

# МЕТОД РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ В ЗАДАЧЕ ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Э. В. Теодорович\*

Институт проблем механики Российской академии наук  
119526, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 декабря 2001 г.

В рамках полевой формулировки метода ренормализационной группы получено выражение для фурье-образа интегрального ядра коэффициента эффективной проводимости случайно-неоднородной пористой среды. В крупномасштабном пределе найденный результат соответствует известной формуле Ландау–Лифшица–Матерона. Обсуждается степень обоснованности технических приемов, используемых в рамках ренормгруппового подхода при проведении вычислений.

PACS: 05.10.Ос, 46.65.+g

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания процесса протекания жидкости через пористую среду обычно пользуются законом Дарси, которой получается после усреднения по микромасштабам, соответствующим характерным размерам пор. Закон Дарси устанавливает связь между скоростью фильтрации  $v_i(\mathbf{r})$  и градиентом давления  $\partial_i p(\mathbf{r})$  и в изотропной среде имеет вид

$$v_i(\mathbf{r}) = -\kappa \partial_i p(\mathbf{r}), \quad (1.1)$$

где величину  $\kappa$  будем называть коэффициентом проводимости пористой среды.

В случайно-неоднородной среде коэффициент проводимости является некоторой случайной функцией координат,  $\kappa = \kappa(\mathbf{r})$ ; в дальнейшем предполагается, что статистика реализаций поля  $\kappa(\mathbf{r})$  задана. В практических задачах представляет интерес связь между усредненными по ансамблю реализаций значениями скорости фильтрации и градиента давления. Эта связь в общем случае является нелокальной и имеет вид

$$\langle v_i(\mathbf{r}) \rangle = - \int d\mathbf{r}' K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \langle \partial_i p(\mathbf{r}') \rangle, \quad (1.2)$$

и задачей теории является вычисление интегрально-

го ядра  $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  на основе знания статистики реализаций случайного поля  $\kappa(\mathbf{r})$ .

В статистически однородной системе ядро  $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  является функцией разности координат  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и заметно отличается от нуля только в некоторой области  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq l$ , где  $l$  — длина корреляции. Если характерный масштаб, на котором средние значения скорости и градиента давления меняются существенным образом, мал по сравнению с длиной корреляции (крупномасштабный предел), то можно принять

$$K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \approx K_{eff} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad K_{eff} = \int d\mathbf{r} K(\mathbf{r}). \quad (1.3)$$

В этом случае задача сводится к вычислению величины  $K_{eff}$ , называемой эффективным коэффициентом проводимости случайно-неоднородной среды.

Рассматривая безграничную среду с заданной детерминированной (регулярной) плотностью источника жидкости  $\rho(\mathbf{r})$ , из условия несжимаемости получим уравнение

$$\partial_i v_i(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}), \quad (1.4)$$

которое с учетом закона Дарси (1.1) приводит к дифференциальному уравнению для давления:

$$\partial_i [\kappa(\mathbf{r}) \partial_i p(\mathbf{r})] = -\rho(\mathbf{r}). \quad (1.5)$$

\*E-mail: teodor@ipmnet.ru

Таким образом, для вычисления эффективной проводимости необходимо сначала решить стохастическое дифференциальное уравнение для давления (1.5), после этого, используя закон Дарси, найти скорость и затем с помощью процедуры усреднения по ансамблю реализаций поля проводимости найти средние значения скорости фильтрации и градиента давления, что в результате позволит вычислить эффективную проводимость.

Для приближенного решения стохастического дифференциального уравнения (1.5) обычно используется метод теории возмущений, при котором решение строится в виде ряда по степеням флуктуаций коэффициента проводимости  $\delta\kappa(\mathbf{r}) = \kappa(\mathbf{r}) - \langle \kappa(\mathbf{r}) \rangle$ , и последующее почленное усреднение рядов для скорости фильтрации и градиента давления дает возможность получить представление эффективного коэффициента проводимости в виде ряда по степеням дисперсии коэффициента проводимости. Однако реально приходится ограничиваться только низшими приближениями теории возмущений вследствие возрастания трудностей при переходе к высшим приближениям. В связи с оценкой роли высших приближений в работе [1] было высказано предположение, что низшие приближения теории возмущений представляют собой первые члены разложения экспоненты в ряд Тейлора и зависимость  $K_{eff}$  от дисперсии логарифма проводимости  $\sigma^2$  в пространстве размерности  $d$  имеет вид

$$K_{eff} = K_G \exp\left(\frac{d-2}{2d}\sigma^2\right), \quad (1.6)$$

где  $K_G$  — среднее геометрическое значение коэффициента проводимости. Эта формула является точной в одномерном случае, когда  $K_{eff} = K_H$  ( $K_H$  — среднее гармоническое значение коэффициента проводимости,  $K_H = K_G \exp(-\sigma^2/2)$  для логнормального распределения). В двумерном случае для логнормального распределения Матероном была получена формула  $K_{eff} = K_G$ . В трехмерном случае Ландау и Лифшицем [2] на основании общих феноменологических соображений была предложена формула  $K_{eff} = \langle \kappa^{1/3} \rangle^3$ . Все эти случаи для логнормального распределения согласуются с гипотезой (1.6), которая получила название формулы Ландау–Лифшица–Матерона. Расчеты по теории возмущений с учетом членов порядка  $\sigma^4$  не противоречат формуле Ландау–Лифшица–Матерона, однако имеются указания, что в ряде случаев для членов порядка  $\sigma^6$  эта формула оказывается несправедливой (см. более подробный обзор [3]). В настоящее время обоснование (или опровержение) формулы Лан-

дау–Лифшица–Матерона является предметом многочисленных исследований.

## 2. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА

В отличие от традиционного способа построения ряда теории возмущений сначала для давления с помощью уравнения (1.5) и последующего нахождения ряда для скорости фильтрации с использованием закона Дарси, в данной работе на первом этапе строится ряд теории возмущений для скорости фильтрационного потока, а затем закон Дарси используется при построении ряда для давления. При таком подходе выражение для скорости получается естественным образом в виде разложения по степеням  $u(\mathbf{r}) = \ln[\kappa(\mathbf{r})/K_G]$ , при этом  $\langle u(\mathbf{r}) \rangle = 0$ .

Представим поле скорости в виде суперпозиции потенциальной и соленоидальной частей:

$$\begin{aligned} v_i(\mathbf{r}) &= v_i^p(\mathbf{r}) + v_i^s(\mathbf{r}), \\ \partial_i v_j^p(\mathbf{r}) - \partial_j v_i^p(\mathbf{r}) &= 0, \quad \partial_i v_i^s(\mathbf{r}) = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

При этом уравнение (1.4) определяет только потенциальную часть:

$$v_i^p(\mathbf{r}) = (\partial)_i^{-1} \rho(\mathbf{r}) = \partial_i \Delta^{-1} \rho(\mathbf{r}), \quad (2.2)$$

где  $\Delta^{-1} = G^{(0)}(\mathbf{r})$  — функция Грина для оператора Лапласа, являющаяся решением уравнения

$$\Delta G^{(0)}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}). \quad (2.3)$$

С целью нахождения уравнения для соленоидальной части скорости фильтрационного потока,  $v_i^s$ , вычислим величину  $\partial_j[\partial_i v_j(\mathbf{r}) - \partial_j v_i(\mathbf{r})]$ . С учетом соотношений (2.1) и закона Дарси (1.1) найдем

$$\begin{aligned} \partial_j[\partial_i v_j(\mathbf{r}) - \partial_j v_i(\mathbf{r})] &= -\partial_j \partial_j v_i^s(\mathbf{r}) = \\ &= -\partial_j[\partial_i \kappa(\mathbf{r}) \partial_j p(\mathbf{r}) - \partial_j \kappa(\mathbf{r}) \partial_i p(\mathbf{r})]. \end{aligned}$$

Вторично воспользовавшись законом Дарси для исключения давления, получим

$$\begin{aligned} \partial_j \partial_j v_i^s(\mathbf{r}) &= -[\partial_k u_k(\mathbf{r}) \delta_{ij} - \partial_j u_i(\mathbf{r})] v_j(\mathbf{r}), \\ u_i(\mathbf{r}) &= \partial_i u(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

После перехода от дифференциального уравнения к интегральному уравнение для компонент скорости фильтрационного потока примет вид

$$\begin{aligned} v_i(\mathbf{r}) &= v_i^p(\mathbf{r}) - \int d\mathbf{r}' G^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \\ &\times [\partial'_k u_k(\mathbf{r}') \delta_{ij} - \partial'_j u_i(\mathbf{r}')] v_j(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Оно может быть также представлено в виде, соответствующем формализму Мартина–Сиджиа–Роуза [4]:

$$v_i(\mathbf{r}) = v_i^p(\mathbf{r}) - \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 G^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \\ \times \Gamma_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) u(\mathbf{r}_2) v_j(\mathbf{r}_3), \quad (2.6)$$

где тензорная величина  $\Gamma_{ij}^{(0)}$ , в дальнейшем называемая вершиной, определена соотношением

$$\Gamma_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \lambda_0 [(\partial^{(2)} \cdot \partial^{(1)}) \delta_{ij} - \partial_i^{(2)} \partial_j^{(1)}] \times \\ \times \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \quad (2.7)$$

(цифры в скобках у операторов дифференцирования указывают, на какую переменную действует оператор),  $\lambda_0$  — равный единице формальный параметр разложения в ряд теории возмущений.

В пространстве фурье-образов уравнения (2.6) и (2.7) запишутся следующим образом:

$$\tilde{v}_i(\mathbf{q}) = \tilde{v}_i^p(\mathbf{q}) - \tilde{G}^{(0)}(\mathbf{q}) \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \times \\ \times \tilde{\Gamma}_{ij}^{(0)}(\mathbf{q} | \mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{p}) \tilde{u}(\mathbf{p}) \tilde{v}_j(\mathbf{q} - \mathbf{p}), \quad (2.8)$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{(0)}(\mathbf{q} | \mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{p}) = \lambda_0 [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) \delta_{ij} - p_i q_j]. \quad (2.9)$$

Отметим, что вершина  $\Gamma_{ij}^{(0)}$  обладает свойствами оператора поперечного проектирования:

$$q_i \tilde{\Gamma}_{ij}^{(0)}(\mathbf{q} | \mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{p}) = 0, \\ P_{ik}(\mathbf{q}) \tilde{\Gamma}_{kj}^{(0)}(\mathbf{q} | \mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{p}) = \tilde{\Gamma}_{ij}^{(0)}(\mathbf{q} | \mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{p}), \quad (2.10) \\ P_{ij}(\mathbf{q}) = \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^{(0)}(\mathbf{q} | \mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{p}) p_j = 0.$$

Использование метода итераций позволяет записать решение интегрального уравнения в виде ряда теории возмущений по степеням формального параметра разложения  $\lambda_0$ ; этот ряд является функционалом от случайного поля  $u(\mathbf{r})$ . Последующее усреднение функционального ряда приводит к задаче вычисления статистических моментов вида  $\langle u(\mathbf{r}_1) \dots u(\mathbf{r}_n) \rangle$ . В случае центрированного нормального распределения эти средние представляются в виде суммы всевозможных попарных средних для моментов четного порядка и равны нулю для моментов нечетного порядка (теорема Вика).

В статистически однородной системе для парных средних имеем

$$\langle u(\mathbf{r}_1) u(\mathbf{r}_2) \rangle = B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (2.11)$$

Для сокращения записи и удобства анализа высших приближений введем правила сопоставления аналитическим выражениям некоторых графических символов, называемых диаграммами Фейнмана. Эти правила формулируются следующим образом.

1. Функции Грина  $G^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  невозмущенной задачи (пропагатору) сопоставляется тонкая горизонтальная линия, выходящая из точки  $\mathbf{r}_2$  и входящая в точку  $\mathbf{r}_1$ .

2. Функции  $u(\mathbf{r})$  сопоставляется направленная вертикально в точку  $\mathbf{r}$  стрелка.

3. Функции  $\Gamma_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  (затравочной вершине) сопоставляется треугольник, в правую вершину  $\mathbf{r}_3$  которого входят, а из левой  $\mathbf{r}_1$  выходят горизонтальные стрелки, соответствующие функциям Грина, а в среднюю вершину  $\mathbf{r}_2$  входит вертикальная стрелка, соответствующая  $u(\mathbf{r}_2)$ .

4. Парной корреляционной функции  $B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  (коррелятору) соответствует линия с двумя стрелками, входящими вертикально в точки  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ .

5. Усредненной по ансамблю реализаций полной функции Грина  $G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  (полному пропагатору) соответствует жирная горизонтальная линия, направленная из точки  $\mathbf{r}_2$  в точку  $\mathbf{r}_1$ .

6. Усредненной по ансамблю реализаций полной вершине  $\Gamma_{ij}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  соответствует темный треугольник с двумя входящими и одной выходящей стрелками.

7. По координатам всех точек, соответствующих вершинам треугольников, выполняется интегрирование.

При переходе в пространство волновых чисел (пространство фурье-образов) структура диаграмм остается неизменной, однако при этом линиям корреляторов и пропагаторов приписывается волновое число и этим величинам будут соответствовать их фурье-образы  $\tilde{B}(\mathbf{q})$  и  $\tilde{G}_{ij}^{(0)}(\mathbf{q})$ , а треугольной вершине сопоставляется  $\tilde{\Gamma}^{(0)}(\mathbf{q} | \mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{p})$ , при этом алгебраическая сумма входящих и выходящих волновых чисел равна нулю.

При вычислении среднего градиента давления согласно формуле

$$\langle \partial_i p(\mathbf{r}) \rangle = -\langle \kappa^{-1}(\mathbf{r}) v_i(\mathbf{r}) \rangle = \\ = -\langle \kappa^{-1} \rangle v_i^p(\mathbf{r}) - \langle \kappa^{-1}(\mathbf{r}) v_i^s(\mathbf{r}) \rangle \quad (2.12)$$

возникнут смешанные средние вида

$$\langle \kappa^{-1}(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}_1) \dots u(\mathbf{r}_n) \rangle = \\ = K_G^{-1} \langle e^{-u(\mathbf{r})} u(\mathbf{r}_1) \dots u(\mathbf{r}_n) \rangle. \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \kappa^{-1}(\mathbf{r})u(\mathbf{r}_1) \rangle &= -\langle \kappa^{-1} \rangle \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_1 \\ \curvearrowright \end{array} \right\}, \\
 \langle \kappa^{-1}(\mathbf{r})u(\mathbf{r}_1)u(\mathbf{r}_2) \rangle &= \langle \kappa^{-1} \rangle \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \\ \curvearrowright \end{array} + \begin{array}{c} \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \\ \curvearrowright \end{array} \right\}, \\
 \langle \kappa^{-1}(\mathbf{r})u(\mathbf{r}_1)u(\mathbf{r}_2)u(\mathbf{r}_3) \rangle &= -\langle \kappa^{-1} \rangle \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3 \\ \curvearrowright \end{array} + \right. \\
 &+ \left. \begin{array}{c} \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3 \\ \curvearrowright \end{array} + \begin{array}{c} \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3 \\ \curvearrowright \end{array} + \begin{array}{c} \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3 \\ \curvearrowright \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Рис. 1. Диаграммные представления смешанных средних различных порядков

Вычисление смешанных средних приведено в Приложении. Согласно (П.7), этим средним соответствует умноженная на  $(-1)^n \langle \kappa^{-1} \rangle$  сумма произведений всевозможных попарных средних вида  $\langle u(\mathbf{r})u(\mathbf{r}_k) \rangle$  и  $\langle u(\mathbf{r}_k)u(\mathbf{r}_l) \rangle$ . Соответствующим величинам сопоставим диаграммы, содержащие большой светлый кружок (так называемые скалярные вершины [5]), в который может входить произвольное число линий корреляторов, вторые концы которых замыкаются на треугольных вершинах. Отметим, что в отличие от [5] в используемом нами формализме линии корреляторов, замыкающиеся только на скалярной вершине, не появляются. Это связано с тем, что статистические моменты вида (2.13) вычислены нами точно без использования разложения экспоненты в ряд Тейлора. Диаграммы для нескольких низших моментов вида (2.13), вычисленные согласно (П.7) в Приложении, представлены на рис. 1.

### 3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Использование метода итераций для решения уравнения (2.5) приводит к представлению решения в форме

$$v_i(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | u(\mathbf{r}_n)) v_j^p(\mathbf{r}'), \quad (3.1)$$

при этом резольвентное ядро  $R_{ij}$  является функционалом от случайного поля  $u(\mathbf{r}_n)$  и имеет вид

$$\begin{aligned}
 R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | u(\mathbf{r}_n)) &= \\
 &= \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + T_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | u(\mathbf{r}_n)), \\
 T_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | u(\mathbf{r}_n)) &= \\
 &= \int d\mathbf{r}'' P_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') T(\mathbf{r}'', \mathbf{r}' | u(\mathbf{r}_n)).
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Усреднение уравнения (3.2) по реализациям случайного поля  $u(\mathbf{r})$  при учете требования статистической однородности системы дает

$$\langle T(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | u(\mathbf{r}_n)) \rangle = T(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.3)$$

т.е. решение представимо в виде свертки потенциального вектора  $v_i^p(\mathbf{r})$  с выражением, содержащим оператор поперечного проектирования; подобные формы тождественно равны нулю. Отсюда следует

$$\langle v_i(\mathbf{r}) \rangle = v_i^p(\mathbf{r}) = \partial_i \Delta^{-1} \rho(\mathbf{r}). \quad (3.4)$$

Таким образом, для нахождения интегрального ядра  $K_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  необходимо с помощью закона Дарси вычислить градиент давления согласно формуле

$$\begin{aligned}
 \langle \partial_i p(\mathbf{r}) \rangle &= \\
 &= - \int d\mathbf{r}' \langle \kappa^{-1}(\mathbf{r}) R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | u(\mathbf{r}_n)) \rangle v_j^p(\mathbf{r}'),
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

что приводит к соотношению

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= H_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \kappa^{-1}(\mathbf{r}) R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle = \\
 &= \langle \kappa^{-1}(\mathbf{r}) \rangle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \\
 &+ K_G^{-1} \langle e^{-u(\mathbf{r})} T_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | u(\mathbf{r}_n)) \rangle.
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

В свою очередь ядро  $R_{ij}$  является решением следующего из (2.6) и (3.1) интегрального уравнения

$$\begin{aligned}
 R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | u(\mathbf{r}_n)) &= \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \\
 &- \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 G^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \\
 &\times \Gamma_{il}^{(0)}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) u(\mathbf{r}_2) R_{lj}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}' | u(\mathbf{r}_n)).
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Итерационное решение уравнения (3.7) дает представление для  $R_{ij}$  в виде ряда по степеням  $\lambda$ . Подстановка этого ряда в (3.6) и последующее почленное усреднение полученного ряда приводят к выражению для  $H_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  в виде бесконечного ряда, каждому члену которого может быть сопоставлена соответствующая диаграмма Фейнмана.

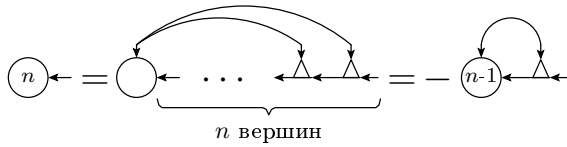


Рис. 2. Диаграммные представления величин  $H_{ij}^{(n)}$

Дальнейшее рассмотрение будем проводить в пространстве фурье-образов. Обозначим через  $H_{ij}^{(n)}(\mathbf{q})$  взятый со знаком  $(-1)^n$  вклад диаграммы, содержащей  $n$  треугольных вершин и скалярную вершину с  $n$  входящими линиями корреляторов, вторые концы которых входят в треугольные вершины (при определении  $H_{ij}^{(n)}$  было учтено, что согласно (П.7) статистические моменты нечетных порядков выражаются через произведения парных корреляторов со знаком «минус»). Соответствующая диаграмма представлена на рис. 2. Из вида диаграммы нетрудно установить, что между функциями  $H_{ij}^{(n)}$  существуют рекуррентные соотношения вида

$$H_{ij}^{(n)}(\mathbf{q}) = - \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} H_{il}^{(n-1)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times G^{(0)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \Gamma_{lj}^{(0)}(\mathbf{q} - \mathbf{p} | - \mathbf{p}, \mathbf{q}) B(\mathbf{p}). \quad (3.8)$$

Введем функцию

$$H'_{ij}(\mathbf{q}) = \sum_{n=0}^{\infty} H_{ij}^{(n)}(\mathbf{q}). \quad (3.9)$$

Из рекуррентных соотношений (3.8) следует уравнение

$$H'_{ij}(\mathbf{q}) = H_{ij}^{(0)}(\mathbf{q}) - \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} H'_{il}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times \tilde{G}^{(0)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \tilde{\Gamma}_{lj}^{(0)}(\mathbf{q} - \mathbf{p} | - \mathbf{p}, \mathbf{q}) \tilde{B}(\mathbf{p}),$$

$$H_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} \langle \kappa^{-1} \rangle, \quad (3.10)$$

которое можно называть уравнением Дайсона для тензорной функции  $H'_{ij}$ . Если изображать  $H'_{ij}$  большим темным кругом, то уравнение Дайсона представляется диаграммным соотношением, изображенным на рис. 3а.

Учет вкладов всех остальных диаграмм получается вставкой всевозможных поддиаграмм, содержащих линии корреляторов, соединяющих только треугольные вершины. Большая часть этих диаграмм определяет поправки к функции Грина и к вершине, и их учет сводится к замене в (3.10) затравочной

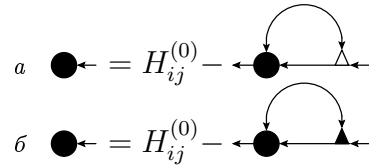


Рис. 3. Диаграммные уравнения для функции  $H$ , соответствующие уравнениям (3.10) (а) и (3.11) (б)

функции Грина  $G^{(0)}$  и вершины  $\Gamma^{(0)}$  на точные (перенормированные)  $G$  и  $\Gamma$ . В результате уравнение Дайсона для тензора  $H_{ij}$  может быть записано в форме

$$H_{ij}(\mathbf{q}) = H_{ij}^{(0)} - \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} H_{il}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times \tilde{G}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \tilde{\Gamma}_{lj}(\mathbf{q} - \mathbf{p} | - \mathbf{p}, \mathbf{q}) \tilde{B}(\mathbf{p}). \quad (3.11)$$

Соответствующее диаграммное уравнение представлено на рис. 3б.

Отметим, что в изотропной системе тензор второго ранга имеет вид

$$H_{ij}(\mathbf{q}) = \delta_{ij} H(q) + \frac{q_j q_j}{q^2} H_1(q). \quad (3.12)$$

При этом в силу свойства (2.10) под знаком интеграла в (3.11) сохранится только пропорциональный символу Кронекера член.

Для нахождения полной функции Грина и полной вершины необходимо решить систему уравнений для этих функций, построенную в том или ином приближении улучшенной теории возмущений. Эти уравнения строятся стандартным образом, и для их совместного решения весьма эффективным оказывается метод ренормализационной группы. В следующем разделе приводится решение указанных уравнений и (3.11) с помощью этого метода.

#### 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ

Метод ренормализационной группы (РГ) возник первоначально в квантовой теории поля как способ улучшения ряда теории возмущений путем суммирования некоторой бесконечной подпоследовательности полного ряда теории возмущений с использованием требования ренормализационной инвариантности ряда [6]. Несколько позднее наметилось новое направление и новая формулировка метода РГ, иницированная работами Вилсона [7, 8], согласно ко-

торым метод РГ представляет собой способ асимптотического исследования существенно многомодовой нелинейной системы путем последовательного уменьшения числа рассматриваемых мод за счет усреднения по части быстрых мод в уравнении для медленных мод (процедура Каданова [9]). Аналогом подобного подхода может служить феноменологический учет влияния движений молекулярных масштабов путем введения членов молекулярного переноса при переходе от кинетического описания к гидродинамическому. Другим аналогом этого подхода является метод Крылова–Боголюбова в теории нелинейных колебаний, когда уравнения для медленно изменяющихся величин (амплитуд и фаз) получаются в результате усреднения по колебаниям на основной частоте.

Для исследования процессов в случайных средах метод РГ был впервые применен в работе [10]. Авторы использовали вилсоновскую формулировку метода РГ для дальнейшего улучшения теории возмущений, согласно которой в уравнении Дайсона оператор собственной энергии не вычислялся в низшем приближении теории возмущений, а являлся решением некоторого уравнения, соответствующего теории самосогласованного поля. Это направление получило дальнейшее развитие в ряде работ других авторов [11–14]. Используемый этими авторами вариант применения метода РГ содержит ряд неоправданных допущений, основанных на формальном перенесении из теории критических явлений некоторых идей и технических приемов метода РГ. В частности, авторы работ [12–14] применяли метод РГ к системе, не обладающей свойством РГ-инвариантности, при проведении масштабных преобразований не учитывали наличия в теории нарушающего масштабную инвариантность дополнительного параметра с размерностью длины, связанного с длиной корреляции флуктуаций коэффициента проводимости. Отметим, что указанная ситуация, связанная с необоснованным применением метода РГ, оказывается весьма распространенной. В частности, подобное имело место и в РГ-теории турбулентности Яхота–Оржега [15]. Чтобы оправдать неправомерное применение метода РГ в теории турбулентности, авторы работы [15] (см. также [16]) сформулировали так называемую идеологию  $\varepsilon$ -разложения (не имеющую ничего общего с методом  $\varepsilon$ -разложения в теории критических явлений [17, 18]), согласно которой имеет место некоторая предполагаемая компенсация при использовании приближения  $\varepsilon \rightarrow 0$  для вычисления универсальных констант турбулентности и погрешностей

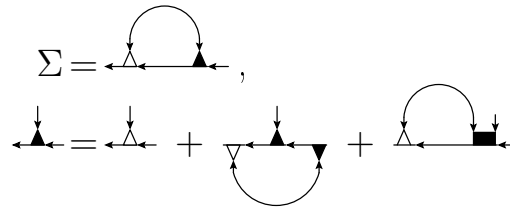


Рис. 4. Диаграммные уравнения для оператора собственной энергии и вершины

за счет пренебрежения локальными взаимодействиями, ответственными за каскадный перенос энергии по спектру. Подробный критический анализ идеологии  $\varepsilon$ -разложения в теории турбулентности приведен в работах автора [19, 20]. Основные возражения связаны с неправильной трактовкой роли локальных взаимодействий, которые, согласно Вилсону, являются доминирующими в рамках РГ-описания, и с необоснованным отождествлением взятого в крупномасштабном пределе  $q \rightarrow 0$  и зависящего от параметра обрезания в пространстве волновых чисел  $\Lambda$  коэффициента диффузии  $\tilde{K}(q, \Lambda)|_{q=0}$  ( $q/\Lambda \rightarrow 0$ ) с коэффициентом диффузии  $\tilde{K}(q)$ , взятым при  $q = \Lambda$ .

Автор в работах [19, 20] продемонстрировал, что в теории турбулентности применение полевой формулировки метода РГ приводит к правильным и более общим результатам без использования необоснованных гипотез. Мы проведем дальнейшее исследование нашей задачи, следуя этому подходу.

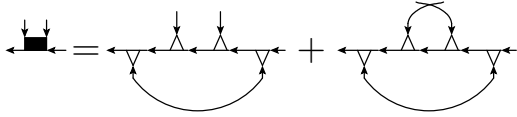
Для нахождения  $\tilde{K}(\mathbf{q})$  необходимо решить систему интегральных уравнений для полной функции Грина, записанной в виде

$$\tilde{G}(\mathbf{q}) = -1/\tilde{D}(q)q^2,$$

полной вершинной функции

$$\tilde{\Gamma}_{ij}(\mathbf{q}|\mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{p}) = \tilde{\lambda}(q)[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\delta_{ij} - p_i q_j]$$

и уравнение (3.11) для функции  $H_{ij}(\mathbf{q})$ , т. е. найти  $\tilde{D}(q)$ ,  $\tilde{\lambda}(q)$ ,  $H(q)$  и  $H_1(q)$ . Мы не будем выписывать уравнения для полной функции Грина и полной вершины, а приведем только диаграммную форму записи этих уравнений, представленных на рис. 4. Обратим внимание на то обстоятельство, что в этих уравнениях левая вершина является затравочной, хотя обычно при попытке сформулировать систему уравнений улучшенной теории возмущений (скелетная диаграммная техника) в диаграммы низшего приближения теории возмущений вместо затравочных вершин всюду вставляются полные. Однако аккуратный анализ диаграммного ряда показывает, что подобный подход неправилен, поскольку при



**Рис. 5.** Диаграммы низшего приближения теории возмущений с двумя входящими линиями корреляторов

этом часть диаграмм оказывается учтенной дважды. Аналогичная ситуация встретилась и в теории турбулентности при построении диаграммной техники Уайлда [21]. На это впервые обратил внимание Ли [22], который указал, что для того чтобы избежать двойного учета одних и тех же диаграмм, следует заменить в операторе собственной энергии только одну затравочную вершину (правую) на полную. Данное правило было подтверждено в теории турбулентности в работе автора [23], где диаграммные уравнения Дайсона были получены вне рамок теории возмущений с помощью формулировки статистической теории турбулентности на основе характеристического функционала. Было также показано, что в уравнении для вершинной функции одна из вершин (левая) также не должна перенормироваться. В применении к рассматриваемой задаче точные диаграммные уравнения для вершины имеют вид, приведенный на рис. 4, где темный квадрат с двумя входящими вертикальными линиями содержит только сильно связанные (одночастично неприводимые) диаграммы. В низшем приближении теории возмущений им соответствуют диаграммы, приведенные на рис. 5. Если пренебречь этими диаграммами, то получается замкнутая система уравнений для оператора собственной энергии и вершины, в которых левая вершина не перенормируется. Отметим, что при написании уравнений (3.11) также не учитывались диаграммы, приведенные на рис. 5.

Итерационное решение этой системы при использовании в качестве нулевого приближения значений  $\tilde{D}(q) = 1$ ,  $\tilde{\lambda}(q) = \lambda_0 = 1$ ,  $H(q) = \langle \kappa^{-1} \rangle$ ,  $H_1 = 0$  воспроизводит ряд перенормированной теории возмущений. С целью построения перенормированной теории возмущений выполним перенормировку путем замен

$$\tilde{G}^{(0)}(\mathbf{q}) = -1/q^2 \rightarrow \tilde{G}^R(\mathbf{q}) = -1/Dq^2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^{(0)}(\mathbf{q}|\mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{p}) &= \lambda_0[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\delta_{ij} - p_i q_j] \rightarrow \\ &\rightarrow \tilde{\Gamma}_{ij}^R(\mathbf{q}|\mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{p}) = \lambda[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\delta_{ij} - p_i q_j] \end{aligned}$$

в членах нулевого приближения уравнений для функции Грина и вершины и заменой  $\langle \kappa^{-1} \rangle \delta_{ij}$  в правой части уравнения (3.11) на некоторую произвольную величину  $H\delta_{ij} + H_1 q_i q_j / q^2$  с добавлением в соответствующих уравнениях компенсирующих эти замены контрчленов. Дополнительно потребуем, чтобы в точке нормировки ( $q = \mu$ ,  $p = 0$ ) точные функции  $\tilde{G}(\mathbf{q})$ ,  $\tilde{\Gamma}_{ij}(\mathbf{q}|\mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{p})$ ,  $H_{ij}(\mathbf{q})$  совпадали с перенормированными, т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\mu) &= D, & \tilde{\lambda}(\mu) &= \lambda, \\ H(\mu) &= H, & H_1(\mu) &= H_1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Последующее итерационное решение уравнений дает ряд перенормированной теории возмущений для функций  $\tilde{D}(q)$ ,  $\tilde{\lambda}(q)$ ,  $H(q)$ ,  $H_1(q)$ . Однако реально оказывается возможным вычислить только несколько первых членов этого ряда. Для получения сведений о свойствах полного ряда надо просуммировать этот ряд (или его бесконечную подпоследовательность). Одним из способов решения подобной задачи является метод РГ.

Примем, что парная корреляционная функция логарифма проводимости имеет вид

$$B(\mathbf{r}) = B_0 F(mr), \quad \tilde{B}(q) = \frac{B_0}{m} \tilde{F}\left(\frac{q}{m}\right),$$

где  $F$  и  $\tilde{F}$  — безразмерные функции безразмерной переменной, величина  $m^{-1}$  имеет размерность длины и связана с корреляционной длиной флуктуаций логарифма проводимости, при этом, если  $F(0) = 1$ , то константа  $B_0$  будет равна дисперсии логарифма проводимости  $\sigma^2$ . Тогда из соображений размерности и оценки структуры членов ряда теории возмущений следует, что искомые функции  $\tilde{D}(q)$ ,  $\tilde{\lambda}(q)$ ,  $H(q)$ ,  $H_1(q)$  могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \tilde{D}(q) &= D f_1\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, \frac{\sigma^2 \lambda}{D^2}\right), \\ \tilde{\lambda}(q) &= \lambda f_2\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, \frac{\sigma^2 \lambda}{D^2}\right), \\ H(q) &= H f_3\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, \frac{\sigma^2 \lambda}{D}\right), \\ H_1(q) &= H_1 f_4\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, \frac{\sigma^2 \lambda}{D}\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

РГ-инвариантность ряда перенормированной теории возмущений заключается в требовании, что этот ряд не должен зависеть от выбора точки нормировки  $\mu$  и совокупности значений перенормированных параметров  $D$ ,  $\lambda$ ,  $H$  и  $H^{(1)}$ , т. е. при РГ-преобразовании

$$\mu \rightarrow \mu', \quad D \rightarrow D', \quad \lambda \rightarrow \lambda', \quad H \rightarrow H', \quad H_1 \rightarrow H'_1$$

функции  $\tilde{D}(q)$ ,  $\tilde{\lambda}(q)$ ,  $H(q)$ ,  $H_1(q)$  не должны меняться. Как правило, для реальных систем РГ-инвариантность не имеет места. Вилсон [11] обратил внимание на то, что специфической особенностью системы, обладающей РГ-инвариантностью, является наличие большого числа мод различных масштабов, вклад которых в физические характеристики системы одинаково существен. Подобная ситуация реализуется в системе, в которой взаимодействуют моды близких масштабов, а взаимодействие мод с существенно различающимися масштабами осуществляется через каскадную последовательность взаимодействий мод промежуточных масштабов, т. е. имеет место «локальность взаимодействий в пространстве масштабов». Вследствие того что вклад мод различных масштабов приблизительно одинаков (не существует выделенного характерного масштаба), суммы по модам и соответствующие им интегралы должны содержать логарифмические расходимости или логарифмически зависеть от масштаба обрезания в системе с конечным числом мод. Согласно Вилсону [7], наличие логарифмических расходимостей в теории является характерным признаком системы, обладающей РГ-инвариантностью.

Поскольку не все теории являются «логарифмическими», Вилсоном и Фишером [17] был предложен так называемый метод  $\varepsilon$ -разложения, согласно которому рассмотрение проводится в «логарифмической» теории, а переход к «реальной» теории осуществляется путем аналитического продолжения по некоторому параметру результатов логарифмической теории к результатам реальной. Параметром, по которому проводится аналитическое продолжение, чаще всего оказывается размерность пространства  $d$ . Так, например, в теории критических явлений логарифмической теории соответствует  $d_c = 4$ . В теории турбулентности таким параметром является показатель степенного поведения корреляционной функции эффективных случайных сил,  $n = n_c + \varepsilon$  [24], при этом логарифмической теории отвечает  $n_c = 4 - d$ , а реальной теории, когда реализуется соответствующий теории турбулентности Колмогорова каскадный механизм переноса энергии по спектру волновых чисел, отвечает  $n = -d = n_c + \varepsilon$  ( $\varepsilon = -4$ ). Размерную регуляризацию в теории поля можно рассматривать как аналог метода  $\varepsilon$ -разложения. Вблизи логарифмической теории фактический параметр разложения оказывается пропорциональным  $\varepsilon$ , в результате чего возникает возможность использования теории возмущений даже в случае сильных межмодовых взаимодействий.

В применении к рассматриваемой системе

РГ-инвариантность не имеет места, т. е. теория не содержит логарифмических расходимостей. Если же мы хотим выделить локальные в пространстве волновых чисел взаимодействия и использовать свойства РГ-инвариантности, то, действуя в рамках метода  $\varepsilon$ -разложения, следует выбрать определенный вид для фурье-образа корреляционной функции  $\tilde{F}(q/m)$ . Выберем эту функцию таким образом, чтобы интегралы по модам содержали логарифмические расходимости и чтобы в точке нормировки фурье-образы реальной корреляционной и выбранной функций совпали. В теории турбулентности такой подход был использован в [25], и были получены результаты, эквивалентные процедуре продолжения по  $\varepsilon$ .

Простой анализ показывает, что для удовлетворения указанным требованиям следует сделать замену

$$\tilde{F}\left(\frac{q}{m}\right) \rightarrow \tilde{F}\left(\frac{\mu}{m}\right) \left(\frac{\mu^2}{q^2}\right)^{d/2+\varepsilon}, \quad (4.3)$$

где параметр  $\varepsilon \rightarrow +0$  введен для удобства выделения логарифмически расходящихся членов.

Требование РГ-инвариантности означает, что при изменении точки нормировки,  $\mu \rightarrow \mu'$ , должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} Df_1\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, \frac{\sigma^2\lambda}{D^2}\right) &= D'f_1\left(\frac{q^2}{\mu'^2}, \frac{m^2}{\mu'^2}, \frac{\sigma^2\lambda'}{D'^2}\right), \\ \lambda f_2\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, \frac{\sigma^2\lambda}{D^2}\right) &= \lambda' f_2\left(\frac{q^2}{\mu'^2}, \frac{m^2}{\mu'^2}, \frac{\sigma^2\lambda'}{D'^2}\right), \\ Hf_3\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, \frac{\sigma^2\lambda}{D}\right) &= H'f_3\left(\frac{q^2}{\mu'^2}, \frac{m^2}{\mu'^2}, \frac{\sigma^2\lambda'}{D'}\right), \\ H_1f_4\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, \frac{\sigma^2\lambda}{D}\right) &= H'_1f_4\left(\frac{q^2}{\mu'^2}, \frac{m^2}{\mu'^2}, \frac{\sigma^2\lambda'}{D'}\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Согласно условиям нормировки (4.1),

$$\begin{aligned} f_1(1, y, g) &= f_2(1, y, g) = f_3(1, y, h) = \\ &= f_4(1, y, h) = 1, \\ g &= \frac{\sigma^2\lambda}{D^2}, \quad h = \frac{\sigma^2\lambda}{D}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из (4.2), (4.4) следует, что функции  $f_{1,2}(x, y, g)$  удовлетворяют функциональным уравнениям РГ:

$$\begin{aligned} f_{1,2}(x, y, g) &= \\ &= f_{1,2}(\alpha, y, g) f_{1,2}\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \tilde{g}(\alpha, y, g)\right), \\ \tilde{g}(x, y, g) &= g f_2(x, y, g) / f_1^2(x, y, g), \end{aligned} \quad (4.6)$$

а функции  $f_{3,4}(x, y, h)$  — уравнениям

$$\begin{aligned} f_{3,4}(x, y, h) &= \\ &= f_{3,4}(\alpha, y, h) f_{3,4}\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \tilde{h}(\alpha, y, g)\right), \\ \tilde{h}(x, y, g) &= h f_2(x, y, g) / f_1(x, y, g). \end{aligned} \quad (4.7)$$



Дифференцируя уравнения (4.6), (4.7) по параметру  $\alpha$  и положив затем  $\alpha = 1$ , получим дифференциальные уравнения для функций  $f_{1,2}(x, y, g)$  и  $f_{3,4}(x, y, h)$ :

$$\left\{ -x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + \beta_g(y, g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_{1,2}(y, g) \right\} \times f_{1,2}(x, y, g) = 0,$$

$$\beta_g(y, g) = \left. \frac{\partial \tilde{g}(x, y, g)}{\partial x} \right|_{x=1},$$

$$\gamma_{1,2}(y, g) = \left. \frac{\partial f_{1,2}(x, y, g)}{\partial x} \right|_{x=1}, \quad (4.8)$$

$$\beta_g = g(\gamma_2 - 2\gamma_1)$$

и

$$\left\{ -x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + \beta_h(y, h) \frac{\partial}{\partial h} + \gamma_{3,4}(y, h) \right\} \times f_{3,4}(x, y, h) = 0,$$

$$\beta_h(y, h) = \left. \frac{\partial \tilde{h}(x, y, h)}{\partial x} \right|_{x=1},$$

$$\gamma_{3,4}(y, h) = \left. \frac{\partial f_{3,4}(x, y, h)}{\partial x} \right|_{x=1}, \quad (4.9)$$

$$\beta_h = h(\gamma_2 - \gamma_1).$$

Для решения дифференциальных уравнений РГ необходимо знать РГ-функции  $\gamma_i$ , определяемые в соответствии с (4.7), (4.9) поведением функций  $f_i$  вблизи точки нормировки. Согласно методу РГ [6], определим эти функции в низшем приближении перенормированной теории возмущений. Соответствующий расчет приводит к следующим результатам для РГ-функций  $\gamma_i$ :

$$\gamma_1(y, g) = \gamma_2(y, g) = A_d g \tilde{F}(y^{-1/2}) y^{-d/2},$$

$$\gamma_3(y, h) = (d-1) A_d h \tilde{F}(y^{-1/2}) y^{-d/2}, \quad (4.10)$$

$$\gamma_4(y, h) = 0,$$

где

$$A_d = \frac{1}{2d} \frac{S_d}{(2\pi)^d},$$

$S_d$  — площадь поверхности  $d$ -мерной сферы единичного радиуса.

Из решения уравнений РГ для функций  $f_1(x, y, g)$ ,  $f_2(x, y, g)$  следует

$$\tilde{h}(q) = \frac{\sigma^2 \tilde{\lambda}(q)}{\tilde{D}(q)} = h = \text{const} \quad (\beta_h = 0). \quad (4.11)$$

Решение уравнения (4.9) для функции  $f_3(x, y, h)$  имеет вид

$$f_3(x, y, h) = \exp \left\{ - \int_y^{y/x} \frac{\gamma_3(t, h) dt}{t} \right\} =$$

$$= \exp \left\{ -(d-1) A_d h \int_y^{y/x} \tilde{F}(t^{-1/2}) t^{-d/2} dt \right\}, \quad (4.12)$$

что дает

$$H(q) =$$

$$= H \exp \left\{ \frac{2(d-1) A_d h}{m^d} \int_\mu^q \tilde{F} \left( \frac{p}{m} \right) p^{d-1} dp \right\}. \quad (4.13)$$

Условия «асимптотической свободы»,

$$H(\infty) = \langle \kappa_1 \rangle, \quad \tilde{D}(\infty) = 1, \quad \tilde{\lambda}(\infty) = 1,$$

приводят к  $h = \sigma^2$ , что дает возможность найти связь  $H$  и  $\mu$ :

$$H = \langle \kappa^{-1} \rangle \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{d-1}{d} \frac{S_d \sigma^2}{(2\pi m)^d} \int_\mu^\infty \tilde{F} \left( \frac{p}{m} \right) p^{d-1} dp \right\}. \quad (4.14)$$

После исключения этих параметров получаем

$$H(q) = \langle \kappa^{-1} \rangle \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{d-1}{d} \frac{S_d \sigma^2}{(2\pi m)^d} \int_q^\infty \tilde{F} \left( \frac{p}{m} \right) p^{d-1} dp \right\} =$$

$$= \langle \kappa^{-1} \rangle \exp \left\{ - \frac{d-1}{d} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{B}(\mathbf{p}) \theta(p-q) \right\} = \langle \kappa^{-1} \rangle \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{d-1}{d} \sigma^2 + \frac{d-1}{d} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{B}(\mathbf{p}) \theta(q-p) \right\}, \quad (4.15)$$

где  $\theta(p)$  — функция Хевисайда.

Решение уравнения для  $H_1(q)$  дает  $H_1(q) = \text{const} = 0$ .

С учетом формулы логнормального распределения,

$$\langle \kappa^{-1} \rangle = K_G^{-1} \exp(\sigma^2/2),$$

из (4.15) найдем

$$\tilde{K}_{ij}(\mathbf{q}) = K_G \delta_{ij} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{d-2}{2d} \sigma^2 - \frac{d-1}{d} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{B}(\mathbf{p}) \theta(q-p) \right\}, \quad (4.16)$$

что в крупномасштабном пределе  $q \rightarrow 0$  воспроизводит формулу Ландау–Лифшица–Матерона (1.6).

### 5. ОБСУЖДЕНИЕ

Использование метода РГ в квантово-полевой формулировке позволяет получить не только справедливую в крупномасштабном пределе формулу Ландау–Лифшица–Матерона, но и найти  $\tilde{K}_{ij}(\mathbf{q})$  во всем интервале изменения волновых чисел; при этом оказывается учтенной зависимость от формы корреляционной функции и от масштабного параметра с размерностью длины. Отметим, что вилсоновский РГ-подход позволяет находить только усредненный отклик среды на крупномасштабные возмущения.

Наш результат показывает, что в рамках РГ-подхода вклады эффектов перенормировки функции Грина и вершины не малы, однако они компенсируют друг друга и поэтому их можно не учитывать, т. е. с самого начала искать решение уравнения (3.10). Следует подчеркнуть, что основанные на применении РГ-подхода предсказания не следует рассматривать как точные результаты, поскольку при их получении использовалась формула (4.3), являющаяся аналогом процедуры  $\varepsilon$ -разложения, не имеющей строгого обоснования. Эта процедура является платой за право пользоваться соображениями РГ-инвариантности при суммировании бесконечных рядов теории возмущений.

Для выяснения того, в какой мере обоснованы использованные в рамках РГ-подхода технические приемы, нами были проведены вычисления эффективной проницаемости во втором приближении теории возмущений для модельного случая

$$B(r) = B_0 \exp(-r^2/4m).$$

Соответствующий расчет дает

$$\begin{aligned} K_{eff}^{-1} &= K_G^{-1} \left\{ 1 + \frac{d-1}{d} \sigma^2 + \frac{d-1}{2d} \sigma^4 [a_1 + a_2 + a_3] \right\}, \\ a_1 &= 1 - \beta \left( \frac{d}{2} \right), \quad a_2 = -1 + (d-1) \beta \left( \frac{d}{2} \right), \\ a_3 &= \frac{d-1}{d} - (d-2) \beta \left( \frac{d}{2} \right), \\ \beta \left( \frac{d}{2} \right) &= \int_0^1 \frac{t^{d/2-1}}{1+t} dt, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $a_1$  — вклад второй итерации при решении уравнения (3.10),  $a_2$  и  $a_3$  учитывают соответственно вклады от эффектов перенормировки функции Грина и вершины. Из (5.1) следует, что перечисленные выше предположения оказываются некорректными по крайней мере при  $d = 2$ ,

хотя и получается соответствующий формуле Ландау–Лифшица–Матерона суммарный результат. Однако при учете того, что с ростом  $d$  функция  $\beta(d/2) \rightarrow 1/d$ , находим

$$a_1 \rightarrow (d-1)/d, \quad a_2 \rightarrow -1/d, \quad a_3 \rightarrow 1/d,$$

и в пределе больших  $d$  использованные нами предположения оказываются справедливыми. Численные оценки показывают, что уже при  $d = 3$  ошибка за счет использования указанных приближений не превышает 15 %, а для гипотетического случая  $d = 4$  не превышает 8 %. Эти оценки дают основание надеяться, что использование формулы (4.16) для нахождения формы интегрального ядра  $K_{ij}^{-1}(r)$  не приведет к большим погрешностям при построении статистического решения задачи переноса в случайно-неоднородной среде.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 99-01-00957, 99-01-01083).

### ПРИЛОЖЕНИЕ

#### Вычисление статистических моментов

Для нахождения величин вида

$$\langle \exp\{-u(\mathbf{r})\} u(\mathbf{r}_1) \dots u(\mathbf{r}_n) \rangle \quad (П.1)$$

воспользуемся методом характеристического функционала, представляющего собой функциональный фурье-образ функции распределения для  $u(\mathbf{r})$ . Согласно определению,

$$\Phi[\eta(\mathbf{x})] = \left\langle \exp \left\{ i \int d\mathbf{x} u(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}) \right\} \right\rangle. \quad (П.2)$$

В соответствии с (П.2) для средних значений функции случайных полей будем иметь

$$\begin{aligned} \langle F\{u(\mathbf{r}_1), u(\mathbf{r}_2), \dots, u(\mathbf{r}_n)\} \rangle &= \\ &= F \left\{ \frac{\delta}{i\delta\eta(\mathbf{r}_1)}, \frac{\delta}{i\delta\eta(\mathbf{r}_2)}, \dots, \frac{\delta}{i\delta\eta(\mathbf{r}_n)} \right\} \times \\ &\quad \times \Phi[\eta(\mathbf{x})]_{|\eta(\mathbf{x})=0} \end{aligned} \quad (П.3)$$

и для интересующих нас средних вида (П.1) найдем

$$\begin{aligned} \langle \exp\{-u(\mathbf{r})\} u(\mathbf{r}_1) \dots u(\mathbf{r}_n) \rangle &= \\ &= \exp \left\{ i \frac{\delta}{\delta\eta(\mathbf{r})} \right\} \frac{\delta}{i\delta\eta(\mathbf{r}_1)} \dots \frac{\delta}{i\delta\eta(\mathbf{r}_n)} \times \\ &\quad \times \Phi[\eta(\mathbf{x})]_{|\eta(\mathbf{x})=0}. \end{aligned} \quad (П.4)$$

Операторная экспонента в (П.4) представляет собой оператор функционального сдвига, действие которого определяется соотношением

$$\exp \left\{ i \frac{\delta}{\delta(\mathbf{r})} \right\} \Phi[\eta(\mathbf{x})] = \Phi[\eta(\mathbf{x}) + i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})]. \quad (\text{П.5})$$

Использование формул (П.3)–(П.5) позволяет вычислить средние на основе знания явного вида характеристического функционала. В случае логнормального распределения при  $\langle u(\mathbf{r}) \rangle = 0$  можно найти

$$\begin{aligned} \Phi[\eta(\mathbf{x})] &= \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \eta(\mathbf{x}) B(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \eta(\mathbf{x}') \right\}. \quad (\text{П.6}) \end{aligned}$$

Приведем результаты соответствующих расчетов для нескольких низших моментов:

$$\begin{aligned} \langle \kappa^{-1}(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}_1) \rangle &= -\langle \kappa^{-1} \rangle B(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \\ \langle \kappa^{-1}(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}_1) u(\mathbf{r}_2) \rangle &= \\ &= \langle \kappa^{-1} \rangle \{ B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + B(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) B(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \}, \\ \langle \kappa^{-1}(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}_1) u(\mathbf{r}_2) u(\mathbf{r}_3) \rangle &= \\ &= -\langle \kappa^{-1} \rangle \{ B(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) + \\ &+ B(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + B(\mathbf{r} - \mathbf{r}_3) B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \\ &+ B(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) B(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) B(\mathbf{r} - \mathbf{r}_3) \}. \quad (\text{П.7}) \end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. L. W. Gelhar and C. L. Axness, Water Resour. Res. **19**, 161 (1983).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гостехиздат, Москва (1957).
3. Э. В. Теодорович, ПММ **66**, 448 (2002).
4. P. C. Martin, E. D. Siggia, and H. A. Rose, Phys. Rev. A **8**, 423 (1973).
5. D. T. Hristopoulos and G. Christakos, J. Stoch. Hydr. Hydraul. **11**, 369 (1997).
6. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1984).
7. K. Wilson, Adv. Math. **16**, 170 (1975).
8. K. G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975).
9. L. P. Kadanoff, Physics (N-Y), **2**, 263 (1966).
10. D. S. Dean, I. T. Drummond, and R. R. Horgan, J. Phys. A **27**, 5135 (1994).
11. Q. Zhang, Water Resour. Res. **31**, 577 (1995).
12. U. Jaekel and H. Vereecken, Water Resour. Res. **33**, 2287 (1997).
13. D. T. Hristopoulos and G. Christakos, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment **13**, 131 (1999).
14. B. Noetinger, C. R. Paris **331**(5), 353 (2000).
15. V. Yakhot and S. A. Orszag, J. Sci. Comp. **1**, 3 (1986).
16. W. P. Dannevik, V. Yakhot, and S. A. Orszag, Phys. Fluids **30**, 2021 (1987).
17. K. Wilson and M. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972).
18. K. Wilson and G. Kogut, Phys. Rep. C **12**, 75 (1974).
19. Э. В. Теодорович, Изв. АН СССР, сер. МЖГ вып. 4, 36 (1990).
20. Э. В. Теодорович, Изв. РАН, сер. МЖГ вып. 1, 40 (1994).
21. H. W. Wyld, Ann. Phys. **14**, 143 (1961).
22. L. L. Lee, Ann. Phys. **32**, 292 (1965).
23. Э. В. Теодорович, ТМФ **101**, 28 (1994).
24. C. De Dominicis and P. C. Martin, Phys. Rev. A **19**, 419 (1979).
25. Э. В. Теодорович, ДАН СССР **299**, 836 (1988).