

# КОНДЕНСАЦИЯ БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА В КОНЕЧНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЕ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ

*В. А. Алексеев\**

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 1 октября 2001 г.

Исследован процесс конденсации идеального бозе-газа, объем которого ограничен стенками сосуда, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием (сторона квадрата  $l$ ) и высотой  $L$  при условии  $L \gg l$ . Показано, что как в рамках статистики Бозе–Эйнштейна (большой канонический ансамбль), так и в рамках статистики канонического ансамбля бозонов при выполнении условия  $N(l/L)^4 \ll 1$ , где  $N$  — полное число частиц газа, зависимость среднего числа частиц в конденсате от температуры  $T$  является функцией параметра  $t = T/T_1$ , где  $T_1$  — некоторая характерная для системы температура, зависящая только от продольного размера объема  $L$ , т. е. процесс конденсации носит одномерный характер. В одномерном режиме средние значения чисел частиц в конденсатах большого канонического и канонического ансамблей совпадают только в предельных случаях  $t \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow \infty$ . Функция распределения числа частиц в конденсате канонического ансамбля при  $t \leq 1$  имеет вид резонанса, т. е. качественно отличается от распределения Бозе–Эйнштейна. В области  $t \sim 1$  это распределение перестраивается, и при  $t \gg 1$  оно принимает вид распределения Бозе–Эйнштейна. Перестройка происходит плавно, т. е. одномерная конденсация теряет черты фазового перехода, характерные для трехмерной системы. При  $N(l/L)^4 \gg 1$  в смысле средних значений числа частиц в конденсате процесс становится трехмерным, однако в статистике канонического ансамбля бозонов функция распределения числа частиц в конденсате при всех  $N$  сохраняет специфику одномерной системы.

PACS: 03.75.Fi, 05.30.Jp

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Быстро развивающиеся методы удержания и охлаждения атомных газов открывают все новые возможности для исследования бозе-конденсатов различных пространственных конфигураций. Вскоре после первого теоретического обоснования возможности получения одномерного конденсата в параболической ловушке [1] это состояние было достигнуто в газе, удерживаемом потенциалом оптической решетки [2], и, почти одновременно, в магнитной и оптической ловушках [3], причем в последнем случае с изменением параметров потенциалов ловушек наблюдался переход от трехмерной системы к одномерной.

В настоящей статье показано, что одномерная

конденсация может происходить и в однородном идеальном бозе-газе, т. е. в системе, объем которой ограничен стенками сосуда («жесткими границами»). Мы предполагаем, что занимаемый газом объем имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами  $L_x = L_y = l$ ,  $L_z = L$ , причем  $L/l \gg 1$ . Оказывается, что зависимость среднего числа частиц в конденсате от температуры имеет качественно разный вид при разных соотношениях между полным числом частиц газа  $N$  и параметром  $l/L$ . При выполнении условия  $N(l/L)^4 \ll 1$  масштаб убывания заселенности основного состояния газа с ростом температуры  $T$  во всей области существования конденсата определяется характерной температурой  $T_1$ , зависящей только от продольного размера объема  $L$ , из чего следует, что конденсация в этом случае происходит в одномерном режиме, а температуру  $T_1$  можно назвать температурой одномерной

\*E-mail: valeks@sci.lebedev.ru

конденсации. При очень больших  $N$ , когда начинает выполняться обратное неравенство  $N(l/L)^4 \gg 1$ , режим одномерной конденсации (в смысле заселенности, т.е. среднего значения числа частиц в конденсате) реализуется только при очень низких температурах  $T \ll T_* = (T_1/N)(L/l)^4$  (см. (25)), после чего в области температур  $T_* \ll T \leq T_3$ , где  $T_3$  — температура трехмерной конденсации [4, 5], явление становится трехмерным.

Рассмотрены два случая: случай большого канонического ансамбля, т.е. статистики Бозе–Эйнштейна, когда сохраняется только среднее число частиц газа, и гораздо более адекватный ситуации (газ в сосуде!) случай канонического ансамбля бозонов, в котором точно фиксируется число частиц газа  $N$ . Статистика канонического ансамбля трехмерного газа была развита в работах [6–8]. Из результатов этих работ следует, что в трехмерном случае при радикальном различии функций распределения числа частиц в конденсате средние числа частиц в конденсате в этих двух статистиках совпадают. В настоящей работе показано, что в одномерном режиме конденсации различаются не только функции распределения числа частиц, но и средние числа частиц в основном состоянии (конденсате).

Отметим две важные особенности явления одномерной конденсации однородного идеального газа, качественно отличающие его от трехмерной. Как известно [4, 5], температура трехмерной конденсации пропорциональна плотности газа,  $T_3 \propto N/V$ , и остается постоянной при переходе к термодинамическому пределу  $N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty, N/V \rightarrow \text{const}$ . В отличие от этого, температура одномерной конденсации  $T_1 \propto N/L^2$  (см. (5)) при переходе к пределу  $N \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty, N/L \rightarrow \text{const}$ , при котором сохраняется плотность газа, стремится к нулю. При другом предельном переходе,  $N \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty, N/L^2 \rightarrow \text{const}$  температура конденсации остается постоянной, однако растет плотность газа, т.е. начиная с некоторых значений  $N$  газ заведомо нельзя считать идеальным (ситуация в этом случае вполне аналогична возникающей при трехмерной конденсации в параболической ловушке, когда (см., например, [1])

$$T_3 \sim \hbar\omega N^{1/3} \propto (N/V^2)^{1/3},$$

где  $V = R^3$  — «объем осциллятора»,  $R = \sqrt{\hbar/m\omega}$ ,  $\omega$  — частота ловушки,  $m$  — масса частиц). Это означает, что явление одномерной конденсации однородного идеального бозе-газа в термодинамическом пределе, как неоднократно подчеркивалось, исчезает [9–12], т.е. оно может быть реализовано только при ограниченном полном числе частиц. Нетрудно

оценить, однако, что это число частиц может быть весьма большим. Например, при размерах объема  $l = 10^{-3}$  см,  $L = 1$  см (роль границ такого объема могут играть лазерные поля, отталкивающие частицы стрикционными силами) и  $N = 10^{11}$  (при этом  $N(l/L)^4 = 0.1$ , т.е. конденсация происходит в одномерном режиме), газовый параметр  $a^3 N/l^2 L$  при типичной для щелочных металлов длине рассеяния  $a \approx 5 \cdot 10^{-7}$  см еще очень мал, так что газ близок к идеальному.

Другим характерным отличием одномерной конденсации от трехмерной является плавность убывания в одномерном случае с ростом температуры отношения  $\langle n_0 \rangle / N$ , где  $\langle n_0 \rangle$  — среднее число частиц в конденсате. В [7, 8] отмечалось, что и в трехмерном случае конечность числа частиц  $N$  приводит к размыванию области температуры, при которой отношение  $\langle n_0 \rangle / N$  обращается в нуль, и только при  $N \rightarrow \infty$  это отношение обращается в нуль при  $T = T_3$  с отличной от нуля производной. В одномерном случае плавность уменьшения отношения  $\langle n_0 \rangle / N$  сохраняется и в пределе  $N \rightarrow \infty$ , и в этом смысле температура одномерной конденсации  $T_1$  в еще большей степени теряет смысл, обычно приписываемый температуре конденсации как температуре, при которой отношение  $\langle n_0 \rangle / N$  обращается в нуль, и является фактически лишь характерным параметром задачи.

## 2. ОДНОМЕРНАЯ КОНДЕНСАЦИЯ В СТАТИСТИКЕ БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА (БОЛЬШОЙ КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ)

Для этого случая функция распределения  $W(n_0, n_1, \dots)$  чисел частиц  $n_k$ , находящихся в состояниях с энергией  $E_k$ , была найдена Эйнштейном в 1924 г. [13] и имеет вид произведения независимых распределений:

$$W(n_0, n_1, \dots) = \prod_k w_k(n_k), \tag{1}$$

$$w_k(n_k) = [1 - \exp(\mu - \varepsilon_k)] \exp[(\mu - \varepsilon_k)n_k],$$

где  $\varepsilon_k = E_k/T$ ,  $T$  — температура в энергетических единицах,  $\mu$  — химический потенциал в единицах температуры. Соответствующие распределению (1) средние значения

$$\langle n_k \rangle = \sum_{n_k=0}^{\infty} n_k w_k(n_k) = \tilde{n}_k$$

равны

$$\tilde{n}_k = [\exp(\varepsilon_k - \mu) - 1]^{-1}, \tag{2}$$

а химический потенциал  $\mu$  определяется требованием, чтобы сумма средних значений  $\tilde{n}_k$  была равна полному числу частиц газа:

$$\sum_k \tilde{n}_k = N. \quad (3)$$

В случае системы свободных бозонов энергетический спектр частиц определяется требованием периодичности волновой функции:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}} &= \alpha_x k_x^2 + \alpha_y k_y^2 + \alpha_z k_z^2, \\ \alpha_{x,y} &= \alpha_0 = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2m\Gamma l^2}, \quad \alpha_z = \alpha = \frac{(2\pi\hbar)^2}{2m\Gamma L^2}, \\ k_i &= 0, \pm 1, \dots, \quad \alpha \ll \alpha_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $m$  — масса частицы. Параметр  $\alpha$  удобно переписать в единицах характеризующей систему температуры одномерной конденсации:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{(2\pi\hbar)^2}{4\zeta(2)mL^2} N = \frac{6\hbar^2}{mL^2} N, \\ \alpha &= \frac{2\zeta(2)}{Nt} = \frac{\pi^2}{3Nt}, \quad t = \frac{T}{T_1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\zeta(x)$  — дзета-функция Римана.

Условие (3) с учетом (2) и (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{n}_{\mathbf{k}} &= \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \exp[\alpha_0(k_x^2 + k_y^2) + \alpha k_z^2 - \mu] - 1 \right\}^{-1} = N. \end{aligned} \quad (6)$$

При очень низких температурах, когда выполняется условие  $\alpha \gg 1$ , эквивалентное условию  $t \ll 1/N$ , в сумме (6) отличен от нуля лишь один член,  $\tilde{n}_0 = (e^{-\mu} - 1)^{-1}$ , откуда следует

$$\tilde{n}_0 = N, \quad \mu = -\ln\left(1 + \frac{1}{\tilde{n}_0}\right) \approx -\frac{1}{N},$$

и функции распределения (1) чисел частиц  $n_{\mathbf{k}}$  в состояниях  $\mathbf{k}$  принимают вид

$$\begin{aligned} w_0(n_0) &= \frac{1}{N} e^{-n_0/N}, \\ w_{\mathbf{k} \neq 0}(n_{\mathbf{k}}) &= \delta_{n_{\mathbf{k}}, 0}, \quad t \ll \frac{1}{N}. \end{aligned} \quad (7)$$

В соответствии с (7) при полном отсутствии частиц в возбужденных состояниях имеется конечная вероятность обнаружить любое количество частиц в основном состоянии. Это, естественно, противоречит здравому смыслу и подчеркивает несостоятельность распределения (1) по крайней мере при

$T \rightarrow 0$ , что характерно не только для рассматриваемого здесь случая однородного бозе-газа, а для статистики Бозе–Эйнштейна в целом. Устраняется это противоречие в статистике канонического ансамбля частиц [6–8]. При этом оказывается, что в трехмерном случае при радикальном различии функций распределения числа частиц в конденсате средние значения заселенностей в этих двух статистиках совпадают, а в одномерном случае, как будет видно ниже, различаются довольно слабо. Имея в виду, что почти все известные на сегодняшний день выводы относительно свойств конденсата сделаны в рамках статистики Бозе–Эйнштейна, а также необходимость сравнить результаты, получающиеся в этих двух подходах, мы продолжим исследование одномерной конденсации в рамках статистики Бозе–Эйнштейна, несмотря на явную противоречивость распределения (7).

С ростом температуры начинает выполняться условие  $\alpha \ll 1$  ( $t \gg 1/N$ ), тогда как степени свободы  $x$  и  $y$  все еще «заморожены», т. е.  $\alpha_0 \gg 1$ . В этой области температур ( $1/N \ll t \ll N^{-1}L^2/l^2$ ) система фактически является одномерной. С дальнейшим ростом температуры начинает выполняться условие  $\alpha_0 \ll 1$  и в игру вступают поперечные степени свободы  $x$  и  $y$ , т. е. система становится трехмерной. Для того чтобы проследить этот переход и точнее обозначить границы «одномерной конденсации», мы сохраним в сумме (6) все степени свободы и перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k_z=-\infty}^{\infty} [\exp(\alpha k_z^2 - \mu) - 1]^{-1} + \\ &+ \sum_{k_z=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}_{\perp} \neq 0} [\exp(\alpha k_z^2 + \alpha_0 \mathbf{k}_{\perp}^2 - \mu) - 1]^{-1}, \quad (8) \\ \mathbf{k}_{\perp} &= (k_x, k_y). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\alpha \ll 1$  и  $|\mu| \approx 1/\tilde{n}_0 \ll 1$ , можно разложить экспоненту в первой сумме, после чего с помощью формулы Пуассона (см., например, [14])

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(n) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{2i\pi s x} dx \quad (9)$$

она вычисляется точно:

$$\begin{aligned} \sum_{k_z=-\infty}^{\infty} (\alpha k_z^2 + |\mu|)^{-1} &= \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha|\mu|}} \frac{1 + \exp\left(-2\pi\sqrt{|\mu|/\alpha}\right)}{1 - \exp\left(-2\pi\sqrt{|\mu|/\alpha}\right)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Преобразуя вторую сумму в (8), используем равенство

$$[\exp(z^2 - \mu) - 1]^{-1} = \sum_{p=1}^{\infty} \exp[(-z^2 + \mu)p]$$

и вводим обозначение

$$\psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-zn^2), \quad (11)$$

после чего находим

$$\begin{aligned} \sum_{k_z=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}_{\perp} \neq 0} [\exp(\alpha k_z^2 + \alpha_0 \mathbf{k}_{\perp}^2 - \mu) - 1]^{-1} = \\ = \sum_{p=1}^{\infty} \psi\left(\frac{\pi^2}{3Nt^p}\right) \times \\ \times \left[ \psi^2\left(\frac{\pi^2}{3Nt} \frac{L^2}{l^2} p\right) - 1 \right] \exp(-|\mu|p). \quad (12) \end{aligned}$$

Учитывая (11) и (12), полагая  $|\mu| = 1/\tilde{n}_0$  и обозначая  $\tilde{n}_0/N = x$ , из (8) получаем уравнение

$$\begin{aligned} 1 = \sqrt{3tx} \operatorname{cth}\left(\sqrt{3t/x}\right) + \Sigma, \\ \Sigma = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{\infty} \psi\left(\frac{\pi^2}{3Nt^p}\right) \times \end{aligned} \quad (13)$$

$$\times \left[ \psi^2\left(\frac{\pi^2}{3Nt} \frac{L^2}{l^2} p\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{p}{Nx}\right),$$

определяющее относительную заселенность  $x$  основного состояния.

Как видно из (11), при больших и малых  $z$  функция  $\psi(z)$  стремится к двум предельным значениям:

$$\psi(z) = \begin{cases} \sqrt{\pi/z}, & z \ll 1, \\ 1 + 2e^{-z}, & z \gg 1. \end{cases} \quad (14)$$

Поэтому входящая в (13) сумма имеет качественно разный вид в зависимости от соотношения между двумя большими параметрами,  $N$  и  $L^2/l^2$ .

При выполнении условия

$$\frac{1}{N} \ll t \ll \frac{1}{N} \frac{L^2}{l^2}, \quad (15)$$

которое в случае, когда число частиц  $N$  относительно мало,

$$1 \ll N \ll L^2/l^2, \quad (16)$$

включает значения  $t \gg 1$ , входящая в (13) сумма экспоненциально мала и ее можно отбросить.

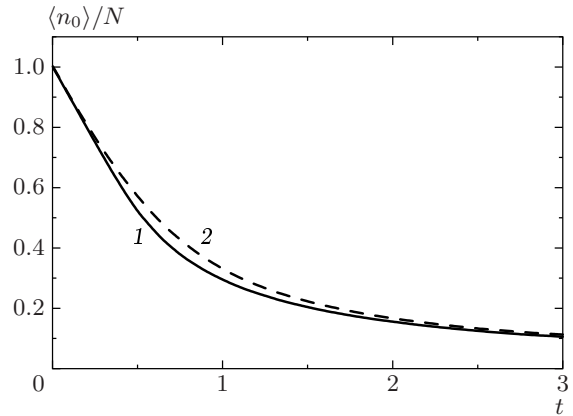


Рис. 1. Зависимость среднего числа частиц в одномерном конденсате от температуры. Кривая 1 соответствует каноническому ансамблю бозонов (результат вычисления с функцией распределения (51)), 2 — большому каноническому ансамблю (численное решение уравнения (17))

В результате заселенность основного состояния  $x = \tilde{n}_0/N$  определяется уравнением

$$\sqrt{3tx} = \operatorname{th}\left(\sqrt{3t/x}\right). \quad (17)$$

При низкой температуре из этого соотношения с точностью до членов порядка  $t^2$  получаем

$$\frac{\tilde{n}_0}{N} = 1 - t + \frac{1}{5}t^2, \quad \frac{1}{N} \ll t \ll 1. \quad (18)$$

При больших  $t$  с точностью до экспоненциально малой поправки из (17) находим

$$\frac{\tilde{n}_0}{N} = \frac{1}{3t} - 12te^{-6t}, \quad 1 \ll t \ll \frac{1}{N} \frac{L^2}{l^2}. \quad (19)$$

В области (19) относительная заселенность основного состояния уже очень мала, так что при выполнении условия (16) (далее будет видно, что это условие является достаточным и гораздо более сильным, чем необходимое (28)) уравнение (17) описывает практически всю область существования конденсата, который в этом случае при всех  $t$  является одномерным. Численное решение уравнения (17) показано на рис. 1.

С ростом температуры условие (15) перестает выполняться, причем при больших  $N \gg L^2/l^2$  оно нарушается уже при малых  $t \ll 1$ . При  $t \sim N^{-1}L^2/l^2$  сумма  $\Sigma$  в правой части (13) не поддается аналитическому исследованию. Однако при  $t \gg N^{-1}L^2/l^2$  можно воспользоваться асимптотическим значени-

ем (14) функции  $\psi(z)$  при  $z \ll 1$  и написать сумму в виде

$$\Sigma = \sqrt{At^3} \left( 1 - \frac{2\sqrt{\pi}}{\zeta(3/2)} \frac{1}{\sqrt{Nx}} \right), \quad (20)$$

где

$$A = \left( \frac{3}{\pi} \right)^3 \zeta^2 \left( \frac{3}{2} \right) N \frac{l^4}{L^4}.$$

Второй член в скобках в правой части (20) учитывает влияние экспоненты под знаком суммы в (13) и исчезает при  $N \rightarrow \infty$ , однако обеспечивает плавность стремления заселенности основного состояния  $x$  к нулю (без скачка производной) в узкой окрестности  $|T/T_3 - 1| \leq 1/N^{1/3}$  температуры трехмерной конденсации  $T_3$  подобно тому, как это происходит в случае газа, захваченного в параболическую ловушку [15]. Далее мы не будем усложнять изложение рассмотрением этого эффекта и, соответственно, вторым членом в скобках в (20) пренебрежем.

Уравнение (13) принимает вид

$$1 - \sqrt{At^3} = \sqrt{3tx} \operatorname{cth} \left( \sqrt{3t/x} \right). \quad (21)$$

Отметим, что величина, стоящая в левой части этого уравнения, равна относительной заселенности основного состояния при трехмерной конденсации газа.

Второй член в левой части уравнения (21) заметно влияет на его решение при значениях  $t \sim A^{-1/3} \sim (N^{-1}L^4/l^4)^{1/3}$ . Нетрудно проверить, что при выполнении неравенства

$$N \gg L/l \quad (22)$$

эти значения удовлетворяют условию  $t \gg N^{-1}L^2/l^2$ , при котором была вычислена сумма ряда (20). Это означает, что при выполнении условия (22) уравнение (21) применимо для любых  $t$ . Будем на данном этапе считать условие (22) выполненным.

Из (21) следует, что заселенность основного состояния обращается в нуль при значении  $t = t_3 = A^{-1/3}$ , соответствующем в размерных единицах температуре  $T_3$  обычной трехмерной конденсации бозе-газа [4, 5]:

$$T_3 = A^{-1/3}T_1 = 2\pi\zeta^{-2/3} \left( \frac{3}{2} \right) \frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{N}{l^2L} \right)^{2/3}. \quad (23)$$

Однако зависимость  $x(t)$  имеет качественно разный вид при больших и малых (это допускается условием (22)) значениях параметра  $A$ .

При больших  $A \gg 1$  вплоть до температур очень близких к  $t_3$ , что охватывает практически всю

область существования конденсата (в этом случае  $t_3 \ll 1$ ), из (21) следует

$$\frac{\tilde{n}_0}{N} = 1 - t - \sqrt{At^3}, \quad t_3 - t \gg A^{-2/3}. \quad (24)$$

Далее в узкой окрестности температуры трехмерной конденсации,  $t_3 - t \leq A^{-2/3}$ , заселенность основного состояния плавно убывает до нуля. Уравнение (21), однако, не может претендовать на правильное описание этой области, поскольку здесь становится существенным отброшенный второй член в скобках в формуле (20).

Второе слагаемое в (24) играет заметную роль только в области малых  $t$ :

$$\frac{1}{N} \ll t \leq \frac{1}{A} = \left( \frac{\pi}{3} \right)^3 \zeta^{-2} \left( \frac{3}{2} \right) \frac{1}{N} \frac{L^4}{l^4}, \quad (25)$$

и именно в этой области конденсат является одномерным (напомним, что левая часть условия обеспечивает применимость всего подхода в целом). С ростом  $N$  область (25) сужается и при  $N \rightarrow \infty$  исчезает (подчеркнем, что именно малость отношения  $l/L$  обеспечивает наличие этой области). При  $t > A^{-1} \ll t_3$  третий член в (24) превышает второй и процесс конденсации становится трехмерным. Переписав (24) в единицах  $T_3$ ,

$$\frac{\tilde{n}_0}{N} = 1 - \frac{\pi}{3} \zeta^{-2/3} \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{1}{N} \frac{L^4}{l^4} \right)^{1/3} \frac{T}{T_3} - \left( \frac{T}{T_3} \right)^{3/2},$$

видим, что отличный от нуля угол наклона этой зависимости в области малых  $T$ , характерный для одномерной конденсации, с ростом  $N$  убывает. При  $Nl^4/L^4 \rightarrow \infty$  он стремится к нулю, и процесс конденсации становится трехмерным при всех  $t$ .

При  $A \ll 1$  вид зависимости  $\tilde{n}_0/N$  от температуры качественно меняется. В этом случае  $t_3 \gg 1$ , и только вблизи  $t_3$  становится существенным наличие второго члена в левой части (21). При малых и больших  $t$  из (21) получаем

$$\frac{\tilde{n}_0}{N} = \begin{cases} 1 - t + t^2/5, & t \ll 1, \\ \frac{1}{3t} \left( 1 - \sqrt{At^3} \right)^2, & 1 \ll t \leq t_3. \end{cases} \quad (26)$$

Вплоть до очень больших  $t$ , когда конденсат уже практически исчезает, выражения (26) совпадают с (18) и (19). Это означает, что при выполнении условия

$$L/l \ll N \ll L^4/l^4, \quad (27)$$

левая часть которого является условием (22), а правая часть соответствует условию  $A \ll 1$ , среднее

число частиц в конденсате определяется уравнением (17) и процесс конденсации является одномерным.

Вернемся теперь к условию (22), которое нарушается при  $N \leq L/l$ . Эти значения  $N$  удовлетворяют условию (16), когда конденсация заведомо описывается уравнением (17). Это означает, что условие

$$N \ll L^4/l^4 \tag{28}$$

является необходимым и достаточным критерием того, что процесс конденсации является одномерным и среднее число частиц в конденсате описывается уравнением (17). При этом вплоть до температур очень близких к температуре трехмерной конденсации  $T_3$  среднее число частиц в конденсате велико,  $\tilde{n}_0 \gg 1$ , поэтому  $\mu = -1/\tilde{n}_0$  и функция распределения числа частиц в конденсате имеет вид

$$w_0(n_0) = \frac{1}{\tilde{n}_0} \exp\left(-\frac{n_0}{\tilde{n}_0}\right), \quad t < t_3. \tag{29}$$

### 3. ОДНОМЕРНАЯ КОНДЕНСАЦИЯ КАНОНИЧЕСКОГО АНСАМБЛЯ БОЗОНОВ

#### 3.1. Суммирование распределения Гиббса

При конденсации газа, объем которого ограничен стенками сосуда, должно фиксироваться полное число частиц газа

$$\sum_k n_k = N, \tag{30}$$

а не сумма средних (3). В этом случае функция распределения числа частиц в конденсате находится суммированием распределения Гиббса по всем возможным значениям чисел частиц в возбужденных состояниях  $(n_1, n_2, \dots)$  с точным соблюдением условия (30):

$$w_0(n_0) = \frac{1}{S} \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots= \\ =N-n_0}} \exp(-\varepsilon_0 n_0 - \varepsilon_1 n_1 - \dots), \tag{31}$$

где  $S$  — нормирующий множитель. В [6–8] было показано, что в трехмерном случае соблюдение условия (30) приводит к функции распределения числа частиц в конденсате, радикально отличающейся от вида (7) и (29), который она имеет в статистике Бозе–Эйнштейна, и устраняет противоречие, связанное с (7) и (29). Ниже будет видно, что аналогичное качественное различие возникает и в случае одномерной конденсации.

Использованная в [6–8] точная математическая процедура позволяет записать сумму (31) в виде

$$\begin{aligned} w_0(n_0) &= \frac{1}{S} \frac{1}{2\pi i} \oint z^{-N+n_0-1} \exp[G(z)] dz, \\ \exp[G(z)] &= \prod_{k \neq 0} [1 - z \exp(-\varepsilon_k)]^{-1}, \\ G(z) &= - \sum_{k \neq 0} \ln [1 - z \exp(-\varepsilon_k)] = \\ &= \sum_{k \neq 0} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} z^p \exp(-p\varepsilon_k). \end{aligned} \tag{32}$$

Контур интегрирования в (32) имеет вид окружности с центром в точке  $z = 0$  и радиусом  $|z| = e^\mu < 1$ , что эквивалентно условию  $\mu < 0$ . Подчеркнем, что (32) автоматически содержит в себе характерное для канонического ансамбля условие (30) и свободно от каких-либо ограничений.

При очень низкой температуре, когда выполняется условие  $\alpha \gg 1$ , что эквивалентно  $t \ll 1/N$ , рассмотрение полностью аналогично проведенному в [6–8] для трехмерного случая. Существенны только два значения:

$$w_0(n_0 = N) = 1 - 2e^{-\alpha}, \quad w_0(n_0 = N - 1) = 2e^{-\alpha},$$

откуда видно, что при  $T \rightarrow 0$  распределение принимает вид  $w_0(n_0) = \delta_{n_0, N}$ . Это распределение соответствует очевидному факту, что при  $T = 0$  все частицы находятся в конденсате, и радикально отличается от распределения Бозе–Эйнштейна (29) и (7).

С ростом температуры после очень узкой переходной области  $t \sim 1/N$  начинает выполняться условие  $\alpha \ll 1$ , эквивалентное условию  $t \gg 1/N$ , когда функцию распределения (32) снова можно исследовать аналитически. Выполнив в (32) замену  $z = \exp(\mu + ix)$ , находим

$$\begin{aligned} w_0(n_0) &= \frac{\exp(\mu n_0)}{S} \times \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i(N - n_0)x + F(x, \mu)] dx, \\ F(x, \mu) &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\exp[(\mu + ix)p]}{p} \times \\ &\times \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \exp[-(\alpha k_z^2 + \alpha_0 \mathbf{k}_\perp^2)p]. \end{aligned} \tag{33}$$

До настоящего времени параметр  $\mu$  был ограничен условием  $\mu < 0$ , а в остальном оставался произвольным. Поэтому прежде всего заметим, что входящая в определение функции  $F(x, \mu)$  сумма по  $\mathbf{k} \neq 0$

экспоненциально убывает при больших  $p$ , обеспечивая сходимость ряда по  $p$  и, соответственно, непрерывность функции  $F(x, \mu)$  при  $\mu = 0$ . Непрерывность функции  $F(x, \mu)$  при  $\mu = 0$  позволяет вычислять  $w_0(n_0)$ , положив в (33)  $\mu = 0$  и обозначив  $F(x) = F(x, \mu = 0)$ .

Функцию  $F(x)$  удобно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$F(x) = F_1(x) + F_3(x),$$

$$F_1(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\exp(ipx)}{p} \sum_{k \neq 0} \exp(-\alpha p k^2),$$

$$F_3(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\exp(ipx)}{p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha p k^2) \times \quad (34)$$

$$\times \sum_{\mathbf{k}_{\perp} \neq 0} \exp(-\alpha_0 p \mathbf{k}_{\perp}^2).$$

Важно изучить поведение этих функций при малых  $|x| \ll 1$ ,  $\alpha \ll 1$  и  $\alpha_0 \ll 1$ . Начнем с исследования функции  $F_1(x)$ . Дифференцируя ее по  $x$ , получаем

$$\frac{dF_1}{dx} = i \sum_{p=1}^{\infty} \exp(ipx) \sum_{k \neq 0} \exp(-\alpha p k^2) =$$

$$= i \sum_{p=1}^{\infty} \exp(ipx) [\psi(\alpha p) - 1].$$

При малых  $x$  и  $\alpha$  от суммирования по  $p$  в этом соотношении можно перейти к интегрированию в пределах  $(0, +\infty)$ , поскольку получающийся интеграл, как видно из (14), сходится:

$$\frac{dF_1}{dx} = i \sum_{k \neq 0} \int_0^{\infty} \exp(ixp - \alpha k^2 p) dp = \frac{i}{\alpha} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2 - ix/\alpha}.$$

Интегрируем это соотношение по  $x$  в пределах  $(0, x)$  и, замечая, что при малых  $\alpha$

$$F_1(0) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\psi(\alpha p) - 1}{p} \approx \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right),$$

получаем

$$F_1(x) = F_1(0) + g\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

$$g(u) = - \sum_{k \neq 0} \ln\left(1 - i \frac{u}{k^2}\right). \quad (35)$$

Функция  $F_3(x)$  в области температур (15) экспоненциально мала. В области  $t \sim N^{-1} L^2/l^2$  она

не поддается аналитическому исследованию. Однако, как будет видно ниже, в этой области она не играет существенной роли и, как и в случае статистики Бозе–Эйнштейна, начинает влиять на процесс конденсации лишь при температурах  $t \sim N^{-1} L^4/l^4$ . При этих температурах уже выполняется условие  $\alpha_0 \ll 1$ , при котором функцию  $F_3(x)$  можно исследовать аналитически. Дифференцируя  $F_3(x)$  два раза по  $x$ , получаем

$$\frac{d^2 F_3}{dx^2} = - \sum_{p=1}^{\infty} p \exp(ipx) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha p k^2) \times$$

$$\times \sum_{\mathbf{k}_{\perp} \neq 0} \exp(-\alpha_0 p \mathbf{k}_{\perp}^2).$$

При вычислении суммы по  $p$  при малых  $x$ ,  $\alpha$  и  $\alpha_0$  можно перейти к интегрированию, выполнив которое, находим

$$\frac{d^2 F_3}{dx^2} = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}_{\perp} \neq 0} \frac{1}{(\alpha k^2 + \alpha_0 \mathbf{k}_{\perp}^2 - ix)^2}.$$

Интегрируя это равенство два раза по  $x$  с учетом соотношений

$$F_3(0) = \pi^{3/2} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\alpha} \alpha_0},$$

$$\left(\frac{dF_3}{dx}\right)_{x=0} = i \pi^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\alpha} \alpha_0} = i \sqrt{At^3} N,$$

получаем

$$F_3(x) = F_3(0) + i \sqrt{At^3} N x + g_3(x/\alpha), \quad (36)$$

$$g_3(u) =$$

$$= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}_{\perp} \neq 0} \left[ \ln \left( 1 - \frac{i u}{k^2 + \frac{L^2}{l^2} \mathbf{k}_{\perp}^2} \right) + \frac{i u}{k^2 + \frac{L^2}{l^2} \mathbf{k}_{\perp}^2} \right].$$

Вплоть до больших значений  $u < L^2/l^2$  при вычислении функции  $g_3(u)$  можно использовать разложение по  $u$ . Первый член разложения дает (суммирование по  $k$  можно заменить интегрированием)

$$g_3(u) \approx - \frac{\pi}{4} \left(\frac{l}{L}\right)^3 u^2 \sum_{\mathbf{k}_{\perp} \neq 0} \frac{1}{|\mathbf{k}_{\perp}|^3}, \quad |u| \ll \frac{L^2}{l^2},$$

причем у последующих членов разложения степень малого параметра  $l/L$  нарастает. При очень больших  $u$  при вычислении функции  $g_3(u)$  суммирование можно заменить интегрированием, что дает

$$g_3(u) = - \frac{4}{3} \pi^2 \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \left(\frac{l}{L}\right)^2 u^{3/2}, \quad |u| \gg \frac{L^2}{l^2}.$$

Из этих соотношений видно, что вплоть до очень больших значений  $1 \ll u < L^2/l^2$  выполняется неравенство  $|g(u)| \gg |g_3(u)|$  и влиянием функции  $g_3(u)$  можно пренебречь. Отсюда сразу следует, что форма функции распределения числа частиц в конденсате в случае одномерной системы ( $l/L \ll 1$ ) всегда (при любых  $N$ ) определяется «одномерной» функцией  $g(u)$  и потому качественно отличается от функции распределения трехмерной системы ( $l/L \sim 1$ ) [8].

Собирая слагаемые из (35) и (36) и отбрасывая  $g_3$ , получаем

$$F(x) = F(0) + i\sqrt{At^3} Nx + g\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

При подстановке этой функции в интеграл в (33) (напомним, что  $\mu = 0$ ) значение  $F(0)$  можно отбросить, поскольку оно влияет только на нормирующий множитель, определяемый самим соотношением (33). После замены  $x/\alpha = u$  замечаем, что условие  $\pi/\alpha \gg 1$  позволяет вычислять интеграл в бесконечных пределах, и находим

$$w_0(n_0) = S^{-1} \varphi\left(\frac{\pi^2}{3t} \left(\frac{n_0}{N} - 1 + \sqrt{At^3}\right)\right),$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[iyu + g(u)] du. \tag{37}$$

Из (37) видно, что распределение числа частиц в конденсате определяется свойствами функции  $\varphi(y)$ , которую удается вычислить точно.

### 3.2. Функция $\varphi(y)$

Начнем с вычисления функции  $g(u)$ , заданной рядом (35). Для этого дифференцируем  $g(u)$ :

$$\frac{dg}{du} = i \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2 - iu} = i \left[ -\frac{1}{iu} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - iu} \right], \tag{38}$$

и используем формулу Пуассона (9), которая приводит к результату

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - iu} = \frac{2\pi i}{2\sqrt{iu}} + 2 \left( 2\pi i \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\exp(2\pi i \sqrt{iu} s)}{2\sqrt{iu}} \right) =$$

$$= \frac{\pi e^{\pi i/4}}{\sqrt{u}} + \frac{2\pi e^{\pi i/4}}{\sqrt{u}} \frac{e^{-\gamma\sqrt{u}}}{1 - e^{-\gamma\sqrt{u}}},$$

$$\gamma = 2\pi e^{-\pi i/4}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg u < \frac{3\pi}{2}.$$

Подставляя это значение суммы в (38), замечая, что  $g(0) = 0$ , и интегрируя (38) в пределах  $(0, u)$ , находим

$$g(u) = -\gamma\sqrt{u} + \int_0^u \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\gamma e^{-\gamma\sqrt{x}}}{1 - e^{-\gamma\sqrt{x}}} \right) dx.$$

Интеграл по  $x$  в этом выражении после замены  $x = z^2$  вычисляется точно, и мы получаем

$$g(u) = -\gamma\sqrt{u} - 2 \ln \left( \frac{1 - e^{-\gamma\sqrt{u}}}{\gamma\sqrt{u}} \right).$$

Далее из определения (37) функции  $\varphi(y)$  следует

$$\varphi(y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyu} [K(u)]^2 du, \tag{39}$$

$$K(u) = \frac{\gamma\sqrt{u}}{e^{\gamma\sqrt{u}/2} - e^{-\gamma\sqrt{u}/2}}.$$

Функция  $K(u)$  не имеет особенностей в верхней полуплоскости. Поэтому при  $y > 0$  путь интегрирования в (39) можно деформировать в полуокружность, расположенную в верхней полуплоскости, устремив ее радиус  $R$  в бесконечность. Поскольку на этой полуокружности функция  $K(u)$  экспоненциально мала с отрицательным показателем экспоненты пропорциональным  $\sqrt{R}$ , приходим к выводу, что  $\varphi(y) = 0$  при  $y > 0$ .

При подходе слева и справа к отрицательной части мнимой полуоси функция  $K(u)$  принимает одинаковые значения, откуда следует, что точки  $u = -in^2$ , где  $n$  пробегает все целые значения от единицы до бесконечности, являются ее полюсами. Поэтому при  $y < 0$  замыкаем контур интегрирования в (39) по полуокружности, расположенной в нижней полуплоскости с радиусом  $R \rightarrow \infty$ , однако  $R \neq n^2$ . Нетрудно проверить, что интеграл по полуокружности стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , поскольку подынтегральное выражение экспоненциально мало. Поэтому функция  $\varphi(y)$  равна сумме вычетов в полюсах второго порядка ( $u = -in^2, n = 1, 2, \dots$ ) функции  $K^2(u)$ . Вычисляя вычеты, находим

$$\varphi(y) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-|y|n^2) \left( |y|n^2 - \frac{3}{2} \right) n^2, \quad y < 0,$$

$$\varphi(y) = 0, \quad y > 0. \tag{40}$$

При больших  $|y| \gg 1$  в (40) можно ограничиться лишь одним членом суммы:

$$\varphi(y) = 4\pi (|y| - 3/2) e^{-|y|}, \quad y < 0, \quad |y| \gg 1. \tag{41}$$



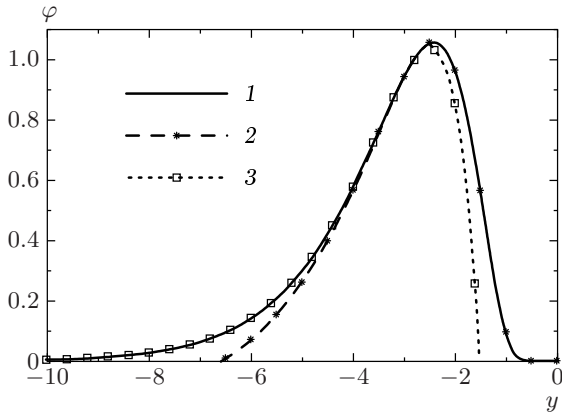


Рис. 2. Функция  $\varphi(y)$ . Кривые 1 — результат точного вычисления по формулам (39) или (40), 2 — асимптотическое значение (43), 3 — асимптотическое значение (41)

Для исследования поведения  $\varphi(y)$  при  $|y| \ll 1$  замечаем, что эта функция связана с функцией  $\psi(y)$ , определенной рядом (11), очевидным соотношением

$$\varphi(y) = 2\pi \left[ |y| \frac{d^2\psi}{d|y|^2} + \frac{3}{2} \frac{d\psi}{d|y|} \right]. \quad (42)$$

Использование формулы Пуассона (9) приводит к следующему соотношению для функции  $\psi(|y|)$  [14]:

$$\psi(|y|) = \sqrt{\frac{\pi}{|y|}} \psi\left(\frac{\pi^2}{|y|}\right).$$

При  $|y| \rightarrow 0$  отсюда с точностью до экспоненциально малых слагаемых получаем

$$\psi(|y|) = \sqrt{\frac{\pi}{|y|}} \left[ 1 + 2 \exp\left(-\frac{\pi^2}{|y|}\right) \right], \quad |y| \ll 1.$$

Дифференцируя это соотношение и подставляя в (42), находим

$$\varphi(y) = 4\pi^5 \sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{|y|}{\pi^2} \right) \frac{\exp(-\pi^2/|y|)}{|y|^{7/2}}, \quad (43)$$

$$y < 0, \quad |y| \ll 1.$$

Функция  $\varphi(y)$ , вычисленная по точной формуле (39) (или (40)), и ее асимптотические значения (41) и (43) показаны на рис. 2. Из рисунка видно, что при  $-4 < y < -3$  значения  $\varphi(y)$ , вычисленные по формулам (41) и (43), с большой точностью совпадают. Поэтому при  $y < -3.5$  можно фактически пользоваться формулой (41), а при  $-3.5 < y \leq 0$  — формулой (43). В частности, отсюда следует, что максимум функции  $\varphi(y)$  определяется асимптотикой (43) и достигается при значении  $y_{max} \approx -2.41$ .

Существуют и легко вычисляются аналитически все моменты функции  $\varphi(y)$ . Они определяются коэффициентами разложения функции  $g(u)$ :

$$g(u) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (iu)^n, \quad c_n = \frac{2}{n} \zeta(2n), \quad |u| < 1,$$

и равны

$$\langle y^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y^m \varphi(y) dy = \pi \left( \frac{d^m}{du^m} e^{g(iu)} \right)_{u=0}, \quad (44)$$

$$g(iu) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n u^n.$$

В частности, из этой формулы получаем

$$\langle y^0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = \pi,$$

$$\langle y \rangle = -\pi c_1 = -\pi \cdot 2\zeta(2) = -\pi^3/3,$$

$$\langle y^2 \rangle = \pi [2\zeta(4) + 4\zeta^2(2)] = 2\pi^5/15. \quad (45)$$

### 3.3. Функция распределения числа частиц в конденсате

Поскольку функция  $\varphi(y) = 0$  при  $y > 0$ , из (37) следует, что при выполнении условия  $1 - \sqrt{At^3} < 0$ , т. е. когда температура превышает критическую температуру трехмерной конденсации  $t > A^{-1/3} = t_3$ , вероятность обнаружить в конденсате отличное от нуля число частиц равна нулю. При температуре меньшей критической,  $t < t_3$ , число частиц, которое можно обнаружить в конденсате с отличной от нуля вероятностью, ограничено условием

$$n_0 < (n_0)_{lim} = N \left( 1 - \sqrt{At^3} \right) = N \left[ 1 - \sqrt{(T/T_3)^3} \right],$$

а функция распределения  $w_0(n_0)$  имеет качественно разный вид при разных значениях температуры  $t$  и параметра  $A$ .

На верхней границе распределения, когда  $n_0 \rightarrow (n_0)_{lim}$ , функция распределения  $w_0(n_0)$ , как видно из (37) и (43), экспоненциально мала. При больших  $A \gg 1$  в широком диапазоне температур

$$t_3 - t \gg \frac{2}{3} t_3^2 = \frac{2}{3} A^{-2/3}, \quad A \gg 1, \quad (46)$$

когда выполняется условие  $(1 - \sqrt{At^3})/t \gg 1$ , функция  $w_0(n_0)$  в соответствии с (41) экспоненциально

мала также и на нижней границе  $n_0 = 0$ . В результате функция распределения числа частиц в конденсате  $w_0(n_0)$  в области температур (46) имеет вид резонанса, максимум которого достигается при значении

$$\frac{(n_0)_{max}}{N} = \frac{3t}{\pi^2} y_{max} + 1 - \sqrt{At^3}, \quad y_{max} \approx -2.41, \quad (47)$$

а ширина порядка

$$\Delta n_0/N \approx 0.9t. \quad (48)$$

Из этого следует, что при  $t \rightarrow 0$  распределение принимает вид  $\delta$ -функции,  $w_0(n_0) \rightarrow \delta(n_0 - N)$ , т. е. качественно отличается от вида аналогичного распределения (29) в статистике Бозе-Эйнштейна.

Несмотря на столь резкое различие в функциях распределения, средние значения чисел частиц в конденсате при выполнении условия (46) в статистике канонического ансамбля и в статистике Бозе-Эйнштейна совпадают. При вычислении среднего значения в статистике канонического ансамбля,

$$\langle n_0 \rangle = \sum_{n_0=0}^N n_0 w(n_0),$$

от суммирования с функцией распределения (37) можно перейти к интегрированию, и после замены

$$\frac{\pi^2}{3t} \left( \frac{n_0}{N} - 1 + \sqrt{At^3} \right) = y$$

получаем

$$\frac{\langle n_0 \rangle}{N} = \frac{3t}{\pi^2} \int_{\eta(t)}^0 y \varphi(y) dy \left( \int_{\eta(t)}^0 \varphi(y) dy \right)^{-1} + 1 - \sqrt{At^3},$$

$$\eta(t) = -\frac{\pi^2}{3} \frac{1 - \sqrt{At^3}}{t}.$$

В области температур (46) нижний предел интегрирования в последнем выражении можно устремить в бесконечность,  $\eta = -\infty$ . После этого, учитывая (45), находим, что соответствующее распределению (37) среднее  $\langle n_0 \rangle$  в области температур (46) совпадает со средним значением (24),  $\langle n_0 \rangle = \tilde{n}_0$ , вычисленным в этой области в рамках статистики Бозе-Эйнштейна.

Также легко вычисляется и соответствующая (37) (т. е. каноническому ансамблю) среднеквадратичная флуктуация, которая в области (46) равна

$$\left\langle (n_0 - \langle n_0 \rangle)^2 \right\rangle_{ca} = \frac{1}{5} N^2 t^2. \quad (49)$$

Эта величина убывает с уменьшением температуры и стремится к нулю при  $t \rightarrow 0$ , радикально отличаясь от аналогичной величины, соответствующей распределению Бозе-Эйнштейна (29), в рамках которого, как известно [5], среднеквадратичная флуктуация

$$\left\langle (n_0 - \tilde{n}_0)^2 \right\rangle_{BE} = \tilde{n}_0^2 + \tilde{n}_0$$

с уменьшением температуры растет и стремится к  $N^2 + N$  при  $t \rightarrow 0$ .

С ростом температуры перестает выполняться первое из условий (46) и форма распределения качественно перестраивается. В области температур

$$t_3 - t \leq \frac{2}{3} t_3^2 = \frac{2}{3} A^{-2/3}, \quad A \gg 1, \quad (50)$$

распределение (37) можно переписать в виде

$$w_0(n_0) = S^{-1} \varphi \left[ \frac{\pi^2}{3t_3} \left( \frac{n_0}{N} - \frac{3}{2} \frac{t_3 - t}{t_3} \right) \right].$$

Эта функция распределения принимает конечное значение при  $n_0 = 0$ . Вплоть до значений

$$t \leq t_3 + (2/\pi^2) y_{max} t_3^2 \approx t_3 - 0.5t_3^2$$

у нее сохраняется максимум, который достигается при значениях

$$\frac{n_0}{N} = \frac{3}{2} \frac{t_3 - t}{t_3} + \frac{3}{\pi^2} y_{max} t_3.$$

С дальнейшим ростом температуры максимум исчезает и распределение становится монотонно убывающей функцией числа частиц  $n_0$  (рис. 3).

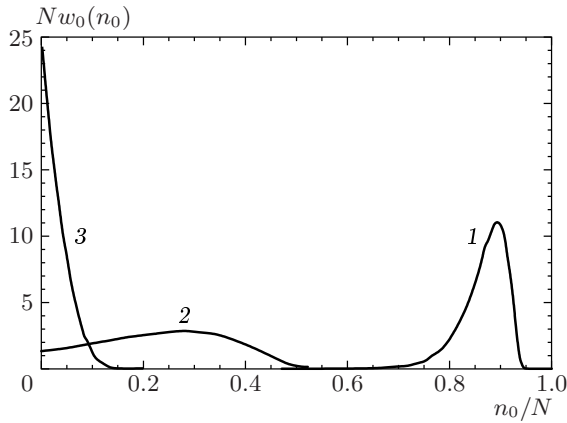
При малых  $A \ll 1$  температура трехмерной конденсации  $t_3 \gg 1$  и в аргументе функции распределения (37) вплоть до больших  $t \gg 1$  можно пренебречь слагаемым  $\sqrt{At^3}$ :

$$w_0(n_0) = S^{-1} \varphi \left( \frac{\pi^2}{3t} \left( \frac{n_0}{N} - 1 \right) \right), \quad A \ll 1. \quad (51)$$

Нетрудно проверить, что при малых и больших  $t$  из этого распределения следует

$$\frac{\langle n_0 \rangle}{N} = \begin{cases} 1 - t + \frac{4\pi^2}{3t} \exp\left(-\frac{\pi^2}{3t}\right), & t \ll 1, \\ \frac{1}{3t} - \frac{1}{18t^2}, & t \gg 1. \end{cases} \quad (52)$$

Сравнение выражения (52) с (18) и (19) показывает, что при  $A \ll 1$  средние значения в статистиках Бозе-Эйнштейна и канонического ансамбля совпадают лишь в предельных случаях  $t \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow \infty$  и к этим предельным значениям среднее число частиц в



**Рис. 3.** Функция распределения числа частиц в конденсате канонического ансамбля при  $A = 1$  и разных температурах. Кривая 1 соответствует температуре  $t = T/T_1 = 0.1$ , кривая 2 — температуре  $t = 0.5$ , кривая 3 — температуре  $t = 0.8$

конденсате при  $t \rightarrow 0$  в статистике Бозе–Эйнштейна стремится медленнее, чем в статистике канонического ансамбля, а при  $t \rightarrow \infty$  — быстрее. Из этого следует что полного совпадения средних нет. Численное исследование это подтверждает (см. рис. 1.), однако показывает, что и в промежуточной области они различаются довольно слабо.

При малых  $t \ll 1$  функция распределения (51) имеет вид резонанса, положение максимума которого определяется выражением (47), ширина — (48), а среднеквадратичная флуктуация — (49). С ростом температуры максимум исчезает. При  $t \gg 1$  можно воспользоваться асимптотическим выражением (43) и распределение (51) принимает вид

$$w_0(n_0) = S^{-1} \left(1 - \frac{n_0}{N}\right)^{-7/2} \exp\left(-\frac{3t}{1 - n_0/N}\right),$$

$$t \gg 1.$$

При вычислении соответствующих этому распределению нормировки и средних значений можно ограничиться членами первого порядка по параметру  $1/3t$ . В результате получаем распределение

$$w_0(n_0) = \frac{3t}{N} \exp\left(-\frac{3t}{N}n_0\right), \quad \langle n_0 \rangle = \frac{N}{3t}, \quad t \gg 1,$$

которое, как видно из (19), совпадает с (29).

Таким образом, при выполнении условия (28) (эквивалентного условию  $A \ll 1$ ) явление конденсации в каноническом ансамбле бозонов в смысле среднего значения числа частиц в конденсате, как и в случае

статистики Бозе–Эйнштейна, носит одномерный характер, причем средние числа частиц в конденсатах этих ансамблей различаются довольно слабо и точно совпадают в двух предельных случаях,  $t \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow \infty$ . В отличие от этого при относительно низких температурах  $t \leq 1$  (когда число частиц в конденсате сравнимо с полным числом частиц газа  $N$ ) функции распределения числа частиц в конденсатах этих ансамблей качественно различаются, что приводит к радикальному различию как среднеквадратичных флуктуаций, так и всех остальных более высоких моментов. При выполнении условия (28) выполняется также условие  $T_1 \ll T_3$ , в результате чего имеется область температур  $1 \ll t \ll t_3$ , при которых функция распределения числа частиц в одномерном конденсате канонического ансамбля принимает вид распределения Бозе–Эйнштейна. В отличие от трехмерного случая [6–8] такая перестройка функции распределения от сужающегося при  $t \rightarrow 0$  резонанса к виду (29) при  $t \gg 1$  происходит плавно, темп ее изменения не зависит от числа частиц газа  $N$  и, таким образом, одномерная конденсация теряет черты фазового перехода, характерные для явления трехмерной конденсации, когда соответствующая перестройка при  $N \rightarrow \infty$  происходит скачком.

### 3.4. Функция распределения числа частиц в возбужденных состояниях

На первом этапе находим совместное распределение  $w_{0,i \neq 0}(n_0, n_i)$ . Процедура, аналогичная выполненным в [6–8], приводит к результату

$$w_{0,i \neq 0}(n_0, n_i) = S^{-1} \exp(-\varepsilon_i n_i) \times$$

$$\times \left\{ \varphi \left[ \frac{\pi^2}{3t} \left( \frac{n_0 + n_i}{N} - 1 + \sqrt{At^3} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \exp(-\varepsilon_i) \varphi \left[ \frac{\pi^2}{3t} \left( \frac{n_0 + n_i + 1}{N} - 1 + \sqrt{At^3} \right) \right] \right\}.$$

Функция распределения числа частиц в возбужденных состояниях находится суммированием (интегрированием) этого распределения по всем возможным значениям  $n_0$ :

$$w_{i \neq 0}(n_i) = \sum_{n_0=0}^N w_{0,i \neq 0}(n_0, n_i).$$

В области температур (46) при интегрировании можно пренебречь единицей по сравнению с  $n_0$  во втором слагаемом, и мы получаем распределение

$$w_{i \neq 0}(n_i) = [1 - \exp(-\varepsilon_i)] \exp(-\varepsilon_i n_i),$$

совпадающее с распределением Бозе–Эйнштейна (1) при  $\mu = 0$ .

Аналогичный результат получается и при  $A \ll 1$  в области малых  $t \ll 1$ . В области  $1 \ll t < t_3$  при  $A \ll 1$  можно воспользоваться асимптотической формулой (43), и мы снова получаем (1) с  $\mu = -3t/N$ , что соответствует (19).

#### 4. ВЫВОДЫ

1. Суммирование распределения Гиббса по дискретным уровням энергии идеального бозе-газа, находящегося в сосуде, поперечные размеры которого много меньше продольного,  $l/L \ll 1$ , показывает, что при выполнении условия  $N(l/L)^4 \ll 1$  среднее число частиц в конденсате как в рамках статистики Бозе-Эйнштейна, так и в рамках статистики канонического ансамбля бозонов является функцией параметра  $t = T/T_1$ , где  $T_1$  — характеризующая систему температура (5), зависящая только от продольного размера системы  $L$ , т. е. процесс конденсации носит одномерный характер. В противоположном предельном случае,  $N(l/L)^4 \gg 1$ , ситуация изменяется и процесс в смысле среднего значения числа частиц в конденсате становится трехмерным.

2. Аналогично трехмерному случаю [8] функция распределения числа частиц в одномерном конденсате канонического ансамбля качественно отличается от аналогичного распределения в статистике Бозе-Эйнштейна (большого канонического ансамбля). В статистике Бозе-Эйнштейна распределение при всех температурах имеет вид (29), соответствующий плавному уменьшению вероятности  $w_0(n_0)$  обнаружить в конденсате  $n_0$  частиц от максимального значения, которое она принимает при  $n_0 = 0$ , до нуля при  $n_0 \rightarrow \infty$ . С уменьшением температуры ширина этого распределения растет, что приводит к росту флуктуаций (флуктуационной катастрофе). В статистике канонического ансамбля при низкой температуре ( $t \ll 1$ ) аналогичное распределение имеет вид резонанса, ширина которого (48) с уменьшением температуры стремится к нулю, что соответствует подавлению флуктуаций. С ростом температуры это распределение перестраивается, и при  $t \gg 1$  оно принимает вид распределения Бозе-Эйнштейна. В отличие от трехмерного случая перестройка происходит плавно, темп изменения формы распределения с ростом температуры не зависит от числа частиц газа. Это означает, что одномерная конденсация теряет черты фазового перехода, характерные для явления трехмерной конденсации в каноническом ансамбле бозонов, когда такая перестройка при  $N \rightarrow \infty$  происходит скачком.

3. Несмотря на радикальное различие функций

распределения числа частиц в конденсатах большого канонического и канонического ансамблей, средние значения чисел частиц в одномерных конденсатах этих ансамблей различаются довольно слабо (напомним, что в трехмерном случае они точно совпадают [8]) и принимают одинаковые значения в предельных случаях  $t \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow \infty$ .

4. При выполнении условия  $l/L \ll 1$  функция распределения числа частиц в конденсате канонического ансамбля при всех  $N$  сохраняет вид, специфический для одномерной системы.

5. Функции распределения числа частиц в возбужденных состояниях в большом каноническом и каноническом ансамблях совпадают и имеют вид распределения Бозе-Эйнштейна.

Работа частично поддержана Государственной научно-технической программой «Метрология» и РФФИ (проекты N01-02-17354 и 00-15-96789).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. Ketterle and N. J. van Druten, *Phys. Rev. A* **54**, 656 (1996).
2. C. Orzel, A. K. Tuchman, M. L. Fenselan et al., *Science* **291**, 2386 (2001).
3. A. Gorlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 130402-1 (2001).
4. A. Einstein, *Berl. Ber.* **23**, 3 (1925).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1995).
6. В. А. Алексеев, *КЭ* **31**, 16 (2001).
7. В. А. Алексеев, *ЖЭТФ* **119**, 700 (2001).
8. В. А. Алексеев, *КЭ* **31**, 427 (2001).
9. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978), с. 136.
10. Р. С. Нойенберг, *Phys. Rev.* **158**, 383 (1967).
11. В. Л. Березинский, *ЖЭТФ* **59**, 907 (1971); **61**, 1144 (1971).
12. V. Bagnato and D. Kleppner, *Phys. Rev. A* **44**, 7439 (1991).
13. A. Einstein, *Berl. Ber.* **22**, 261 (1924).
14. М. А. Евграфов, *Асимптотические оценки и целые функции*, Наука, Москва (1979), с. 37.
15. В. А. Алексеев, Д. Д. Крылова, *КЭ* **30**, 441 (2000).