого квазинейтрального приближения плотности заряда ρ и тока j в плазме полагаем равными нулю,

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \int dv \sum_\alpha e_\alpha f^\alpha = 0, \\ j &\equiv \int dv v \sum_\alpha e_\alpha f^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Соответственно, самосогласованное электрическое поле E следующим образом выражается через моменты функций распределения:

$$E = \int dv v^2 \partial_x \sum_{\alpha} e_{\alpha} f^{\alpha} \left\{ \int dv \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} f^{\alpha} \right\}^{-1}. \quad (3)$$

Решение системы уравнений (1) и (2) ищем с крайними условиями, отвечающими заданным в начальный момент времени $t = 0$ функциям распределения электронов и ионов,

$$f^{\alpha} \Big|_{t=0} = f_0^{\alpha}(x, v). \quad (4)$$

Такая постановка задачи может моделировать разлет плазменного образования под действием короткого лазерного импульса длительностью, гораздо меньшей характерного времени эволюции сгустка. При этом процессы взаимодействия лазерного излучения с плазмой и ее нагрева, в которых основную роль играют электроны, не конкретизируются и моделируются посредством задания произвольной начальной функции распределения электронов по скоростям.

3. СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЙ И РЕНОРМГРУППОВАЯ СИММЕТРИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

При исследовании уравнений вида (1) стандартным является метод характеристик (см., например, [1, 2]). Уравнения характеристик для (1) содержат электрическое поле (3), которое выражается через интегралы функций распределения по скоростям, что затрудняет аналитическое исследование этих уравнений и заставляет прибегать к численным методам. Поэтому ниже применяется другой аналитический подход. Для построения решения задачи Коши (1), (2), (4) используем возможность продолжения этого решения, записанного в малой окрестности $t \rightarrow 0$ в виде ряда теории возмущений по степеням переменной t , на область существенно больших значений времени $t \neq 0$ с помощью специальной, ренормгрупповой, симметрии. Для такого продолжения используются конечные преобразования группы, которые связывают начальные функции распределения (4) со значениями этих функций в моменты времени $t \neq 0$. Искомая ренормгрупповая симметрия находится как подгруппа допускаемой системой (1), (2) группы точечных преобразований Ли, за-

даваемой следующим набором инфинитезимальных операторов:

$$\begin{aligned} X_0 &= \partial_t, & X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= t\partial_t - v\partial_v, & X_3 &= x\partial_x + v\partial_v, \\ X_4 &= \sum_{\alpha} f^{\alpha} \partial_{f^{\alpha}}, & X_5 &= t\partial_x + \partial_v, \\ X_6 &= t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - vt)\partial_v, \\ X_{\alpha} &= \frac{1}{Z_{\alpha+1}} \partial_{f^{\alpha+1}} - \frac{1}{Z_{\alpha}} \partial_{f^{\alpha}} \end{aligned} \quad (5)$$

с общим элементом алгебры, представленным их линейной комбинацией,

$$X = \sum_{j=0}^6 c_j X_j + \sum_{\alpha} b_{\alpha} X_{\alpha}. \quad (6)$$

В операторах X_{α} , входящих в систему (5), $Z_{\alpha} = e_{\alpha}/|e|$ — зарядовое число частиц сорта α , а индексом $\alpha + 1$ обозначен следующий по порядку за α сорт частиц. Операторы X_{α} существуют только в плазме с числом сортов частиц большим или равным двум, и их число на единицу меньше числа компонент плазмы.

Зависимость от времени t электрического поля $E(t, x)$, входящего в кинетические уравнения (1), описывается функцией, содержащей шесть постоянных c_j , определяющих вклад различных операторов (5) в общий элемент алгебры (6),

$$\begin{aligned} E &= E_0(I^E) \exp \left(\int dt \frac{c_3 - 2c_2 - 3c_6 t}{c_0 + c_2 t + c_6 t^2} \right), \\ I^E &= x \exp \left(- \int dt \frac{c_3 + c_6 t}{c_0 + c_2 t + c_6 t^2} \right) - \\ &- \int dt \frac{c_1 + c_5 t}{c_0 + c_2 t + c_6 t^2} \times \\ &\times \exp \left(- \int dt \frac{c_3 + c_6 t}{c_0 + c_2 t + c_6 t^2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Зависимость электрического поля от координаты x дается видом функции E_0 и находится из условия квазинейтральности (2) в момент времени $t = 0$.

Качественное отличие применяемого здесь способа вычисления допускаемой группы симметрии от способа, использованного в [23], состоит в том, что электрическое поле E рассматривается не как одна из зависимых переменных, а как неизвестная функция переменных t и x , $E = E(t, x)$. Такой вариант нахождения симметрии является логическим следствием более простой, квазинейтральной модели описания плазмы, в отличие от использованной в [23] полной системы уравнений Власова–Максвелла. Легко

убедиться в том, что операторы переноса X_0 и X_1 , оператор галилеевских преобразований X_5 и операторы квазинейтральности X_α содержатся в группе симметрий, полученной ранее в работе [24] другим способом, без предположения о функции E как о произвольной, подлежащей определению функции двух переменных¹⁾. Указанные в [24] два оператора растяжений получаются комбинированием трех операторов растяжений X_2, X_3, X_4 из (5) и дополнением вкладов, ответственных за преобразование растяжения электрического поля E , плотности заряда ρ и плотности электрического тока j . Новым среди операторов (5) является оператор конформной группы X_6 . Как мы убедимся ниже, именно этот оператор и дает возможность построения новых точных решений интересующей нас начальной задачи.

Для получения искомой ренормгрупповой симметрии следует выделить из набора операторов (6) такую линейную комбинацию, которая оставляет инвариантной решение $f^\alpha = \mathcal{F}^\alpha(t, x, v) \equiv f_0^\alpha(x, v) + O(t)$ задачи Коши при $t \rightarrow 0$. Проверка выполнения условий ренормгрупповой инвариантности приводит к ограничениям на вид начальных функций распределения частиц. Эти ограничения имеют вид системы уравнений первого порядка по числу сортов частиц в плазме:

$$c_4 f_0^\alpha + \frac{1}{Z_\alpha} (b_{\alpha-1}(1 - \delta_{\alpha,0}) - b_\alpha(1 - \delta_{\alpha,p})) + (c_0 v - c_1 - c_3 x) \partial_x f_0^\alpha - \left(-c_0 \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E + c_5 + (c_3 - c_2)v + c_6 x \right) \partial_v f_0^\alpha = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, p, \quad (8)$$

где символ Кронекера $\delta_{\alpha,\beta}$ выделяет сорт частиц с $\alpha = 0$ (например, для определенности, электроны) и $\alpha = p$. Решения этих уравнений определяют начальные функции распределения частиц через произвольные функции от первых интегралов сопряженных с (8) характеристических уравнений, а электрическое поле в начальный момент времени $E_0(x)$ находится из соотношения (3), или, что то же самое, из первого соотношения (2). При $c_2 = 2c_3$ выражения для этих интегралов имеют сравнительно простой вид, допускающий вместе с тем аналитическое

исследование при произвольном $E_0(x)$ (их число равно числу сортов частиц)

$$I^\alpha = \frac{1}{2} (c_0 v^2 - 2c_3 x v + c_6 x^2) + c_5 x - c_1 v + c_0 \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \Phi_0(x). \quad (9)$$

При этом решения уравнений (8) записываются через интегралы I^α при произвольной зависимости потенциала Φ_0 электрического поля $E_0 = -\partial_x \Phi_0$ от координаты x ,

$$c_4 f_0^\alpha + \frac{1}{Z_\alpha} (b_{\alpha-1}(1 - \delta_{\alpha,0}) - b_\alpha(1 - \delta_{\alpha,p})) = c_4 F^\alpha(I^\alpha) \times \exp \left\{ -\frac{c_4}{c_0} \int dx \left[\frac{2I^\alpha}{c_0} - \frac{2e_\alpha}{m_\alpha} \Phi_0(x) - \left(\frac{c_6}{c_0} - \frac{c_3^2}{c_0^2} \right) x^2 + \left(2\frac{c_3 c_1}{c_0^2} - \frac{2c_5}{c_0} \right) x + \frac{c_1^2}{c_0^2} \right]^{-1/2} \right\}. \quad (10)$$

Здесь F^α — произвольные функции своих аргументов. Использование результатов (10) в соотношениях (2) приводит в общем случае к интегральным уравнениям для потенциала $\Phi_0(x)$. Более простой вариант, при котором существенно упрощается задача нахождения потенциала $\Phi_0(x)$ и вместе с тем сохраняется возможность построения широкого класса аналитических решений, реализуется при выборе значений постоянных $c_4 = b_\alpha = 0$, когда искомый оператор ренормгрупповой симметрии принимает вид

$$R = (c_0 + 2c_3 t + c_6 t^2) \partial_t + (c_1 + c_3 x + c_5 t + c_6 t x) \partial_x + (c_5 - c_3 v + c_6(x - vt)) \partial_v. \quad (11)$$

В этом случае отсутствие в операторе (11) вкладов, отвечающих за преобразование функций распределения f^α , означает, что они являются инвариантами соответствующего ренормгруппового преобразования, т. е. связь

$$f^\alpha = F^\alpha(I^\alpha) \quad (12)$$

сохраняется и при $t \neq 0$. При этом зависимость функций распределения f^α от времени, координат и скоростей устанавливается с учетом вида инвариантов для оператора ренормгрупповой симметрии, связывающих значения переменных (x', v') в началь-

¹⁾ Поскольку здесь, в отличие от [24], выбрана иная нормировка функций распределения частиц, операторы квазинейтральности X_α содержат множители, не зависящие от массы частиц.

ный момент времени $t = 0$ с их значениями (x, v) при $t \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{x\sqrt{c_0}}{\sqrt{c_0 + 2c_3t + c_6t^2}} - \\
 &- \sqrt{c_0} \int_0^t \frac{c_1 + c_5t}{(c_0 + 2c_3t + c_6t^2)^{3/2}}, \\
 \left(v' - \frac{c_1 + c_3x'}{c_0} \right)^2 &= v^2 - \frac{c_6}{c_0} ((x')^2 - (x-vt)^2) - \\
 &- 2\frac{c_5}{c_0} (x' - (x-vt)) - \\
 &- 2v \left(\frac{c_1}{c_0} + \frac{c_3}{c_0}(x-vt) \right) + \left(\frac{c_1 + c_3x'}{c_0} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{13}$$

По существу, эти формулы определяют искомые конечные преобразования группы (ренормгруппы) и позволяют выразить значения функций распределения в произвольный момент времени $t \neq 0$ через их начальные значения, являющиеся функциями переменных со штрихом. Таким образом, заменяя величины x и v в соотношениях (9), (12) на x' и v' и подставляя в них выражения из (13), получим явную зависимость функций распределения f^α от времени t , координаты x и скорости v . Зависимость потенциала Φ от времени получается интегрированием по x формулы (7) и имеет вид:

$$\Phi = \Phi_0(I^E) (c_0 + 2c_3t + c_6t^2)^{-1}. \tag{14}$$

Физический смысл входящих в (9), (13) и (14) постоянных c_j в каждом конкретном случае определяется видом функций распределения в начальный момент времени. В частности, выбор постоянных $c_1 = c_3 = c_5 = 0$ соответствует симметричным по x и v начальным распределениям частиц в отсутствие средней скорости.

4. ДИНАМИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЧАСТИЦ В РАЗЛЕТАЮЩЕМСЯ ПЛАЗМЕННОМ СГУСТКЕ

Для анализа пространственно-временного поведения функций распределения рассмотрим несколько примеров использования полученного решения, определяемого формулами (9), (12)–(14) и соответствующего различным начальным условиям (4). При этом мы остановимся на четырех примерах, первые три из которых описывают электрон-ионную плазму ($\alpha = \{e, i\}$, $m_\alpha = \{m_e, m_i\}$, $Z_\alpha = \{-1, Z\}$), а последний пример соответствует плазме с несколькими сортами

ионов ($\alpha = \{e, 1, 2, \dots\}$, $m_\alpha = \{m_e, m_1, m_2, \dots\}$, $Z_\alpha = \{-1, Z_1, Z_2, \dots\}$).

Пример 1. Для плазменного сгустка, состоящего из электронов и одного сорта ионов с максвелловскими начальными функциями распределения, характеризующимися плотностями $n_{e0}(x)$, $n_{i0}(x)$ и температурами $T_{e0}(x)$, $T_{i0}(x)$, соответственно, из соотношений (12) имеем

$$f_0^\alpha = \frac{n_{\alpha 0}}{\sqrt{2\pi}v_{T\alpha}} \exp\left(-\frac{I^\alpha}{v_{T\alpha}^2}\right), \tag{15}$$

где тепловые скорости частиц определяются стандартно,

$$v_{T\alpha} = \sqrt{\frac{T_{\alpha 0}}{m_\alpha}}.$$

При этом выбираются следующие значения постоянных c_j в интегралах I^α :

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_3 = c_5 = 0, \quad c_6 = \Omega^2. \tag{16}$$

Как было указано выше, нулевые значения постоянных c_1 , c_3 и c_5 соответствуют симметричным по x и v начальным распределениям частиц в отсутствие средней скорости. Значение константы c_0 в (9) без ограничения общности может быть выбрано произвольным (равным единице). Физический смысл константы c_6 , имеющей размерность квадрата частоты, может быть установлен, если ввести характерный масштаб начальной неоднородности плотности плазмы. Как будет видно из дальнейшего, c_6 определяется квадратом отношения характерной скорости разлета ионов к этому характерному масштабу неоднородности.

Вариант начальных условий (15) соответствует задаче о разлете плазменного сгустка, рассмотренной в работах [17, 25], и будет использоваться ниже как тестовый. Используя вид начальных функций (15) в условиях квазинейтральности (2), приходим (при $Zn_{i0} = n_{e0}$) к квадратичной зависимости потенциала Φ_0 от координаты x [25],

$$\Phi_0(x) = \frac{\Omega^2 x^2}{2e} \frac{m_i T_{e0} - m_e T_{i0}}{T_{i0} + Z T_{e0}}. \tag{17}$$

Подстановка (17) в (15) и использование соотношений (13), (14) приводит к формулам, в явном виде описывающим динамику изменения функций распределения $f^{e,i}$ частиц плазмы при $t \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 f^\alpha &= \frac{n_{\alpha 0}}{\sqrt{2\pi}v_{T\alpha}} \exp\left[-\frac{1 + \Omega^2 t^2}{v_{T\alpha}^2} \times \right. \\
 &\times \left. \left(\frac{(v-u)^2}{2} + \frac{v_{T\alpha}^2(1 + Zm_e/m_i)}{v_{T_e}^2 - v_{T_i}^2} \frac{e\Phi}{m_e} \right) \right]. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Здесь локальная скорость течения плазмы u и потенциал Φ определены следующими соотношениями:

$$u = \frac{x\Omega^2}{1 + \Omega^2 t^2},$$

$$\Phi = \frac{\Omega^2 x^2}{2e(1 + \Omega^2 t^2)^2} \frac{m_i T_{e0} - m_e T_{i0}}{C_s^2(m_i + Zm_e)}, \quad (19)$$

где

$$C_s = \sqrt{\frac{T_{i0} + ZT_{e0}}{m_i + Zm_e}}$$

— скорость звука, рассчитанная по начальным значениям температур частиц.

Пример 2. Этот пример повторяет предыдущий по виду начальной функции распределения ионов, но отличается от него видом начальной функции распределения электронов, которая здесь имеет вид двухтемпературного максвелловского распределения с плотностями и температурами, отвечающими холодным (c) и горячим (h) электронам:

$$f_e^e = \frac{n_{c0}}{\sqrt{2\pi v_{Te}}} \exp\left(-\frac{I^e}{v_{Te}^2}\right) + \frac{n_{h0}}{\sqrt{2\pi v_{Th}}} \exp\left(-\frac{I^e}{v_{Th}^2}\right), \quad (20)$$

$$f_i^i = \frac{n_{i0}}{\sqrt{2\pi v_{Ti}}} \exp\left(-\frac{I^i}{v_{Ti}^2}\right).$$

Такой пример может моделировать разлет плазменного сгустка (например, кластера с размером, превышающим дебаевский радиус), предварительно быстро нагретого лазерным излучением с образованием группы горячих электронов. Использование (15) в условиях квазинейтральности (2) приводит (при $Zn_{i0} = n_{c0} + n_{h0}$) к зависимости начального потенциала Φ_0 от координаты x , определяемой неявно через характерную скорость $U_0 = \Omega x$ из следующего уравнения:

$$U_0^2 = 2C_s^2 \left\{ \mathcal{E}_0 - \frac{T_{i0}}{T_{i0} + ZT_{e0}} \times \ln \left\{ 1 - \varrho + \varrho \exp \left[\left(1 - \frac{T_{e0}}{T_h} \right) \mathcal{E}_0 \right] \right\} \right\}, \quad (21)$$

$$\mathcal{E}_0 = \frac{e\Phi_0}{T_{e0}} + \frac{U_0^2}{2v_{Te}^2}, \quad \varrho = \frac{n_{h0}}{Zn_{i0}}.$$

Подстановка (21) в (20) и использование (13), (14) приводят к формулам, описывающим динамику из-

менения функций распределения $f^{e,i}$ частиц плазмы при $t \neq 0$ в параметрической форме:

$$f^e = (1 - \rho) \frac{Zn_{i0}}{\sqrt{2\pi v_{Te}}} \exp \left[-\frac{U^2}{2v_{Te}^2} - \frac{(1 + \Omega^2 t^2)}{v_{Te}^2} \left(\frac{(v - u)^2}{2} + \frac{e\Phi}{m_e} \right) \right] +$$

$$+ \rho \frac{Zn_{i0}}{\sqrt{2\pi v_{Th}}} \exp \left[-\frac{U^2}{2v_{Th}^2} - \frac{(1 + \Omega^2 t^2)}{v_{Th}^2} \times \left(\frac{(v - u)^2}{2} + \frac{e\Phi}{m_e} \right) \right], \quad (22)$$

$$f^i = \frac{n_{i0}}{\sqrt{2\pi v_{Ti}}} \times \left\{ 1 - \rho + \rho \exp \left[\left(1 - \frac{T_{e0}}{T_h} \right) \mathcal{E} \right] \right\} \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{U^2}{2v_{Te}^2} - (1 + \Omega^2 t^2) \times \left(\frac{(v - u)^2}{2v_{Ti}^2} + \frac{e\Phi}{T_{e0}} \right) \right].$$

Здесь локальная скорость течения плазмы $u(t, x)$ по-прежнему определена формулой (19). При этом зависимость потенциала от координат и времени определяется решением уравнения, формально совпадающего с (21) после замены $U_0 \rightarrow U$ и $\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}$, однако явно учитывающего временные зависимости потенциала Φ и характерной скорости U ,

$$U^2 = 2C_s^2 \left\{ \mathcal{E} - \frac{T_{i0}}{T_{i0} + ZT_{e0}} \times \ln \left\{ 1 - \varrho + \varrho \exp \left[\left(1 - \frac{T_{e0}}{T_h} \right) \mathcal{E} \right] \right\} \right\}, \quad (23)$$

$$\mathcal{E} = \frac{e\Phi}{T_{e0}} (1 + \Omega^2 t^2) + \frac{U^2}{2v_{Te}^2}, \quad U = \frac{\Omega x}{\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}}.$$

Пример 3. Это еще один пример двухкомпонентной плазмы с ионами, имеющими максвелловскую начальную функцию распределения по скоростям (как и в примере 1), но с электронами, распределение которых по скоростям в начальный момент времени определяется супергауссовской функцией,

$$f_e^e = C \frac{n_{e0}}{\sqrt{2\pi v_{Te}}} \exp \left(-\frac{2(I^e)^2}{v_{Te}^4} \right), \quad (24)$$

$$f_i^i = \frac{n_{i0}}{\sqrt{2\pi v_{Ti}}} \exp \left(-\frac{I^i}{v_{Ti}^2} \right).$$

Здесь $C = \sqrt{\pi} 2^{5/4} / \Gamma(1/4)$, где $\Gamma(\xi)$ — гамма-функция, и $n_{e0} = Zn_{i0}$. Этот пример можно сопоставить разлету плазменного сгустка, быстро нагретого лазерным полем умеренной интенсивности за счет

обратно-тормозного поглощения, когда может устанавливаться функция распределения электронов с уплощением основного тела и отсечкой надтеплого хвоста [26]: $\propto \exp(-v^m)$, $2 \leq m \leq 5$. Величина v_{Te} , входящая в выражение для f_0^e , формально не совпадает с определением тепловой скорости $\sqrt{T_{e0}/m_e}$, отличаясь от нее множителем порядка единицы [26]. Поскольку отличие этой величины, характеризующей тепловой разброс электронов, от $\sqrt{T_{e0}/m_e}$ не принципиально, мы используем для нее стандартное обозначение. Подстановка (20) в условия квазинейтральности (2) приводит к зависимости начального потенциала от координаты, определяемой, как и выше, неявно из соотношения

$$U_0^2 = \frac{2}{m_i + Zm_e} \times \left[T_{i0} \mathcal{E}_0^2 + ZT_{e0} \mathcal{E}_0 - T_{i0} \ln \left(a \sqrt{\mathcal{E}_0} K_{1/4}(\mathcal{E}_0^2) \right) \right], \quad (25)$$

$$a = \frac{2^{3/4}}{\Gamma(1/4)} \approx 0.46.$$

Подстановка (25) в (24) с учетом соотношений (13), (14) приводит к формулам, описывающим динамику изменения функций распределения $f^{e,i}$ частиц плазмы при $t \neq 0$ в параметрической форме:

$$f^e = \frac{C n_{e0}}{\sqrt{2\pi} v_{Te}} \exp \left\{ -2 \left[\frac{U^2}{2v_{Te}^2} + \frac{(1 + \Omega^2 t^2)}{v_{Te}^2} \times \left(\frac{(v-u)^2}{2} + \frac{e\Phi}{m_e} \right) \right]^2 \right\}, \quad (26)$$

$$f^i = \frac{a n_{i0} \sqrt{\mathcal{E}}}{\sqrt{2\pi} v_{Ti}} K_{1/4}(\mathcal{E}^2) \times \exp \left[-\mathcal{E}^2 - \frac{(v-u)^2}{2v_{Ti}^2} (1 + \Omega^2 t^2) \right].$$

Здесь u , U и \mathcal{E} определены формулами (19) и (23), а уравнение, отражающее связь U и \mathcal{E} (т.е. задающее зависимость от времени и координат потенциала Φ), формально совпадает с (25) после замены $U_0 \rightarrow U$ и $\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}$:

$$U^2 = \frac{2}{m_i + Zm_e} \times \left[T_{i0} \mathcal{E}^2 + ZT_{e0} \mathcal{E} - T_{i0} \ln \left(a \sqrt{\mathcal{E}} K_{1/4}(\mathcal{E}^2) \right) \right]. \quad (27)$$

Пример 4. В этом примере полученные результаты применяются к плазме, содержащей ионы нескольких сортов с начальными максвелловскими функциями распределения по скоростям

$$f_0^q = \frac{n_{q0}}{\sqrt{2\pi} v_{Tq}} \exp \left(-\frac{I^q}{v_{Tq}^2} \right), \quad (28)$$

где индекс q нумерует сорта ионов, $q = 1, 2, \dots$. Электроны при $t = 0$ также считаются максвелловскими:

$$f_0^e = \frac{n_{e0}}{\sqrt{2\pi} v_{Te}} \exp \left(-\frac{I^e}{v_{Te}^2} \right), \quad n_{e0} = \sum_q Z_q n_{q0}. \quad (29)$$

Таким образом, этот пример является обобщением примера 1 на случай многокомпонентной плазмы. На этом примере можно, в частности, изучить роль небольшого количества примесных ионов. Такое изучение составляло предмет традиционных исследований по разлету плазмы в вакуум [27] и становится весьма актуальным в связи с современными экспериментами по нагреву твердотельных мишеней из различных веществ ультракороткими лазерными импульсами вследствие постоянного присутствия протонов, возникающих из-за неидеальной чистоты поверхности мишени, всегда содержащей некоторое малое количество H_2O . Многочисленные эксперименты демонстрируют эффективное ускорение протонов из неводородосодержащих мишеней, если не принимаются предварительные меры по очистке поверхности (см., например, [28, 29]).

Использование (28) и (29) в условиях квазинейтральности (2) приводит к зависимости исходного потенциала Φ_0 от координаты x , определяемой неявно из уравнений

$$\sum_q Z_q n_{q0} \left\{ \exp \left[\left(1 + \frac{Z_q T_{e0}}{T_{q0}} \right) \mathcal{E}_0 - \frac{U_0^2}{2v_{Tq}^2} \left(1 + \frac{Z_q m_e}{m_q} \right) \right] - 1 \right\} = 0. \quad (30)$$

Подстановка (30) в (28), (29) с учетом соотношений (13), (14) приводит к следующим формулам, описывающим динамику изменения функций распределения f^α частиц плазмы и потенциала Φ при $t \neq 0$ в параметрической форме:

$$f^e = \frac{n_{e0}}{\sqrt{2\pi} v_{Te}} \exp \left[-\frac{U^2}{2v_{Te}^2} - \frac{(1 + \Omega^2 t^2)}{v_{Te}^2} \times \left(\frac{(v-u)^2}{2} + \frac{e\Phi}{m_e} \right) \right], \quad (31)$$

$$f^q = \frac{n_{q0}}{\sqrt{2\pi} v_{Tq}} \exp \left[-\frac{U^2}{2v_{Tq}^2} - \frac{(1 + \Omega^2 t^2)}{v_{Tq}^2} \times \left(\frac{(v-u)^2}{2} - Z_q \frac{e\Phi}{m_q} \right) \right].$$

Здесь локальная скорость течения плазмы u , характерная скорость U и характерная безразмерная энер-

гия \mathcal{E} определены формулами (19) и (23), а уравнение, отражающее связь U и \mathcal{E} (т. е. задающее зависимость от времени и координат потенциала Φ), формально совпадает с (30) после замены $U_0 \rightarrow U$ и $\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}$,

$$\sum_q Z_q n_{q0} \left\{ \exp \left[\left(1 + \frac{Z_q T_{e0}}{T_{q0}} \right) \mathcal{E} - \frac{U^2}{2v_{Tq}^2} \left(1 + \frac{Z_q m_e}{m_q} \right) \right] - 1 \right\} = 0. \quad (32)$$

Таким образом, приведенные выше примеры наглядно демонстрируют, что использование ренормгруппового подхода оказывается эффективным инструментом для построения аналитических решений самосогласованных кинетических уравнений Власова для частиц плазмы. Ниже мы представляем количественные характеристики разлета плазменного сгустка в вакуум в зависимости от начальных распределений частиц по скоростям в соответствии с примерами 1–4.

5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ

При анализе экспериментальных данных наряду с формулами для функций распределения частиц плазмы представляют также интерес определяемые ими интегральные характеристики. В этом разделе, интересуясь динамикой ускорения ионов при разлете плазменного сгустка, мы используем полученные решения для изучения двух таких практически важных характеристик, как плотность ионов сорта q , $n_q(t, x)$, и их усредненное по пространству (по координате x) распределение $\langle f^q \rangle$, характеризующее энергетические спектры ионов. Эти характеристики представляются с помощью стандартных определений

$$n_q = \int_{-\infty}^{\infty} dv f^q, \quad \langle f^q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f^q, \quad (33)$$

которые хорошо иллюстрируют динамику адиабатического расширения плазменного образования.

Для предложенных выше примеров плотность ионов сорта q зависит от координаты и времени следующим образом:

$$n_q = \frac{n_{q0}}{\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}} N_q \left(\frac{x}{\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}} \right), \quad (34)$$

где конкретный вид безразмерной ионной плотности N_q устанавливается в результате интегрирования по скоростям (33) с использованием формул (18), (22), (26), (31). Такое интегрирование позволяет представить N_q в виде следующих зависимостей от характерной скорости

$$U = \frac{\Omega x}{\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}} :$$

Пример 1

$$N_i(U) = \exp \left(-\frac{U^2}{2C_s^2} \right). \quad (35)$$

Пример 2

$$N_i(U) = \exp(-\mathcal{E}) \times \left[1 - \rho + \rho \exp \left(\left(1 - \frac{T_{e0}}{T_h} \right) \mathcal{E} \right) \right]. \quad (36)$$

Пример 3

$$N_i(U) = a \sqrt{\mathcal{E}} K_{1/4}(\mathcal{E}^2) \exp(-\mathcal{E}^2), \quad (37)$$

$$a = \frac{2^{3/4}}{\Gamma(1/4)} \approx 0.46.$$

Пример 4

$$N_q(U) = \exp \left[\frac{Z_q T_{e0}}{T_{q0}} \mathcal{E} - \frac{U^2 (1 + Z_q m_e / m_q)}{2v_{Tq}^2} \right]. \quad (38)$$

При этом в примерах 2, 3, 4 связь \mathcal{E} с U определяется соответствующим уравнением (23), (27), (32).

Что касается второй интегральной характеристики, $\langle f^q \rangle$, то для нее, помимо результатов численного интегрирования, возможно получение аналитических асимптотических выражений в пределе больших значений $\Omega t \rightarrow \infty$, когда для вычисления интегралов, определяющих $\langle f^q \rangle$, применим метод перевала. Возникающие при этом главные вклады в асимптотические выражения для энергетического спектра ионов, $\langle f^q \rangle$, связаны с N_q простыми соотношениями,

$$\langle f^q \rangle = n_{q0} \Omega^{-1} N_q(v), \quad (39)$$

где соответствующие зависимости $N_q(U = v)$ даются формулами (35)–(38).

На рис. 1–3 приведены графики обсуждаемых интегральных характеристик N_q для одно- и двухкомпонентного ионного состава плазмы, а также безразмерного самосогласованного потенциала ϕ электрического поля в зависимости от безразмерной координаты, $\chi^2 = U^2/v_{Tq}^2$. Для электрон-ионной плазмы U нормируется на тепловую скорость единственной ионной компоненты плазмы, а в случае двухкомпонентного ионного состава такая нормировка,

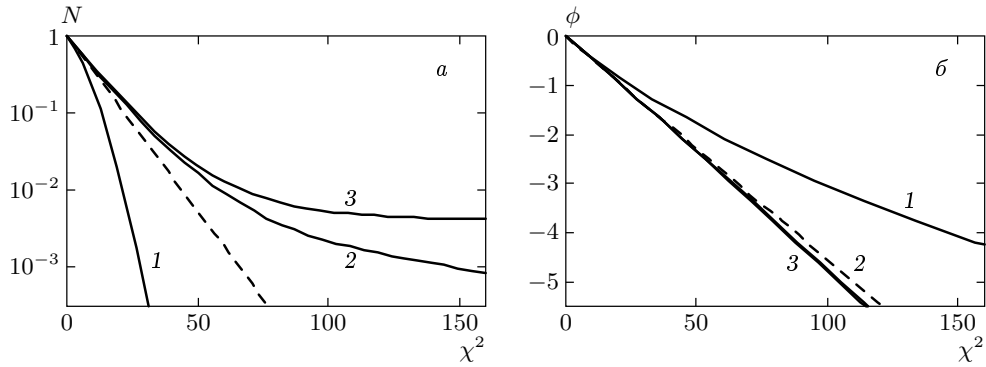


Рис. 1. Распределение плотности ионов N (а) и потенциала ϕ (б) в плазме с одним сортом ионов в зависимости от безразмерной координаты χ для различных начальных функций распределения электронов: 1 — супергауссово распределение, 2 и 3 — двухтемпературное распределение с $T_h/T_{e0} = 10$ (2), 100 (3) и относительной плотностью $\rho = 0.1$. Штриховая кривая соответствует начальной максвелловской функции распределения электронов

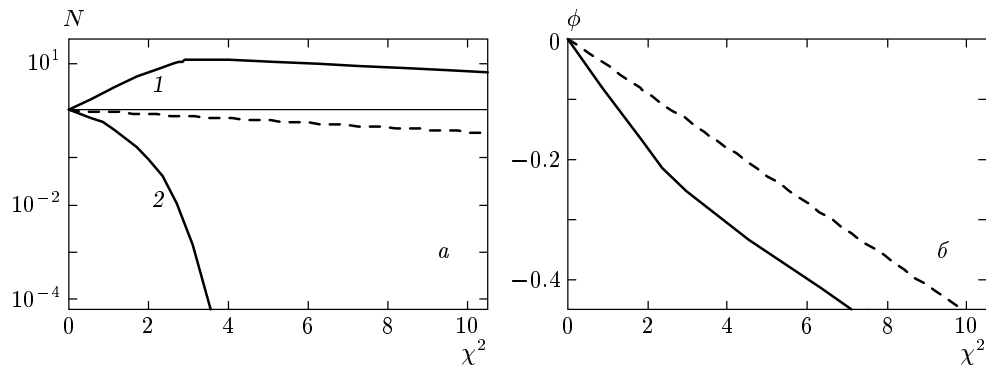


Рис. 2. Распределение плотности ионов N_q (а) и потенциала ϕ (б) в плазме с двумя сортами ионов, имеющих атомные и зарядовые числа соответственно $A_1 = 1, Z_1 = 1$ (Н, кривая 1), $A_2 = 12, Z_2 = 6$ (С, кривая 2). Начальные функции распределения электронов и ионов — максвелловские с температурами $T_{10}/T_{e0} = T_{20}/T_{e0} = 0.1$; $n_{10}/n_{20} = 2$. Штриховая кривая соответствует функции распределения ионов водорода из примера 1

для определенности, проводится на тепловую скорость первой, имеющей наибольшую плотность, ионной компоненты: $v_{Tq} \equiv v_{T1}$. Функция ϕ естественным образом появляется в нашей теории, поскольку для электрического потенциала имеет место факторизация, подобная той (см. (34)), которая возникает для парциальных плотностей,

$$\Phi = -\frac{m_e}{e} \frac{v_{Te}^2}{1 + \Omega^2 t^2} \phi, \quad \phi = \frac{U^2}{2v_{Te}^2} - \mathcal{E}. \quad (40)$$

Здесь зависимость $\mathcal{E}(U)$ определяется решениями соответствующих уравнений (23), (27) и (32). Для того чтобы физический смысл обсуждаемых ниже зависимостей от безразмерной координаты χ стал более наглядным, напомним, что частота Ω представляет собой отношение характерной скорости разлета ионов, V , к характерному начальному масштабу

неоднородности их плотности, L_0 . Для сравнительно малых времен, $t \ll L_0/V$, зависимости N_q и ϕ от χ фактически описывают начальное распределение плотности ионов и потенциала как функции от безразмерной координаты $(x/L_0)(V/v_{Tq})$. На больших временах, $t \gg L_0/V$, исчезает зависимость координаты χ от начального масштаба неоднородности плотности L_0 и χ принимает вид обычной «автономной» переменной $\chi \rightarrow (x/t)(1/v_{Tq})$. С другой стороны, учитывая соотношение (39), зависимость N_q от χ на больших временах, $t \gg L_0/V$, можно рассматривать как зависимость энергетического спектра ионов от безразмерной скорости v/v_{Tq} .

На рис. 1 приведены распределения безразмерных плотности ионов и потенциала в двухкомпонентной (e, i) плазме при различных начальных функциях распределения электронов, но одинаково-

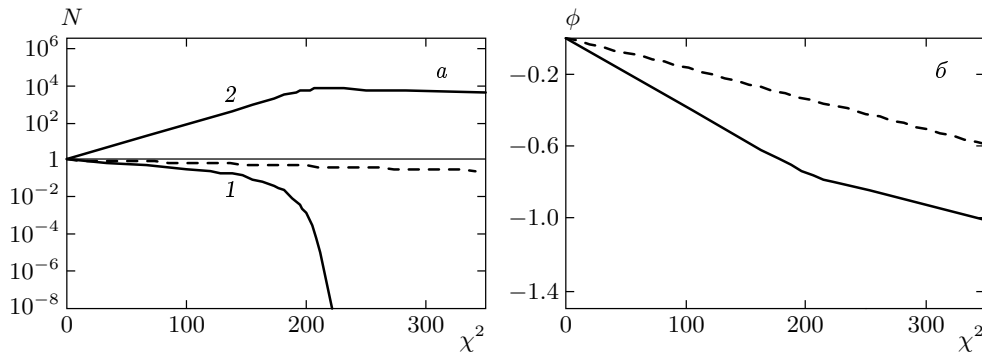


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для $A_1 = 27, Z_1 = 13$ (Al, кривая 1) и $A_2 = 1, Z_2 = 1$ (H, кривая 2); $n_{10}/n_{20} = 1300$

вой (максвелловской) начальной функции распределения ионов. Все кривые построены для следующих параметров плазмы: $T_{e0}/T_{i0} = 10, m_i/m_e = 1836, Z = 1$. Рисунки 2 и 3 соответствуют наличию в плазме двух сортов ионов. В первом случае (рис. 2) ионы первого и второго сорта со сравнимой начальной плотностью отвечают полностью ионизованной полиэтиленовой пленке (СН₂), во втором случае (рис. 3) легкие ионы второго сорта (H) образуют примесь с малой начальной плотностью по сравнению с более тяжелыми ионами первого сорта, составляющими основное вещество плазмы, в качестве которого выбран алюминий.

На рис. 4–6 приведены энергетические спектры ионов, характеризуемые функциями $F^q(v, t) = (\Omega/n_{q0})\langle f^q \rangle$, для различных моментов времени. Параметры плазмы выбраны такими же, что и на рис. 1–3. Видно, что с ростом «времени» Ωt эти кривые действительно принимают вид приведенных на рис. 1–3 кривых N_q в соответствии с асимптотикой (39).

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Как и в случае классических работ по теории разлета плазмы в вакуум [1, 2, 27], прогресс ренормгрупповой теории в нахождении решений уравнения Власова обязан приближению квазинейтральной плазмы, когда оказывается исключенным такой параметр размерности длины, как дебаевский радиус. Если в теории [1, 2, 27] с упрощенной кинетикой электронов это приближение позволило описать разлет плазмы с использованием простых автотомельных переменных, то с использованием предложенного ренормгруппового подхода возможен переход к более сложным симметриям, позволяющим

существенно расширить класс аналитически решаемых задач. Простейшей иллюстрацией этого является задача о разлете плазменного слоя с начальными максвелловскими распределениями электронов и ионов [17]. Соответствующее решение (пример 1) дается формулами (18), (19), которые в пренебрежении вкладом, содержащим малое отношение m_e/m_i , определяют функции распределения частиц

$$f^\alpha = \frac{n_\alpha(x, t)\sqrt{m_\alpha}}{\sqrt{2\pi}T_\alpha(t)} \exp\left[-\frac{m_\alpha(v-u)^2}{2T_\alpha(t)}\right], \quad (41)$$

$$u = \frac{xt\Omega^2}{1 + \Omega^2 t^2}, \quad \Omega^2 = \frac{2C_s^2}{L_0^2}.$$

Здесь в явном виде представлен эффект остывания плазмы, описываемый зависящими от времени температурами электронов и ионов

$$T_\alpha(t) = \frac{T_{\alpha 0}}{1 + \Omega^2 t^2}. \quad (42)$$

При этом, согласно (35), распределения плотности как электронов, так и ионов даются формулой

$$n_\alpha = \frac{n_{\alpha 0}}{\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}} \exp\left[\frac{e|\Phi(x, t)|}{T_e(t)}\right], \quad (43)$$

а потенциал электрического поля

$$\Phi = -\frac{m_i}{2e_i} \frac{\Omega^2 x^2}{(1 + \Omega^2 t^2)^2} \frac{1}{(1 + T_{i0}/ZT_{e0})}, \quad (44)$$

удерживающий электроны и ускоряющий ионы, характеризуется квадратичной зависимостью от координаты [17]. Если ввести зависящий от времени характерный масштаб неоднородности плотности плазмы

$$L(t) = L_0 \sqrt{1 + \frac{2C_s^2 t^2}{L_0^2}}, \quad (45)$$

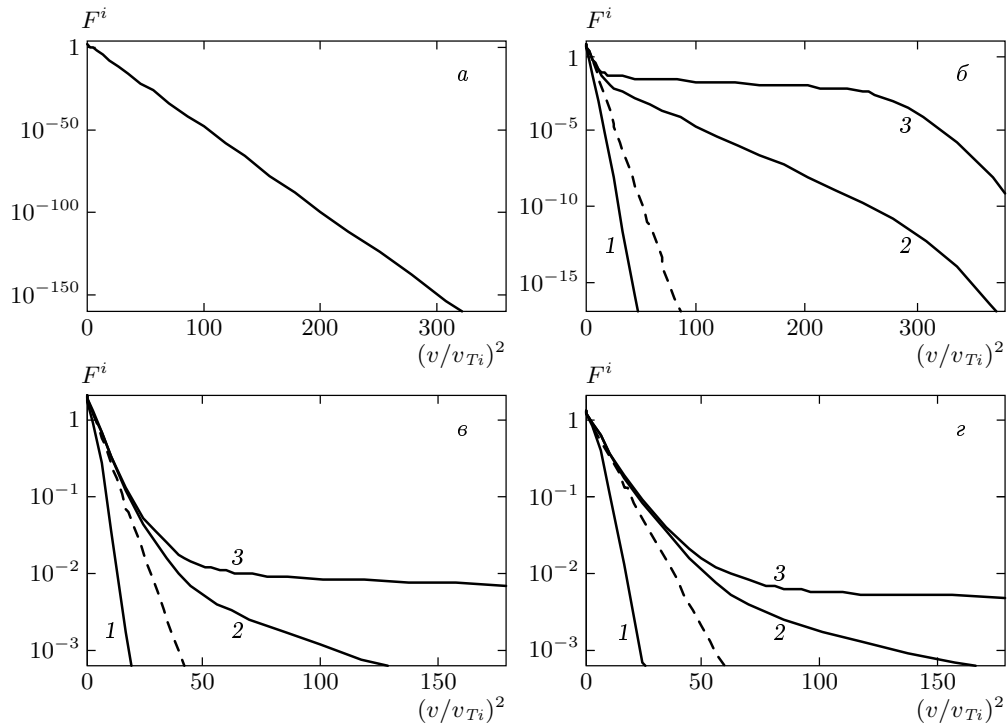


Рис. 4. Ионное распределение $F^i(v)$ в плазме с одним сортом ионов ($q \equiv i$) в моменты «времени» $\Omega t = 0$ (а), 0.4 (б), 1 (в), 2 (г) для различных начальных распределений электронов: 1 — супергауссово распределение, 2 и 3 — двухтемпературное распределение с $T_h/T_{e0} = 10$ (2), 100 (3) и относительной плотностью $\varrho = 0.1$. Штриховая кривая соответствует начальному максвелловскому распределению электронов

то изменение распределения плотности электронов и ионов (43) со временем можно представить в виде

$$n_\alpha = \frac{n_{\alpha 0}}{\sqrt{1 + 2C_s^2 t^2 / L_0^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{L^2(t)}\right). \quad (46)$$

При этом для $t \gg L_0 / \sqrt{2} C_s$ формулы (43), (46) описывают разлет плазмы со звуковой скоростью $C_s \approx \sqrt{Z T_{e0} / m_i}$.

В соотношениях (42) кроется принципиальное отличие нашего подхода от описанного в работах [1, 2, 27], посвященных изотермическому квазинейтральному разлету плазмы. Причина охлаждения частиц плазмы вполне понятна. Действительно, при разлете сгустка плазмы конечного размера частицы плазмы приобретают кинетическую энергию $n_\alpha m_\alpha u^2 / 2$ за счет тепловой энергии $n_\alpha T_\alpha$, в результате чего происходит уменьшение температуры. По этой причине приближение изотермического разлета, строго говоря, применимо лишь к массивным мишеням, например полуограниченной плазме, с неограниченным запасом энергии. Еще одно отличие заключается в распределении электронов, которые посредством электрического поля передают

свою энергию ионам. В работах [1, 2, 27] принималось равновесное распределение электронов, описываемое формулой Больцмана, тогда как распределение (43) является неравновесным. Оно отвечает больцмановскому распределению электронов только в начальный момент времени, отличаясь от последнего зависящей от времени предэкспонентой.

Неизотермичность разлета плазмы является общей чертой найденных решений, соответствующих различным начальным функциям распределений частиц. При этом вид последних определяет конкретную зависимость потенциала Φ от координаты x , хотя в качественном плане для всех приведенных выше примеров имеет место общая закономерность монотонного возрастания $\Phi(x)$ по абсолютной величине с ростом x . Как уже отмечалось, для плазмы, состоящей из электронов и одного сорта ионов, когда вид зависимости функций распределения от скоростей одинаков для частиц обоих сортов (пример 1), условие квазинейтральности приводит к обсуждавшейся в [17, 25] квадратичной зависимости $\Phi(x)$. В общем случае при различном виде функций распределения электронов и ионов по скоростям при $t = 0$

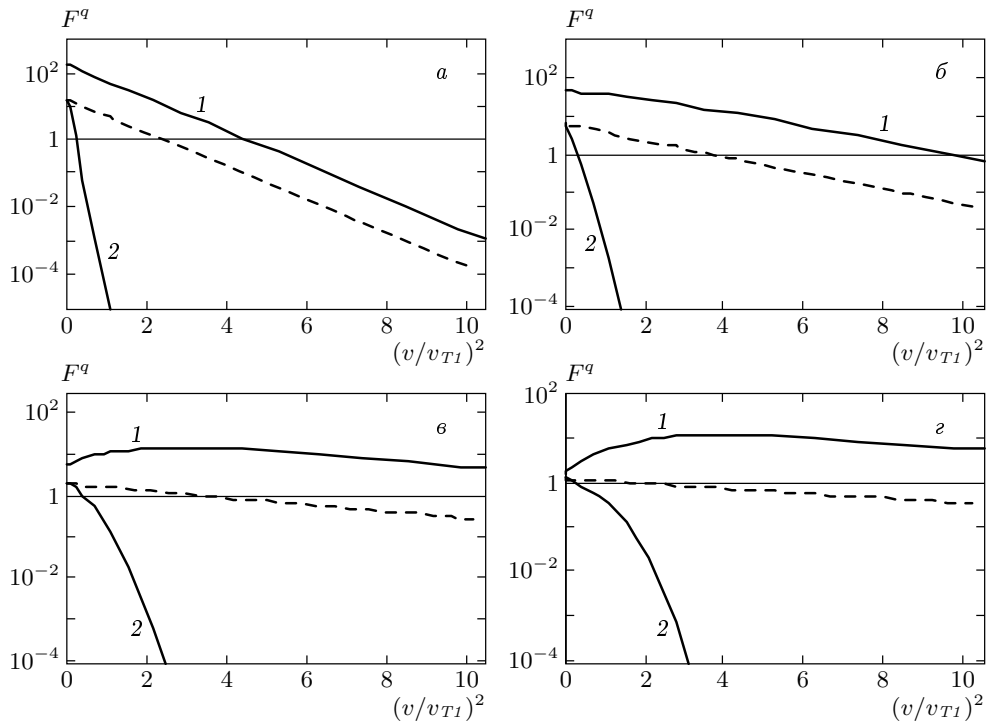


Рис. 5. Ионные функции распределения $F^q(v)$ в плазме с двумя сортами ионов для тех же значений Ωt , что и на рис. 4. Параметры плазмы соответствуют рис. 2. Штриховая кривая соответствует функции распределения ионов водорода из примера 1

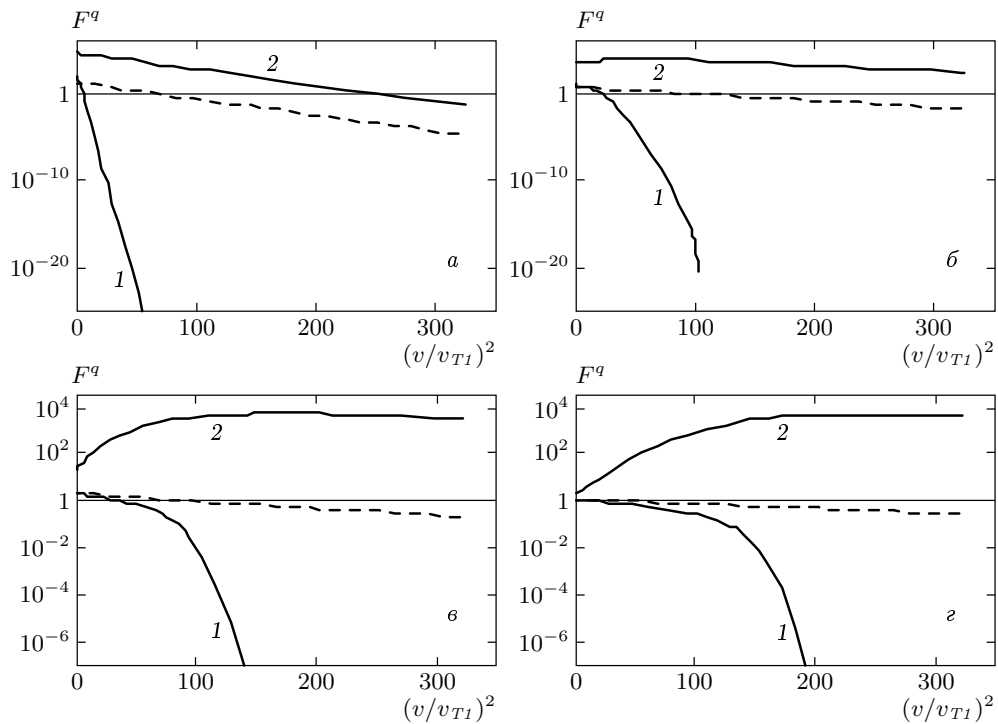


Рис. 6. То же, что на рис. 5, но для параметров плазмы рис. 3. Штриховая кривая соответствует функции распределения ионов водорода из примера 1

или для многокомпонентного ионного состава плазмы зависимость потенциала от координат отличается от квадратичной.

Что касается распределения плотности ионов в двухкомпонентной плазме, то здесь следует отметить разные законы убывания плотности с увеличением расстояния в зависимости от вида начального распределения электронов: наиболее быстро падает плотность ионов в плазме с обедненным количеством надтепловых электронов (пример 3). Наличие даже небольшого числа электронов больших энергий (пример 2) существенно замедляет уменьшение $N(\chi^2)$ с ростом χ^2 . Это легко заметить, сравнивая зависимости кривых распределения плотности ионов от вида начальной функции распределения электронов для примеров 1 и 2. Различия между этими кривыми проявляются при больших значениях координаты χ^2 , т. е. для достаточно больших значений $\mathcal{E} > \mathcal{E}_*$, таких что $\rho \exp(\mathcal{E}_*) \gg 1$. При этом связь χ^2 и \mathcal{E}_* находится из соотношения (23) при учете под логарифмом лишь последнего вклада, связанного с горячими электронами. Эта линейная связь \mathcal{E}_* и χ^2 справедлива при $\chi^2 \gtrsim \chi_{b1}^2$ и приводит к убыванию по экспоненциальному закону плотности ионов с ростом χ^2 , по форме совпадающему с (46),

$$N_i \approx \rho^{1/(1+T_{i0}/ZT_h)} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2\chi_{d1}^2}\right), \quad (47)$$

$$\chi^2 = \frac{(\Omega x/v_{Ti})^2}{1 + \Omega^2 t^2},$$

но с другим характерным масштабом убывания χ_{d1}^2 , где

$$\chi_{d1}^2 \approx \frac{ZT_h}{T_{i0}} \frac{1 + T_{i0}/ZT_h}{1 + Zm_e/m_i},$$

$$\chi_{b1}^2 \approx 2 \frac{T_{e0}}{T_h} \chi_{d1}^2 \times \left[2 + \left(1 + \frac{T_{i0}/ZT_{e0}}{1 + T_{i0}/ZT_h} \right) \ln \frac{Zn_{i0}}{n_{h0}} \right]. \quad (48)$$

Для параметров рис. 1 область экспоненциального убывания N_i вида (47) начинается при $\chi_{b1}^2 \approx 86$ для обеих кривых. При этом характерный масштаб убывания (48) дается величиной $\chi_{d1}^2 \approx 10^2$ для кривой 2 и $\chi_{d1}^2 \approx 10^3$ для кривой 3. Для малой плотности горячих электронов, $n_{h0}/Zn_{i0} \ll 1$, величина Ω , как и раньше, определяется из формулы (41) по начальному масштабу неоднородности плотности ионов и скорости звука, вычисленной по температуре основной массы электронов. Следовательно, условие перехода к «автомодельной» переменной имеет прежний вид, $t \gg L_0/\sqrt{2}C_s$. При этом формула (47) описывает по-прежнему гало при $x > C_s t \gamma_h$,

разлетающееся со звуковой скоростью, определяемой температурой горячей электронной компоненты $C_{sh} \approx \sqrt{ZT_h/m_i} \gg C_s$. На этих же временах формула (47) описывает максвелловский спектр ионов

$$\langle f^i \rangle \propto \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{Ti}^2 \chi_{d1}^2}\right) \approx \exp\left(-\frac{v^2}{2C_{sh}^2}\right)$$

в области скоростей $v^2 > v_{Ti}^2 \chi_{b1}^2 \approx C_s^2 \gamma_h^2$, где

$$\gamma_h = \sqrt{2 + \ln \frac{Zn_{i0}}{n_{h0}}}$$

учитывает слабую логарифмическую зависимость от плотностей частиц плазмы.

Перейдем теперь к обсуждению закономерностей изменения плотности N_q при расширении плазмы, содержащей несколько сортов ионов. Как следует из приведенных выше формул (31), (38) и рис. 2, 3, 5, 6, наличие ионов нескольких сортов существенно меняет динамику разлета плазменного сгустка. Наиболее сильно в процессе разлета ускоряются именно легкие ионы, обгоняющие тяжелые. На больших временах, уходя далеко от центра сгустка, они определяют разреженное гало и распределение потенциала в нем. Здесь наиболее наглядной иллюстрацией служит рис. 3. Видно, что наличие легких примесных ионов малой концентрации изменяет асимптотику зависимости ϕ при больших значениях координаты χ^2 . Переход от квадратичной зависимости $\phi \sim -C\chi^2$ к «смещенной» квадратичной зависимости $\phi \sim -A - B\chi^2$, где A, B, C — постоянные (что как раз соответствует переходу в область, где распределение потенциала определяется примесными ионами), происходит при координате χ_*^2 , приближенной определяемой из соотношения

$$\chi_*^2 = 2 \frac{T_{20}}{T_{10}} \left[\left(1 + \frac{Z_1 m_e}{m_1} \right) \frac{(1 + T_{20}/Z_2 T_{e0}) Z_2}{(1 + T_{10}/Z_1 T_{e0}) Z_1} - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{Z_2 m_e}{m_2} \right) \frac{m_2}{m_1} \right]^{-1} \times \left\{ \ln \frac{1}{\sigma} + \ln(1 + \sigma) \left(1 - \frac{T_{10} Z_2}{T_{20} Z_1} \right) \left(1 + \frac{T_{10}}{Z_1 T_{e0}} \right)^{-1} \right\},$$

$$\sigma = \frac{Z_2 n_{20}}{Z_1 n_{10}} \ll 1. \quad (49)$$

Для параметров примера 4 величина $\chi_*^2 \approx 248$, что хорошо согласуется с численными результатами, представленными на рис. 3. При этом в точке

$\chi^2 \approx \chi_*^2$ отношение локальной плотности примесных ионов к плотности основных ионов превосходит единицу, $n_2/n_1 \approx (Z_1/Z_2) \gg 1$, и совпадает с отношением проинтегрированных функций распределения $\langle f^2 \rangle / \langle f^1 \rangle = n_2/n_1$. Отметим, однако, что локальная плотность примесных ионов не превосходит аналогичную величину локальной плотности ионов, которая имеет место в двухкомпонентной плазме с ионами того же сорта, что и примесь. Это означает, что на рис. 3 при любом значении χ^2 соответствующая величина плотности N_2 , умноженная на $\sigma/(1 + \sigma)$ (кривая 2), оказывается меньше приведенной для сравнения величины N_i (штриховая кривая).

Таким образом, полученные нами результаты по ускорению частиц в плазме с несколькими сортами ионов в целом соответствуют общим представлениям [27] по более эффективному ускорению легких примесных ионов на фоне основной тяжелой компоненты. Однако, в отличие от работы [27], в которой использовалось приближение заданного поля для описания движения легкой ионной компоненты, которое нарушается при $\chi \gtrsim \chi_*$ (49), наша теория позволяет рассмотреть и область, где присутствующая примесь существенно влияет на форму потенциала. Кроме того, приведенные здесь зависимости применимы для произвольного числа ионных компонент с произвольным соотношением парциальных плотностей.

Очевидно, что в этом случае, так же как в плазме с одним сортом ионов (пример 2), наличие горячих электронов может привести к еще более высокой энергии примесных ионов. Такая физическая ситуация легко моделируется с помощью комбинации начальных условий из примеров 2 и 4. Подобное видоизменение начальных условий существенно меняет динамику примесных ионов, что видно на рис. 7 для распределения плотности ионов и потенциала, аналогичном рис. 3. Рисунок 7 получен с использованием формул (38), в которых, однако, функция \mathcal{E} заменена на функцию \mathcal{E}_h , определяемую соотношением

$$1 + \sigma - \rho + \rho \exp \left[\left(1 - \frac{T_{e0}}{T_h} \right) \mathcal{E}_h \right] =$$

$$= \exp \left[\left(1 + \frac{Z_1 T_{e0}}{T_{10}} \right) \mathcal{E}_h - \frac{U^2 (1 + Z_1 m_e / m_1)}{2v_{T1}^2} \right] +$$

$$+ \sigma \exp \left[\left(1 + \frac{Z_2 T_{e0}}{T_{20}} \right) \mathcal{E}_h - \frac{U^2 (1 + Z_2 m_e / m_2)}{2v_{T2}^2} \right],$$

$$\rho = \frac{n_{h0}}{Z_1 n_{10} + Z_2 n_{20}}. \quad (50)$$

Из рис. 7 видно, что различие в кривых a , b и c для плотности примесных ионов $N_2(\chi)$ проявляется

для достаточно больших значений \mathcal{E}_h , таких что $\rho \exp(\mathcal{E}_h) \gg 1$, т. е. для больших χ (ср. с аналогичными соотношениями для плазмы с одним сортом ионов). При этом связь χ^2 и \mathcal{E}_h находится из (50) при учете лишь двух вкладов, связанных с примесными ионами и горячими электронами, что позволяет записать ограничение снизу на величину \mathcal{E}_h в виде условия $\chi^2 \gtrsim \chi_{b2}^2 > \chi_{b1}^2$. Для таких значений координаты χ^2 распределение плотности примесных ионов соответствует гауссовой зависимости, аналогичной (47),

$$N_2 \approx \left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^{1/(1+T_{20}/Z_2 T_h)} \exp \left(- \frac{\chi^2}{2\chi_{d2}^2} \right), \quad (51)$$

$$\chi^2 = \frac{(\Omega x / v_{T1})^2}{1 + \Omega^2 t^2},$$

но с другим характерным масштабом изменения по χ^2 , определяемым соотношениями

$$\chi_{d2}^2 \approx \frac{Z_2 T_h}{T_{10}} \frac{m_1}{m_2} \frac{(1 + T_{20}/Z_2 T_h)}{(1 + Z_2 m_e / m_2)}, \quad (52)$$

$$\chi_{b2}^2 \approx \frac{2T_{e0}}{T_h} \chi_{d2}^2 \left(2 + \ln \frac{1}{\rho} + \frac{T_{20}/Z_2 T_{e0}}{1 + T_{20}/Z_2 T_h} \ln \frac{\sigma}{\rho} \right).$$

Для параметров рис. 7 область экспоненциального убывания N_2 вида (51) начинается при $\chi_{b2}^2 \approx 3.8 \cdot 10^3$ для кривой b и $\chi_{b2}^2 \approx 2.2 \cdot 10^3$ для кривой c . При этом характерный масштаб убывания для обеих кривых определяется величиной $\chi_{d2}^2 \approx 27 \cdot 10^3$. Как и для рассмотренного выше примера разлета ионов в электрон-ионной плазме при наличии горячих электронов, здесь также можно говорить о существовании гало (51), образованного не из ионов основной, тяжелой, компоненты, а из легких примесных ионов. При малой плотности как примесных ионов, $(Z_2/Z_1)(n_{20}/n_{10}) \ll 1$, так и горячих электронов, $n_{h0}/Z_1 n_{10} \ll 1$, это гало при $t \gg L_0/\sqrt{2}C_s$ расположено в области $x > C_s^{imp} t \gamma_{imp}$, а спектр ионов имеет максвелловский вид

$$\langle f^i \rangle \propto \exp \left(- \frac{v^2}{2(C_h^{imp})^2} \right)$$

в области скоростей $v^2 > (C_s^{imp})^2 \gamma_{imp}^2$. Здесь использованы обычные обозначения для скорости звука,

$$C_s^{imp} \approx \sqrt{\frac{Z_2 T_{e0}}{m_2}}, \quad C_h^{imp} \approx \sqrt{\frac{Z_2 T_h}{m_2}},$$

определяемой массой ионов примеси и температурой «холодных» или, соответственно, «горячих» электронов, а множитель

$$\gamma_{imp} = \sqrt{2 + \ln \frac{Z_1 n_{10}}{n_{h0}} + \frac{T_{20}}{Z_2 T_{e0}} \ln \frac{Z_2 n_{20}}{n_{h0}}}$$

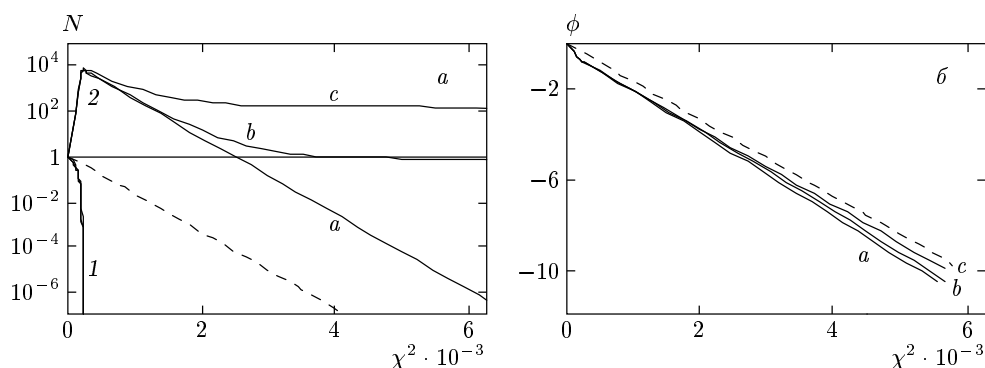


Рис. 7. Распределение плотности ионов N_q (а) и потенциала ϕ (б) в плазме с двумя сортами ионов с атомными числами $A_1 = 27$, $A_2 = 1$ и зарядами $Z_1 = 13$, $Z_2 = 1$ в зависимости от безразмерной координаты χ^2 . Начальные функции распределения ионов – максвелловские с температурами $T_{10}/T_{e0} = T_{20}/T_{e0} = 0.1$ и $n_{10}/n_{20} = 1300$. Начальная функция распределения электронов имеет вид двухтемпературного максвелловского распределения с $T_h/T_{e0} = 100$ и различной относительной плотностью $\rho = 0$ (кривая а, отсутствие горячих электронов), $\rho = 0.01$ (кривая б), $\rho = 0.1$ (кривая с). Кривые семейств 1 и 2 отвечают соответственно ионам плазмы первого и второго сорта. Штриховая кривая соответствует функции распределения ионов водорода из примера 1

учитывает слабую логарифмическую зависимость от плотностей частиц плазмы.

В настоящее время наиболее полные результаты по спектрам ускоренных лазером ионов относятся к экспериментам с тонкими фольгами, поэтому применительно к ним обсудим возможные приложения развитой нами теории. В экспериментах по облучению тонких фольг короткими лазерными импульсами обычно наблюдаются (см., например, [28]) высокоэнергетичные протоны, спектр по энергиям которых близок к максвелловскому распределению, заканчивающемуся небольшим плато с резкой отсечкой в области надтепловых энергий. Несмотря на использование в качестве материала мишеней различных веществ, в экспериментах наблюдается преимущественное ускорение именно протонов, что обусловлено всегда присутствующим «загрязнением» поверхности мишени водяными парами. Это соответствует случаю ускорения малой примеси легких ионов на фоне основной, более тяжелой, ионной компоненты. Ответственными за ускорение протонов, в соответствии с общепринятой точкой зрения и нашими расчетами, являются горячие электроны, которым передается основная доля энергии лазерного импульса при его поглощении мишенью. Их число мало по сравнению с «холодными» электронами, но заключенная в них энергия, как правило, превосходит энергию последних. Экспериментальные данные и численные расчеты свидетельствуют о корневой зависимости температуры горячих электронов от плотности потока энергии лазерного излучения

[30, 31]. Ниже мы следуем скейлингу для температуры горячих электронов, предложенному в работе [31]:

$$T_h \approx \sqrt{10^{-13} I \lambda^2}, \tag{53}$$

где температура горячих электронов T_h выражена в кэВ, плотность потока энергии лазерного излучения I — в Вт/см², длина волны лазерного излучения λ — в мкм.

В соответствии с этим эксперименты с короткими лазерными импульсами свидетельствуют об адиабатическом режиме разлета плазмы, поскольку спектр ускоренных ионов близок именно к максвелловскому, $\propto \exp(-v^2)$, а не к спектру $\propto \exp(-v)$, соответствующему теории изотермического разлета плазмы [1]. Формально, как в том, так и в другом случае теория не предсказывает наличия конечной максимальной скорости разлета плазмы, хотя этот вопрос является основным для объяснения экспериментальных наблюдений. Вместе с тем, очевидно, что нарушение квазинейтральности плазмы и одномерности ее разлета на больших временах являются теми факторами, которые ограничивают максимальную энергию разлетающихся ионов.

В классическом случае двухкомпонентной электрон-ионной плазмы (пример 1) условие нарушения квазинейтральности возникает, когда характерный масштаб неоднородности плотности (45), $L(t) \approx \sqrt{2} C_s t$, сравнивается по порядку величины

с электронным дебаевским радиусом

$$\lambda_D(t) = \sqrt{\frac{T_e(t)}{4\pi e^2 n_e(t, x)}},$$

вычисленным с учетом (42), (46). Это условие определяет характерную ионную энергию

$$\varepsilon^i(t) \approx 2ZT_{e0} \ln \left(\frac{C_s t}{\lambda_{D0}} \sqrt{\frac{C_s t}{L_0}} \right), \quad (54)$$

где λ_{D0} — электронный дебаевский радиус, задаваемый значениями температуры и максимальной плотности электронов в начальный момент времени. Поскольку при переходе к трехмерному разлету плазмы рост энергии ионов резко замедляется, условие $L(t) \sim D$ (D — характерный размер фокального пятна) можно использовать для оценки характерного времени ускорения ионов. Его подстановка в последнюю формулу дает

$$\varepsilon_{max}^i \approx 2ZT_{e0} \ln \left(\frac{D}{\lambda_{D0}} \sqrt{\frac{D}{L_0}} \right), \quad (55)$$

где оба отношения под логарифмом велики по сравнению с единицей. Эта оценка показывает, что максвелловский спектр заканчивается при энергии, в несколько раз превосходящей температуру электронов.

В качественном плане эти рассуждения верны и в случае ускорения легкой примеси ионов (протонов) с массой m_2 и зарядом Z_2 горячими электронами с температурой $T_h \gg T_{e0}$ и плотностью $n_{h0} \ll n_{e0}$, что имеет прямое отношение к эксперименту. При этом аналог формулы (54) принимает вид

$$\varepsilon^{imp}(t) \approx 2Z_2 T_h \ln \left(\frac{C_h^{imp} t}{\lambda_{Dh}} \sqrt{\frac{C_s t}{L_0}} \right), \quad (56)$$

где электронный дебаевский радиус

$$\lambda_{Dh} = \sqrt{\frac{T_h}{4\pi e^2 n_{h0}}}$$

определяется значениями температуры и плотности горячих электронов, а скорость звука — температурой горячих электронов и массой ионов примеси. Эта формула непосредственно следует из сравнения (по порядку величины) второй производной потенциала электрического поля по координате с вкладом, определяющим плотность заряда примесных протонов, с учетом (34), (50), (51) и (52). Такая

оценка справедлива для энергии ускоренных легких ионов, превышающей величину ε^* ,

$$\varepsilon^* \approx 2T_{e0} \left(2 + \ln \frac{1}{\rho} + \frac{T_2}{Z_2 T_{e0}} \ln \frac{\sigma}{\rho} \right), \quad (57)$$

что означает, что температура горячих электронов существенно больше температуры холодных, $T_h \gg T_{e0}$.

Использование для оценки характерного времени ускорения протонов времени, при котором нарушается одномерность разлета плазмы, приводит, согласно (56), к следующей формуле, определяющей граничную энергию, на которой обрывается максвелловский спектр протонов:

$$\varepsilon_{max}^{imp} \approx 2Z_2 T_h \ln \left[\frac{D}{\lambda_{Dh}} \sqrt{\frac{D}{L_0}} \left(\frac{Z_1 m_2 T_{e0}}{Z_2 m_1 T_h} \right)^{1/4} \right]. \quad (58)$$

Основные результаты работы [28] (см. рис. 3а) заключаются в наблюдении максвелловского спектра протонов с характерной температурой 230 кэВ, который при энергии около 1 МэВ переходит в платообразный и обрывается при энергии приблизительно равной 1.5 МэВ. Эти результаты получены при облучении тонкой алюминиевой фольги лазерным импульсом с длиной волны приблизительно равной 0.5 мкм при плотности потока энергии $2 \cdot 10^{18}$ Вт/см² и пятне фокусировки диаметром $D \approx 10$ мкм. При этом электронная температура мишени не превышала 1–2 кэВ. Высокий контраст лазерного излучения позволял предполагать высокий исходный градиент плотности с характерным масштабом неоднородности, не превышающим длины волны лазера. В соответствии с оценкой (53) в условиях эксперимента [28] следует ожидать генерацию горячих электронов с температурой $T_h \approx 220$ кэВ, существенно превышающей температуру холодных электронов $T_{e0} \approx 1$ –2 кэВ, так что условие (57) оказывается выполненным с большим запасом. Число горячих электронов оценивалось в [28] на уровне порядка 10^{20} . Тогда, согласно нашей теории, для спектра ускоренных протонов ($Z_2 = 1$, $m_2 = 1836m_e$) из (34), (39) и (51) находим:

$$\langle f^{imp} \rangle \propto N^{imp} \propto \exp \left(-\frac{\varepsilon}{T_{eff}} \right),$$

где

$$\varepsilon = \frac{m_2 v^2}{2}, \quad T_{eff} = \frac{Z_2 T_h + T_{20}}{1 + Z_2 m_e / m_2} \approx 220 \text{ кэВ},$$

что находится в хорошем согласии с экспериментом. При этом характерная максимальная энергия ионов,

в соответствии с оценкой (58), составляет 1.5 МэВ, что также согласуется с экспериментальными данными.

Обратим также внимание на еще одну возможность обрыва по энергии в спектре примесных ионов. Для характерного времени разлета гало имеем оценку D/C_h^{imp} , а условие формирования этого гало с максвелловским распределением по энергии оказывается порядка $1/\Omega \approx L_0/\sqrt{2}C_s$. Для

$$\frac{D}{L_0} < \sqrt{\frac{T_h Z_2 m_1}{2T_{e0} Z_1 m_2}}$$

энергетический спектр ионов не успевает выйти на асимптотическое распределение $\langle f^{imp} \rangle \propto N^{imp}(U = v)$ и может иметь отсечку, подобную той, которая наблюдается в нестационарных спектрах на рис. 4.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что с использованием ренормгруппового подхода получено точное решение кинетических уравнений для электронов и ионов различных сортов в квазинейтральном бесстолкновительном приближении, описывающее одномерный неизотермический разлет плазменного сгустка для произвольных начальных распределений частиц по скоростям. Разлет сопровождается адиабатическим остыванием частиц плазмы. Аналитическое решение, описывающее такой разлет, иллюстрируется примерами, в которых рассмотрены двухтемпературное («горячее» и «холодное») максвелловское и супергауссово начальные распределения электронов, а также максвелловские начальные распределения ионов по скоростям, характеризующиеся различными значениями плотностей, температур и масс частиц каждого сорта. Найдены формулы для функций распределения частиц различных сортов и получены выражения для интегральных характеристик, таких как локальная плотность ионов и функция распределения ионов по энергии. Указано, что на больших временах эти зависимости (при соответствующей замене переменных) асимптотически совпадают друг с другом. Поскольку ионный спектр определяется исходным распределением электронов, его измерение может быть положено в основу метода диагностики функции распределения электронов, возникающей в результате взаимодействия ультракороткого лазерного импульса с наноплазмой, например, кластерной или образующейся при облучении лазером тонких фольг. Для такой

плазмы длина свободного пробега частиц, как правило, велика по сравнению с характерным размером плазменного образования и приближение бесстолкновительной плазмы хорошо выполняется.

Продемонстрированный успех ренормгрупповой теории в нахождении точных решений уравнений Власова с самосогласованным полем обязан приближению квазинейтральной плазмы, требующему малости радиуса Дебая по сравнению с характерным размером пространственной неоднородности плазмы. Последнее не всегда может выполняться в случае высокоэнергетичных, зачастую релятивистских, электронов, образующихся в результате быстрого нагрева плазмы мощным лазерным импульсом. Обобщение ренормгрупповой теории на этот случай несомненно является интересной задачей, требующей отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 00-15-96691, 00-02-16063, 02-01-00185) и гранта INTAS 01-1В-233.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гуревич, Л. В. Парийская, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **49**, 647 (1965).
2. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **56**, 1778 (1969).
3. S. J. Gitomer, R. D. Jones, F. Begay et al., Phys. Fluids **29**, 2679 (1986).
4. H. Haseroth et al., Laser and Particle Beams **14**, 393 (1996).
5. J. Zweiback, R. A. Smith, T. E. Cowan et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 2634 (2000).
6. E. Springate, N. Hay, J. W. G. Tisch et al., Phys. Rev. A **61**, 063201 (1999).
7. K. Nemoto, A. Maksimchuk, S. Banerjee et al., Appl. Phys. Lett. **78**, 595 (2001).
8. L. M. Wickens, J. E. Allen, and P. T. Rumsby, Phys. Rev. Lett. **41**, 243 (1978).
9. B. Bezzerides, D. W. Forslund, and E. L. Lindman, Phys. Fluids **21**, 2179 (1978).
10. P. Mora and R. Pellat, Phys. Fluids **22**, 2300 (1979).
11. A. Gurevich, D. Anderson, and H. Wilhelmsson, Phys. Rev. Lett. **42**, 769 (1979).
12. А. В. Гуревич, А. П. Мещеркин, ЖЭТФ **80**, 1810 (1981).

13. T. Ditmire, J. W. G. Tisoh, E. Springate et al., *Nature* **386**, 54 (1997).
14. Ch. Sack and H. Shamel, *Phys. Rep.* **156**, 311 (1987).
15. G. Manfredi, S. Mola, and M. R. Feix, *Phys. Fluids B* **5**, 388 (1993).
16. L. G. Garcia, J. Goedert, H. Figua et al., *Phys. Plasmas* **4**, 4240 (1997).
17. D. S. Dorozhkina and V. E. Semenov, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2691 (1998); Письма в ЖЭТФ **67**, 543 (1998).
18. В. Ф. Ковалев, В. Ю. Быченков, В. Т. Тихончук, Письма в ЖЭТФ **74**, 12 (2001).
19. V. F. Kovalev, V. V. Pustovalov, and D. V. Shirkov, *J. Math. Phys.* **39**, 1170 (1998).
20. V. F. Kovalev and D. V. Shirkov, *Phys. Rep.* **352**, 219 (2001).
21. M. I. K. Santala, M. Zepf, F. N. Beg et al., *Appl. Phys. Lett.* **78**, 19 (2001).
22. M. Hegelich, G. Pretzler, S. Karsch et al., in: *Abstracts of the II Int. Conf. on Inertial Fusion Science and Applications*, Sept. 9–14, Kyoto, Japan (2001), p. 61.
23. В. Ф. Ковалев, С. В. Кривенко, В. В. Пустовалов, Дифф. уравнения **29**, 1804 (1993); **29**, 1971 (1993); Письма в ЖЭТФ **55**, 256 (1992).
24. V. F. Kovalev, S. V. Krivenko, and V. V. Pustovalov, in: *Proceedings of the Int. Workshop on Symmetry Methods in Physics in Memory of Prof. Ya. A. Smorodinsky* (Dubna, 6–10 July, 1993), Dubna (1994), Vol. 1, p. 253.
25. Д. С. Дорожкина, В. Е. Семенов, ЖЭТФ **116**, 885 (1999).
26. A. B. Langdon, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 575 (1980); J. P. Matte, M. Lamoureux, C. Moller et al., *Plasma Phys. Contr. Fusion* **30**, 1665 (1988).
27. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, в кн.: *Вопросы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтовича, вып. 10, Атомиздат, Москва (1980), с. 40.
28. A. Maksimchuk, S. Gu, K. Flippo et al., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4108 (2000).
29. K. Krushelnick, E. L. Clark, M. Zepf et al., *Phys. Plasmas* **7**, 2055 (2000).
30. Y. Sentoku, V. Yu. Bychenkov, K. Flippo et al., *Appl. Phys. B* **74**, 207 (2002).
31. A. G. Zhidkov, A. Sasaki, I. Fukumoto et al., *Phys. Plasmas* **8**, 3718 (2001).