

# АЛЬФВЕНОВСКИЙ ВОЛНОВОД НА ДИССИПАЦИИ

С. М. Чурилов\*

Институт солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук  
664033, Иркутск, Россия

Поступила в редакцию 9 ноября 2001 г.

Показана возможность волноводного распространения альфвеновских волн в неоднородной плазме за счет одной лишь диссипации, без учета дисперсии.

PACS: 52.35.Vj

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В первом приближении (приближении идеальной МГД) альфвеновские колебания — это несжимаемые движения плазмы, которые распространяются вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}$  с альфвеновской скоростью  $c_A = \mathbf{B}/(4\pi\rho)^{1/2}$  ( $\rho$  — плотность) и сопровождаются колебаниями силовых линий, аналогичными колебаниям струны [1]. Из закона дисперсии  $\omega = c_A \cdot \mathbf{k}$  следует, что они не могут быть собственными колебаниями в поперечно-неоднородной плазме: начальные возмущения альфвеновского типа «рассыпаются» из-за несогласованности осциллирующих соседних силовых линий [2–4]. Учет дополнительных (по отношению к идеальной МГД) факторов, таких как инерция электронов (ионов) или конечность ларморовского радиуса ионов, дает поперечную дисперсию, которая «возвращает» альфвеновские волны в класс собственных колебаний неоднородной плазмы и, в частности, делает возможным их каналирование (волноводное распространение) вдоль тех силовых линий, на которых альфвеновская скорость достигает экстремума [5–7].

Далее будет показано, что к похожему эффекту — волноводному распространению и, следовательно, появлению собственных альфвеновских колебаний поперечно-неоднородной плазмы — приводит и обычная диссипация, например, омическая.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЯ

Пусть плазма с равновесной плотностью  $\rho_0(x)$  находится в магнитном поле  $\mathbf{B}_0(x)$ , направленном вдоль оси  $z$ . Оставляя в стороне вопросы, связанные с так называемым альфвеновским резонансом (см., например, [4]), рассмотрим колебания альфвеновского типа заданной частоты  $\omega$ , не зависящие от  $y$  и распространяющиеся вдоль оси  $z$ . Возмущение плотности в них отсутствует, а возмущения скорости и магнитного поля имеют в линейном приближении только  $y$ -компоненту и описываются уравнениями [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{B_0}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial v_y}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

учитывающими диффузию  $\eta$  магнитного поля за счет конечной проводимости. Исключая  $v_y$  и полагая

$$B_y = b(x) \exp(-i\omega t + ikz),$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^2 b}{dx^2} + \left[ \frac{i\omega}{\eta} - \left( 1 + \frac{ic_A^2}{\eta\omega} \right) k^2 \right] b = 0, \quad (2)$$

решения которого, ограниченные при  $x \rightarrow \pm\infty$ , описывают структуру собственных альфвеновских колебаний.

Выберем профиль альфвеновской скорости с минимумом в центре и монотонным ростом к периферии,

$$c_A^2(x) = A^2 \left( 1 + \frac{x^2}{a^2} \right),$$

\*E-mail: churilov@iszf.irk.ru

и перейдем к безразмерным переменным

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \tilde{k} = ka, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega a}{A}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{aA}.$$

Из (2) получаем уравнение Вебера (тильды опускаем)

$$\frac{d^2b}{dx^2} + \left[ \frac{i\omega}{\eta} - \left( 1 + \frac{i}{\eta\omega} \right) k^2 - \frac{ik^2}{\eta\omega} x^2 \right] b = 0, \quad (3)$$

общее решение которого представляет собой суперпозицию функций параболического цилиндра [9]  $D_p(\pm\lambda x)$ , где

$$p + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\eta} \right)^{1/2} \left( \frac{\omega}{k} - \frac{k}{\omega} + i\eta k \right) \exp \left( \frac{i\pi}{4} \right), \quad (4)$$

$$\lambda^2 = \frac{2k}{(\eta\omega)^{1/2}} \exp \left( \frac{i\pi}{4} \right), \quad |\arg \lambda| < \frac{\pi}{4}.$$

Видна аналогия с задачей об уровнях квантового осциллятора [10]: решение уравнения (3) может быть ограниченным только при целых неотрицательных  $p = n$  и выражается в этом случае через полином Эрмита [9]  $H_n(z)$ :

$$b_n(x) = B_n \exp \left( -\frac{\lambda_n^2 x^2}{4} \right) H_n \left( \frac{\lambda_n x}{\sqrt{2}} \right), \quad B_n = \text{const},$$

$$\lambda_n = \lambda(k_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, каждой частоте  $\omega$  соответствует дискретный спектр локализованных по  $x$  (волноводных) мод

$$k_n = \frac{\omega}{1 - i\eta\omega} \left[ \sqrt{1 - i\eta\omega - i \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\eta}{\omega} - \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\eta}{\omega} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{i\pi}{4} \right)} \right]. \quad (5)$$

Кроме того, среди решений (3) есть, очевидно, и моды с  $k = -k_n$ , распространяющиеся в противоположном направлении.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Формула (5) определяет продольную длину волны ( $|k_n|^{-1}$ ) соответствующей моды, а также длину ее затухания. Легко показать, что

$$\frac{\varphi}{2} < \arg k_n < \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \arctg(\eta\omega), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. моды, как и следовало ожидать в диссипативной среде, затухают, но их добротность  $Q_n = \text{Re } k_n / \text{Im } k_n$  всегда выше единицы. Кроме того,

каждая мода характеризуется двумя поперечными масштабами — масштабом локализации  $L_n$  и масштабом изменения  $l_n$ . У основной ( $n = 0$ ) моды

$$l_0^2 = L_0^2 = \frac{(\eta\omega)^{1/2}}{|k|}$$

(см. (4)). По теореме о нулях полиномов Эрмита [11]

$$L_n^2 \approx (2n + 1)L_0^2,$$

в то время как масштаб изменения (расстояние между соседними нулями)

$$l_n^2 \sim L_0^2/n.$$

Для наиболее интересного случая слабой диссипации ( $\eta \ll 1$ ) проанализируем дисперсионное уравнение (5), выделив три характерных диапазона частот<sup>1)</sup>:

— низкие частоты (или высокие номера мод),

$$\frac{\omega}{n + 1/2} \ll \min \left[ 1, \left( n + \frac{1}{2} \right) \eta \right], \quad (6)$$

$$k_n \approx \frac{\omega^{3/2}}{(2n + 1) \eta^{1/2}} \exp \left( \frac{i\pi}{4} \right);$$

— умеренные частоты (и номера мод),

$$\left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \eta \ll \omega \ll \eta^{-1}, \quad (7)$$

$$k_n \approx \omega \left[ 1 - \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\eta}{\omega} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{i\pi}{4} \right) + \frac{i}{2} \eta \omega \right];$$

— высокие частоты,

$$\omega \gg \max \left( \eta^{-1}, n + \frac{1}{2} \right), \quad (8)$$

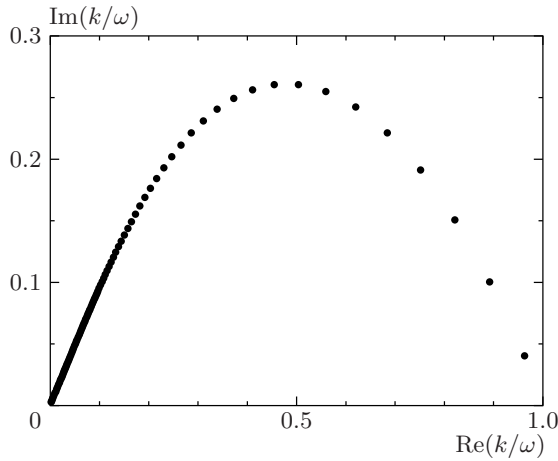
$$k_n \approx \left( \frac{\omega}{\eta} \right)^{1/2} \exp \left( \frac{i\pi}{4} \right).$$

Сильное затухание ( $\text{Im } k_n \approx \text{Re } k_n$ ) высоких и низких частот объясняется тем, что в первом случае продольный ( $|k_n|^{-1}$ ), а во втором поперечный ( $l_n$ ) масштаб изменения моды сравним с диссипативным масштабом  $l_d = (\eta/\omega)^{1/2}$ . На умеренных частотах оба масштаба изменения моды достаточно велики,

$$|k_n| l_d \approx (\eta\omega)^{1/2} \ll 1, \quad \frac{l_d^2}{l_n^2} \sim n \left( \frac{\eta}{\omega} \right)^{1/2} \ll 1,$$

чем и обеспечивается высокая добротность ( $Q_n \gg 1$ ) этих колебаний.

<sup>1)</sup> Их названия условны; в общепринятой терминологии все рассматриваемые колебания являются низкочастотными.



Собственные значения  $k_n$  альфвеновских мод;  
 $\omega = 1, \eta = 0.01$

Отметим, что неравенство  $\omega \gg \eta^{-1}$  выполняется либо при очень частых столкновениях, либо при частотах, выходящих за пределы спектра альфвеновских волн, так что диапазон высоких частот (8) упомянут только для полноты картины. Напротив, формулы (7) и (6) описывают типичный спектр альфвеновских мод (см. рисунок). Если частота такова, что  $\eta \ll \omega \ll \eta^{-1}$ , моды с небольшими номерами в соответствии с (7) расположены на плоскости комплексного  $k$  почти эквидистантно, начиная с  $k \approx \omega$  при  $n = 0$ , а их масштаб локализации мал по сравнению с масштабом неоднородности,

$$L_n^2 = (2n + 1) \left(\frac{\eta}{\omega}\right)^{1/2} \ll 1.$$

С ростом номера моды величины  $|k_n|$ ,  $l_n$  и  $Q_n$  убывают, а масштаб локализации  $L_n$  растет, и при  $n > (\omega/\eta)^{1/2}$ , т.е. в пределе (6), становится больше масштаба неоднородности,

$$L_n = (2n + 1) \left(\frac{\eta}{\omega}\right)^{1/2} > 1.$$

Интересно отметить, что скорость распространения мод равна максимальной альфвеновской скорости в области локализации моды. Действительно, альфвеновская скорость при  $x^2 = L_n^2$  равна

$$(1 + L_n^2)^{1/2} \approx$$

$$\approx \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}L_n^2 = 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\eta}{\omega}\right)^{1/2}, & L_n \ll 1, \\ L_n = (2n + 1) \left(\frac{\eta}{\omega}\right)^{1/2}, & L_n \gg 1 \end{cases}$$

и совпадает со скоростями, определенными соответственно из (7) и (6).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Наука, Москва (1976), с. 44.
2. А. В. Тимофеев, *Вопросы теории плазмы*, вып. 9, Атомиздат, Москва (1979), с. 205.
3. В. А. Мазур, А. Б. Михайловский, А. Л. Френкель и др., *Вопросы теории плазмы*, вып. 9, Атомиздат, Москва (1979), с. 233.
4. А. В. Тимофеев, *Резонансные явления в колебаниях плазмы*, Физматлит, Москва (2000).
5. А. С. Леонович, В. А. Мазур, В. Н. Сенаторов, *ЖЭТФ* **85**, 141 (1983).
6. А. В. Гульельми, А. Р. Поляков, *Геомагнетизм и аэронавигация* **23**, 341 (1983).
7. А. С. Леонович, В. А. Мазур, В. Н. Сенаторов, *Физика плазмы* **11**, 1106 (1985).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982), с. 319.
9. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Наука, Москва (1966).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).
11. Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, ГИФМЛ, Москва (1962), с. 141.