

# ТЕОРИЯ КОГЕРЕНТНОГО ЛАЗЕРА НА ОПТИМИЗИРОВАННОЙ НАНОСТРУКТУРЕ С УЧЕТОМ МЕЖЭЛЕКТРОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

*В. Ф. Елесин\**

*Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет)  
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 января 2002 г.

Развита аналитическая теория генерации когерентного лазера (лазера с когерентной электронной подсистемой) на оптимизированной наноструктуре с учетом межэлектронного взаимодействия. Необходимость учета межэлектронного взаимодействия связана с тем, что она может приводить к нарушению достаточно жестких резонансных условий когерентной генерации в униполярных лазерах, поскольку населенность в них растет с током накачки. В рамках приближения Хартри–Фока удалось найти аналитические решения уравнения Шредингера в сильном электромагнитном поле с открытыми граничными условиями. Получены выражения для токов поляризации и концентрации электронов, позволяющие найти мощность и частоту генерации, контур усиления и другие характеристики. Показано, что оптимальный режим генерации реализуется и при учете межэлектронного взаимодействия. В этом оптимальном с подстройкой режиме не требуется инверсная населенность (населенности рабочих уровней равны), КПД генерации равен единице, эффективна резонансно-туннельная когерентная накачка из-за равенства нулю отражения, отсутствует уширение контура усиления за счет поля. Следует ожидать устойчивости к многомодовой генерации, высоких спектральных характеристик и больших предельных мощностей.

PACS: 73.20.Dx, 72.10.-d

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Тридцать лет назад Казаринов и Сурис [1] предложили новый тип полупроводникового униполярного лазера (каскадного лазера), в котором излучательные переходы происходят между уровнями (подзонами) пространственного квантования. Основным элементом каскадного лазера является квантовая яма с двумя рабочими резонансными уровнями. Накачка на верхний уровень и отвод электронов с нижнего осуществляются с помощью резонансного туннелирования.

Каскадные лазеры были созданы в 1994 г. [2] и оказались способными перекрывать диапазон длин волн от инфракрасного до субмиллиметрового.

Уникальной особенностью этих лазеров является возможность когерентной накачки, т. е. доставки электронов из эмиттера на рабочий уровень за счет когерентного резонансного туннелирования.

Когерентное туннелирование реализуется, если время разрушения фазы  $\tau_{ph}$  превосходит время жизни электрона в наноструктуре  $\tau_{\Gamma} = \hbar/\Gamma$  ( $\Gamma$  — ширина резонансного уровня). Это, вообще говоря, возможно в квантовых ямах, проволоках и, особенно, в квантовых точках. Например, такое условие фактически необходимо, чтобы достичь инверсной населенности в каскадном лазере [2].

Если условие  $\tau_{ph} > \tau_{\Gamma}$  выполнено, то в принципе возможна ситуация, когда электрон доставляется на верхний уровень, совершает излучательный переход на нижний уровень и покидает его без разрушения когерентности.

Действительно, как было показано в [3], генерация может осуществляться вообще без участия диссипационных процессов. Такой лазер, в котором когерентны не только электромагнитное поле, но и электронная подсистема, будем для краткости называть когерентным лазером. Оказалось, что когерентный лазер принципиально отличается от обычных тем, что инверсная населенность не является

\*E-mail: VEF@supercon.mephi.ru

необходимым условием. Когерентное туннелирование обеспечивает более эффективную накачку, так как происходит накопление электронов в яме за счет квантовой интерференции, а отражение стремится к нулю.

Когерентный лазер обладает рядом и других преимуществ (см. ниже). Однако эффективная генерация реализуется, если, согласно [3], выполнены достаточно жесткие условия. Во-первых, частота электромагнитного поля должна равняться разности энергий резонансных уровней  $\varepsilon_{2R} - \varepsilon_{1R}$ . Во-вторых, энергия подводимых из эмиттера электронов должна совпадать с энергией верхнего уровня, перенормированной из-за взаимодействия с сильным электромагнитным полем.

В то же время межэлектронное взаимодействие, сдвигая резонансные уровни, может нарушить эти условия. Тем более что в униполярных лазерах населенность уровней растет с током накачки, приводя к сильному сдвигу энергии. Поэтому представляется важным изучить влияние межэлектронных взаимодействий на генерацию когерентного лазера.

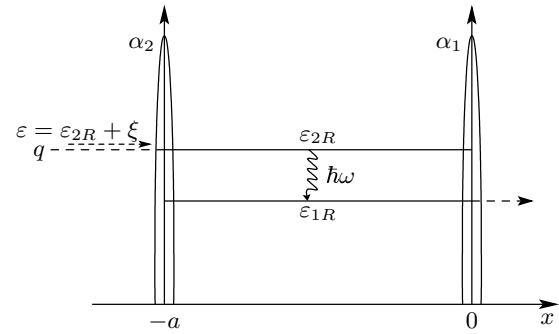
Цель настоящей работы — развить последовательную теорию когерентной генерации на оптимизированной по сравнению с [3] наноструктуре с учетом межэлектронного взаимодействия.

В рамках приближения Хартри–Фока удалось найти аналитические решения уравнения Шредингера в сильном электромагнитном поле с открытыми граничными условиями. Получены выражения для токов поляризации и концентрации электронов, позволяющие найти мощность и частоту генерации, контур усиления и другие характеристики.

Выяснен механизм оптимального режима с подстройкой [3] и показано, что эффективность генерации равна единице, населенности рабочих уровней в точности равны, а коэффициент отражения от наноструктуры равен нулю. Доказано, что оптимальная энергия поступающих из эмиттера электронов совпадает с резонансной энергией структуры, перенормированной за счет взаимодействия электронов с электромагнитным полем и между собой.

Показано, что оптимальный режим генерации сохраняется и при учете межэлектронного взаимодействия. Причина устойчивости состоит в том, что населенности уровней с ростом поля остаются в точности равными, так что сдвиги уровней одинаковы.

В работе найдено, что форма линии усиления когерентного лазера не подвержена уширению за счет поля в противоположность обычным лазерам («эффект насыщения») [4, 5]. Известно, что «эффект на-



сыщения» приводит к многомодовой генерации и ограничению мощности [4, 5].

## 2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Следуя [3], рассмотрим следующую модель когерентного лазера (см. рисунок). На рисунке изображена одномерная квантовая яма с барьерами в виде  $\delta$ -функций в точках  $x = -a$  и  $x = 0$ . Параметры ямы подобраны таким образом, что два нижних уровня с энергиями  $\varepsilon_{2R}$  и  $\varepsilon_{1R}$  имеют разность, примерно равную частоте электромагнитного поля:

$$\hbar\omega = \varepsilon_{2R} - \varepsilon_{1R}.$$

Слева ( $x < -a$ ) подводится стационарный поток электронов с плотностью, пропорциональной  $q^2$ , и энергией  $\varepsilon$ , приблизительно равной  $\varepsilon_{2R}$ . Электромагнитное поле

$$E_z(z, t) = E(t) \sin kz \cos(\omega t + \varphi(t)) \quad (1)$$

излучается при переходе электронов с верхнего уровня 2 на нижний уровень 1. Поле поляризовано перпендикулярно плоскости ямы, а волновой вектор направлен вдоль плоскости (по оси  $z$ ). Предполагается, что поле помещено в оптический резонатор длиной  $L$ . Мы ограничимся рассмотрением одномодового режима. Уравнения для амплитуды  $E(t)$  и фазы  $\varphi(t)$  поля имеют вид (см. [3])

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{E}{2\tau_0} - \frac{2\pi}{\kappa} J_c, \quad (2)$$

$$E \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\omega - \Omega)E = -\frac{2\pi}{\kappa} J_s, \quad (3)$$

$$J_{c,s} = \frac{1}{a} \int_0^a J_{c,s}(x) dx,$$

где  $J_{c,s}(x)$  — токи поляризации, описывающие переходы между уровнями, причем  $J_c$  совпадает по фазе с полем, а  $J_s$  сдвинут на  $\pi/2$ .

Волновая функция системы  $\Psi(x, t)$  удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x)\Psi + g\Psi|\Psi|^2 + \hat{V}(x, t)\Psi. \quad (4)$$

Здесь положено  $2m^*/\hbar = 1$ ,  $c = 1$ ,

$$U(x) = \alpha_2 \delta(x + a) + \alpha_1 \delta(x), \quad (5)$$

$\alpha_2, \alpha_1$  — «мощности» барьеров соответственно эмиттера и коллектора. Кубичный член моделирует локальное межэлектронное взаимодействие в приближении Хартри-Фока (см. [6]) с параметром  $g$ . Последнее слагаемое в (4)

$$\hat{V}(x, t) = i2eA_x(t) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = V(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (6)$$

$$V = -\frac{eE}{\omega},$$

описывает взаимодействие электронов с электромагнитным полем;  $A_x(t)$  — вектор-потенциал в кулоновской калибровке, отличный от нуля в яме. Следует отметить, что в (4), как и в [3] (см. также [5]), опущено квадратичное по  $A(t)$  слагаемое, что справедливо, если

$$V/p = eE/p\omega \ll 1$$

( $p$  — импульс электрона).

Следуя [3], ищем установившееся решение уравнения (4) в резонансном приближении в виде

$$\Psi(x, t) = \psi_2(x)e^{-i\varepsilon t} + \psi_1(x)e^{-i(\varepsilon - \omega)t}. \quad (7)$$

Парциальные волновые функции  $\psi_n(x)$  ( $n = 1, 2$ ) описывают состояния с квазиэнергиями  $\varepsilon$  и  $\varepsilon - \omega$  и удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon\psi_2 + \psi_2'' &= V\psi_1' + g\psi_2[|\psi_2|^2 + 2|\psi_1|^2], \\ (\varepsilon - \omega)\psi_1 + \psi_1'' &= -V\psi_2' + g\psi_1[|\psi_1|^2 + 2|\psi_2|^2]. \end{aligned} \quad (8)$$

Мы рассмотрим оптимизированную структуру с несколько отличающимися от [3] граничными условиями:

$$\begin{aligned} \psi_2(-a) \left(1 - \frac{\alpha_2}{ip_2}\right) + \frac{\psi_2'(-a)}{ip_2} &= 2\tilde{q}, \\ \tilde{q} &= q \exp(-ip_2 a), \\ \psi_2(0) = 0, \quad \psi_1(-a) = 0, \quad \varepsilon &= p_2^2, \\ p_2^2 - \omega &= p_1^2, \\ \psi_1(0) \left(1 - \frac{\alpha_1}{ip_1}\right) - \frac{\psi_1'(0)}{ip_1} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Граничные условия описывают поток электронов слева ( $x = -\infty$ ), их отражение и уход в область  $x > 0$  с уровня 1. В отличие от [3], запрещен уход электронов с уровня 2 в область  $x > 0$  и с уровня 1 в область  $x < -a$ . Эта модификация улучшает условия генерации и может быть реализована практически (см., например, [2, 7]).

Токи  $J_c(x)$  и  $J_s(x)$  выражаются через функции  $\psi_n(x)$ :

$$\begin{aligned} J_c(x) &= -ie[(\psi_2^*\psi_1' + \psi_1^*\psi_2') - \text{c.c.}], \\ J_s(x) &= e[(\psi_1^*\psi_2' - \psi_2^*\psi_1') + \text{c.c.}]. \end{aligned} \quad (10)$$

### 3. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОГО ЛАЗЕРА

При решении системы (8), (9) мы будем следовать методам [3, 6]. В [3] удалось найти точные решения (8), (9) с  $g = 0$ , не применяя теории возмущений по полю, а затем получить простые выражения для  $\psi_n$  и токов, используя малость параметров  $V/p$  и  $p/\alpha$ . Неравенство  $p/\alpha \ll 1$  означает, что ширины резонансных уровней  $\Gamma_j$  малы по сравнению с резонансными энергиями  $\varepsilon_{nj}$ . Именно в этой ситуации проявляются замечательные свойства квантовых ям. Согласно [3], общее решение (8), (9) с  $g = 0$  можно искать в форме

$$\psi_n(x) = \sum_{j=1}^4 A_{nj} \exp(\gamma_j x), \quad (11)$$

причем комплексные собственные значения  $\gamma_j$  удовлетворяют уравнению

$$\gamma^4 + 2\gamma^2 \left(\varepsilon + \frac{V^2 - \omega}{2}\right) + \varepsilon^2 - \varepsilon\omega = 0. \quad (12)$$

Используя малость параметра  $V/p$ , корни уравнения (12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} &= \pm ip_1 \left(1 - \frac{V^2}{\omega}\right)^{1/2}, \\ \gamma_{3,4} &= \pm ip_2 \left(1 + \frac{V^2}{\omega}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Учет взаимодействия делает систему уравнений (8), (9) нелинейной. Для нахождения решения можно применить подход, использованный в [6], если учесть следующее обстоятельство. Как уже отмечалось выше, резонансные токи поляризации весьма чувствительны к сдвигу уровней из-за межэлектронного взаимодействия. Действительно, сдвиг энергии

на величину, равную ширине уровня  $\Gamma$ , малую по сравнению с  $\varepsilon_{nR}$ , существенно изменяет токи, хотя концентрация электронов относительно невелика. Поэтому нелинейное слагаемое можно считать малым и искать решение уравнения (8) в виде (11), но с коэффициентами  $A_{nj}(x)$ , зависящими от координаты  $x$ :

$$\psi_n(x) = \sum_{j=1}^4 A_{nj}(x) \exp(\gamma_j x). \quad (14)$$

При этом  $A_{nj}(x)$  можно считать медленноменяющимися функциями  $x$ , а скорость изменения  $dA_{nj}/dx$  — пропорциональной малости нелинейного слагаемого. Кроме того, в (14) достаточно принять

$$\gamma_{1,2} = \pm ip_1, \quad \gamma_{3,4} = \pm ip_2.$$

Подставляя решение (14) в систему (8) и проводя усреднение по быстроменяющимся функциям  $\exp(\pm ip_n x)$  (см. подробнее [8]), приходим к следующим уравнениям для  $A_{nj}(x)$ :

$$\begin{aligned} 2ip_2 \frac{dA_{23}(x)}{dx} &= \\ &= gA_{23}(x) [ |A_{23}|^2 + 2(|A_{24}|^2 + |A_{11}|^2 + |A_{12}|^2) ], \\ -2ip_2 \frac{dA_{24}(x)}{dx} &= \\ &= gA_{24}(x) [ |A_{24}|^2 + 2(|A_{23}|^2 + |A_{11}|^2 + |A_{12}|^2) ], \\ 2ip_1 \frac{dA_{11}(x)}{dx} &= \\ &= gA_{11}(x) [ |A_{11}|^2 + 2(|A_{23}|^2 + |A_{24}|^2 + |A_{12}|^2) ], \\ -2ip_1 \frac{dA_{12}(x)}{dx} &= \\ &= gA_{12}(x) [ |A_{12}|^2 + 2(|A_{23}|^2 + |A_{24}|^2 + |A_{11}|^2) ]. \end{aligned} \quad (15)$$

При получении (15) опущены слагаемые порядка  $(V/p)^2$ ,  $Vg/p$ . Следует иметь в виду, что, как показано в [3], коэффициенты  $A_{21}$ ,  $A_{22}$  и  $A_{13}$ ,  $A_{14}$  имеют малость  $V^2/p^2$  по сравнению с  $A_{23}$ ,  $A_{24}$  и  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ , соответственно. Поэтому учет координатной зависимости  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{14}$  привел бы к превышению точности по параметру  $Vg/p$ . Из (8) получаем также следующие соотношения для коэффициентов  $A_{1j}$  и  $A_{2j}$ :

$$A_{ij} = \varepsilon_j A_{2j}, \quad \varepsilon_{1,2} = \mp \frac{i\omega}{Vp_1}, \quad \varepsilon_{3,4} = \pm \frac{ip_2 V}{\omega}. \quad (16)$$

Используя уравнения (15), нетрудно показать, что

модули  $|A_{nj}|$  не зависят от координаты. Учитывая это обстоятельство, находим решение системы (15):

$$\begin{aligned} A_{23}(x) &= A_{23} \exp(-ip_2 x g_3), \\ A_{24}(x) &= A_{24} \exp(ip_2 x g_4), \\ A_{11}(x) &= A_{11} \exp(-ip_1 x g_1), \\ A_{12}(x) &= A_{12} \exp(ip_1 x g_2), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{g}{2p_1^2} (|A_{12}|^2 + n_1 + 2n_2), \\ g_2 &= \frac{g}{2p_1^2} (|A_{11}|^2 + n_1 + 2n_2), \\ g_3 &= \frac{g}{2p_2^2} (|A_{24}|^2 + n_2 + 2n_1), \\ g_4 &= \frac{g}{2p_2^2} (|A_{23}|^2 + n_2 + 2n_1), \end{aligned} \quad (18)$$

$$n_1 = |A_{11}|^2 + |A_{12}|^2, \quad n_2 = |A_{23}|^2 + |A_{24}|^2. \quad (19)$$

Здесь  $A_{nj}$  — постоянные коэффициенты, которые найдем из граничных условий (9). Соответствующие уравнения для искомым  $A_{nj}$  имеют вид

$$\begin{aligned} A_{21}m_1 \exp(-\gamma_1 a) + A_{22}m_2 \exp(-\gamma_2 a) + \\ + A_{23}m_{3g} \exp(-\gamma_{3g} a) + \\ + A_{24}m_{4g} \exp(-\gamma_{4g} a) = 2\tilde{q}, \\ A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24} = 0, \\ A_{21}\varepsilon_1 \exp(-\gamma_{1g} a) + A_{22}\varepsilon_2 \exp(-\gamma_{2g} a) + \\ + A_{23}\varepsilon_3 \exp(-\gamma_3 a) + A_{24}\varepsilon_4 \exp(-\gamma_4 a) = 0, \\ A_{21}\varepsilon_1 \tilde{m}_{1g} + A_{22}\varepsilon_2 \tilde{m}_{2g} + A_{23}\varepsilon_3 \tilde{m}_3 + A_{24}\varepsilon_4 \tilde{m}_4 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_{1g} &= ip_1(1 - g_1), \quad \gamma_{2g} = -ip_1(1 - g_2), \\ \gamma_{3g} &= ip_2(1 - g_3), \quad \gamma_{4g} = -ip_2(1 - g_4), \\ m_{jg} &= 1 - \frac{\alpha_2 - \gamma_{jg}}{ip_2}, \quad \tilde{m}_{jg} = 1 - \frac{\alpha_1 + \gamma_{jg}}{ip_1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Чтобы найти  $m_j$  и  $\tilde{m}_j$ , следует в  $m_{jg}$  и  $\tilde{m}_{jg}$  положить  $g = 0$ .

Решая систему (20), получаем следующее выражение для коэффициентов с точностью до малых членов порядка  $(V/p)^2$  и  $Vg/p$ :

$$A_{23} = -A_{24} = \frac{2\tilde{q}}{\Delta(g)} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \tilde{\Delta}_{12}(g), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} A_{21} = \frac{4\tilde{q}p_2}{p_1 \Delta(g)} \left[ \frac{i\alpha_1}{p_1} (\cos(p_2 a) - \exp(-\gamma_{2g} a)) + \right. \\ \left. + 2 \cos(p_2 a) - \exp(-\gamma_{2g} a) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$A_{22} = \frac{4\tilde{q}p_2}{p_1\Delta(g)} \times \left[ \frac{i\alpha_1}{p_1} (\cos(p_2a) - \exp(-\gamma_{1g}a)) - \exp(-\gamma_{1g}a) \right], \quad (24)$$

$$\Delta(g) = -\varepsilon_1\varepsilon_2\tilde{\Delta}_{12}(g)\Delta_{34}(g) + \frac{16\alpha_1\alpha_2}{p_1^2}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{12}(g) &= \tilde{m}_{2g} \exp(-\gamma_{1g}a) - \tilde{m}_{1g} \exp(-\gamma_{2g}a), \\ \Delta_{34}(g) &= m_{4g} \exp(-\gamma_{4g}a) - m_{3g} \exp(-\gamma_{3g}a). \end{aligned} \quad (26)$$

Если энергии  $\varepsilon$  и  $\varepsilon - \omega$  близки к резонансным, определители можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{12}(g) &= -\frac{\alpha_1 a}{p_1^2} (\xi_1 + \nu + i\Gamma_1), \\ \Delta_{34}(g) &= -\frac{\alpha_2 a}{p_2^2} (\xi_2 + i\Gamma_2), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\Delta(g) = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_1\alpha_2}{(p_1p_2)^2} \tilde{\Delta}(g), \quad (28)$$

$$\tilde{\Delta}(g) = [\lambda^2 - (\xi_2 + i\Gamma_2)(\xi_1 + \nu + i\Gamma_1)],$$

$$\lambda = \frac{4p_1p_2V}{a\omega}, \quad \xi_1 = \xi - \tilde{g}_1, \quad \xi_2 = \xi - \tilde{g}_2, \quad (29)$$

$$\xi = \varepsilon - \varepsilon_{2R}, \quad \nu = \omega_{21} - \omega, \quad \omega_{21} = \varepsilon_{2R} - \varepsilon_{1R},$$

$$\tilde{g}_1 = g \left( 2n_2 + \frac{3}{2}n_1 \right), \quad \tilde{g}_2 = g \left( 2n_1 + \frac{3}{2}n_2 \right), \quad (30)$$

$$\Gamma_j = \frac{2p_j^3}{a\alpha_j^2}, \quad \varepsilon_{nR} = p_{nR}^2, \quad p_{nR} = \frac{\pi n}{a}.$$

В свою очередь плотности электронов на верхнем уровне  $n_2$  и нижнем  $n_1$  удовлетворяют, согласно (19), (22)–(24), следующим уравнениям:

$$n_2 = \frac{Q\Gamma_2(\xi_1^2 + \Gamma_1^2)}{a|\tilde{\Delta}(g)|^2}, \quad (31)$$

$$n_1 = \frac{Q\Gamma_2\lambda^2}{a|\tilde{\Delta}(g)|^2}, \quad Q = 4q^2p_2. \quad (32)$$

Таким образом, самосогласованная система уравнений (31), (32) позволяет найти волновую функцию при фиксированном поле  $\lambda$  и токе накачки  $Q$ . При  $g = 0$  результаты совпадают с полученными в [3], а при  $\lambda = 0$  — с результатами [6].

#### 4. ТОКИ ПОЛЯРИЗАЦИИ КОГЕРЕНТНОГО ЛАЗЕРА

Подставляя функции  $\psi_n$  в (10), находим токи  $J_c$  и  $J_s$ :

$$J_c = -\frac{EQ\Gamma_1\Gamma_2\eta}{|\tilde{\Delta}(g)|^2}, \quad (33)$$

$$J_s = -\frac{EQ\Gamma_2(\xi_1 + \nu)\eta}{|\tilde{\Delta}(g)|^2}, \quad \eta = \frac{64e^2p_1p_2}{3\omega^2a^2}. \quad (34)$$

Вначале изучим частотную и энергетическую зависимости тока поляризации  $J_c(\xi, \nu)$ , описывающие межуровневые переходы. Кроме того, найдем коэффициенты отражения электронов от структуры. В этом разделе поле  $\lambda$  и ток  $Q$  будем считать фиксированными и независимыми.

Наиболее интересные результаты получаются для случая одинаковых ширин резонансных уровней  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ . Это достигается следующим выбором параметров барьеров:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{3/2} \approx 2\sqrt{2}\alpha_1. \quad (35)$$

Обобщение на случай разных  $\Gamma_j$  не представляет труда (см. ниже).

Удобно ввести величину  $K(\xi, \nu)$ :

$$K(\xi, \nu) = -\frac{J_c}{E\eta} = \frac{Q\Gamma^2}{|\tilde{\Delta}(g)|^2}, \quad (36)$$

имеющую смысл высокочастотного нелинейного отклика, описывающего усиление (или поглощение) электромагнитного поля. С другой стороны, величина  $KE^2/2\omega$  пропорциональна скорости перехода электронов с уровня 2 на уровень 1.

Вначале проведем анализ для невзаимодействующих электронов ( $g = 0$ ), чтобы затем более четко выявить вклад взаимодействия. Кроме того, анализ при  $g = 0$  представляет и самостоятельный интерес, поскольку рассматривается оптимизированная по сравнению с [3] структура, а также обнаруживаются новые особенности когерентного резонансного туннелирования в сильном электромагнитном поле. Напомним, что сильными здесь считаются поля с  $\lambda > \Gamma$ .

Прежде всего найдем  $\xi_0$  и  $\nu_0$ , при которых  $K(\xi, \nu)$  максимально, исходя из уравнений

$$\left. \frac{\partial K}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial K}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_0} = 0. \quad (37)$$

Поскольку при  $g = 0$  квадрат модуля определителя равен

$$|\tilde{\Delta}|^2 = (\lambda^2 + \Gamma^2 - \xi^2 - \xi\nu)^2 + \Gamma^2(2\xi + \nu)^2, \quad (38)$$

уравнения (37) можно представить в виде

$$\begin{aligned} (2\xi_0 + \nu_0)(\xi_0^2 + \Gamma^2 - \lambda^2 + \xi_0\nu_0) &= 0, \\ \xi_0(\xi_0^2 + \Gamma^2 - \lambda^2 + \xi_0\nu_0) + \nu_0\Gamma^2 &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Нетрудно убедиться, что для любых  $\xi_0$  максимум усиления  $K(\xi_0, \nu_0)$  соответствует  $\nu_0 = 0$ , т. е. частоте  $\omega$ , совпадающей с резонансным значением  $\omega_{21}$ . Полагая в (39)  $\nu_0 = 0$ , приходим к уравнению для оптимальной подстройки энергии  $\xi_0$ :

$$\xi_0(\xi_0^2 + \Gamma^2 - \lambda^2) = 0. \quad (40)$$

Первое решение  $\xi_0 = 0$  соответствует максимуму  $K(\xi_0, 0)$  при  $\lambda < \Gamma$  и минимуму, если  $\lambda > \Gamma$ . Второе решение

$$\xi_0^2 = \lambda^2 - \Gamma^2, \quad \lambda > \Gamma, \quad \xi_0 = \pm\sqrt{\lambda^2 - \Gamma^2}, \quad (41)$$

дает максимальное усиление для сильного поля  $\lambda > \Gamma$ . При этом  $K(\xi_0, 0)$  принимает следующие значения при  $\xi_0 = 0$  и  $\xi_0^2 = \lambda^2 - \Gamma^2$ :

$$K(0, 0) = \frac{4Q\Gamma^2}{(\lambda^2 + \Gamma^2)^2}, \quad (42)$$

$$K(\xi_0, 0) = \frac{Q}{\lambda^2}, \quad \xi_0^2 = \lambda^2 - \Gamma^2. \quad (43)$$

Чтобы выяснить физический смысл  $\xi_0$ , вычислим коэффициент отражения от структуры, используя (11) и (22):

$$R = \frac{(\xi^2 + \Gamma^2 - \lambda^2)^2}{(\lambda^2 + \Gamma^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2\Gamma^2}. \quad (44)$$

Подстановка  $\xi_0$  из (41) обращает коэффициент отражения в нуль для любых  $\lambda \geq \Gamma$  и  $Q$ .

Отсюда ясно, что энергия электронов  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{2R} + \xi_0$  совпадает с резонансной энергией структуры, в которой резонансные уровни ямы расщепляются за счет действия электромагнитного поля [9].

Таким образом, каждый подводимый из эмиттера на уровень 2 электрон совершает излучательный переход и отводится в коллектор с уровня 1, т. е. эффективность (кпд) структуры равна единице. Действительно, если вычислить число переходов в единицу времени с уровня 2 на уровень 1,

$$\frac{J_c E}{2\omega} = Q, \quad \omega = \varepsilon_{2R} - \varepsilon_{1R} \approx 3p_1^2, \quad (45)$$

то оно окажется в точности равным подводимому числу электронов  $Q$ .

Исследуем теперь частотную зависимость усиления  $K(\xi, \nu)$ , так называемый контур усиления [4]. В общем случае любых  $\xi$  усиление  $K(\xi, \nu)$  описывается формулой (36) с  $\tilde{\Delta}$  из (38).

В резонансной ситуации, когда  $\xi_0$  дается формулой (41), получаем

$$K(\xi_0, \nu) = \frac{Q\Gamma^2}{\lambda^2[\nu^2 + 4\Gamma^2]}. \quad (46)$$

Из (46) следует, что уширение определяется только  $\Gamma$  и не зависит от  $\lambda$ . Такая форма линии принципиально отличается от формы линии в обычных лазерах. Например, в газовых [4] и полупроводниковых лазерах  $K(\nu)$  имеет вид

$$K(\nu) = \frac{Q}{\nu^2 + \Gamma^2 + \lambda^2}. \quad (47)$$

Из (47) видно, что ширина линии растет с полем. Уширение вызвано «эффектом насыщения» населенностей уровней за счет межуровневых переходов электронов в сильном поле. «Эффект насыщения» приводит к выжиганию «дырки» в распределении электронов [4, 5], появлению дополнительных мод, ограничению мощности генерации [5].

В нерезонансном случае, когда  $\xi_0 = 0$ , имеем

$$K(0, \nu) = \frac{Q}{\nu^2 + (\lambda^2 + \Gamma^2)^2/\Gamma^2}, \quad (48)$$

при этом наблюдается уширение ( $\lambda^4/\Gamma^2 \gg \lambda^2$ ) гораздо более сильное, чем в некогерентных лазерах.

Причина независимости уширения от поля в резонансном случае состоит в том, что поступающие с эмиттера электроны совершают один излучательный переход и выходят в коллектор. Это явление напоминает эффект «самопрозрачности» [10]. Однако, в отличие от этого эффекта, здесь решающую роль играет когерентное туннелирование, управляющее доставкой и удалением электронов с определенной фазой.

Найдем зависимость  $K(\xi, 0)$  от  $\xi$  вблизи  $\xi_0$ . После некоторых вычислений получаем

$$K(\xi, 0) = \frac{Q\Gamma^2}{4\lambda^2[\Gamma^2 + (|\xi| - |\xi_0|)^2]}. \quad (49)$$

Отсюда следует, что максимум усиления вблизи  $\xi_0$  очень узкий с шириной, не зависящей от поля  $\lambda$  и равной  $\Gamma$ .

Теперь учтем взаимодействие между электронами. Усиление  $K_g(\xi, \nu)$  дается выражением (36) с  $|\tilde{\Delta}(g)|^2$  таким, что

$$|\tilde{\Delta}(g)|^2 = (\lambda^2 + \Gamma^2 - \xi_1\xi_2 - \nu\xi_2)^2 + \Gamma^2(\xi_1 + \xi_2 + \nu)^2. \quad (50)$$

Взаимодействие приводит к сдвигу уровней и, вообще говоря, нарушению резонансов. Это становится существенным при таких концентрациях электронов, когда энергетический сдвиг начинает превосходить ширину резонансного уровня.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением наиболее интересного решения системы (31), (32), при котором  $K_g(\xi, \nu)$  достигает максимального

значения. Можно убедиться непосредственной проверкой, что таковым является следующее решение системы (31), (32), (36):

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 = n &= \frac{Q}{4\Gamma a}, \\ \xi_1^2 = \xi_2^2 = (\tilde{\xi}_0 - \tilde{g})^2 &= \lambda^2 - \Gamma^2, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 = \tilde{g} = \frac{7g}{2}n, \quad \omega = \omega_{21},$$

$$K_g(\tilde{\xi}_0, 0) = \frac{Q}{4\lambda^2} \equiv K(\xi_0, 0). \quad (52)$$

При этом энергия подводимых электронов дается выражением

$$\tilde{\xi}_0 = \pm \sqrt{\lambda^2 - \Gamma^2} + \frac{7gQ}{8\Gamma a}. \quad (53)$$

Из (52) следует, что коэффициент усиления сохраняет прежний вид (43), если  $\xi_0$  определяется выражением (53). Причина сохранения резонансного вида  $K_g(\tilde{\xi}_0, 0)$  обусловлена равенством населенностей  $n_1 = n_2$  (51). Действительно, поскольку населенности одинаковы, энергетическая щель  $\varepsilon_{2R} - \varepsilon_{1R}$  не меняется, а энергия подводимых электронов  $\tilde{\xi}_0$  (53) совпадает с резонансной.

Однако, в отличие от  $\xi_0$  (43), появляется еще добавка, связанная со сдвигом уровня из-за взаимодействия, а  $K(\tilde{\xi}_0, 0)$  становится несимметричной функцией  $\xi$  (см. ниже (56)). Отметим, что второе решение (53) дает уменьшающееся (по модулю) с  $Q$  значение  $\tilde{\xi}_0$ , которое при некотором  $\lambda_0$  обращается в нуль:

$$\tilde{\xi}_0 = -\sqrt{\lambda_0^2 - \Gamma^2} + \frac{7gQ}{8a\Gamma} = 0. \quad (54)$$

Это означает, что существует возможность оптимального режима в отсутствие подстройки из-за компенсации сдвигов уровней. Можно показать, что коэффициент отражения снова равен нулю, если  $\tilde{\xi}_0$  выбирается согласно (53). Сохраняется также и форма линии усиления

$$K_g(\tilde{\xi}_0, \nu) = \frac{4Q\Gamma^2}{\lambda^2[\nu^2 + 4\Gamma^2]}, \quad (55)$$

а также характер зависимости  $K$  от  $\tilde{\xi}$ :

$$K(\tilde{\xi}, 0) = \frac{Q\Gamma^2}{\lambda^2[\Gamma^2 + (|\tilde{\xi}| - |\tilde{\xi}_0|)^2]}. \quad (56)$$

Таким образом, оптимальный режим автоподстройки, предсказанный в [3], сохраняется и при учете межэлектронного взаимодействия.

В заключение отметим, что максимальная эффективность структуры достигается только для

$\Gamma_1 = \Gamma_2$ . Если  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ , то для  $\lambda \gg \Gamma$  вместо (44) имеем

$$R = \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2}{(\Gamma_2 + \Gamma_1)^2}. \quad (57)$$

Равенства  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  можно достичь на оптимизированной структуре, рассмотренной в данной работе при условии (35).

## 5. ОДНОМОДОВАЯ ГЕНЕРАЦИЯ КОГЕРЕНТНОГО ЛАЗЕРА

Амплитуду и частоту когерентной стационарной генерации находим из уравнений

$$1 = \tilde{Q} \frac{\Gamma^2}{|\tilde{\Delta}(g)|^2}, \quad (58)$$

$$\omega - \Omega = \tilde{Q} \frac{\Gamma(\varepsilon - \omega - \varepsilon_{1R}(g))}{\tau_0 |\tilde{\Delta}(g)|^2}, \quad (59)$$

$$\tilde{Q} = 4\pi\tau_0 Q\eta/k,$$

которые получаются после подстановки токов  $J_c$  и  $J_s$  в (2) и (3).

Нетрудно видеть, что частота дается выражением

$$\omega = \frac{S(\varepsilon - \varepsilon_{1R}(g)) + \Omega}{1 + S}, \quad S = 1/\Gamma\tau_0, \quad (60)$$

справедливым при любых  $\tilde{Q}$  и  $\lambda$ .

Коэффициент стабилизации  $S$  может меняться в широких пределах. Если, например, принять типичные значения для каскадного лазера [2]  $\Gamma = 10^{12}$ ,  $\tau_0 = 10^{-11}$  с, то  $S \approx 0.1$ . В этом случае

$$\omega \approx \Omega, \quad S \ll 1, \quad (61)$$

т. е. частота определяется частотой резонатора. Полагая, что ее можно менять, будем считать  $\omega$  свободным параметром. Обратный случай  $S \gg 1$  будет рассмотрен ниже.

Вначале исследуем генерацию для невзаимодействующих электронов по тем же соображениям, что и в предыдущем разделе. Пользуясь результатом разд. 4, где показано, что ток  $J_c$  максимален при  $\nu = 0$ , положим в (58), (60)  $\omega = \Omega = \omega_{21}$ . Найдем из уравнения (58) мощность генерации

$$P_\omega = \lambda^2 = \xi^2 + \Gamma \left( \sqrt{\tilde{Q} - 4\xi^2} - \Gamma \right). \quad (62)$$

Пороговый ток получается, если положить в (62)  $\lambda = 0$ :

$$\tilde{Q}_{th} = (\xi^2 + \Gamma^2)^2 / \Gamma^2. \quad (63)$$

Как показано в [3], существует такая подстройка энергии  $\xi_0$ , при которой  $P_\omega$  максимально. Уравнение для  $\xi_0$

$$\frac{dP_\omega}{d\xi} = 2\xi_0 \left( 1 - \frac{2\Gamma}{\sqrt{\tilde{Q} - 4\xi_0^2}} \right) = 0 \quad (64)$$

имеет два решения:

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_0^2 = \tilde{Q}/4 - \Gamma^2. \quad (65)$$

Первое решение соответствует максимуму мощности в интервале накачки  $1 < \tilde{Q}/\Gamma^2 < 4$ , причем мощность

$$P_\omega = \Gamma \left( \sqrt{\tilde{Q}} - \Gamma \right) \quad (66)$$

корневым образом зависит от  $\tilde{Q}$ .

Второе решение реализуется при  $\tilde{Q} > 4\Gamma^2$ , при этом мощность линейно зависит от тока накачки:

$$P_\omega = \tilde{Q}/4, \quad (67)$$

что соответствует максимальной эффективности (КПД равен единице). Условия появления второго решения с учетом (67), а также выражение для  $\xi_0^2$  можно переписать в виде

$$\lambda > \Gamma, \quad \xi_0^2 = \lambda^2 - \Gamma^2. \quad (68)$$

Эти выражения в точности совпадают с выражениями (41), определяющими максимум тока  $J_c$  и нуль коэффициента отражения. Следовательно, можно сделать вывод, что энергия подводимых электронов  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{2R} + \xi_0$  совпадает с резонансной энергией структуры когерентного лазера, так что каждый электрон вносит вклад в генерацию. Именно поэтому мощность линейно растет с  $\tilde{Q}$  (67). Если же  $\xi_0 = 0$ , то с ростом  $\tilde{Q}$  энергия электронов начинает отличаться от резонансной. Это приводит к росту отражения (см. (44)) и уменьшению эффективности генерации, т. е. корневой зависимости мощности (66).

Следует отметить, что мощность генерации  $P_\omega$  (67) не зависит от  $\Gamma$ , а  $\tilde{Q}_{th} = \Gamma^2$  уменьшается с  $\Gamma$ . Поэтому, в принципе, можно стремиться сделать ширину  $\Gamma$  малой. Ограничение снизу связано только с условием когерентности  $\Gamma > \tau_{ph}^{-1}$ . Кроме того, подчеркнем, что максимальная эффективность достигается в оптимизированной структуре с симметричными барьерами при  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ .

В [3] было указано, что принципиальной особенностью когерентного лазера является отсутствие требования инверсной населенности. Покажем это,

вычислив явно разность населенностей  $n_1$  и  $n_2$ , которые даются выражениями (31), (32). Если подстройка отсутствует ( $\xi_0 = 0$ ), то разность населенностей

$$n_1 - n_2 = \frac{Q\Gamma}{a|\tilde{\Delta}|^2} (\Gamma^2 - \lambda^2) \quad (69)$$

меняется с ростом  $\lambda$ . При  $\lambda > \Gamma$  населенность на нижнем уровне  $n_1$  превосходит населенность верхнего уровня  $n_2$ . В случае оптимальной подстройки  $\xi_0$  (41) населенности в точности равны:

$$n_1 = n_2 = \frac{Q}{4\Gamma a}. \quad (70)$$

Из (70) видно, что населенности растут с ростом тока накачки  $Q$ , что присуще униполярным лазерам, как полупроводниковым (например, каскадным [2]), так и газовым [4]. Рост концентрации электронов приводит к увеличению межэлектронного взаимодействия, которое может, вообще говоря, нарушить жесткие условия резонансной подстройки (41).

Именно поэтому необходимо рассмотреть влияние межэлектронного взаимодействия на когерентную генерацию, исходя из системы уравнений (58), (59), (31), (32). Нетрудно убедиться, что оптимальный режим генерации сохраняется, если энергия поступающих из эмиттера электронов равна

$$\varepsilon = \varepsilon_{2R} + \tilde{\xi}_0, \quad (71)$$

а  $\tilde{\xi}_0$  дается выражением (53). При этом решение системы (58), (59), (31), (32) имеет вид

$$\lambda^2 = \tilde{Q}/4, \quad n_1 = n_2 = Q/4\Gamma a, \quad \omega = \omega_{21}. \quad (72)$$

Причины устойчивости режима резонансной подстройки к межэлектронному взаимодействию аналогичны изложенным выше в разд. 4.

Сохраняются также результаты разд. 4, касающиеся формы линии когерентного лазера (46), не зависящей от уширения за счет поля. Можно ожидать, что последнее обстоятельство приведет к большей устойчивости одномодового режима когерентного лазера, а также большим предельным мощностям по сравнению с обычными. Наконец, рассмотрим случай больших значений параметра стабилизации  $S \gg 1$ , когда, согласно (60),

$$\omega \approx \varepsilon - \varepsilon_{1R}(g). \quad (73)$$

В этом случае режим резонансной подстройки отсутствует, так как

$$|\tilde{\Delta}(g)|^2 = (\lambda^2 + \Gamma^2)^2 + \Gamma^2 \xi_2^2. \quad (74)$$



## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показано в работе, когерентный лазер обладает определенными преимуществами: отсутствием требования инверсной населенности, высокой эффективностью (КПД равен единице), низкими порогами, отсутствием уширения контура усиления выше порога, устойчивостью характеристик к межэлектронному взаимодействию и др. Свойства контура уширения позволяют надеяться на устойчивость к многомодовой генерации, на высокие спектральные характеристики лазерного поля, а также на высокие предельные значения мощности. Последнее связано с тем, что, как было показано в [5], полевое уширение приводит к ограничению мощности генерации лазера.

Причина замечательных свойств когерентного лазера состоит в том, что электроны из эмиттера поставляются в оптимальный энергетический интервал с оптимальными фазами.

В то же время для обеспечения эффективной генерации требуется выполнение условий когерентной генерации ( $\tau_{ph} > \Gamma^{-1}$ ), а также узости энергетического распределения электронов, поставляемых из эмиттера. Условия когерентности в принципе выполнимы, особенно в квантовых точках (см., например, [2, 7]). Упомянем также работу [10] по сверхизлучению, где когерентность наблюдалась в системе из восьми квантовых ям.

Что касается требования узости энергетического распределения электронов, то его можно достичь с помощью фильтров на тех же квантовых ямах (точках) (см., например, [2, 7]). Кроме того, многие свойства когерентной генерации сохраняются и при широком источнике, как показано в [3].

Разумеется, экспериментальная реализация потребует проведения более детальных расчетов для конкретных структур с учетом дополнительного ряда факторов.

Автор благодарен Ю. В. Копаеву за полезное обсуждение работы. Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект № А0133) и при поддержке Минпромнауки РФ, программы «Физика твердотельных наноструктур» (проект № 99-1140) и проекта «Построение теории взаимодействия сильных высокочастотных электромагнитных полей с электронной системой резонансно-туннельных диодов и лазеров».

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Kazarinov and R. Suris, *Sov. Phys. Semicond.* **5**, 207 (1971).
2. J. Faist, F. Capasso, D. Sivco et al., *Science* **264**, 553 (1994).
3. В. Ф. Елесин, *ЖЭТФ* **112**, 483 (1997).
4. W. E. Lamb, *Phys. Rev.* **134**, 1429 (1964).
5. В. М. Галицкий, В. Ф. Елесин, *ЖЭТФ* **68**, 216 (1975).
6. В. Ф. Елесин, *ЖЭТФ* **119**, 816 (2001).
7. J. Faist, F. Capasso, D. Sivco et al., *Appl. Phys. Lett.* **66**, 538 (1994).
8. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматгиз, Москва (1963).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, ГИФМЛ, Москва (1963), с. 173.
10. S. L. Mc. Call and E. L. Haha, *Phys. Rev.* **183**, 457 (1969).
11. S. Haas, T. Stroucken, M. Hübner et al., *Phys. Rev. B* **57**, 14860 (1998).