

# ДИСПЕРСИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

Ю. П. Емец\*

*Институт электродинамики Национальной академии наук Украины  
03680, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 17 декабря 2001 г.

Изучена дисперсия диэлектрической проницаемости двумерных неоднородных матричных материалов, имеющих различное строение. Эффективные параметры рассмотренных систем допускают точный аналитический расчет, что позволило проанализировать влияние концентраций включений и их формы на частотные зависимости комплексной диэлектрической проницаемости неоднородных материалов. Установлены условия, при которых дисперсия диэлектрической проницаемости не проявляется.

PACS: 77.22.Ch

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Электрическая спектроскопия гетерогенных диэлектриков привлекает к себе внимание во многих областях физики [1–9]. С ее помощью можно получить важную информацию о структуре композиционных материалов, их составе и физических свойствах компонентов. Методы исследования дисперсии диэлектрических материалов находят применение при изучении конденсированных сред, материальные характеристики которых описываются комплексной диэлектрической проницаемостью. Они используются, например, в физике высокоомных полупроводников, в биофизике, в коллоидной химии и в физике искусственных диэлектриков и магнетиков [1–3]. Однако сложной проблемой остается интерпретация опытных данных при установлении строения неоднородных систем. Неоднозначность в трактовке результатов экспериментальных исследований возникает даже для относительно простых по своей структуре материалов. Определенную ясность в исследование этого вопроса может внести анализ точно разрешимых моделей, изучение которых усиленно проводилось в последнее время.

Наиболее последовательная теория диэлектрической дисперсии разработана для конденсированных сред с ориентационным механизмом поляризации вещества. Эта теория была построена Дебаем на

основе представлений о релаксационных процессах диполей с одним временем релаксации [4]. В действительности спектральные характеристики реальных материалов лишь в относительно малом числе случаев строго отвечают спектральным зависимостям Дебая и классической круговой диаграмме Коул–Коула [2, 5]. Поэтому для описания экспериментальных результатов, не соответствующих идеальной диаграмме комплексной диэлектрической проницаемости, были предложены обобщенные диаграммы — диаграммы и уравнения Коула–Давидсона, Хаврилика–Негами, Фуосси–Кирквуда, Вильямса–Вотса и других авторов [6–9]. Однако все эти модифицированные диаграммы и уравнения, используемые для систематизации многочисленных опытных данных, содержат эмпирические параметры, которые не имеют физического обоснования с позиций молекулярной физики и геометрической структуры материалов.

Теория Дебая применима ко всем ориентационно-поляризованным средам (жидким и твердым) независимо от причин, которые вызывают их поляризацию. На этом основании она была распространена на гетерогенные среды, в частности, на слоистые системы [5]. Реально в отдельных фазах диэлектрических композиционных материалов могут находиться подвижные носители зарядов, которые, попадая в ловушки в объеме или на поверхности разнородных сред, остаются свободными. Если перемещение сво-

\*E-mail: emets@irpen.kiev.ua

бодных зарядов возможно только в ограниченных областях, эти области в целом ведут себя как макроскопические диполи. Этот вид объемной или поверхностной поляризации гетерогенных сред связывают с именами Максвелла и Вагнера, впервые рассмотревших круг вопросов с такого рода явлениями в образцах составных диэлектриков. Исследовались материалы, имеющие одномерное (слоистое) строение [10, 11].

В последние годы в теории гетерогенных систем было получено несколько точных результатов по расчету эффективных параметров двумерных структур. В основном это двоякопериодические двухкомпонентные матричные системы, обладающие высокой степенью геометрической симметрии. Для таких систем удалось точно рассчитать локальное электрическое поле в разнородных фазах и аналитически определить усредненные характеристики. Благодаря этому обстоятельству имеется возможность изучить дисперсию диэлектрической проницаемости двухкомпонентных сред в зависимости от физических свойств компонентов, их концентрации и формы включений. Исследованию этих вопросов посвящена настоящая работа. Показано, что действительно существует определенная связь между частотным спектром и структурой композиционных диэлектриков. Для некоторых из рассмотренных периодических систем удается получить в замкнутой форме выражения, определяющие диаграммы типа диаграмм Коул–Коула. Они играют важную роль в выяснении механизмов релаксации зарядов в диэлектриках и позволяют экстраполировать экспериментальные данные в труднодоступные для измерений диапазоны частот.

Поляризационные процессы в неоднородной среде описываются в квазистационарном приближении [12]. Это предполагает, что длина волны внешнего переменного электрического поля велика по сравнению с характерными размерами исследуемого образца. Следовательно, пространственная дисперсия в веществе несущественна, и в неоднородной среде устанавливается равновесная поляризация Максвелла–Вагнера, успевающая следить за изменением электрического поля во времени. Предполагается также, что другие виды поляризации в отдельных фазах композиционного материала существенного вклада в поляризацию вещества не дают. Диэлектрические материалы исследуются в условиях, когда магнитное поле можно не учитывать. При этих допущениях изучение диэлектрической дисперсии сводится вначале к нахождению электрического поля в композитном материале и затем к вычислению

его эффективных параметров при заданной частоте внешнего поля, которое изменяется по гармоническому закону. Каждая фаза структуры характеризуется собственной комплексной диэлектрической проницаемостью. На первом этапе решения задачи можно воспользоваться математическим аппаратом для стационарных полей и после этого ввести комплексные диэлектрические проницаемости компонентов, зависящие от частоты внешнего электрического поля.

## 2. ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ МАТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ

Ниже исследуется диэлектрическая среда с проницаемостью  $\varepsilon_1$ , в которой регулярно с двоякопериодическим чередованием расположены однотипные цилиндрические включения с проницаемостью  $\varepsilon_2$ . Матрица и дисперсная фаза обладают проводимостями соответственно  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Анализируются две системы: одна с цилиндрами кругового сечения, а другая — с квадратными цилиндрами. Такие системы допускают аналитический расчет эффективных параметров, что упрощает анализ решения и позволяет изучить влияние структурных элементов на диэлектрический спектр.

### 2.1. Зависимость диэлектрического спектра от концентрации включений

Рассмотрим вначале волокнистый материал с регулярной структурой, в котором волокна круглого сечения радиуса  $r$  образуют правильную квадратную решетку с периодом  $h$  (рис. 1). В поперечном направлении к осям цилиндров среда в целом изотропна. В силу периодической структуры неоднородной системы ее эффективные параметры могут

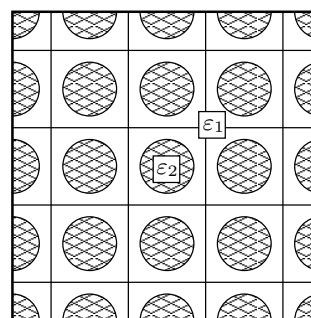


Рис. 1. Фрагмент композитного диэлектрического материала с цилиндрическими включениями кругового сечения

быть определены из решения полевой задачи для одной ячейки периода. Впервые такая задача была исследована Рэлеем [13] применительно к электропроводным средам (решение было получено в общем случае для прямоугольной ячейки, что отвечает в среднем анизотропной системе). В дальнейшем метод вычисления эффективных параметров, разработанный Рэлеем, был распространен на изучение других структур [14, 15]. Были предложены также новые приемы решения задачи Рэлея [16–18].

Если концентрация включений невелика,  $s \leq 0.5$ , то, как показано в работе [17], эффективная диэлектрическая проницаемость рассматриваемой среды определяется следующим выражением:

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \frac{1 - s\Delta_{\varepsilon 12}}{1 + s\Delta_{\varepsilon 12}}, \quad (1)$$

где  $s$  — концентрация включений ( $s = \pi r^2/h^2$ ),  $\Delta_{\varepsilon 12}$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды,

$$\Delta_{\varepsilon 12} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad -1 \leq \Delta_{\varepsilon 12} \leq 1. \quad (2)$$

В указанном диапазоне изменения концентрации включений формула (1) справедлива с высокой степенью приближения даже при большой разнице между диэлектрическими проницаемостями фаз  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , или, что равносильно, при больших абсолютных величинах параметра  $\Delta_{\varepsilon 12}$ .

При изучении поляризации Максвелла–Вагнера в неоднородных материалах в исходных уравнениях электромагнитного поля учитываются токи смещения и токи проводимости [2]. Это означает, что для периодически изменяющегося электрического поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$  вводится обобщенная комплексная диэлектрическая проницаемость  $\tilde{\varepsilon}(\omega)$  (в относительных величинах):

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \tilde{\varepsilon}'(\omega) - i\tilde{\varepsilon}''(\omega) = \hat{\varepsilon}(\omega) - i\frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\varepsilon_0\omega}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\omega$  — круговая частота,  $\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$  и  $\hat{\sigma}(\omega) = \sigma'(\omega) - i\sigma''(\omega)$  — комплексные величины диэлектрической проницаемости и проводимости материала.

Основной вклад в поляризацию неоднородного материала вносит поляризация Максвелла–Вагнера. При этом другие виды поляризации можно считать несущественными. Локально неоднородная среда в этом случае обычно характеризуется постоянными величинами диэлектрической проницаемости  $\hat{\varepsilon}_{1,2}(\omega) = \varepsilon_{1,2}$  и проводимости  $\hat{\sigma}_{1,2}(\omega) = \sigma_{1,2}$

и, следовательно, обобщенная диэлектрическая проницаемость имеет явную зависимость от частоты  $\tilde{\varepsilon}_{1,2} = \varepsilon_{1,2} - i\sigma_{1,2}/\varepsilon_0\omega$ . При  $\omega \rightarrow \infty$  диэлектрическая проницаемость компонентов, имеющих конечную проводимость, неограниченно растет. Однако диэлектрический спектр гетерогенной среды в целом обладает таким свойством только при определенном сочетании физических свойств компонентов всей системы.

В комплексном виде эффективная диэлектрическая проницаемость (1) записывается так:

$$\hat{\varepsilon}_{eff}(\omega) = \varepsilon'_{eff}(\omega) - i\varepsilon''_{eff}(\omega) = \tilde{\varepsilon}_1 \frac{1 - s\hat{\Delta}_{12}(\omega)}{1 + s\hat{\Delta}_{12}(\omega)}. \quad (4)$$

Здесь введен комплексный параметр  $\hat{\Delta}_{12}(\omega) = \Delta'_{12}(\omega) - i\Delta''_{12}(\omega)$ , составляющие которого определены формулами

$$\begin{aligned} \Delta'_{12}(\omega) &= \frac{\Delta_{\varepsilon 12}(1 - \Delta_{\sigma 12})^2 + \Gamma_2^2(\omega)\Delta_{\sigma 12}(1 - \Delta_{\varepsilon 12})^2}{(1 - \Delta_{\sigma 12})^2 + \Gamma_2^2(\omega)(1 - \Delta_{\varepsilon 12})^2}, \\ \Delta''_{12}(\omega) &= \frac{\Gamma_2(\omega)(\Delta_{\sigma 12} - \Delta_{\varepsilon 12})(1 - \Delta_{\sigma 12})(1 - \Delta_{\varepsilon 12})}{(1 - \Delta_{\sigma 12})^2 + \Gamma_2^2(\omega)(1 - \Delta_{\varepsilon 12})^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\Delta_{\sigma 12}$  — относительная проводимость неоднородной среды,

$$\Delta_{\sigma 12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad -1 \leq \Delta_{\sigma 12} \leq 1. \quad (6)$$

В формулах (5)  $\Gamma_2(\omega)$  — частотный параметр, который для удобства последующего анализа отнесен к дисперсной фазе (напомним, что характеристики этой фазы обозначены индексом 2):  $\Gamma_2(\omega) = \omega_{02}/\omega$  ( $\omega_{02} = \sigma_2/\varepsilon_0\varepsilon_2$  — максвелловская частота).

Отметим, что для характеристики рассматриваемой двухкомпонентной системы можно ввести другой частотный параметр —  $\Gamma_1(\omega)$ , отнесенный к фазе 1 (матрице):  $\Gamma_1(\omega) = \omega_{01}/\omega$  ( $\omega_{01} = \sigma_1/\varepsilon_0\varepsilon_1$ ). Параметры  $\Gamma_1(\omega)$  и  $\Gamma_2(\omega)$  не независимы — они связаны между собой соотношением

$$\Gamma_1(\omega) = \frac{\varepsilon_2\sigma_1}{\varepsilon_1\sigma_2}\Gamma_2(\omega), \quad (7)$$

или, что то же самое,

$$\Gamma_1(\omega) = \frac{(1 - \Delta_{\varepsilon 12})(1 + \Delta_{\sigma 12})}{(1 + \Delta_{\varepsilon 12})(1 - \Delta_{\sigma 12})}\Gamma_2(\omega). \quad (8)$$

Из формул (7) и (8) следует, что при выполнении условия

$$\varepsilon_1\sigma_2 = \varepsilon_2\sigma_1 \quad (\Delta_{\varepsilon 12} = \Delta_{\sigma 12}) \quad (9)$$

параметры  $\Gamma_1(\omega)$  и  $\Gamma_2(\omega)$  равны друг другу и, таким образом, система характеризуется одним частотным параметром

$$\Gamma(\omega) = \Gamma_1(\omega) = \Gamma_2(\omega).$$

В этом особом случае действительная составляющая комплексного параметра  $\hat{\Delta}_{12}(\omega)$  не зависит от частоты, а его мнимая составляющая равна нулю:

$$\Delta'_{12}(\omega) = \Delta_{\varepsilon 12}, \quad \Delta''_{12}(\omega) = 0. \quad (10)$$

В дальнейшем параметр  $\Gamma_2(\omega)$  удобно представить в таком виде:

$$\Gamma_2(\omega) = \frac{1 - \Delta_{\omega 2}(\omega)}{\Delta_{\omega 2}(\omega)}, \quad (11)$$

где  $\Delta_{\omega 2}$  — относительная частота,

$$\Delta_{\omega j}(\omega) = \frac{\omega}{\omega_{0j} + \omega}, \quad (12)$$

$$0 \leq \Delta_{\omega j}(\omega) \leq 1 \quad (j = 1, 2).$$

Из выражений (4) и (5) определяются действительная и мнимая части эффективной комплексной диэлектрической проницаемости системы:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{eff}(\omega) &= \\ &= \varepsilon_1 \left[ m(\omega) + n(\omega) \Gamma_2(\omega) \frac{(1 - \Delta_{\varepsilon 12})(1 + \Delta_{\sigma 12})}{(1 + \Delta_{\varepsilon 12})(1 - \Delta_{\sigma 12})} \right], \\ \varepsilon''_{eff}(\omega) &= \\ &= \varepsilon_1 \left[ m(\omega) \Gamma_2(\omega) \frac{(1 - \Delta_{\varepsilon 12})(1 + \Delta_{\sigma 12})}{(1 + \Delta_{\varepsilon 12})(1 - \Delta_{\sigma 12})} - n(\omega) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь использованы обозначения

$$m(\omega) = \frac{1 - s^2 [\Delta_{12}'^2(\omega) + \Delta_{12}''^2(\omega)]}{[1 + s\Delta_{12}'(\omega)]^2 + [s\Delta_{12}''(\omega)]^2}, \quad (14)$$

$$n(\omega) = \frac{2s\Delta_{12}''(\omega)}{[1 + s\Delta_{12}'(\omega)]^2 + [s\Delta_{12}''(\omega)]^2}.$$

Если выполняется условие (9), то, учитывая формулы (10), получаем, что

$$m(\omega) = \frac{1 - s\Delta_{\varepsilon 12}}{1 + s\Delta_{\varepsilon 12}}, \quad n(\omega) = 0,$$

и выражения (13) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{eff}(\omega) &= \varepsilon_1 \frac{1 - s\Delta_{\varepsilon 12}}{1 + s\Delta_{\varepsilon 12}}, \\ \varepsilon''_{eff}(\omega) &= \varepsilon'_{eff} \Gamma_2(\omega) \frac{(1 - \Delta_{\varepsilon 12})(1 + \Delta_{\sigma 12})}{(1 + \Delta_{\varepsilon 12})(1 - \Delta_{\sigma 12})}. \end{aligned} \quad (15)$$

В этом особом случае эффективная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon'_{eff}(\omega)$ , как видно, не зависит от частоты, а эффективный коэффициент диэлектрических потерь  $\varepsilon''_{eff}(\omega)$  изменяется обратно пропорционально частоте (поскольку  $\Gamma_2(\omega) \propto 1/\omega$ ).

Соотношение (9) определяет, таким образом, условие, при котором дисперсия диэлектрической проницаемости неоднородной среды не проявляется. Оно, как показывает анализ, справедливо для всех известных двумерных двухкомпонентных матричных систем и, по-видимому, имеет общий характер. Физически соотношение определяет условия, при которых на границе разнородных сред не образуется поверхностный заряд.

В общем случае, когда  $\varepsilon_1 \sigma_2 \neq \varepsilon_2 \sigma_1$  ( $\Delta_{\varepsilon 12} \neq \Delta_{\sigma 12}$ ), при изменении частоты эффективная диэлектрическая проницаемость композитного материала в пределе изменяется от электростатической величины при  $\omega \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{eff}(0) &= \\ &= \varepsilon_1 \left[ \frac{1 - s\Delta_{\sigma 12}}{1 + s\Delta_{\sigma 12}} + 2s \frac{(\Delta_{\sigma 12} - \Delta_{\varepsilon 12})(1 + \Delta_{\sigma 12})}{(1 + \Delta_{\varepsilon 12})(1 + s\Delta_{\sigma 12})^2} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

до оптической величины при  $\omega \rightarrow \infty$ ,

$$\varepsilon'_{eff}(\infty) = \varepsilon_1 \frac{1 - s\Delta_{\varepsilon 12}}{1 + s\Delta_{\varepsilon 12}}. \quad (17)$$

Последняя формула совпадает с (1) и с соответствующим выражением в (15).

Для материала со сквозной проводимостью эффективный коэффициент потерь характеризуется сингулярностью при  $\omega \rightarrow 0$  и принимает нулевое значение при  $\omega \rightarrow \infty$ :

$$\varepsilon''_{eff}(0) \rightarrow \infty, \quad \varepsilon''_{eff}(\infty) = 0. \quad (18)$$

Согласно выражениям (16)–(18) эффективные величины диэлектрической проницаемости и коэффициента потерь в составном диэлектрике существенно зависят от концентрации включений и от соотношения между диэлектрическими и проводящими свойствами компонентов материала.

Для иллюстрации на рис. 2 представлены графические зависимости эффективных значений диэлектрической проницаемости  $\varepsilon'_{eff}(\omega)$ , коэффициента диэлектрических потерь  $\varepsilon''_{eff}(\omega)$  и тангенса диэлектрических потерь  $\text{tg } \delta_{eff}(\omega) = \varepsilon''_{eff}(\omega)/\varepsilon'_{eff}(\omega)$  от относительной частоты  $\Delta_{\omega 2}$  (см. формулу (12)). Кривые построены для относительных величин  $\varepsilon'_{eff*} = \varepsilon'_{eff}/\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon''_{eff*} = \varepsilon''_{eff}/\varepsilon_1$  (в дальнейшем для краткости звездочки опущены). Диаграмма эффективной комплексной диэлектрической проницаемости для этого случая изображена на рис. 3. Штриховые линии на этих

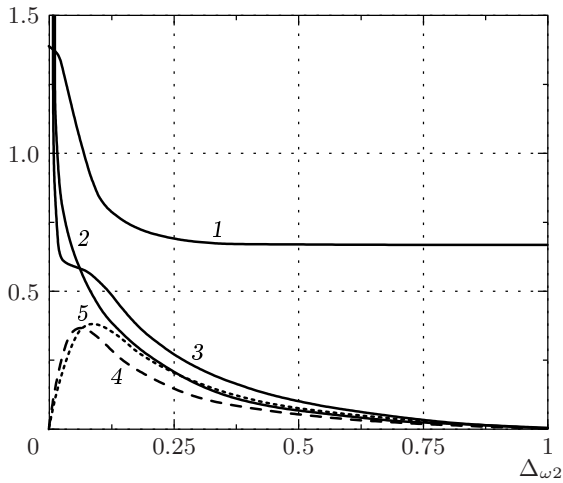


Рис. 2. Зависимости эффективной диэлектрической проницаемости  $\epsilon'_{eff}$  (1), эффективного коэффициента потерь  $\epsilon''_{eff}$  (2), тангенса эффективных диэлектрических потерь  $\text{tg } \delta_{eff}$  (3) и функций  $\chi_{eff}$  (4),  $\text{tg } \lambda_{eff}$  (5) от относительной частоты  $\Delta\omega_2$  при концентрации включений  $s = 0.25$  и соотношении параметров  $\epsilon_2/\epsilon_1 = 0.1$  и  $\sigma_2/\sigma_1 = 10$

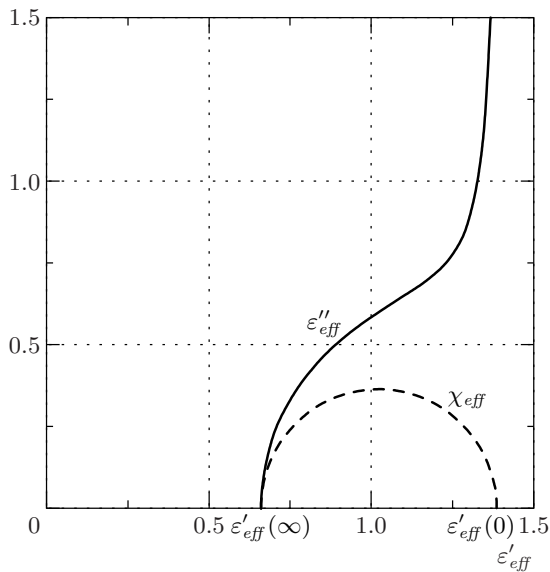


Рис. 3. Диаграмма эффективной комплексной диэлектрической проницаемости неоднородного диэлектрика с такими же параметрами, как и на рис. 2

рисунок изображают функции  $\chi_{eff}(\omega)$  и  $\text{tg } \lambda_{eff}(\omega)$ , отвечающие зависимостям  $\epsilon''_{eff}(\omega)$  и  $\text{tg } \delta_{eff}(\omega)$ , из ко-

торых исключен сингулярный член:

$$\begin{aligned} \chi_{eff}(\omega) &= \epsilon''_{eff}(\omega) - \epsilon''_{eff}(0), \\ \text{tg } \lambda_{eff}(\omega) &= \frac{\chi_{eff}(\omega)}{\epsilon'_{eff}(\omega)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Последние, как видно, соответствуют релаксационному спектру Дебая и круговой диаграмме Коул-Коула [19]. Графики построены для концентрации включений  $s = 0.25$  и следующих величин диэлектрических проницаемостей и проводимостей компонентов материала:  $\epsilon_1 = 10$ ,  $\epsilon_2 = 1$  ( $\Delta_{\epsilon 12} = 0.818$ ),  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 10$  ( $\Delta_{\sigma 12} = -0.818$ ).

В практическом отношении наибольший интерес вызывают системы, у которых идеальная диэлектрическая среда,  $\tilde{\epsilon}_1 = \epsilon_1$ ,  $\sigma_1 = 0$  ( $\Delta_{\sigma 12} = -1$ ), содержит включения, свойства которых описываются комплексной диэлектрической проницаемостью:  $\tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_2 - i\sigma_2/\epsilon_0\omega$ . В этом случае эффективная комплексная диэлектрическая проницаемость материала определяется так:

$$\hat{\epsilon}_{eff}(\omega) = \epsilon_1[m(\omega) + in(\omega)], \tag{20}$$

где теперь параметры  $\Delta'_{12}(\omega)$  и  $\Delta''_{12}(\omega)$  имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Delta'_{12}(\omega) &= \frac{4\Delta_{\epsilon 12} - \Gamma_2^2(\omega)(1 - \Delta_{\epsilon 12})^2}{4 + \Gamma_2^2(\omega)(1 - \Delta_{\epsilon 12})^2}, \\ \Delta''_{12}(\omega) &= \frac{2\Gamma_2(\omega)(\Delta_{\epsilon 12}^2 - 1)}{4 + \Gamma_2^2(\omega)(1 - \Delta_{\epsilon 12})^2}. \end{aligned} \tag{21}$$

При  $\omega \rightarrow 0$  эффективный коэффициент диэлектрических потерь в таком материале принимает нулевое значение, а эффективная электростатическая проницаемость определяется только проницаемостью матрицы и объемом включений, независимо от их свойств:

$$\epsilon'_{eff}(0) = \epsilon_1 \frac{1+s}{1-s}, \quad \epsilon''_{eff}(0) = 0. \tag{22}$$

В предельном случае,  $\omega \rightarrow \infty$ , получаем

$$\epsilon'_{eff}(\infty) = \epsilon_1 \frac{1 - s\Delta_{\epsilon 12}}{1 + s\Delta_{\epsilon 12}}, \quad \epsilon''_{eff}(\infty) = 0. \tag{23}$$

Выражения (22) и (23) можно также получить непосредственно из формул (16)–(18), полагая  $\sigma_1 = 0$  ( $\Delta_{\sigma 12} = -1$ ).

Интересно отметить, что проводимость матрицы не влияет на величину эффективной оптической проницаемости — в двух рассмотренных выше случаях выражения  $\epsilon'_{eff}(\infty)$  совпадают (сравните формулы (17) и (23)).

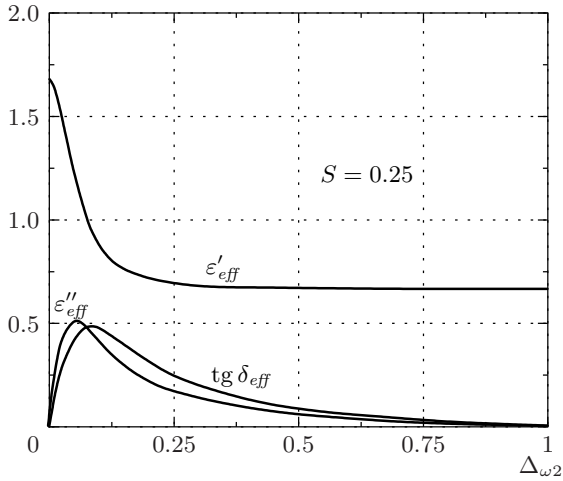


Рис. 4. Кривые дисперсии двухкомпонентного диэлектрика с параметрами  $\epsilon_1 = 10$ ,  $\epsilon_2 = 1$  и  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 10$  при концентрации включений  $s = 0.25$

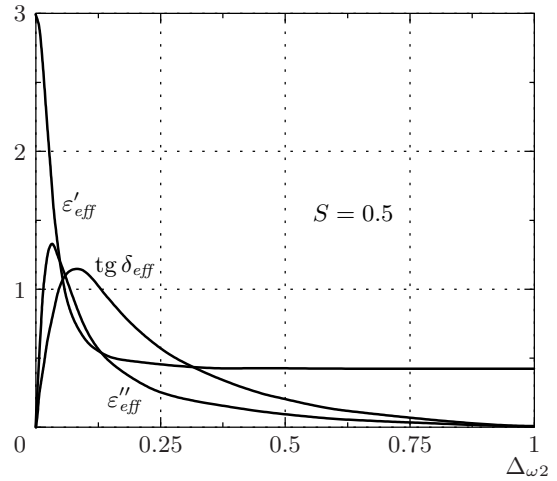


Рис. 5. Кривые дисперсии двухкомпонентного диэлектрика с параметрами  $\epsilon_1 = 10$ ,  $\epsilon_2 = 1$  и  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 10$  при концентрации включений  $s = 0.5$

Кривые, иллюстрирующие поведение эффективной диэлектрической проницаемости во всем диапазоне частот при концентрации  $s = 0.25$ , представлены на рис. 4, где теперь  $\epsilon_1 = 10$ ,  $\epsilon_2 = 1$  ( $\Delta_{\epsilon 12} = 0.818$ ) и  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 10$  ( $\Delta_{\sigma 12} = -1$ ). По виду они близки к зависимостям, которые следуют из теории Дебая. Об этом свидетельствует и тот факт, что диаграмма эффективной комплексной диэлектрической проницаемости практически совпадает с полуокружностью (см. соответствующую кривую на рис. 6).

Таким образом, в рассматриваемом случае релаксационные уравнения Дебая можно распространить на поляризационные процессы Максвелла–Вагнера. Особенность последних состоит в том, что они приводят к возмущениям поля в больших объемах и вызваны смещением свободных зарядов в области включений и накоплению их на границе разнородных сред. Об этом свидетельствуют и результаты расчета электрического поля в системе. Поле, формируемое включениями, имеет дипольное представление. Включения ведут себя как индуцированные макроскопические линейные диполи.

Если концентрация включений увеличивается, то диэлектрический спектр сохраняет свой вид, изменяются лишь количественные соотношения по сравнению с материалом с меньшей концентрацией. Это видно при сравнении соответствующих зависимостей на рис. 4, 5 и 6, где приведены результаты расчетов одной и той же системы при концентрациях включений  $s = 0.25$  и  $s = 0.5$ , когда  $\epsilon_1 = 10$ ,  $\epsilon_2 = 1$  ( $\Delta_{\epsilon 12} = 0.818$ ) и  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 10$  ( $\Delta_{\sigma 12} = -1$ ).

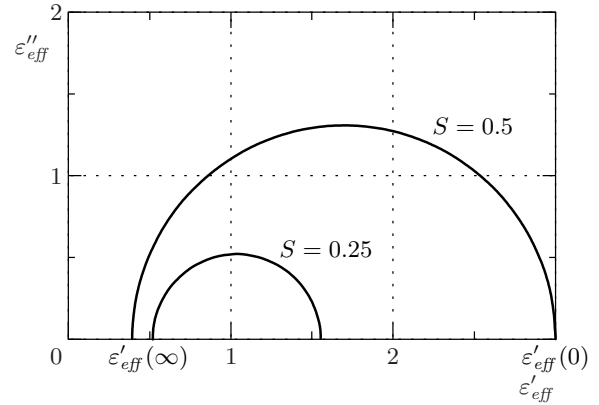
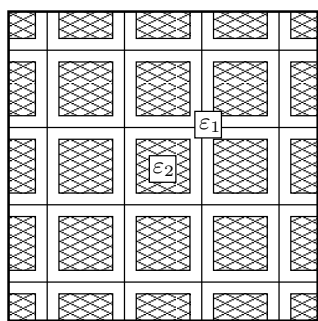


Рис. 6. Диаграмма эффективной комплексной диэлектрической проницаемости неоднородного диэлектрика с концентрациями включений  $s = 0.25$  и  $s = 0.5$ . Характеристики материала такие же, как и на рис. 4 и 5

Как видно, при увеличении концентрации включений разница между оптической и электростатической проницаемостями материала заметно возрастает. При двукратном увеличении концентрации включений эффективный коэффициент диэлектрических потерь возрастает более чем в два раза.

Характер изменения потерь при поляризации Максвелла–Вагнера связан с потерями, вызванными токами смещения и токами проводимости в объеме включений. При низких частотах преобладают токи проводимости и их величина тем больше, чем больше концентрация включений. Мерой соотноше-



**Рис. 7.** Фрагмент композитного диэлектрического материала с цилиндрическими включениями квадратного сечения

ния потерь токов проводимости и токов смещения служит зависимость тангенса угла эффективных диэлектрических потерь  $\text{tg } \delta_{eff}$  от частоты.

Поскольку диаграмма эффективной комплексной диэлектрической проницаемости близка к полукружности, из нее, следуя теории Дебая, можно по инкременту диэлектрической проницаемости определить максимальную величину эффективного коэффициента диэлектрических потерь:

$$\varepsilon''_{eff,max}(\omega_c) = (\varepsilon'_{eff}(0) - \varepsilon'_{eff}(\infty))/2$$

при критической частоте  $\omega_c$  и критической длине волны  $\lambda_c$ , при которых поляризация Максвелла–Вагнера уменьшается вдвое. Для принятых параметров имеем  $\varepsilon''_{eff,max} = 0.5035$  и  $\varepsilon''_{eff,max} = 1.2905$  соответственно при  $s = 0.25$  и  $s = 0.5$ .

### 2.2. Влияние формы включений на диэлектрический спектр

Поляризационные процессы в композиционном материале зависят, очевидно, от его структуры. В этой связи интересно выяснить, насколько дисперсия диэлектрической проницаемости чувствительна к изменению формы включений при сохранении всех других параметров неоднородной системы. Наличие полученных в последнее время точно разрешимых моделей позволяет провести такой анализ.

Пусть матричная неоднородная среда сохраняет регулярную структуру, но вместо круговых нитей содержит нити квадратного сечения. Фрагмент такой системы в поперечном сечении показан на рис. 7. Система в целом остается изотропной, и ее главное отличие от предыдущей состоит в том, что граничные контуры включений содержат острые кромки, в окрестности которых высока интенсивность на-

пряженности электрического поля, что увеличивает неоднородность поля в материале.

При концентрации включений  $s = 0.25$  система допускает точный расчет стационарного электрического поля и эффективных параметров [20]. Это позволяет вычислить диэлектрический спектр системы и сравнить его с частотным спектром среды, содержащей круговые включения при одинаковых концентрациях и свойствах компонентов.

Эффективная диэлектрическая проницаемость материала, изображенного на рис. 7, в стационарном электрическом поле имеет следующее выражение [20]:

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{2 - \Delta_{\varepsilon 12}}{2 + \Delta_{\varepsilon 12}}}. \tag{24}$$

В переменном электрическом поле, когда матрица и включения описываются комплексной диэлектрической проницаемостью при тех же условиях, что и в предыдущем случае, эффективная комплексная диэлектрическая проницаемость на основании (24) записывается так:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{eff}(\omega) &= \\ &= \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2}} \left\{ u(\omega) \pm v(\omega) \Gamma_2(\omega) \frac{(1 - \Delta_{\varepsilon 12})(1 + \Delta_{\sigma 12})}{(1 + \Delta_{\varepsilon 12})(1 - \Delta_{\sigma 12})} - \right. \\ &\left. - i \left[ u(\omega) \Gamma_2(\omega) \frac{(1 - \Delta_{\varepsilon 12})(1 + \Delta_{\sigma 12})}{(1 + \Delta_{\varepsilon 12})(1 - \Delta_{\sigma 12})} \pm v(\omega) \right] \right\}, \tag{25} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u(\omega) &= \sqrt{\sqrt{\beta^2(\omega) + \gamma^2(\omega)} + \beta(\omega)}, \\ v(\omega) &= \sqrt{\sqrt{\beta^2(\omega) + \gamma^2(\omega)} - \beta(\omega)}, \\ \beta(\omega) &= \frac{1 - (\Delta_{12}'^2 + \Delta_{12}''^2)/4}{(1 + \Delta_{12}'^2/2) + \Delta_{12}''^2/4}, \\ \gamma(\omega) &= \frac{\Delta_{12}''}{(1 + \Delta_{12}'^2/2) + \Delta_{12}''^2/4}. \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь параметры  $\Delta_{12}'$  и  $\Delta_{12}''$  определены формулами (5); верхний знак в выражении (25) берется при  $\Delta_{\varepsilon 12} > \Delta_{\sigma 12}$ , нижний — при  $\Delta_{\varepsilon 12} < \Delta_{\sigma 12}$ .

Из формул (25) и (26) следует, что при выполнении условия (9) дисперсия диэлектрической проницаемости не проявляется. В этом случае эффективная диэлектрическая проницаемость сохраняет постоянное значение, которое она имеет в стационарном поле:

$$\varepsilon'_{eff}(\omega) = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{2 - \Delta_{\varepsilon 12}}{2 + \Delta_{\varepsilon 12}}}. \tag{27}$$

Эффективный коэффициент диэлектрических потерь изменяется пропорционально параметру  $\Gamma_2(\omega)$ :

$$\varepsilon''_{eff}(\omega) = \varepsilon'_{eff} \Gamma_2(\omega). \quad (28)$$

В общем случае, когда  $\varepsilon_1 \sigma_2 \neq \varepsilon_2 \sigma_1$  ( $\Delta_{\varepsilon 12} \neq \Delta_{\sigma 12}$ ), дисперсия диэлектрической проницаемости определяется соотношением параметров неоднородного материала.

При  $\omega \rightarrow 0$  эффективная диэлектрическая проницаемость материала стремится к величине, которая определяется проводящими свойствами матрицы и включений, т. е. зависит от параметра  $\Delta_{\sigma 12}$ :

$$\varepsilon'_{eff}(0) = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{2 - \Delta_{\sigma 12}}{2 + \Delta_{\sigma 12}}}. \quad (29)$$

Эффективный коэффициент диэлектрических потерь при этом неограниченно растет:  $\varepsilon''_{eff}(0) \rightarrow \infty$ . Если же  $\omega \rightarrow \infty$ , то эффективная диэлектрическая проницаемость композитного материала зависит только от диэлектрических свойств компонентов, т. е. от параметра  $\Delta_{\varepsilon 12}$ :

$$\varepsilon'_{eff}(\infty) = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{2 - \Delta_{\varepsilon 12}}{2 + \Delta_{\varepsilon 12}}}, \quad \varepsilon''_{eff}(\infty) = 0. \quad (30)$$

Первая формула (30) совпадает с (24), как и должно быть в теории Дебая.

Выражения (25)–(30) характеризуют частотный спектр композитных материалов, обладающих сквозной проводимостью ( $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$ ). В таких материалах при  $\omega \rightarrow 0$  потери неограниченно растут. Соответственно на комплексной плоскости  $\hat{\varepsilon}_{eff} = \varepsilon'_{eff} - i\varepsilon''_{eff}$  зависимость  $\varepsilon''_{eff}(\varepsilon'_{eff})$  стремится к бесконечности при  $\varepsilon'_{eff}(\omega) \rightarrow \varepsilon'_{eff}(0)$ . Исключая из частотных зависимостей  $\varepsilon''_{eff}(\omega)$  и  $\text{tg } \delta_{eff}(\omega)$  сингулярный член  $\varepsilon''_{eff}(0)$ , получаем спектр, характерный для теории Дебая.

Хотя выражения, определяющие зависимости диэлектрических свойств от частоты материала с квадратными цилиндрами, внешне отличаются от аналогичных выражений для материала с круговыми включениями, в действительности они дают практически одинаковые результаты. Наглядно в этом можно легко убедиться, сравнивая графически зависимости, построенные по формулам для первой и второй моделей. Компьютерные расчеты показали, что соответствующие кривые отличаются друг от друга не более чем на один процент.

Таким образом, частотные спектры изотропных диэлектрических материалов с круговыми и квадратными цилиндрическими включениями при относительно небольшой концентрации ( $s = 0.25$ ) фактически совпадают.

Этот вывод справедлив и для материалов, у которых электропроводными свойствами обладают только включения ( $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0$  ( $\Delta_{\sigma 12} = -1$ )). В этом случае из формул (25)–(30) следует, что при  $\omega \rightarrow 0$

$$\varepsilon'_{eff}(0) = \sqrt{3}\varepsilon_1, \quad \varepsilon''_{eff}(0) = 0, \quad (31)$$

а при  $\omega \rightarrow \infty$  параметры  $\varepsilon'_{eff}(\infty)$  и  $\varepsilon''_{eff}(\infty)$  определяются формулами (30). Численно полученные формулы дают результаты близкие к соответствующим значениям для системы с круговыми включениями при той же концентрации включений  $s = 0.25$ .

Необходимо отметить следующий важный факт. Для диэлектрического композита с цилиндрическими включениями квадратного сечения, когда матрица представляет собой идеальный диэлектрик, а включения обладают электропроводностью ( $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0$  ( $\Delta_{\sigma 12} = -1$ )), удается установить наличие явной зависимости между функциями  $\varepsilon'_{eff}(\omega)$  и  $\varepsilon''_{eff}(\omega)$  — аналог диаграммы Коул–Коула. Действительно, из выражений (25) и (26) при  $\Delta_{\sigma 12} = -1$  путем несложных преобразований можно получить такое соотношение:

$$[\varepsilon'^2_{eff}(\omega) + \varepsilon''^2_{eff}(\omega)]^2 - [\varepsilon'^2_{eff}(0) + \varepsilon'^2_{eff}(\infty)] \times \\ \times [\varepsilon'^2_{eff}(\omega) - \varepsilon''^2_{eff}(\omega)] = -\varepsilon'^2_{eff}(0)\varepsilon'^2_{eff}(\infty), \quad (32)$$

где эффективные величины статической и оптической диэлектрических проницаемостей,  $\varepsilon'_{eff}(0)$  и  $\varepsilon'_{eff}(\infty)$ , соответствуют выражениям (30) и (31).

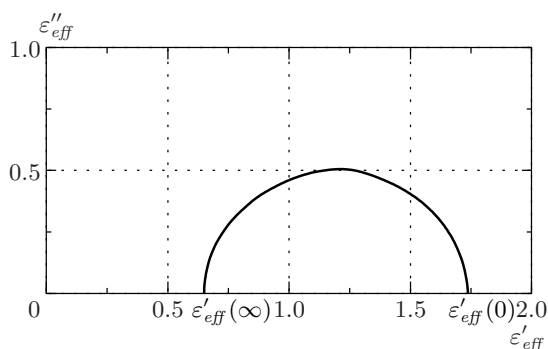
В системе координат  $\varepsilon'_{eff}(\omega)$  и  $\varepsilon''_{eff}(\omega)$  соотношение (32) определяет плоскую кривую четвертого порядка, которая симметрична относительно координатных осей. Это овалы Кассини (частный случай кривых Персея) с центрами в точках

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon'^2_{eff}(0) + \varepsilon'^2_{eff}(\infty))^{1/2} \quad (33)$$

на оси абсцисс. Так как эффективные величины диэлектрической проницаемости и коэффициента потерь принимают только положительные значения,  $\varepsilon'_{eff}(\omega), \varepsilon''_{eff}(\omega) > 0$ , то физический смысл имеет не вся кривая, а только ее часть — полуовал в первом квадранте. Напомним, что в классической теории Дебая зависимость  $\varepsilon''_{eff}(\varepsilon'_{eff})$  представлена полуокружностью. Кривая, описываемая выражением (32), изображена на рис. 8 для системы с параметрами  $\varepsilon_1 = 10, \varepsilon_2 = 1$  и  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 10$ .

Равенство (33) является, по-видимому, одним из немногих соотношений, которое дает явное выражение диаграммы эффективной диэлектрической проницаемости для строго разрешимой модели неод-





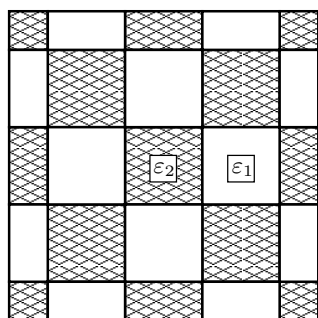
**Рис. 8.** Диаграмма эффективной комплексной диэлектрической проницаемости неоднородного диэлектрика с квадратными цилиндрами ( $\epsilon_2/\epsilon_1 = 0.1$  и  $\sigma_1 = 0$ )

нородного диэлектрика с поляризацией Максвелла–Вагнера. Обычно комплексные диаграммы строятся на основе экспериментальных данных; для большинства композитных материалов они аппроксимируются дугами окружностей, центры которых расположены ниже оси абсцисс [2, 5, 6].

Следует заметить, что овалы Кассини встречаются при описании ряда других физических явлений. Например, они дают структуру силовых магнитных линий, создаваемых двумя параллельными токами, протекающими по тонким проводникам бесконечной длины. Семейство овалов Кассини можно также наблюдать при рассмотрении селитряной пластины в поляризованном свете.

### 3. СИСТЕМА С КРИТИЧЕСКИМ СОСТАВОМ КОМПОНЕНТОВ

Если объем включений в композитном диэлектрике непрерывно увеличивать, то при определен-



**Рис. 9.** Фрагмент двоякопериодического материала с равными концентрациями двух компонентов

ной их концентрации, называемой критической, в материале может происходить переход из диэлектрического состояния в металлическое. Для изучения диэлектрической дисперсии таких композитов удобной теоретической моделью может служить двоякопериодическая двухкомпонентная система со структурой шахматной доски (рис. 9). Эффективная диэлектрическая проницаемость такой системы имеет точное выражение [21–23]

$$\epsilon_{eff} = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}. \tag{34}$$

Если компоненты материала обладают также проводящими свойствами с электропроводностями соответственно  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , то в переменном гармоническом поле материал в целом характеризуется эффективной комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\hat{\epsilon}_{eff}(\omega) = \epsilon'_{eff}(\omega) - i\epsilon''_{eff}(\omega) = \sqrt{\tilde{\epsilon}_1(\omega)\tilde{\epsilon}_2(\omega)}, \tag{35}$$

где  $\tilde{\epsilon}_1(\omega) = \epsilon_1 - i\sigma_1/\epsilon_0\omega$  и  $\tilde{\epsilon}_2(\omega) = \epsilon_2 - i\sigma_2/\epsilon_0\omega$  — обобщенные диэлектрические проницаемости фаз.

Действительная и мнимая части  $\hat{\epsilon}_{eff}(\omega)$  определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{eff}(\omega) &= \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{2}} \times \\ &\times \left[ \sqrt{[1 + \Gamma_1^2(\omega)][1 + \Gamma_2^2(\omega)] + 1 - \Gamma_1(\omega)\Gamma_2(\omega)} \right]^{1/2}, \\ \epsilon''_{eff}(\omega) &= \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{2}} \times \\ &\times \left[ \sqrt{[1 + \Gamma_1^2(\omega)][1 + \Gamma_2^2(\omega)] - 1 - \Gamma_1(\omega)\Gamma_2(\omega)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{36}$$

Напомним, что здесь безразмерные частотные параметры

$$\Gamma_1(\omega) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \epsilon_1 \omega}, \quad \Gamma_2(\omega) = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0 \epsilon_2 \omega}$$

связаны между собой соотношением (7). В формулах (36) параметры  $\epsilon_j$  и функции  $\Gamma_j(\omega)$  ( $j = 1, 2$ ) фигурируют равнозначно, что отражает полную геометрическую симметрию системы относительно фаз, представленных в неоднородном материале равносильно.

Если диэлектрические проницаемости и проводимости компонентов таковы, что выполняется соотношение (9), то диэлектрическая дисперсия не проявляется. При этих условиях

$$\epsilon'_{eff}(\omega) = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad \epsilon''_{eff}(\omega) = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} \Gamma(\omega), \tag{37}$$

где  $\Gamma(\omega) = \Gamma_1(\omega) = \Gamma_2(\omega)$ .

В общем случае,  $\varepsilon_1\sigma_2 \neq \varepsilon_2\sigma_1$  ( $\Delta_{\varepsilon_{12}} \neq \Delta_{\sigma_{12}}$ ), дисперсия диэлектрической проницаемости системы в предельных случаях приводит к следующим значениям эффективной проницаемости и эффективного коэффициента потерь:

при  $\omega \rightarrow 0$

$$\varepsilon'_{eff}(0) = \frac{\varepsilon_1\sigma_2 + \varepsilon_2\sigma_1}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}, \quad \varepsilon''_{eff}(0) \rightarrow \infty; \quad (38)$$

при  $\omega \rightarrow \infty$

$$\varepsilon'_{eff}(\infty) = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \quad \varepsilon''_{eff}(\infty) \rightarrow 0. \quad (39)$$

Из первого выражения (38) вытекает следующее. Если у одной из двух фаз композитного материала отсутствует электропроводность, то эффективная статическая диэлектрическая проницаемость принимает бесконечное значение, т.е. материал в целом приобретает металлические свойства. Это объясняется тем, что ячейки каждой фазы электрически не изолированы друг от друга — они имеют контакты в вершинах квадратов.

Сумма и разность эффективных значений статической и оптической диэлектрических проницаемостей связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{eff}(0) + \varepsilon'_{eff}(\infty) &= \frac{(\sqrt{\varepsilon_1\sigma_2} + \sqrt{\varepsilon_2\sigma_1})^2}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}, \\ \varepsilon'_{eff}(0) - \varepsilon'_{eff}(\infty) &= \frac{(\sqrt{\varepsilon_1\sigma_2} - \sqrt{\varepsilon_2\sigma_1})^2}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Последнее соотношение, определяющее инкремент диэлектрической проницаемости, показывает, что в рассматриваемой системе эффективная статическая проницаемость всегда больше эффективной оптической проницаемости. Равенство  $\varepsilon'_{eff}(0) = \varepsilon'_{eff}(\infty)$  возможно только в исключительном случае, когда выполняется условие (9).

Для примера на рис. 10 изображены зависимости  $\varepsilon'_{eff}(\omega)$ ,  $\varepsilon''_{eff}(\omega)$  и  $\text{tg } \delta_{eff}(\omega)$  для случая  $\varepsilon_1 = 10$ ,  $\varepsilon_2 = 1$  ( $\Delta_{\varepsilon_{12}} = 0.818$ ) и  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 10$  ( $\Delta_{\sigma_{12}} = -0.818$ ). Как и ранее, кривые построены для относительных величин в зависимости от относительной частоты  $\Delta_{\omega 2}$ .

Несложно установить, что действительная и мнимая составляющие эффективной комплексной диэлектрической проницаемости связаны между собой соотношением

$$\begin{aligned} \varepsilon'^2_{eff}(0) [\varepsilon'_{eff}(\omega) - \varepsilon''^2_{eff}(\omega)] + \varepsilon'^2_{eff}(\omega)\varepsilon''^2_{eff}(\omega) &= \\ = \varepsilon'^2_{eff}(\omega)\varepsilon''^2_{eff}(\infty), \end{aligned} \quad (41)$$

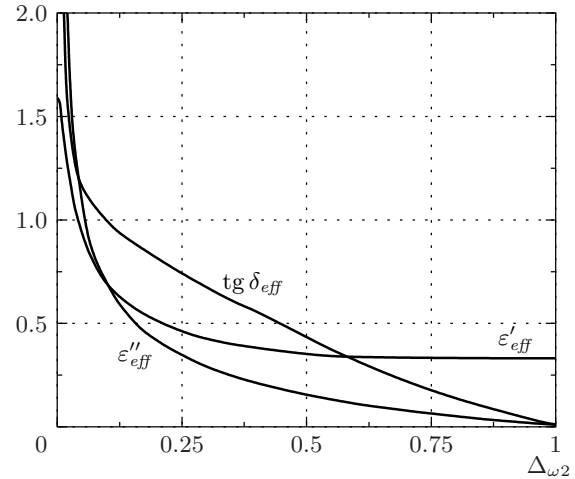


Рис. 10. Кривые дисперсии двухкомпонентного дwoякопериодического материала с равными концентрациями компонентов при соотношении параметров  $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 0.1$  и  $\sigma_2/\sigma_1 = 10$

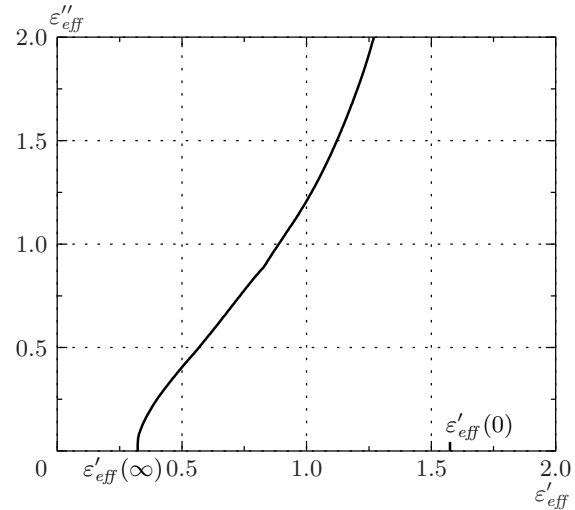
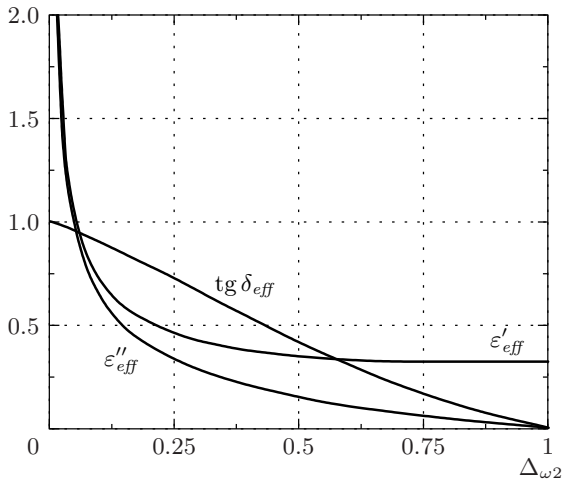


Рис. 11. Диаграмма эффективной комплексной диэлектрической проницаемости системы, представленной на рис. 9, при соотношении параметров  $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 0.1$  и  $\sigma_2/\sigma_1 = 10$

которое определяет на плоскости  $\varepsilon'_{eff}(\omega)$ ,  $\varepsilon''_{eff}(\omega)$  кривую второго порядка. Эта кривая для указанных выше параметров изображена на рис. 11.

Таким образом, двухкомпонентная система со структурой шахматной доски выступает еще одной точно разрешимой моделью, для которой существует явная зависимость между действительной и мнимой составляющими эффективной комплексной диэлектрической проницаемости.



**Рис. 12.** Кривые дисперсии двухкомпонентного дwoякопериодического материала с равными концентрациями компонентов при  $\epsilon_2/\epsilon_1 = 0.1$  и  $\sigma_1 = 0$

Если только одна из двух фаз обладает электропроводностью, например, вторая ( $\tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_2 - i\sigma_2/\epsilon_0\omega$ ), а первая представляет собой идеальный диэлектрик ( $\tilde{\epsilon}_1 = \epsilon_1$ ), то система характеризуется одним частотным параметром  $\Gamma_2(\omega)$  ( $\Gamma_1(\omega) = 0$ ). Для этого случая из выражений (36) получаем эффективные значения диэлектрической проницаемости и коэффициента потерь:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{eff}(\omega) &= \sqrt{\frac{\epsilon_1\epsilon_2}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \Gamma_2^2(\omega)} + 1}, \\ \epsilon''_{eff}(\omega) &= \sqrt{\frac{\epsilon_1\epsilon_2}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \Gamma_2^2(\omega)} - 1}. \end{aligned} \tag{42}$$

Отсюда следует, что в низкочастотной области эффективные значения диэлектрической проницаемости и коэффициента потерь неограниченно возрастают в одинаковой степени, как  $1/\omega$  при  $\omega \rightarrow 0$ :  $\epsilon'_{eff}(0) = \epsilon''_{eff}(0) \rightarrow \infty$ . Такое поведение эффективных параметров было установлено выше при анализе выражения (38).

В другом предельном случае, когда  $\omega \rightarrow \infty$ , эффективные параметры  $\epsilon'_{eff}(\infty)$  и  $\epsilon''_{eff}(\infty)$  определяются формулами (39).

По формулам (42) на рис. 12 построены зависимости  $\epsilon'_{eff}(\omega)$ ,  $\epsilon''_{eff}(\omega)$  и  $\text{tg } \delta_{eff}(\omega)$  для случая  $\epsilon_1 = 10$ ,  $\epsilon_2 = 1$  ( $\Delta_{\epsilon_{12}} = 0.818$ ) и  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 10$  ( $\Delta_{\sigma_{12}} = -1$ ). Представлены зависимости относительных величин от относительной частоты  $\Delta\omega_2$ .

Сравнивая частотные зависимости на рис. 10 и 12, можно отметить, что при высоких частотах сис-

тема ведет себя одинаково, хотя в первом случае проводимостью обладают обе фазы, а во втором — только одна. При низких частотах поведение системы в этих случаях существенно различно. Если проводимостью обладает только одна фаза, то при  $\omega \rightarrow 0$  тангенс угла эффективных диэлектрических потерь стремится к единице (рис. 12). Это означает, что в указанном пределе омические потери в материале и потери, вызванные токами смещения, одинаковы.

Эффективные параметры  $\epsilon'_{eff}(\omega)$  и  $\epsilon''_{eff}(\omega)$  удовлетворяют соотношению

$$\epsilon_{eff}^{\prime 2}(\omega) - \epsilon_{eff}^{\prime\prime 2}(\omega) = \epsilon_{eff}^{\prime 2}(\infty), \tag{43}$$

которое на комплексной плоскости определяет равностороннюю гиперболу.

Проведенный анализ показывает, что эффективная статическая диэлектрическая проницаемость неоднородного материала со структурой шахматной доски принимает конечные значения только в том случае, когда электропроводностью обладают обе компоненты.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При изучении дисперсии диэлектрической проницаемости гетерогенных материалов в основном используются экспериментальные методы исследований. В последнее время широкое распространение получает численное моделирование композиционных систем. В этом отношении важное значение приобретают точно разрешимые модели, допускающие аналитическое описание результатов в замкнутой форме. Такие решения позволяют внести определенность в интерпретацию экспериментальных данных и, кроме того, могут служить поверочными образцами для оценки точности численно рассчитываемых систем. Число строго разрешимых моделей, к сожалению, невелико; большинство из них относится к классу двухкомпонентных матричных систем с периодической структурой неоднородностей. Некоторые основные модели этого класса проанализированы в настоящей работе.

Из результатов, полученных при изучении диэлектрической дисперсии исследованных систем, отметим следующие. Находит подтверждение условие, при котором диэлектрическая дисперсия двухкомпонентных систем не проявляется (соотношение (9)). Это соотношение, как установлено, справедливо для всех рассмотренных моделей. Ранее оно было известно для одномерных слоистых систем [10, 11].

Дисперсия диэлектрической проницаемости неоднородных систем существенно зависит от

физических свойств компонентов, концентрации включений и их формы. По характеру этих зависимостей матричные системы можно условно разделить на два вида: неоднородные диэлектрические материалы, у которых обе фазы обладают проводящими свойствами, и диэлектрические композиты, у которых проводящие свойства имеют только изолированные в материале включения. В первом случае эффективный коэффициент диэлектрических потерь неограниченно возрастает при стремлении частоты к нулю. Для второй группы материалов этот коэффициент, напротив, в указанном пределе принимает нулевое значение. Характер дисперсии диэлектрической проницаемости этих типов матричных систем в некоторой мере аналогичен частотным зависимостям комплексного сопротивления  $RC$ -цепей с параллельным и последовательным соединениями емкостей и омических сопротивлений.

Расчеты показали, что диаграмма эффективной комплексной диэлектрической проницаемости с цилиндрическими включениями кругового сечения фактически совпадает с диаграммой Коул–Коула и, следовательно, к ним применима классическая теория дисперсии Дебая с одним временем релаксации. Это утверждение справедливо для систем с малой и средней концентрациями включений. Для систем с большой концентрацией включений, когда вместо однодипольного приближения, на котором основан вывод формулы (1), необходимо учитывать многодипольные взаимодействия, нужны отдельные исследования. Форма включений, как показано в рассмотренном примере, видоизменяет диаграмму эффективной комплексной диэлектрической проницаемости даже при малой концентрации включений. Для цилиндрических включений квадратного сечения диаграмма представлена полуовалами Кассини.

Интересными особенностями характеризуется дисперсия диэлектрической проницаемости неоднородного материала со структурой шахматной доски. В такой системе реализуется переход из диэлектрического состояния в металлическое. Здесь существенны два момента. Во-первых, в отличие от других рассмотренных систем коэффициент диэлектрических потерь неограниченно возрастает при стремлении частоты к нулю независимо от того, обладают проводящими свойствами две или только одна фаза. Во-вторых, эффективная статическая диэлектрическая проницаемость при нулевой частоте принимает конечные значения только в случае, когда две фазы обладают электропроводностью, и неограниченно растет, если только одна фаза имеет

проводимость, причем независимо от ее величины. Этот факт не очевиден и установлен в процессе вычислений.

На дисперсию диэлектрической проницаемости в композитном материале оказывают влияние различные факторы. В настоящей работе анализируются два из них — концентрация включений и их форма. Чтобы сохранить одинаковые условия, свойства компонентов фиксированы. Вопрос о влиянии характеристик материала на дисперсию диэлектрической проницаемости требует отдельного рассмотрения.

Анализ дисперсии диэлектрической проницаемости неоднородных систем значительно упрощается благодаря использованию безразмерных параметров и характерных чисел, которые естественным образом фигурируют в аналитических расчетах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Р. Vinogradov, А. N. Logarkov, and V. E. Romanenko, *Electromagnetics* **17**, 213 (1997).
2. Т. Л. Челидзе, А. И. Деревянко, О. Д. Куриленко, *Электрическая спектроскопия гетерогенных систем*, Наукова думка, Киев (1977), с. 232.
3. Ю. В. Гороховатский, Г. А. Бордовский, *Термоактивационная токовая спектроскопия высокоомных полупроводников и диэлектриков*, Наука, Москва (1991), с. 248.
4. П. Дебай, *Полярные молекулы*, ГНТИ, Москва–Ленинград (1931), с. 247.
5. А. Р. Хинпель, *Диэлектрики и волны*, Изд-во иностр. лит., Москва (1960), с. 438.
6. D. V. Davidson and R. H. Cole, *J. Chem. Phys.* **19**, 1484 (1951).
7. S. Havriliak and S. Negami, *Polymer* **8**, 161 (1967).
8. R. M. Fuoss and J. G. Kirkwood, *J. Amer. Chem. Soc.* **8**, 161 (1967).
9. G. Williams and D. C. Watts, *Trans. Faraday Soc.* **66**, 80 (1970).
10. Дж. К. Максвелл, *Трактат об электричестве и магнетизме*, том I, Москва, Наука (1989), с. 416.
11. К. W. Wagner, *Die Isolierstoffe der Electrotechnik*, Berlin, Springer (1924).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982), с. 620.
13. Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* **34**, 87 (1892).

14. W. T. Perrins, D. R. McKenzie, and R. C. McPhedran, Proc. Roy Soc. London A **369**, 207 (1979).
15. R. D. Manteufel and N. E. Todreas, Int. J. Heat Mass Transfer **37**, 647 (1994).
16. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ **117**, 978 (2000).
17. Ю. П. Емец, ЖЭТФ **118**, 1207 (2000).
18. Ю. П. Емец, ПМТФ **42**, вып. 4, 165 (2001).
19. K. S. Cole and R. H. Cole, J. Chem. Phys. **9**, 341 (1941).
20. Ю. В. Обносов, ДАН СССР **319**, 1125 (1991).
21. Ю. П. Емец, *Электрические характеристики композиционных материалов*, Наукова думка, Киев (1986), с. 191.
22. Ю. П. Емец, ЖЭТФ **96**, 701 (1989).
23. Ю. П. Емец, Ю. В. Обносов, ДАН СССР **309**, 319 (1989).