

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ В РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Н. Г. Мазур^a, В. В. Геогджаев^b, А. В. Гуревич^{c}, К. П. Зыбин^{c**}*

^a *Институт физики Земли Российской академии наук
123995, Москва, Россия*

^b *Институт океанологии Российской академии наук
117851, Москва, Россия*

^c *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 июля 2001 г.

Исследуется квазиклассический предел для нелинейного уравнения Шредингера в случае дефокусирующей среды при осциллирующих непериодических заданных на всей оси x начальных условиях. Сформулирована система интегральных законов сохранения бесконечного числа усредненных по пространству плотностей, которые рассчитываются явно по начальным условиям. Исследована прямая задача рассеяния и показано, что фаза рассеяния является равномерно распределенной случайной величиной. Эволюция такой системы приводит к развитию нелинейных колебаний, приобретающих на больших временах статистический характер. Асимптотическое решение построено методом модифицированной обратной задачи рассеяния, основанном на конструкции максимизатора N -солитонного решения в континуальном пределе при $N \rightarrow \infty$. С помощью максимизатора найден бесконечный набор сохраняющихся усредненных плотностей в статистическом состоянии. Это позволило связать начальное состояние с установившимся при $t \rightarrow \infty$ предельным статистическим и тем самым однозначно определить спектр уровней в статистическом состоянии.

PACS: 05.10.-a, 05.45.Yv

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается нелинейное уравнение Шредингера для случая дефокусировки:

$$iu_t + u_{xx} - 2|u|^2u = 0. \quad (1)$$

Это уравнение, как известно, является полностью интегрируемым. Его решение для классической задачи с быстро убывающим начальным потенциалом $u(x, 0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, 0)| dx < \infty, \quad (2)$$

было впервые получено Захаровым и Шабатом [1]. Условие вида (2), накладываемое на начальную функцию $u(x, 0)$, имеет фундаментальное значение в теории интегрирования методом обратной задачи рассеяния [2]. Оно обеспечивает аналитичность начального потенциала $u(x, 0)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Благодаря этому оказывается возможным получить полное решение задачи рассеяния, т. е. точно определить систему начальных фаз. Смещение фаз во времени описывается простым обыкновенным дифференциальным уравнением, а преобразование к $u(x, t)$ — линейной обратной задачей рассеяния. (см. [2, с. 36]). Указанная процедура и составляет основу классического метода обратной задачи рассеяния, позволяющего решить задачу Коши для нелинейного уравнения (например, нелинейного уравнения Шредингера), т. е. однозначно определить для заданной $u(x, 0)$

*E-mail: alex@lpi.ru

**E-mail: zybin@lpi.ru

строго детерминированное значение $u(x)$ в любой момент времени t .

Постановка задачи в настоящей работе принципиально отличается от классической. В ней рассматривается начальная функция

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3)$$

где $u_0(x)$ — заданная на всей оси x осциллирующая, непериодическая, крупномасштабная, ограниченная функция. Подробнее свойства этой функции будут обсуждены ниже в разд. 2. Здесь же для нас важно, что она не удовлетворяет условию (2). В результате функция $u_0(x)$ теряет аналитичность при $|x| \rightarrow \infty$. Более того, она имеет здесь существенно особую точку: значение функции $u_0(x)$ оказывается неопределенным, известно лишь, что оно меняется в заданных пределах (вследствие ограниченности $u_0(x)$). Благодаря этому и решение задачи рассеяния приобретает принципиально новый характер: оно приводит к случайным значениям фаз рассеяния. В результате чисто динамическая эволюция функции $u(x, t)$ при однозначно определенном детерминированном начальном потенциале (3) в асимптотике $t \rightarrow \infty$ теряет свои динамические свойства и стремится к статистическому пределу. Иначе говоря, решение с течением времени приобретает характер нелинейных осцилляций со случайными фазами. Такая система носит статистический характер и может быть описана в терминах непрерывного случайного процесса. А именно, в асимптотике $t \rightarrow \infty$ строго детерминированное значение $u(x, t)$ теряет смысл и можно говорить лишь о функции $f(u, x, t)$ — плотности вероятности найти данное значение u в точке (x, t) , или о корреляционных функциях. Задача состоит в том, чтобы определить конкретный вид этих функций и их зависимость от начального потенциала $u_0(x)$.

Для нелинейного уравнения Шредингера с дефокусировкой такая задача ставится впервые. Для уравнения Кортевега де Вриза подобная проблема рассматривалась авторами ранее в работах [3, 4]. В [3] на основе метода многозонных уравнений Уизема показано развитие во времени статистической структуры решения, которое в асимптотике $t \rightarrow \infty$ полностью приобретает статистический характер. В [4] для уравнения Кортевега де Вриза разработан метод решения указанной задачи, названный модифицированным методом обратной задачи рассеяния. Начальная функция $u_0(x)$ предполагается при этом пространственно однородной (эргодической). В этом случае плотность вероятности f зависит только от скорости u : $f = f(u)$, а пространственная корре-

ляционная функция $K = K(x, x')$ зависит лишь от разности $|x - x'|$. В [3, 4] определен вид этих функций для конкретного начального потенциала $u_0(x)$.

Настоящая работа посвящена развитию модифицированного метода обратной задачи рассеяния для нелинейного уравнения Шредингера с дефокусировкой. Отметим, что нелинейное уравнение Шредингера описывает распространение электромагнитных волн в нелинейных средах, например, в ионосфере Земли [5] или в световодах [6]. Аналогичный вид имеет и уравнение Гросса–Питаевского, описывающее поведение возбуждений в газе, находящемся в состоянии конденсата Бозе–Эйнштейна [7].

Работа имеет следующую структуру. Во втором разделе кратко указаны основные особенности нелинейного уравнения Шредингера и сформулирована общая постановка начальной задачи. Третий раздел посвящен исследованию законов сохранения. Как известно, нелинейное уравнение Шредингера имеет бесконечное множество дифференциальных законов сохранения. В классической постановке задачи они могут быть представлены в интегральной форме как независимость от времени интегралов

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} R_n dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где R_n — полиномы от функции $u(x)$ и ее производных [2]. Однако при условии (3) начальная функция $u_0(x)$ не является быстроубывающей при $|x| \rightarrow \infty$ и интегралы J_n расходятся. В третьем разделе введены в усредненной форме интегральные законы сохранения, иначе говоря, законы сохранения, представленные в виде инвариантных плотностей $\langle R_n \rangle$, которые для каждого n принимают фиксированные конечные значения, определенные эргодической начальной функцией $u_0(x)$. При их выводе, в отличие от [4], использована многовременная техника и гамильтонов формализм. Показано, что значения $\langle R_n \rangle$ сохраняются в процессе развития решения во времени. Подчеркнем, что в нелинейном уравнении Шредингера отсутствует однозначная связь инвариантных плотностей со спектральной функцией, что является существенным отличием от уравнения Кортевега де Вриза.

Четвертый раздел посвящен решению задачи рассеяния. Показано, что для рассматриваемого начального потенциала $u_0(x)$ фазы рассеяния распределены случайно и равномерно. Это, с одной стороны, исключает прямое применение классического метода обратной задачи рассеяния, но, с другой стороны, служит основой для использования метода

модифицированной обратной задачи рассеяния для определения асимптотического поведения решения при $t \rightarrow \infty$. Для этого в пятом разделе на основе N -солитонного решения построен максимизатор для системы взаимодействующих солитонов, заданных на пространственном масштабе L и обладающих равномерно распределенными случайными фазами. Показано, что при $N \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$ существует континуальный предел усредненного по фазам максимизатора, описываемый линейным интегральным уравнением. Важно, что в это уравнение входит спектр уровней в пространстве фаз $\rho_s(\lambda)$. Здесь вновь становится существенным принципиальное отличие рассматриваемой нами задачи от классической. В классической задаче в асимптотическом пределе $t \rightarrow \infty$ солитоны уходят на бесконечность и становятся свободными. А для свободных солитонов спектр уровней в пространстве фаз тождествен спектру уровней в обычном пространстве $\rho(\lambda)$. От времени t спектр не зависит, поэтому в классической постановке задачи всегда выполнено соотношение

$$\rho_s(\lambda) \equiv \rho(\lambda). \tag{4}$$

В нашей задаче солитоны никогда не становятся свободными: они остаются взаимодействующими при любом t , даже при $t \rightarrow \infty$. Здесь опять проявляется наличие существенно особой точки на бесконечности. Спектр $\rho_s(\lambda)$ — спектр уровней в пространстве фаз — в этом случае не совпадает со спектром уровней в обычном пространстве, т. е. соотношение связи (4) в нашем случае отсутствует. Для определения $\rho_s(\lambda)$ в шестом разделе используется модифицированный метод обратной задачи рассеяния. Он состоит в следующем. С помощью максимизатора, вычисленного в континуальном пределе, определяются усредненные инвариантные плотности в статистическом состоянии $\langle R_n \rangle_s$. Используя многовременную иерархию нелинейного уравнения Шредингера, удается доказать, что максимизатор определяет все бесконечное множество инвариантных плотностей. Поскольку инвариантные плотности не меняются со временем, они совпадают с $\langle R_n \rangle$, определенными начальным условием

$$\langle R_n \rangle_s = \langle R_n \rangle. \tag{5}$$

Таким образом, однозначная связь статистического состояния с детерминированным начальным состоянием устанавливается с помощью бесконечного множества законов сохранения (5). Из соотношений (5) определяется и взаимно однозначная связь спектров $\rho_s(\lambda)$ и $\rho(\lambda)$. После определения установившегося спектра $\rho_s(\lambda)$ с помощью максимизатора

находятся все необходимые характеристики в статистическом состоянии.

В отличие от решения уравнения Кортевега де Вриза в работе [4], где рассматривались лишь два закона сохранения, в настоящей работе благодаря использованию многовременной иерархии удалось доказать выполнение всех законов сохранения при переходе в статистическое состояние.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Нелинейное уравнение Шредингера в случае дефокусировки имеет вид (1). С помощью замены

$$u = \rho^{1/2} \exp(i\phi), \quad v = \phi_x, \quad \tau = 2t$$

уравнение (1) превращается в эквивалентную систему уравнений дисперсионной гидродинамики

$$\rho_\tau + (\rho v)_x = 0,$$

$$v_\tau + vv_x = -\rho_x + \frac{1}{2} \left[\frac{(\sqrt{\rho})_{xx}}{\sqrt{\rho}} \right]_x.$$

Мы изучаем случай, когда гидродинамические переменные меняются плавно: $\rho = \rho(\varepsilon x, \varepsilon \tau)$, $v = v(\varepsilon x, \varepsilon \tau)$, $\varepsilon \ll 1$. Тогда, проводя растяжение масштаба $x \rightarrow x/\varepsilon$, $t \rightarrow t/\varepsilon$, можно выделить в гидродинамических уравнениях в явной форме малый параметр при дисперсионном члене, содержащем старшие производные:

$$\rho_\tau + (\rho v)_x = 0,$$

$$v_\tau + vv_x = -\rho_x + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\frac{(\sqrt{\rho})_{xx}}{\sqrt{\rho}} \right]_x. \tag{6}$$

Система уравнений (6) описывает, в частности, распространение электромагнитных волн в нелинейной дефокусирующей среде и представляет собой, в отличие от уравнения Кортевега де Вриза, полное волновое уравнение. Дисперсионное соотношение для линеаризованной относительно стационарного гидродинамического течения $\rho = \rho_0$, $v = U_0$ системы (6) имеет вид

$$\omega - kU_0 = \pm k \rho_0^{1/2} \left(1 + \frac{k^2}{4\rho_0} \right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что нелинейное уравнение Шредингера описывает две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Соответственно, имеются и две движущиеся в противоположных направлениях системы стационарных волн, в частности, солитонов

$$u = \frac{\rho_0 + (v_s/2 - ik)^2 \exp(2kX)}{\rho_0^{1/2} (1 + \exp(2kX))}, \quad X = \frac{x \pm v_s t}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Подчеркнем, что, как следует из (7), солитон дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера представляет собой «яму» в фоновой плотности ρ_0 :

$$\rho = \rho_0 - \frac{k^2}{\text{ch}^2(kX)}, \quad v_s = 2(\rho_0 - k^2)^{1/2}.$$

При $|x| \rightarrow \infty$ плотность $\rho \rightarrow \rho_0$. В случае $\rho_0 = 0$ уравнение (1) солитонов не имеет. Отметим, что скорость солитонов уменьшается с увеличением глубины ямы пропорционально $(\rho_0 - k^2)^{1/2}$. При $k^2 = \rho_0$ солитон останавливается — его скорость в этом случае совпадает со скоростью стационарного течения U_0 . Отметим также, что дисперсия в нелинейном уравнении Шредингера положительна, т. е. и фазовая, и групповая скорости волн в среде увеличиваются с увеличением волнового числа k .

Обсудим теперь постановку начальной задачи. Мы изучаем решение нелинейного уравнения (1) в квазиклассическом пределе. Это означает, что рассматривается решение системы (6) при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем начальные гидродинамические возмущения $\rho(x, 0)$ и $v(x, 0)$ не содержат масштаба ε и ограничены на всей оси x вместе со всеми производными. Кроме того, начальные функции $\rho(x, 0) \geq 0$ и $v(x, 0)$ предполагаются непериодическими, осциллирующими около некоторых средних значений.

Ограничимся анализом начальных условий вида

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= \rho_0 - \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \left(\frac{x - x_m}{\theta_m} \right), \\ v(x, 0) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m \left(\frac{x - x_m}{\theta_m} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\rho_0 > 0$, $f_m(\xi)$ и $v_m(\xi)$ — конечные функции, равные нулю вне интервала $\alpha_m < \xi < \beta_m$ ($\alpha_m < 0$, $\beta_m > 0$, $\beta_m - \alpha_m = 1$). При этом внутри интервала $f_m(\xi)$ положительна и имеет один максимум при $\xi = 0$, не превышающий ρ_0 . Последнее условие обеспечивает неотрицательность $\rho(x, 0)$. Интервалы $(x_m + \alpha_m \theta_m, x_m + \beta_m \theta_m)$ на оси x , в которых отличны от нуля различные слагаемые в (8), не пересекаются. Отдельное слагаемое $-f_m, v_m$, которое представляет собой локализованное возмущение однородного фона $\rho = \rho_0, U_0 = 0$, будем для краткости именовать «ямой». Рассмотрим для простоты конкретные начальные условия в виде последовательности ям одной и той же формы и глубины

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= \rho_0 - \sum_{m=-\infty}^{\infty} f \left(\frac{x - x_m}{\theta_m} \right), \\ v(x, 0) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} g \left(\frac{x - x_m}{\theta_m} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Начальные условия будут непериодическими, если, например, в (9) разность $x_{m+1} - x_m = l$ постоянна, а ширина ямы меняется по закону

$$\theta_m = \theta [1 + q \sin(\sigma m)], \quad (10)$$

где σ/π — иррациональное число и $q < 1$.

Отметим, что рассматриваемые нами начальные условия (10) являются эргодическими, т. е. описываются однородными в пространстве функциями, например, квазипериодическими или почти периодическими (точное определение эргодических функций см., например, в [8]).

Кроме вида функций $f(x)$ и $g(x)$ и величины фонового значения ρ_0 , начальные условия (9) можно охарактеризовать средним расстоянием между ямами \bar{l} и средним значением ширины ямы $\bar{\theta}$. Отношение

$$\gamma = \bar{\theta}/\bar{l} \quad (11)$$

характеризует плотность упаковки «ям», т. е. среднюю величину гидродинамического возмущения однородного фона.

3. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Нелинейное уравнение Шредингера является интегрируемым [2, 9]. При точном интегрировании нелинейного уравнения (1) или эквивалентной ему гидродинамической системы (6) вспомогательной линейной задачей служит задача рассеяния для системы второго порядка [9]:

$$\begin{aligned} \varepsilon \psi_x^{(1)} &= -\frac{i}{2} \lambda \psi^{(1)} + \bar{u} \psi^{(2)}, \\ \varepsilon \psi_x^{(2)} &= \frac{i}{2} \lambda \psi^{(2)} + u \psi^{(1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь λ — спектральный параметр задачи, \bar{u} — функция комплексно-сопряженная u .

3.1. Дифференциальные законы сохранения

Как известно, вследствие полной интегрируемости нелинейное уравнение Шредингера обладает бесконечным набором независимых дифференциальных законов сохранения

$$\partial_t P_n + \partial_x W_n = 0. \quad (13)$$

Для рассматриваемой начальной задачи, как и при решении уравнения Кортевега де Вриза [4], законы

сохранения необходимо переписать в усредненной форме. Это будет сделано в настоящем разделе. Для вывода усредненных интегральных законов сохранения будут использованы (в отличие от [4]) гамильтоновское представление и многовременная техника $t \rightarrow t_m, m = 1, 2, \dots$

Плотности сохраняющихся величин P_n в (13) можно определить, используя при $\lambda \rightarrow \infty$ разложение по степеням $1/\lambda$ логарифма коэффициента прохождения для линейной системы (12). Это позволяет найти рекуррентную формулу для P_n . Действительно, после исключения $\psi^{(2)}$ и подстановки

$$\psi^{(1)} = \exp \left[i\varepsilon^{-1} \left(-\frac{\lambda}{2}x + \int P dx \right) \right]$$

система (12) преобразуется в уравнение Риккати

$$\lambda P = |u|^2 + P^2 - i\varepsilon \bar{u} \partial_x \left(\frac{P}{\bar{u}} \right).$$

Для коэффициентов разложения решения этого уравнения при $\lambda \rightarrow \infty$

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \lambda^{-n} \tag{14}$$

получается рекуррентная система ([9, с. 37, 39])

$$P_{n+1} = -i\varepsilon \bar{u} \partial_x \left(\frac{P_n}{\bar{u}} \right) + \sum_{m=1}^{n-1} P_m P_{n-m}, \tag{15}$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

причем начальное условие рекурсии имеет вид $P_1 = |u|^2$. Из системы (15) последовательно определяются плотности в дифференциальных законах сохранения (13):

$$P_2 = -i\varepsilon \bar{u} u_x, \quad P_3 = -\varepsilon^2 \bar{u} u_{xx} + |u|^4,$$

$$P_4 = i \left[\varepsilon^3 \bar{u} u_{xxx} - \varepsilon |u|^2 (4\bar{u} u_x + u \bar{u}_x) \right], \dots$$

Они являются полиномами от функций $u(x), \bar{u}(x)$ и их производных.

Рекурсия (15) дает вполне определенный набор полиномиальных плотностей P_n , но, вообще говоря, эти плотности определены неоднозначно. Очевидно, что из них можно составить любую линейную комбинацию или добавить произвольную константу. Кроме того, добавление к P_n полной производной от полинома от $u(x), \bar{u}(x)$ и их производных снова приведет к плотности сохраняющейся величины.

3.2. Интегральные законы сохранения и гамильтонова форма

Если функция $u(x)$ и все ее производные достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, так что существуют интегралы

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) dx, \tag{16}$$

то из соотношений (13) вытекает независимость этих интегралов от времени.

С помощью (16) уравнение (1) может быть представлено в гамильтоновой форме [9]. Если в качестве гамильтонианов взять функционалы от $u(x)$, определяемые интегралами (16) с $n = 3, 4, \dots$, то получится иерархия уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -i \frac{\delta I_n}{\delta \bar{u}}. \tag{17}$$

При $n = 3$ имеем уравнение (1), при $n > 3$ — так называемые высшие нелинейные уравнения Шредингера.

Рассматриваемое нами начальное условие (8) или (9) представляет собой непериодическую последовательность отдельных локализованных возмущений — ям. Поэтому в квазиклассическом пределе полный спектр задачи (12) получается простым наложением спектров отдельных ям. В соответствии с этим при изучении вклада каждой ямы мы используем теорию, развитую в [9] для уравнения (1) при условии конечной плотности: при $x \rightarrow \pm\infty$

$$|u(x, t)|^2 \rightarrow \rho_0 \neq 0. \tag{18}$$

Затем эти вклады объединяются, об этом подробно изложено в следующем разделе. При условии (18) уравнение (1) удобно преобразовать (добавляя фазовый множитель $u \rightarrow u \exp(-2i\rho_0 t)$) к виду [9]

$$i u_t + u_{xx} - 2(|u|^2 - \rho_0) u = 0. \tag{19}$$

Гидродинамическая форма (6) при этом остается без изменения.

Важно отметить, что гамильтонова форма (17) имеет место только в случае быстрого убывания функции $u(x)$ вместе с производными, так как только в этом случае определены функционалы I_n , и их вариационные производные быстро убывают при $|x| \rightarrow \infty$. В случае конечной плотности для обеспечения сходимости сохраняющихся интегралов достаточно вычесть из плотностей $P_n(x)$ константы ([9, с. 72])

$$P_{2k-1}^{\infty} = \frac{1}{2} (-1)^{k+1} \omega^{2k} b_k^+, \quad P_{2k}^{\infty} = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\omega = 2\sqrt{\rho_0}$ и b_k^+ — коэффициенты, определяемые разложением

$$(1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^+ x^k.$$

Однако, кроме существования функционалов — интегралов в бесконечных пределах от

$$Q_n(x) = P_n(x) - P_n^\infty,$$

для представления уравнения (19) и соответствующих высших уравнений в гамильтоновой форме необходимо также обеспечить быстрое убывание при $|x| \rightarrow \infty$ их вариационных производных. Как показано в [9, с. 73, 193], вместо разложения (14) для этого можно использовать определенные линейные комбинации $R_n(x)$ плотностей $Q_n(x)$, связанные с асимптотическим разложением логарифма коэффициента прохождения по отрицательным степеням переменной $\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$.

Обозначая

$$\lambda^{-1} = \xi, \quad (\lambda^2 - \omega^2)^{-1/2} = \eta,$$

имеем

$$\xi(\eta) = \eta(1 + \omega^2 \eta^2)^{-1/2}.$$

Производящая функция (14), т. е.

$$P(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \xi^n,$$

соответствует бесконечной последовательности плотностей P_n ; аналогично определяется

$$Q(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \xi^n.$$

Плотности R_n , согласно [9], задаются производящей функцией

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n \eta^n = R(\eta) = Q(\xi(\eta)). \quad (20)$$

Чтобы установить связь между R_n и Q_n , вытекающую из (20), используется разложение

$$\xi^n = \eta^n \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{np}(\omega) \eta^p, \quad (21)$$

где коэффициенты β_{np} известны — они выражаются через биномиальные коэффициенты и четные степени ω , некоторые из них равны нулю. В результате получается соотношение

$$R_n = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_{n-p,p}(\omega) Q_{n-p}. \quad (22)$$

Подставляя в него

$$Q_j = P_j - P_j^\infty,$$

приходим к формуле, выражающей R_n через P_n . Учитывая явный вид коэффициентов $\beta_{np}(\omega)$ и констант P_n^∞ , ее удобнее записать отдельно для нечетных и четных номеров:

$$R_{2k+1}(x) = (2k-1)!! \times \left[\sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m \omega^{2m}}{2^m m! (2k-1-2m)!!} \times P_{2k+1-2m}(x) + \frac{(-1)^{k+1} \omega^{2k+2}}{2^{k+2} (k+1)!} \right], \quad (23)$$

$$R_{2k+2}(x) = k! \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m \omega^{2m}}{m! (k-m)!} P_{2k+2-2m}(x).$$

Очевидно, для новых комбинаций R_n имеют место дифференциальные законы сохранения

$$\partial_t R_n + \partial_x W_n^{(R)} = 0, \quad (24)$$

вытекающие из (13).

Если теперь взять в качестве гамильтонианов интегралы

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} R_n(x) dx, \quad (25)$$

то получается иерархия нелинейных уравнений Шредингера для случая конечной плотности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -i \frac{\delta J_n}{\delta \bar{u}}, \quad n = 3, 4, \dots \quad (26)$$

Она начинается с уравнения (19).

Приведем несколько первых плотностей R_n , вычисляемых с помощью рекуррентной формулы (15) и соотношений (23):

$$\begin{aligned} R_1 &= |u|^2 - \rho_0, & R_2 &= -i\varepsilon \bar{u} u_x, \\ R_3 &= -\varepsilon^2 \bar{u} u_{xx} + (|u|^2 - \rho_0)^2, \\ R_4 &= i [\varepsilon^3 \bar{u} u_{xxx} - 4\varepsilon (|u|^2 - \rho_0) \bar{u} u_x - \varepsilon |u|^2 u \bar{u}_x]. \end{aligned} \quad (27)$$

Выражения этих же величин через гидродинамические переменные ρ и v имеют вид

$$\begin{aligned} R_1 &= \rho - \rho_0, & R_2 &= \rho v - \frac{1}{2} i \varepsilon \rho_x, \\ R_3 &= \rho v^2 + (\rho_0 - \rho)^2 - i \varepsilon (\rho v)_x - \varepsilon^2 \rho^{1/2} (\rho^{1/2})_{xx}, \\ R_4 &= \rho v^3 + (3\rho - 4\rho_0) \rho v - \\ & - i \varepsilon \left(\frac{3}{2} \rho v^2 + \frac{3}{2} \rho^2 - 2\rho_0 \rho \right)_x + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Отметим физическую интерпретацию плотностей сохраняющихся величин

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\varepsilon(u_x \bar{u} - u \bar{u}_x)}{2i} = \rho v = \operatorname{Re} R_2, \\
 h &= \varepsilon^2 |u_x|^2 + (\rho_0 - |u|^2)^2 = \\
 &= \rho v^2 + (\rho_0 - \rho)^2 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \rho_x^2 \rho^{-1} = \\
 &= \operatorname{Re} R_3 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \rho_{xx}
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

как, соответственно, плотности импульса и плотности энергии. Как видно из (29) и (27), разности $p - R_2$ и $h - R_3$ являются полными производными.

3.3. Многовременной формализм

Отметим важное свойство иерархии нелинейных уравнений Шредингера: любое конечное число уравнений (26) можно рассматривать как переопределенную систему

$$\frac{\partial u}{\partial t_m} = -i \frac{\delta J_{m+2}}{\delta \bar{u}}, \quad m = 1, 2, \dots
 \tag{30}$$

для функции многих переменных

$$u = u(x, t_1, t_2, \dots).
 \tag{31}$$

Нетривиальное свойство нелинейного уравнения Шредингера, обусловленное его полной интегрируемостью, состоит в том, что потоки (30) коммутируют:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_m \partial t_n} = \frac{\partial^2 u}{\partial t_n \partial t_m},$$

т. е. система (30) совместна и действительно определяет функцию многих «времен» (31). Каждый из функционалов J_n с $n \geq 3$ является гамильтонианом для соответствующего времени t_{n-2} .

Законы сохранения (24) распространяются и на все высшие времена:

$$\frac{\partial R_n}{\partial t_m} + \frac{\partial W_{nm}^{(R)}}{\partial x} = 0.
 \tag{32}$$

Особенно важны для нас соотношения (32) при $n = 1$, так как они будут использованы в разд. 6. Потоки в этом случае представляются в виде

$$W_{1m}^{(R)} = \sum_{k=1}^{m+1} k \beta_{k+1, m+1-k} Q_k + \partial_x(\dots),
 \tag{33}$$

где коэффициенты β_{np} определены в (21) и $\partial_x(\dots)$ обозначает полную производную. Для получения

формулы (33) найдем $\partial R_1 / \partial t_m$ по общему правилу гамильтоновой динамики с помощью скобок Пуассона [9]:

$$\frac{\partial R_1}{\partial t_m} = \{J_{m+2}, R_1\} = i \left(u \frac{\delta J_{m+2}}{\delta u} - \bar{u} \frac{\delta J_{m+2}}{\delta \bar{u}} \right).$$

Соотношения (22) позволяют получить отсюда выражение

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_1}{\partial t_m} &= \\
 &= i \sum_{p=0}^{m+1} \beta_{m+2-p, p} \left(u \frac{\delta \tilde{I}_{m+2-p}}{\delta u} - \bar{u} \frac{\delta \tilde{I}_{m+2-p}}{\delta \bar{u}} \right),
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

где $\tilde{I}_n = \int_{-\infty}^{\infty} Q_n dx$ — функционалы, определенные для функций $u(x)$, удовлетворяющих условию конечной плотности. Поскольку плотность Q_n лишь на константу P_n^∞ отличается от плотности P_n , имеем

$$\frac{\delta \tilde{I}_n}{\delta u} = \frac{\delta I_n}{\delta u}, \quad \frac{\delta \tilde{I}_n}{\delta \bar{u}} = \frac{\delta I_n}{\delta \bar{u}},$$

что позволяет выразить комбинацию вариационных производных, входящую в (34), через плотности P_n :

$$u \frac{\delta \tilde{I}_n}{\delta u} - \bar{u} \frac{\delta \tilde{I}_n}{\delta \bar{u}} = i \partial_x [(n-1)P_{n-1} + \partial_x(\dots)].$$

Заменив здесь под знаком производной P_{n-1} на Q_{n-1} и используя полученное соотношение в (34), придем к выражению (33).

3.4. Усредненные интегральные законы сохранения

Для рассматриваемой задачи с ограниченными эргодическими начальными условиями (9) естественно, как и в [4], перейти к интегральной форме законов сохранения в терминах усредненных плотностей сохраняющихся величин. Рассмотрим средние величины

$$\langle R_n \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} R_n(x) dx.
 \tag{35}$$

Из-за ограниченности функций $R_n(x)$ пределы (35) существуют. В силу локальных законов сохранения (24)

$$\begin{aligned}
 \frac{d \langle R_n \rangle}{dt} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \partial_t R_n dx = \\
 &= - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} W_n^{(R)}(x) \Big|_{-L/2}^{L/2},
 \end{aligned}$$

а потоки $W_n^{(R)}(\pm L/2)$ через концы отрезка ограничены, поэтому $d\langle R_n \rangle / dt = 0$. Следовательно, средние (35) не зависят от времени и являются сохраняющимися величинами. Это и есть полная система усредненных интегральных законов сохранения для рассматриваемой нами начальной задачи.

Инвариантные плотности $\langle R_n \rangle$ легко найти в начальный момент времени $t = 0$ по заданным функциям $f(x), g(x)$ и параметру $\gamma = \bar{\theta} / \bar{l}$, пользуясь квазиклассичностью начальных условий (9). Используя выражения (28) и (29), получим

$$\langle R_1 \rangle = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

$$\langle R_2 \rangle = \langle p \rangle = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} (\rho_0 - f(x))g(x) dx,$$

$$\begin{aligned} \langle R_3 \rangle &= \langle h \rangle = \\ &= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} [(\rho_0 - f(x))g^2(x) + f^2(x)] dx + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, выражая (23) через гидродинамические переменные ρ и v , можно найти $\langle R_n \rangle$ в начальном состоянии для любого n . Ниже мы увидим, что инварианты $\langle R_n \rangle$, как и в случае уравнения Кортевега де Вриза [4], однозначно связаны с плотностью уровней задачи рассеяния. Они играют важную роль при определении спектра в статистическом состоянии.

4. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА РАССЕЙНИЯ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ

Изучим спектральную задачу для линейной системы (12) в квазиклассическом пределе, при $\varepsilon \rightarrow 0$. Вначале рассмотрим одно локализованное начальное возмущение $\rho(x), v(x)$, которому соответствует

$$u = \sqrt{\rho} \exp \left(i\varepsilon^{-1} \int^x v dx \right),$$

а затем исследуем более общее начальное условие (9), составленное из большого (в пределе — неограниченного) числа таких локализованных возмущений с неперекрывающимися носителями.

Для рассматриваемой нами «гидродинамической» начальной задачи (9) от системы (12) удобно перейти к уравнению второго порядка, что

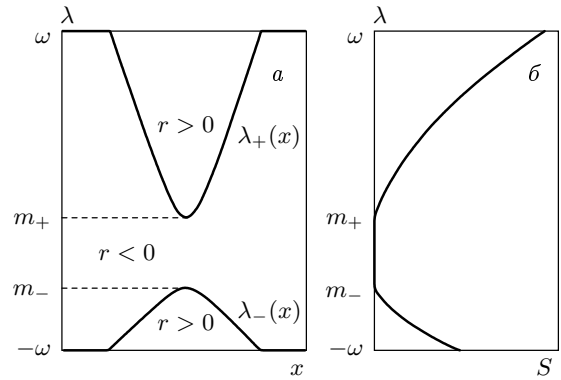


Рис. 1. а — Области постоянного знака функции $r(x, \lambda)$; б — интеграл Бора–Зоммерфельда $S(\lambda)$

позволит использовать стандартные формулы приближения Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ). После исключения $\psi^{(1)}$ и последующей замены $\psi^{(2)} = \psi \sqrt{u}$ для устранения первой производной получим уравнение

$$\varepsilon^2 \psi_{xx} + \tilde{r}(x, \lambda; \varepsilon) \psi = 0,$$

где

$$\tilde{r} = \frac{1}{4} \lambda^2 - |u|^2 + \frac{1}{2} i \varepsilon \lambda (\ln u)_x + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2} (\ln u)_{xx} - \frac{1}{4} (\ln u)_x^2 \right].$$

Представление \tilde{r} через гидродинамические переменные ρ и v помогает выяснить реальные порядки членов разложения по степеням ε , если учесть, что

$$(\ln u)_x = \frac{1}{2} (\ln \rho)_x + \frac{i}{\varepsilon} v.$$

Пренебрегая в главном порядке приближения ВКБ малыми членами $O(\varepsilon)$ и $O(\varepsilon^2)$ в коэффициенте $\tilde{r}(x, \lambda; \varepsilon)$, приходим к более простому уравнению

$$\varepsilon^2 \psi_{xx} + r(x, \lambda) \psi = 0, \tag{36}$$

где

$$r(x, \lambda) = \frac{1}{4} [\lambda - v(x)]^2 - \rho(x). \tag{37}$$

Удобно в явном виде выделить в (37) тривиальную зависимость (9) от ширины ямы θ (рассматривая одну яму, опускаем индекс m). Учитывая (9), имеем

$$\begin{aligned} r(x, \lambda; \theta) &= r_1 \left(\frac{x}{\theta}, \lambda \right), \\ r_1(x, \lambda) &= \frac{1}{4} [\lambda - g(x)]^2 - \rho_0 + f(x). \end{aligned} \tag{38}$$

Опишем спектр задачи (36) в квазиклассическом пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим $\omega = 2\sqrt{\rho_0}$. Пусть возмущение скорости достаточно мало, так что общий характер изменения функции $r(x, \lambda)$ такой же, как и при $v(x) \equiv 0$. А именно, при $|\lambda| > \omega$ функция $r(x, \lambda)$ положительна, а при $|\lambda| < \omega$ она с ростом x либо меняет знак по схеме $-, +, -$, либо остается все время отрицательной (рис. 1а). Тогда задача (36) имеет при $|\lambda| > \omega$ непрерывный спектр с коэффициентом отражения, равным нулю (в рассматриваемом квазиклассическом приближении), а в области $|\lambda| < \omega$ — дискретный спектр с часто расположенными собственными значениями ($|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \sim \varepsilon$). Собственные значения отсутствуют в интервале между $m_+ = \min \lambda_+(x)$ и $m_- = \max \lambda_-(x)$, где

$$\lambda_{\pm}(x) = v(x) \pm 2\sqrt{\rho(x)}$$

— корни уравнения $r(x, \lambda) = 0$. Условием «достаточной малости» $v(x)$ является ограничение

$$-2\left(\sqrt{\rho_0} - \sqrt{\rho(x)}\right) < v(x) < 2\left(\sqrt{\rho_0} - \sqrt{\rho(x)}\right). \quad (39)$$

Если оно выполнено, то $\lambda_+(x) \leq \omega$ и $\lambda_-(x) \geq -\omega$ для всех x .

4.1. Дискретный спектр

Дискретный спектр задачи (36) определяется (в рассматриваемом приближении) уравнением, аналогичным условию квантования Бора–Зоммерфельда:

$$S(\lambda_n) = \frac{\varepsilon\pi}{\theta} \left(\frac{1}{2} + n \right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (40)$$

где

$$S(\lambda) = \int_{x_-(\lambda)}^{x_+(\lambda)} \sqrt{r_1(x, \lambda)} dx, \quad (41)$$

$x_-(\lambda) < x_+(\lambda)$ — корни уравнения $r_1(x, \lambda) = 0$. При этом надо учитывать, что ввиду немонотонности функции $S(\lambda)$ (рис. 1б) уравнение (40) определяет две последовательности спектральных уровней: $\lambda_n^-, n = 0, 1, \dots, N^- - 1$ в промежутке $(-\omega, m_-)$ и $\lambda_n^+, n = 0, 1, \dots, N^+ - 1$ в промежутке (m_+, ω) .

В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ дискретный спектр является квазинепрерывным. Его можно охарактеризовать плотностью $d(\lambda)$, которую нормируем условием

$$\int_{-\omega}^{\omega} d(\lambda) d\lambda = 1. \quad (42)$$

Таким образом, число собственных значений в интервале $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ равно $Nd(\lambda) d\lambda$, где $N \sim \varepsilon^{-1}$ — общее число дискретных уровней, которое будет найдено ниже.

Очевидно, спектральная плотность $d(\lambda)$ обратно пропорциональна промежутку $|\lambda_{n+1} - \lambda_n|$ между соседними уровнями. Поэтому с учетом (40) имеем

$$d(\lambda) = A \left| \frac{dS}{d\lambda} \right|, \quad (43)$$

где коэффициент пропорциональности

$$A = [S(-\omega) + S(\omega)]^{-1} \quad (44)$$

определяется условием нормировки (42).

Общее число уровней составляет

$$N = N_- + N_+ = \frac{\theta}{\varepsilon\pi A}, \quad (45)$$

поскольку из (40) следует, что в области $(-\omega, m_-)$ расположены

$$N_- = \theta(\varepsilon\pi)^{-1} S(-\omega) + O(1)$$

уровней, а в области (m_+, ω) —

$$N_+ = \theta(\varepsilon\pi)^{-1} S(\omega) + O(1)$$

уровней.

Теперь можно использовать изложенное выше квазиклассическое описание задачи рассеяния (12) для характеристики спектральных данных при потенциале $u(x, 0)$, соответствующем бесконечной последовательности ям (8).

Подчеркнем, что точное определение спектра уравнения Шредингера для заданного на всей оси x непериодического осциллирующего потенциала представляет сложную математическую задачу [10]. В нашем случае задача упрощается, так как мы интересуемся не детальной структурой спектра, а лишь плотностью дискретных уровней в квазиклассическом пределе $\varepsilon \ll 1$. Плотность $d(\lambda)$ может быть определена по части спектра потенциала $u(x, 0)$, относящейся к конечному отрезку $L \gg L_0$, где L_0 — характерный масштаб однородности функции $u(x, 0)$. В силу эргодичности начальной функции можно предполагать, что нормированная плотность $d(\lambda)$ не зависит от L и стремится к вполне определенной функции при $L \rightarrow \infty$.

Каждое собственное значение во всюду плотном точечном спектре бесконечной последовательности ям (8) относится к некоторой определенной яме в соответствии с локализацией собственной функции

$\psi_\lambda(x)$, принадлежащей этому собственному значению. Поэтому, если взять достаточно длинный интервал, содержащий много ям, то можно определить общее число $N(L)$ спектральных уровней λ , каждый из которых относится к какой-либо из ям в этом интервале. Ввиду эргодичности $u(x, 0)$ полная линейная плотность уровней $N(L)/L$ имеет предел при $L \rightarrow \infty$. Поскольку число уровней, относящихся к каждой отдельной яме, обратно пропорционально дисперсионному параметру ε , удобно нормировать этот предел:

$$C = \varepsilon \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{N(L)}{L}. \tag{46}$$

Определенная таким образом безразмерная пространственная плотность дискретных уровней C уже не зависит от ε .

Доля в плотности C спектральных уровней, расположенных в промежутке $(\lambda, \lambda + d\lambda)$,

$$\frac{dC}{C} = d(\lambda) d\lambda, \tag{47}$$

определяет спектральную плотность $d(\lambda)$, которая, очевидно, нормирована согласно (42).

Найдем линейную плотность уровней C для рассматриваемых начальных условий (9), составленных из ям одинаковой формы и глубины. Каждой отдельной яме согласно (45) отвечает $N_m = \theta_m / \varepsilon \pi A$ дискретных уровней. Общее число уровней, отнесенное к длине интервала L , содержащего большое число $M \gg 1$ ям, составляет

$$\frac{N(L)}{L} = \frac{\sum \theta_m}{L \varepsilon \pi A} = \frac{M}{L} \frac{1}{\varepsilon \pi A} \frac{\sum \theta_m}{M}.$$

Здесь суммирование ведется по тем значениям m из (8), (9), для которых точка x_m лежит в указанном интервале L . Подставляя это выражение в (46) и переходя к пределу, с учетом (11) получим

$$C = \frac{\gamma}{\pi A}, \quad \gamma = \frac{\bar{\theta}}{\bar{l}}. \tag{48}$$

Просто находится в рассматриваемом случае и спектральная плотность $d(\lambda)$. Ввиду отсутствия резонансов между уровнями в разных ямах при непериодическом изменении их ширины (10) общий спектр можно получить простым наложением спектров отдельных ям, для которых $d(\lambda)$ одна и та же, так как формулы (43), (44) не содержат ширины ямы θ . Таким образом, для бесконечной последовательности ям спектральная плотность $d(\lambda)$ определяется теми же выражениями (43) и (44).

Установим важную связь сохраняющихся плотностей $\langle R_n \rangle$ из (35) со спектральной плотностью $d(\lambda)$. Для начального возмущения (9) интеграл в определении (35) представляется в виде

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} R_n(x) dx = \sum_m J_{nm}, \tag{49}$$

где суммирование проводится по номерам ям, расположенных в пределах интервала $(-L/2, L/2)$, и

$$J_{nm} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L R_{nm}(x) dx$$

— сохраняющийся интеграл, рассчитанный по отдельно взятой m -й яме.

Инвариант J_{nm} для локализованного возмущения может быть представлен не только в виде интеграла по координате x , но и в виде спектрального разложения. Это так называемое тождество следов [9], которое в рассматриваемом квазиклассическом случае, когда можно пренебречь интегралом по непрерывному спектру, сводится к выражению

$$J_{nm} = \sum_{i=0}^{N_m-1} \varepsilon j_n(\lambda_i^{(m)}). \tag{50}$$

Здесь $\lambda_i^{(m)}, i = 0, \dots, N_m - 1$, — дискретные спектральные уровни в m -й яме, а $\varepsilon j_n(\lambda)$ представляют собой значения сохраняющихся интегралов для отдельного солитона (7), распространяющегося со скоростью $v_s = \lambda$. Появление множителя ε связано с тем, что в рассматриваемом масштабе линейный размер солитона имеет порядок ε .

Смысл тождества следов состоит в том, что рассчитанное для локализованного возмущения значение инварианта J_n представляется как сумма его значений для отдельных солитонов, на которые это возмущение распадается в пределе $t \rightarrow \infty$, и той его части, которая соответствует непрерывному спектру и рассеивается при $t \rightarrow \infty$ по всей оси x . В изучаемом квазиклассическом случае эта часть пренебрежимо мала по сравнению с солитонной составляющей.

Функции $j_n(\lambda)$ определяются формулами ([9,

с. 75])

$$\begin{aligned}
 j_{2k+1}(\lambda) &= (-1)^{k+1} \frac{\nu^{2k+1}}{2k+1}, \\
 j_{2k+2}(\lambda) &= (-1)^{k+1} \frac{\lambda\nu}{2(k+1)} \times \\
 &\times \sum_{p=0}^k (-1)^p b_p^- \omega^{2p} \nu^{2(k-p)},
 \end{aligned} \tag{51}$$

где $k = 0, 1, \dots$, $\nu = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ и b_p^- — коэффициенты из разложения

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{p=0}^{\infty} b_p^- x^p.$$

Первые три функции (51) имеют вид

$$j_1(\lambda) = -\nu, \quad j_2(\lambda) = -\frac{\lambda\nu}{2}, \quad j_3(\lambda) = \frac{\nu^3}{3}.$$

Заменяя в квазиклассическом пределе, когда $\lambda_{i+1} - \lambda_i \sim \varepsilon \ll 1$, сумму в (50) интегралом, будем иметь

$$J_{nm} = \varepsilon N_m \int_{-\omega}^{\omega} j_n(\lambda) d(\lambda) d\lambda.$$

Учитывая, что спектральная плотность $d(\lambda)$ для последовательности ям, различающихся только шириной, не зависит от m , получаем интеграл (49) в виде

$$\int_{-L/2}^{L/2} R_n(x) dx = \varepsilon N(L) \int_{-\omega}^{\omega} j_n(\lambda) d(\lambda) d\lambda,$$

где $N(L) = \sum_m N_m$ — общее число спектральных уровней, относящихся к интервалу длины L . Используя последнее выражение в определении инвариантных плотностей (35) и учитывая (46), найдем искомую связь величины $\langle R_n \rangle$ с характеристиками спектра в начальном состоянии:

$$\langle R_n \rangle = C \int_{-\omega}^{\omega} j_n(\lambda) d(\lambda) d\lambda. \tag{52}$$

Устанавливаемая соотношением (52) простая связь средних плотностей инвариантов со спектром задачи рассеяния является замечательным общим свойством рассматриваемой «гидродинамической» начальной задачи (6), (9) в условиях эргодичности (ср. [4]).

4.2. Фаза рассеяния

Перейдем теперь к описанию совокупности «фазовых» данных рассеяния. Поскольку в квазиклассическом пределе спектральное уравнение (36) аналогично спектральному уравнению в случае уравнения Кортевега де Вриза, результат исследования фаз рассеяния совпадает с полученным в [4]. Напомним кратко, как вычисляются параметры сдвига

$$s_n = \frac{\varepsilon}{\lambda_n} \ln |b_n|, \tag{53}$$

где $b_n = C_{n+}/C_{n-}$ — отношение коэффициентов в асимптотиках собственных функций ψ_n при $x \rightarrow \pm\infty$. Определим сдвиг фаз для общего случая M ям. Для этого выясним, как меняется фаза волновой функции, локализованной в рассматриваемой яме при прохождении j -й ямы, к которой относятся точки поворота x_r и x_{r+1} ($r = 2j - 1$). При прохождении этой ямы выделим три области (см. [4, рис. 1]). В области I мы имеем экспоненциально убывающее решение от исходной волновой функции с некоторой амплитудой A_{r-1} :

$$\psi_I = \frac{A_{r-1}}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{X_1}^x |p| dx\right). \tag{54}$$

Здесь $p = \sqrt{-r(x, \lambda)}$.

В области II волновая функция имеет вид

$$\begin{aligned}
 \psi_{II} &= \frac{A_r}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{X_1}^x |p| dx\right) + \\
 &+ \frac{B_r}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon} \int_{X_1}^x |p| dx\right).
 \end{aligned} \tag{55}$$

Обходя в комплексной области сверху точку X_2 , из (54) и (55) найдем связь коэффициентов

$$A_r = A_{r-1} \exp\left(i\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_1}^{X_2} |p| dx\right).$$

Отсюда вплоть до точки X_3 имеем решение

$$\psi_{II}^+ = A_{r-1} \exp\left(i\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_1}^{X_2} |p| dx + \frac{i}{\varepsilon} \int_{X_2}^x |p| dx\right).$$

Аналогичным образом, обходя точку X_3 , получим

$$A_{r+1} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{X_3}^x |p| dx \right) = A_{r-1} \exp \left(i \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_1}^{X_2} |p| dx + \frac{i}{\varepsilon} \int_{X_2}^{X_3} |p| dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_3}^x |p| dx \right). \quad (56)$$

Для определения сдвигов нас интересует лишь абсолютная величина отношения амплитуд. Исходя из (56), получим связь амплитуд при прохождении j -й потенциальной ямы, уровни которой из-за непериодической вариации ширины ям (10) не совпадают с уровнями в первой яме:

$$\left| \frac{A_{r+1}}{A_{r-1}} \right| = \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{X_1}^{X_2} |p| dx \right).$$

Повторяя эту процедуру M раз и учитывая, кроме того, интегралы от отрезков $(-\infty, x_1)$ и $(x_M, +\infty)$, будем иметь

$$\left| \frac{C_+}{C_-} \right| = \exp \left\{ \frac{\lambda}{2\varepsilon} (x_1 + x_M) - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+1}} |p| dx + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{x_1}^{-\infty} + \int_{+\infty}^{x_M} \right) \left(\frac{\lambda}{2} - |p| \right) dx \right\}. \quad (57)$$

Интегрирование в выражении (57) проводится по областям, где волновая функция экспоненциально затухает. Используя (57) и (53), окончательно получим

$$s_n(k, M) = (x_1 + x_M) - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+1}} |p| dx + \frac{1}{\lambda} \left(\int_{x_1}^{-\infty} + \int_{+\infty}^{x_M} \right) \left(\frac{\lambda}{2} - |p| \right) dx. \quad (58)$$

Важно подчеркнуть, что знак минус перед суммой в выражениях (57) и (58) соответствует тому, что мы нашли поправки к сдвигам от ям, находящиеся справа от рассматриваемой ямы. Если проделать аналогичную процедуру для ям слева, то (здесь существенны амплитуды B_r (55)) формулы (57), (58)

сохраняют свой вид, только знак перед суммой изменится на плюс. Формула (58) аналогична выражению (40) работы [4], где было показано, что при $M \rightarrow \infty$ сумма не имеет конечного предела и, следовательно, фаза равномерно заполняет интервал длины l между минимумами потенциальных ям в точках x_0 и x_1 . Процесс заполнения этого интервала вполне аналогичен процессу возникновения хаоса в динамических системах [11].

При «несимметричном» переходе $M \rightarrow \infty$, т. е. в ситуации, когда числа ям слева и справа различаются на величину, пропорциональную M , все приведенные выше свойства сохраняются, но интервал, на котором размывается фаза, смещается пропорционально произвольному параметру M .

Таким образом, при начальных условиях (8), (9), т. е. при бесконечном количестве потенциальных ям, фаза рассеяния волновой функции, локализованной в любой начальной яме, случайно и равномерно заполняет любой из отрезков $[x_m, x_{m+1}]$. В [3, 4] показано, что учет взаимного влияния бесконечного числа начальных ям соответствует асимптотике $t \rightarrow \infty$. Следовательно, в асимптотике $t \rightarrow \infty$ рассматриваемая нами начальная задача описывается бесконечной системой солитонов со случайными фазами.

5. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ N-СОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ ФАЗАМИ

Перейдем к описанию бесконечной системы солитонов со случайными фазами. Согласно методам статистической физики [12], для этого следует выделить произвольную подсистему из N солитонов, расположенных на некотором отрезке, а затем провести усреднение по ансамблю состояний со случайными фазами s , предполагая длину отрезка неограниченно возрастающей при пропорциональном увеличении числа N (статистический предел). Естественно воспользоваться при этом известным точным решением для N взаимодействующих солитонов [9], которое нам удобно преобразовать к виду

$$u_N(x, t) = \sqrt{\rho_0} \frac{D_1(x, t)}{D(x, t)}. \quad (59)$$

Здесь D и D_1 — суммы по двоичным мультииндексам $\mu = \mu_1, \dots, \mu_N$ ($\mu_n = 0$ или 1):

$$D = \sum_{\mu} \exp(\Phi_{\mu}), \quad D_1 = \sum_{\mu} \exp(i\theta_{\mu}) \exp(\Phi_{\mu}), \quad (60)$$

где

$$\Phi_\mu = \varepsilon^{-1} \sum_{n=1}^N \mu_n \nu_n (x - \lambda_n t - s_n) + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \mu_m \mu_n l_{mn}, \quad \theta_\mu = \varepsilon^{-1} \sum_{n=1}^N \mu_n \theta_n. \quad (61)$$

Величины ν_n, θ_n, l_{mn} определяются спектром λ_n :

$$\begin{aligned} \nu_n &= \sqrt{\omega^2 - \lambda_n^2} > 0, \quad |\lambda_n| < \omega, \quad \omega^2 = 4\rho_0, \\ \exp(i\theta_n) &= \bar{z}_n / z_n, \quad z_n = \lambda_n + i\nu_n, \\ 0 < \theta_n &< 2\pi, \end{aligned} \quad (62)$$

$$l_{mn} = \ln \left| \frac{z_m - z_n}{z_m - \bar{z}_n} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{\omega^2 - \lambda_m \lambda_n - \nu_m \nu_n}{\omega^2 - \lambda_m \lambda_n + \nu_m \nu_n}, \quad (63)$$

s_1, \dots, s_N — набор сдвиговых параметров. Отметим определенную аналогию выражений (59)–(63) с известными формулами Кэй–Мозеса–Хироты [13] для N -солитонного решения уравнения Кортевега де Вриза, использованными нами в работе [4].

Абсолютная величина N -солитонного решения (59) определяется соотношением

$$R_1 = |u|^2 - \rho_0 = -\varepsilon^2 \partial_{xx} \ln D, \quad (64)$$

которое аналогично N -солитонной формуле для уравнения Кортевега де Вриза. Выражение (64), получаемое методом Хироты (см., например, [14]), будет использовано в следующем разделе при построении аналогичных формул для всех плотностей R_n .

На рис. 2 приведен пример, иллюстрирующий свойства многосолитонных решений, описываемых формулами (59)–(61). Принято $\rho_0 = 1$. На рис. 2а представлена зависимость $|u|$ от x , стрелки указывают направление движения солитонов. Солитоны 4 и 5 находятся в процессе столкновения. Распределение скоростей течения показано на рис. 2б. На рис. 2в изображен годограф комплексной функции $u(x)$, т.е. параметрически задаваемая зависимость $\text{Im } u(x)$ от $\text{Re } u(x)$. Поскольку для солитонов $|u(x)|^2 < \rho_0$, годограф располагается внутри круга $|u| < 1$. Каждый изолированный солитон изображается отрезком прямой с концами на окружности $|u| = 1$. Сталкивающимся солитонам 4 и 5 соответствует кривая.

Вернемся к задаче о статистическом пределе N -солитонного решения (59)–(63). В соответствии с результатом решения задачи рассеяния (разд. 4) будем считать параметры s_1, \dots, s_N , определяемые начальными фазами солитонов, случайными, т.е.

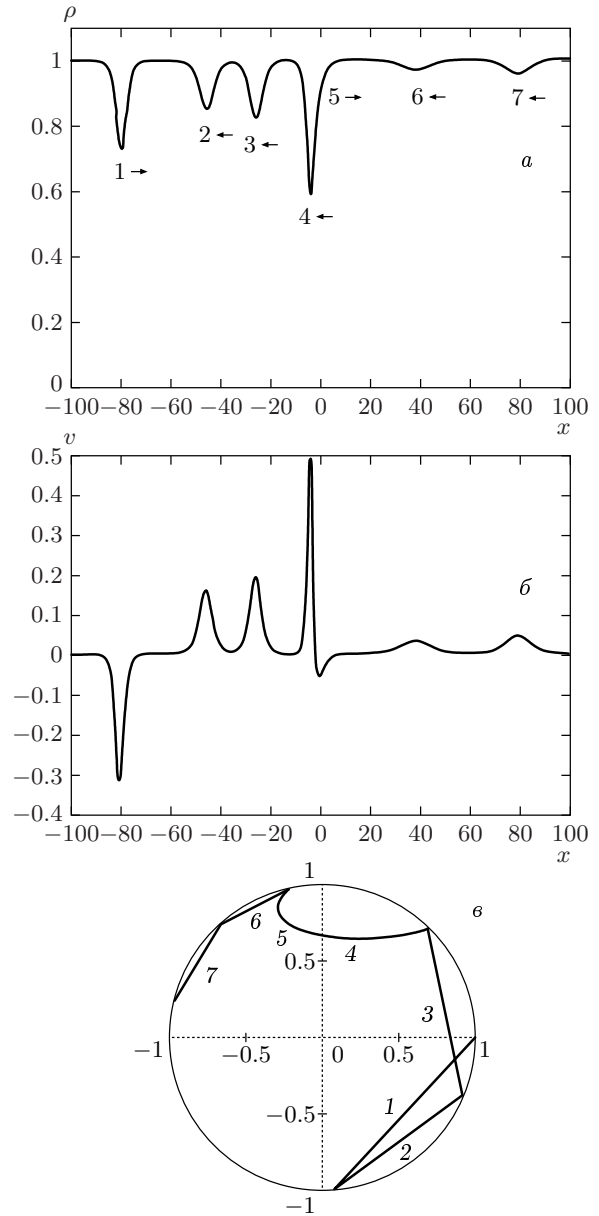


Рис. 2. Пример многосолитонного решения. а — Плотность $\rho(x) = |u|^2$ и направление движения солитонов; амплитуды солитонов: 0.27 (1), 0.15 (2), 0.18 (3), 0.46 (4), 0.12 (5), 0.03 (6), 0.04 (7); их скорости: 1.46 (1), -1.70 (2), -1.65 (3), -1.08 (4), 1.75 (5), -1.94 (6), -1.91 (7). б — Скорость гидродинамического течения $v(x)$. в — Годограф комплексной функции $u(x)$

равномерно и независимо распределенными в интервале $(-L_s/2, L_s/2)$. Выражения (59)–(63) устанавливают однозначное соответствие между множеством точек в S -пространстве с координатами $s_n(t) = s_n + \lambda_n t$, которые согласно (61) движут-

ся равномерно, т. е. не взаимодействуют, и множеством взаимодействующих солитонов. Естественно характеризовать первое множество его средней концентрацией $C_s = \varepsilon N / L_s$, где L_s — длина промежутка, в котором расположены точки s_n . Таким образом, приходим к задаче, аналогичной рассмотренной в [4], о статистических свойствах функции (59)–(63), у которой параметры сдвига s_1, \dots, s_N являются случайными величинами, равномерно и независимо распределенными в промежутке длины L_s , причем $L_s \rightarrow \infty$ пропорционально N , так что отношение $\varepsilon N / L_s = C_s$ постоянно.

Задача состоит также в том, чтобы описать асимптотическое состояние, возникающее при $t \rightarrow \infty$ в результате эволюции начальных условий (9), в терминах случайных функций $u_N(x, t)$ в статистическом пределе. Его можно назвать солитонной турбулентностью. Спектр солитонов задан известной функцией $d(\lambda)$ из (47), известна и их пространственная плотность C (46). Линейная же концентрация точек S -множества C_s и их распределение по λ , т. е. плотность $\rho_s(\lambda)$ набора параметров λ_n в (61)–(63), неизвестны — нам предстоит их найти. Нормировку функции $\rho_s(\lambda)$ определим, как и в (42), условием

$$\int_{-\omega}^{\omega} \rho_s(\lambda) d\lambda = 1. \quad (65)$$

Это означает, что плотности C_s и C связаны соотношением

$$C_s = C \frac{L}{L_s}, \quad CL = \varepsilon N,$$

где L — масштаб на оси x , на котором распределены N взаимодействующих солитонов. Здесь учтены законы сохранения числа солитонов и однозначное соответствие между солитонами и точками S -пространства.

По аналогии с N -солитонным решением уравнения Кортевега де Вриза [4] ищем максимум показателя экспоненты Φ_μ по μ . Соответствующая величина без учета взаимодействия солитонов,

$$\varepsilon \Phi_\mu^{(0)} = \sum_{n=1}^N \mu_n \nu_n (a_n - s_n), \quad a_n = x - \lambda_n t,$$

точно максимизируется при

$$\mu_n = \eta(a_n - s_n), \quad \eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (66)$$

Хороший приближенный максимизатор $\tilde{\mu}$ полного Φ_μ при больших N , в котором «неправильные» элементы $\tilde{\mu}_n$ составляют лишь малую долю (детальная

оценка погрешности проведена в [4]), можно искать в виде, аналогичном (66):

$$\tilde{\mu}_n = \eta(b_n - s_n), \quad (67)$$

где величины b_n подлежат определению.

Если в мультииндексе $\tilde{\mu}$ изменяется только один n -й индекс:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_p &\rightarrow \mu_p = \tilde{\mu}_p + \sigma_n \delta_{np}, \\ \sigma_n &= 1 - 2\tilde{\mu}_n = (-1)^{\tilde{\mu}_n}, \end{aligned} \quad (68)$$

то приращение величины $\varepsilon \Phi_\mu$ равно

$$\begin{aligned} \Delta_n &\equiv \varepsilon(\Phi_\mu - \Phi_{\tilde{\mu}}) = \\ &= \sigma_n \left[\nu_n (a_n - s_n) + 2\varepsilon \sum_{p=1}^N l_{np} \tilde{\mu}_p \right] = \\ &= \nu_n \sigma_n \left(a_n - s_n + \frac{2\varepsilon}{\nu_n} \sum_{p=1}^N l_{np} \langle \tilde{\mu}_p \rangle \right) + \tilde{\Delta}_n. \end{aligned}$$

Здесь $\langle \tilde{\mu}_n \rangle$ — среднее значение $\tilde{\mu}_n$, которое в силу (67) зависит от b_n :

$$\langle \tilde{\mu}_n \rangle = \frac{1}{L_s} \left[b_n - \left(-\frac{L_s}{2} \right) \right] = \frac{b_n}{L_s} + \frac{1}{2}, \quad (69)$$

а $\tilde{\Delta}_n$ — случайная составляющая Δ_n , имеющая нулевое среднее. Условием того, что «систематическая» часть приращения Δ_n отрицательна при всех n , является линейная система уравнений

$$a_n + \frac{2\varepsilon}{\nu_n} \sum_{p=1}^N l_{np} \left(\frac{b_p}{L_s} + \frac{1}{2} \right) = b_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (70)$$

Если найти b_1, \dots, b_n из этой системы, то с учетом (67), (68) будем иметь при любом n

$$\Delta_n = \nu_n \sigma_n (b_n - s_n) + \tilde{\Delta}_n = -\nu_n |b_n - s_n| + \tilde{\Delta}_n,$$

т. е. $\Delta_n \leq 0$ за исключением тех случаев, когда случайная добавка $\tilde{\Delta}_n$ положительна и превосходит абсолютную величину систематической части приращения Δ_n :

$$\tilde{\Delta}_n > \nu_n |b_n - s_n|.$$

Следуя [4], можно показать, что это условие при $N \rightarrow \infty$ выполняется лишь для бесконечно малой доли от всех N элементов мультииндекса $\tilde{\mu}$ (67). Иначе говоря, в пределе $N \rightarrow \infty$ условие (70) определяет максимизатор точно.

Учитывая соотношение (69), можно заменить систему уравнений (70) эквивалентной системой относительно неизвестных $y^{(n)} = \langle \tilde{\mu}_n \rangle$. Используем так-

же явное выражение a_n через x, t и связь ν_n с λ_n . В результате придем к системе уравнений

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} + \frac{x}{L_s} - \lambda_n \frac{t}{L_s} + \frac{2\varepsilon}{L_s \sqrt{\omega^2 - \lambda_n^2}} \sum_{p=1}^N l_{np} y^{(p)}. \quad (71)$$

Заменяя при $N \rightarrow \infty$ сумму интегралом (число спектральных уровней λ_n в интервале $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ равно $N\rho_s(\lambda) d\lambda$), получим из (71) интегральное уравнение второго рода ($x/L_s = \xi, t/L_s = \tau, N/L_s = \varepsilon^{-1}C_s$):

$$y(\lambda; \xi, \tau) = \frac{1}{2} + \xi - \lambda\tau + \frac{2C_s}{\nu(\lambda)} \int_{-\omega}^{\omega} l(\lambda, \lambda') \rho_s(\lambda') y(\lambda'; \xi, \tau) d\lambda', \quad (72)$$

где

$$\nu(\lambda) = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2},$$

$$l(\lambda, \lambda') = \frac{1}{2} \ln \frac{\omega^2 - \lambda\lambda' - \nu(\lambda)\nu(\lambda')}{\omega^2 - \lambda\lambda' + \nu(\lambda)\nu(\lambda')}.$$

В следующем разделе для вычисления инвариантных плотностей $\langle R_n \rangle$ нам понадобится обобщение многосолитонного решения (59)–(63) на всю иерархию высших нелинейных уравнений Шредингера (30).

Чтобы получить «многовременное» N -солитонное решение, достаточно заменить в (61) $\lambda_n t$ на комбинацию $v_1(\lambda_n)t_1 + v_2(\lambda_n)t_2 + \dots$, где $v_m(\lambda)$ — скорость движения такого солитона m -го уравнения иерархии (30), который соответствует дискретному спектральному уровню λ . Эти скорости определяются динамикой коэффициентов перехода дискретного спектра в случае конечной плотности ([9, с. 240, 241]) и могут быть рассчитаны по формулам ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$$v_{2k+1}(\lambda) = (-1)^k \lambda \nu^{2k},$$

$$v_{2k}(\lambda) = (-1)^k \sum_{p=0}^k (-1)^p b_p^+ \omega^{2p} \nu^{2(k-p)}, \quad (73)$$

где $\nu = \nu(\lambda)$ и b_p^+ — коэффициенты разложения $(1+x)^{1/2}$ в ряд по степеням x . В частности, $v_1(\lambda) = \lambda$ — скорость солитона для уравнения (19). Множество солитонных скоростей v_1, v_2, \dots дополнено здесь элементом $v_0 = 1$, что удобно при написании общих формул.

Все рассуждения, приводящие к интегральному уравнению (72), остаются в силе и дают уравне-

ние для обобщенного усредненного максимизатора $y(\lambda; \xi, \tau_1, \tau_2, \dots)$, зависящего от многих времен:

$$y(\lambda) = \frac{1}{2} + \xi - v_1(\lambda)\tau_1 - v_2(\lambda)\tau_2 - \dots + \frac{2C_s}{\nu(\lambda)} \int_{-\omega}^{\omega} l(\lambda, \lambda') \rho_s(\lambda') y(\lambda') d\lambda'. \quad (74)$$

При $\tau_1 = \tau, \tau_2 = \tau_3 = \dots = 0$ имеем частный случай (72). Решение уравнения (74) представляет собой линейную комбинацию

$$y(\lambda) = \left(\frac{1}{2} + \xi\right) y_0(\lambda) - \sum_{n>0} \tau_n y_n(\lambda), \quad (75)$$

составленную из решений уравнений

$$y_k(\lambda) = v_k(\lambda) + \frac{2C_s}{\nu(\lambda)} \times \int_{-\omega}^{\omega} l(\lambda, \lambda') \rho_s(\lambda') y_k(\lambda') d\lambda', \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (76)$$

Следствием соотношений (76) является используемое ниже тождество

$$\int_{-\omega}^{\omega} \nu(\lambda) \rho_s(\lambda) y_k(\lambda) d\lambda = \int_{-\omega}^{\omega} \nu(\lambda) \rho_s(\lambda) v_k(\lambda) y_0(\lambda) d\lambda, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (77)$$

для доказательства которого надо уравнение (76) при $k = 0$ умножить на $\nu(\lambda)\rho_s(\lambda)y_k(\lambda)$, а это же уравнение с ненулевым k умножить на $\nu(\lambda)\rho_s(\lambda)y_0(\lambda)$, после чего полученные соотношения проинтегрировать по λ от $-\omega$ до ω и вычесть одно из другого.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ СОХРАНЯЮЩИХСЯ ПЛОТНОСТЕЙ В СТАТИСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ С ПОМОЩЬЮ УСРЕДНЕННОГО МАКСИМИЗАТОРА

В разд. 4 была установлена связь сохраняющихся величин $\langle R_n \rangle$ со спектральными плотностями C и $d(\lambda)$, которая выражается соотношениями (52). Получим аналогичные формулы для $\langle R_n \rangle$ через спектральные характеристики C_s и $\rho_s(\lambda)$ статистического солитонного состояния, описанного в предыдущем разделе. Для этого используем усредненный максимизатор, построенный выше.

В качестве исходного пункта воспользуемся локальными выражениями, связывающими плотности сохраняющихся величин (23) с суммой D (60), лежащей в основе N -солитонного решения. Обозначим

$$G_0 = -\partial_{xx} \ln D,$$

$$G_m = \frac{\partial^2 \ln D}{\partial t_m \partial x} \quad \text{при } m \geq 1.$$

Имеет место соотношение

$$R_n = \frac{\varepsilon^2}{n} \sum_{0 \leq 2p < n} b_p^- \omega^{2p} G_{n-1-2p}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (78)$$

где коэффициенты b_p^- определены выше (см. (51)), и суммирование ведется по всем целым p , удовлетворяющим указанному неравенству. Для краткости в (78) опущены несущественные добавки, являющиеся полными производными. Справедливость первой из формул (78), т. е. выражения (64), уже установлена. Чтобы доказать (78) при $n > 1$, воспользуемся законами сохранения по высшим временам (32) при $n = 1$ и производящими функциями (20).

Дифференцируя (64) по t_m ($m = 1, 2, \dots$), получим соотношение

$$\frac{\partial R_1}{\partial t_m} + \varepsilon^2 \frac{\partial G_m}{\partial x} = 0,$$

которое представляет собой закон сохранения (32) для случая $n = 1$. Поток в этом случае выражается формулой (33), что позволяет связать G_m с инвариантными плотностями Q_k : с точностью до полной производной по x имеем

$$\varepsilon^2 G_m = \sum_{k=1}^{m+1} k \beta_{k+1, m+1-k} Q_k, \quad (79)$$

где $m = 1, 2, \dots$. При выводе этого соотношения учтено, что функция $G_m(x)$, как и плотности $Q_k(x)$, обращается в нуль при $|x| \rightarrow \infty$.

Важно отметить, что (79) имеет место и при $m = 0$. Это вытекает из (64) с учетом того, что $R_1 = Q_1$ (22) и $\beta_{n0} = 1$ (21). В этом случае система (79) становится треугольной и позволяет последовательно находить Q_n в виде линейных комбинаций G_0, G_1, \dots, G_{n-1} и далее получать с помощью (22) формулы для R_n (78). Чтобы эффективно провести эту процедуру, определим производящую функцию

$$G(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m \eta^m.$$

Связь $G(\eta)$ с производящей функцией $Q(\xi)$, вытекающая из системы уравнений (79) с $m = 0, 1, 2, \dots$, состоит в том, что

$$\xi^2 \frac{dQ}{d\xi} = \varepsilon^2 \eta^2 G(\eta). \quad (80)$$

Это нетрудно установить, вычисляя разложение производной $dQ/d\xi$ по степеням η с учетом разложения (21). Учитывая, что $\xi = \eta(1 + \omega^2 \eta^2)^{-1/2}$, находим

$$\frac{dQ}{d\xi} = \frac{\eta^3}{\xi^3} \frac{dR}{d\eta}$$

и получаем из (80) искомую связь производящих функций $R(\eta)$ и $G(\eta)$:

$$\frac{dR}{d\eta} = \varepsilon^2 (1 + \omega^2 \eta^2)^{-1/2} G(\eta).$$

Отсюда для коэффициентов разложений $R(\eta) = R_1 \eta + R_2 \eta^2 + \dots$ и $G(\eta) = G_0 + G_1 \eta + \dots$ следует соотношение (78).

Перейдем к усреднению величин (78). Воспользуемся установленным в [4] для сумм типа

$$D = \sum_{\mu} \exp(\Phi_{\mu})$$

равенством в континуальном пределе при $N \rightarrow \infty$ средних величин

$$\left\langle \partial_x \ln \sum_{\mu} \exp(\Phi_{\mu}) \right\rangle = \left\langle \partial_x \max_{\mu} \Phi_{\mu} \right\rangle. \quad (81)$$

Это соотношение позволяет использовать найденный выше усредненный максимизатор $\langle \tilde{\mu}_n \rangle = y^{(n)}$: согласно (61)

$$\partial_x \max_{\mu} \Phi_{\mu} = \varepsilon^{-1} \sum_{n=1}^N \tilde{\mu}_n \nu_n,$$

и мы имеем при $N \rightarrow \infty$

$$\left\langle \partial_x \max_{\mu} \Phi_{\mu} \right\rangle = \varepsilon^{-1} \sum_{n=1}^N y^{(n)} \nu_n. \quad (82)$$

Заменив в континуальном пределе последнюю сумму интегралом и объединяя (81) и (82), приходим к соотношению

$$\langle \partial_x \ln D \rangle = \varepsilon^{-1} N \int_{-\omega}^{\omega} y(\lambda) \nu(\lambda) \rho_s(\lambda) d\lambda. \quad (83)$$

С помощью формул (78) и правила усреднения (83) можно получить выражение для средних

$\langle R_n \rangle$, содержащее под интегралом линейную комбинацию производных по x, t_1, t_2, \dots обобщенного усредненного максимизатора $y(\lambda; x, t_1, t_2, \dots)$. Эти производные легко находятся из (75):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = L_s^{-1} y_0(\lambda), \quad \frac{\partial y}{\partial t_n} = -L_s^{-1} y_n(\lambda),$$

что позволяет, используя тождество (77), получить выражение для средних плотностей

$$\langle R_n \rangle = -\frac{C_s}{n} \times \int_{-\omega}^{\omega} \sum_{0 \leq 2p < n} b_p^- \omega^{2p} v_{n-1-2p}(\lambda) y_0(\lambda) \nu(\lambda) \rho_s(\lambda) d\lambda. \quad (84)$$

Теперь учтем, что солитонные скорости v_n и сохраняющиеся интегралы для отдельного солитона j_n связаны соотношениями, вытекающими из (51), (73):

$$j_n(\lambda) = -\frac{\nu(\lambda)}{n} \sum_{0 \leq 2p < n} \omega^{2p} b_p^- v_{n-1-2p}(\lambda), \quad n = 1, 2, \dots$$

Благодаря этим тождествам формулы (84) приводятся к виду

$$\langle R_n \rangle = C_s \int_{-\omega}^{\omega} j_n(\lambda) \rho_s(\lambda) y_0(\lambda) d\lambda. \quad (85)$$

Это и есть искомые выражения для сохраняющихся плотностей через параметры солитонного газа.

Сопоставим выражения (85) с формулами (52), дающими значения сохраняющихся плотностей $\langle R_n \rangle$ в начальном состоянии. Вместе с условием выполнения всех законов сохранения для средних плотностей (52) и (85) это позволяет однозначно определить связь параметра $C_s \rho_s(\lambda)$ с аналогичным параметром начального спектра:

$$C d(\lambda) = C_s \rho_s(\lambda) y_0(\lambda). \quad (86)$$

Нельзя не отметить того замечательного факта, что тождественное равенство бесконечного множества сохраняющихся плотностей в начальном и статистическом состояниях удовлетворяется при выполнении лишь одного соотношения (86) (с помощью единственной функции преобразования $y_0(\lambda)$).

С учетом соотношения (86) можно найти решение уравнения (76) при $k = 0$, т. е. уравнения

$$y_0(\lambda) = 1 + \frac{2C_s}{\nu(\lambda)} \int_{-\omega}^{\omega} l(\lambda, \lambda') \rho_s(\lambda') y_0(\lambda') d\lambda'.$$

Имеем

$$y_0(\lambda) = 1 + \frac{2C}{\nu(\lambda)} \int_{-\omega}^{\omega} l(\lambda, \lambda') d(\lambda') d\lambda', \quad (87)$$

где линейная плотность уровней C и спектральная плотность $d(\lambda)$ определяются начальными условиями (9), т. е. являются заданными. Учитывая нормировку (65) плотности $\rho_s(\lambda)$, найдем из (86) линейную концентрацию фаз солитонов:

$$C_s = C \int_{-\omega}^{\omega} \frac{d(\lambda)}{y_0(\lambda)} d\lambda. \quad (88)$$

После того как C_s и $y_0(\lambda)$ найдены, из (86) определяется спектральная плотность в солитонном газе

$$\rho_s(\lambda) = \frac{C}{C_s} \frac{d(\lambda)}{y_0(\lambda)}. \quad (89)$$

Функция преобразования $y_0(\lambda)$ является ключевым элементом, связывающим спектральные характеристики начального и асимптотического статистического состояния системы. Аналогичная функция была получена в [4] для уравнения Кортевега де Вриза.

6.1. Функция преобразования

Выражение (87), определяющее $y_0(\lambda)$, можно упростить, выразив $y_0(\lambda)$ непосредственно через функции $f(x)$ и $g(x)$, описывающие форму локальных гидродинамических возмущений, из которых состоит начальное условие (9). Заметим, что

$$d(\lambda) = A F'(\lambda),$$

где функция

$$F(\lambda) = \begin{cases} -S(\lambda) & \text{при } -\omega \leq \lambda \leq m_-, \\ 0 & \text{при } m_- \leq \lambda \leq m_+, \\ S(\lambda) & \text{при } m_+ \leq \lambda \leq \omega. \end{cases}$$

Благодаря этому с помощью интегрирования по частям (87) преобразуется к виду

$$y_0(\lambda) = 1 - 2CA \int_{-\omega}^{\omega} \frac{F(s)}{(s - \lambda) \sqrt{\omega^2 - s^2}} ds, \quad (90)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения Коши. Перед интегрированием по частям надо исключить из области интегрирования δ -окрестность особой точки $\lambda' = \lambda$, а затем устремить $\delta \rightarrow 0$. Используя в (90) выражение (41) с

учетом различия в знаке функций $F(\lambda)$ и $S(\lambda)$ и меняя порядок интегрирований, имеем

$$y_0(\lambda) = 1 - 2CA \int_{-\infty}^{\infty} dx \times \int_{D_+(x)} \frac{\sigma(x, s) \sqrt{r_1(x, s)}}{(s - \lambda) \sqrt{\omega^2 - s^2}} ds, \quad (91)$$

где $r_1(x, s)$ определяется (38) и

$$\sigma(x, \lambda) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\omega \leq \lambda \leq \lambda_-(x), \\ 1 & \text{при } \lambda_+(x) \leq \lambda \leq \omega. \end{cases}$$

Область интегрирования во внутреннем интеграле — это область, где $r_1(x, s) > 0$:

$$D_+(x) = (-\omega, \lambda_-(x)) \cup (\lambda_+(x), \omega).$$

Внутренний интеграл в формуле (91) вычисляется явно. Для этого используется соотношение

$$\operatorname{Re} \Phi(\lambda + i0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \Phi(s + i0)}{s - \lambda} ds,$$

связывающее на вещественной оси действительную и мнимую части функции комплексного переменного $\Phi(z)$, аналитической в верхней полуплоскости и имеющей предел $\Phi(\infty) = 0$. Если удастся подобрать такую функцию $\Phi(z)$, для которой

$$\operatorname{Im} \Phi(s + i0) = \frac{\sigma(s) \sqrt{r_1(s)}}{\sqrt{\omega^2 - s^2}}$$

при s в области D_+ , а мнимая часть вне области D_+ равна нулю (аргумент x , играющий здесь роль параметра, опущен), то внутренний интеграл в (91) будет равен

$$\pi \operatorname{Re} \Phi(\lambda + i0).$$

Нетрудно видеть, что

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(z - \lambda_-)(z - \lambda_+)}{(z - \omega)(z + \omega)}} + \frac{1}{2}$$

(здесь учтено, что $r_1 = (1/4)(\lambda - \lambda_-)(\lambda - \lambda_+)$). Константа $1/2$ добавлена для выполнения условия $\Phi(\infty) = 0$, а ветвь корня надо выбрать так, чтобы у мнимой части $\Phi(z)$ на действительной оси был правильный знак $\sigma(s)$. Тогда получим при λ в области D_+

$$\operatorname{Re} \Phi(\lambda + i0) = \frac{1}{2},$$

а при $\lambda_- \leq \lambda \leq \lambda_+$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(\lambda + i0) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_-)(\lambda_+ - \lambda)}{\omega^2 - \lambda^2}} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-r_1(x, \lambda)}}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}. \end{aligned}$$

Подстановка найденных выражений для внутреннего интеграла в (91) приводит к искомому явному выражению для $y_0(\lambda)$. Окончательно имеем в интервале $m_- \leq \lambda \leq m_+$

$$y_0(\lambda) = 1 - 2\pi CA \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-r_1(x, \lambda)}}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} \right) dx,$$

а вне интервала $m_- \leq \lambda \leq m_+$ (но при $-\omega \leq \lambda \leq \omega$)

$$y_0(\lambda) = 1 - \pi CA [x_+(\lambda) - x_-(\lambda)] - 2\pi CA \int_{\Delta_-(\lambda)} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-r_1(x, \lambda)}}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} \right) dx, \quad (92)$$

где $\Delta_-(\lambda)$ — область вне отрезка $[x_-(\lambda), x_+(\lambda)]$, в которой $r_1 < 0$.

6.2. Максимальная плотность солитонов

Из соотношений (92) и (88) вытекает существование верхнего предела C_m , который не может превосходить линейная плотность уровней C , поскольку при подходе C снизу к C_m величина $C_s(C)$ неограниченно возрастает. Действительно, функция $y_0(\lambda)$ достигает минимума на концах промежутка $|\lambda| \leq \omega$, причем ее производная имеет конечную величину при $\lambda = \pm\omega$. Значения $y_0(\pm\omega)$ легко найти с помощью (92), учитывая, что $x_+(\pm\omega) - x_-(\pm\omega) = 1$ в соответствии с определением функции $r_1(x, \lambda)$ (38), а также что интеграл в (92) исчезает при $\lambda = \pm\omega$. Имеем

$$\min y_0(\lambda) = 1 - \pi CA.$$

С ростом C величина $\min y_0$ убывает, что приводит в силу (88) к ускорению роста $C_s(C)$. Наконец, $\min y_0$ обращается в нуль при $C = C_m = (\pi A)^{-1}$, интеграл в (88) становится расходящимся, и $C_s(C) \rightarrow \infty$ при $C \rightarrow C_m$. Заметим, что аналогичная расходящность $C_s(C)$ и, соответственно, максимальная плотность C_m возникает и в решении уравнения Кортевега де Вриза [4].

Предельная величина линейной спектральной плотности $C_m = (\pi A)^{-1}$ соответствует плотной упаковке ям в начальном состоянии. Из условия неперекрывания ям следует, что среднее расстояние \bar{l} между центрами ям должно быть больше средней ширины ямы $\bar{\theta}$, т. е. $\gamma = \bar{\theta}/\bar{l} < 1$; предельное значение

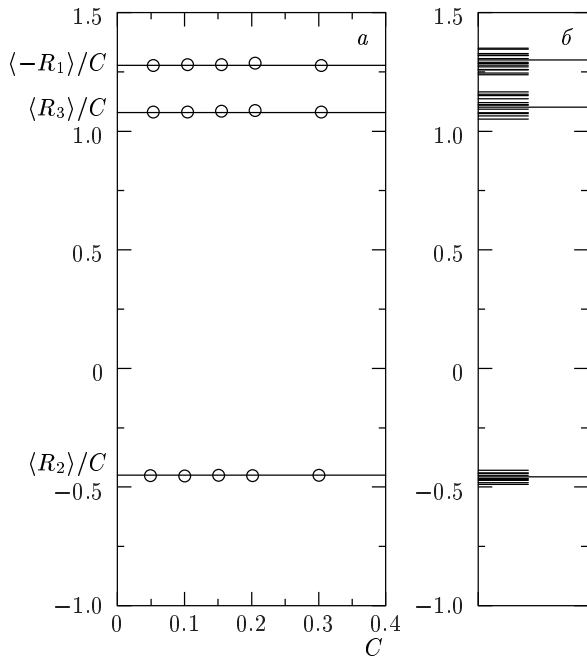


Рис. 3. *a* — Сравнение инвариантных плотностей в начальном (горизонтальные прямые) и статистическом (кружки) состояниях. *б* — Разброс средних по одной реализации $u(x)$ по отношению к средним по всем реализациям

$\gamma = 1$ соответствует плотной упаковке ям. Учитывая соотношение (48), видим, что при $C \rightarrow C_m$ параметр γ стремится к единице.

6.3. Пример численного расчета

Совпадение инвариантных плотностей в начальном состоянии (9) и в статистическом пределе было проверено на примере трех первых с помощью численного эксперимента. В качестве конкретной модели для расчета было принято начальное условие вида (9) с $\rho_0 = 1$ и функциями

$$f(x) = \begin{cases} a(1 - 4x^2) & \text{при } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (93)$$

$$g(x) = 2\alpha \left(1 - \sqrt{1 - f(x)} \right).$$

Неотрицательный параметр $a < 1$ характеризует глубину ям относительно фонового уровня ρ_0 . Параметр α определяет величину возмущения скорости, причем при $-1 \leq \alpha \leq 1$ выполняется условие (39), обеспечивающее описанную в разд. 4 структуру квазиклассического спектра.

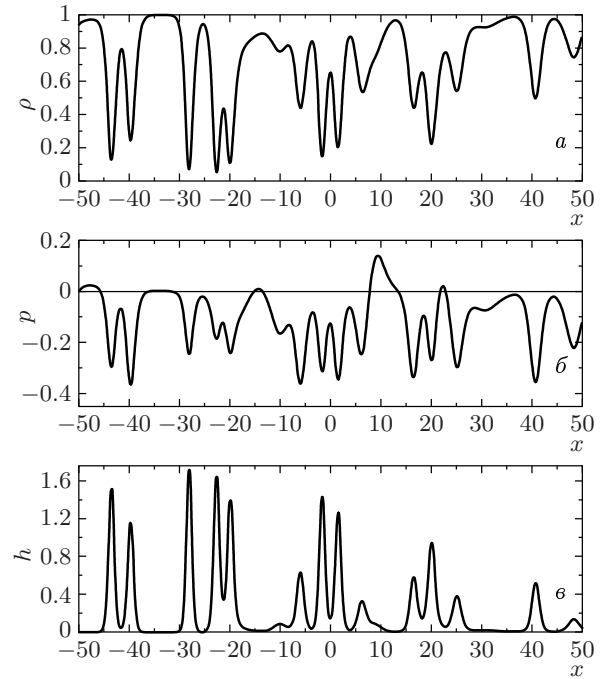


Рис. 4. Типичный фрагмент конкретной реализации. Показаны первые три плотности сохраняющихся величин: ρ (*a*), плотность импульса $p = \rho v$ (*б*), плотность энергии h (*в*). Координата x нормирована на $\varepsilon / \sqrt{\rho_0}$, величина ρ нормирована на ρ_0 , p — на $\rho_0^{3/2}$, h — на ρ_0^2

Согласно (52) величины $\langle R_n \rangle$ пропорциональны линейной спектральной плотности C . Коэффициенты пропорциональности были вычислены для указанной модели (93) со значениями параметров $a = 0.8$, $\alpha = -0.8$ при $n = 1, 2, 3$. Они представлены на рис. 3а в виде горизонтальных прямых.

Кружочками на рис. 3а изображены отношения $\langle R_n \rangle_s / C$ при $n = 1, 2, 3$, в которых величины $\langle R_n \rangle_s$ получены путем усреднения по x локальных плотностей R_n (27) для N -солитонного решения (59) со случайно выбранными параметрами s_n . Само N -солитонное решение вычислялось с помощью алгоритма, учитывающего существование максимизатора. Использование максимизатора позволяет существенно сократить время численного счета путем отбрасывания подавляющего большинства из огромного числа 2^N слагаемых, составляющих суммы (60). Алгоритм подробно описан в [4]. В нашем расчете принималось $N = 200$. На рис. 4 в качестве примера приведены графики плотностей $\rho = \rho_0 + R_1$, а также p и h (29) при $C = 0.2$ для одного конкретного набора чисел s_n . Соответствие статистического N -солитонного решения (59)–(63) начальному усло-

вию (9), (93) достигалось с помощью использования формул (88), (89) при определении параметров C_s и λ_n .

Для получения статистически достоверных результатов использовалось дополнительное усреднение по многим (на рис. 3а — по 40) реализациям (59), определяемым случайным выбором совокупности параметров s_1, \dots, s_N . На рис. 3б показан разброс средних (нормированных на C), рассчитанных для отдельных реализаций по отношению к средним величинам по всем реализациям.

Из рис. 3а видно, что имеется хорошее соответствие между рассчитанными для статистического состояния сохраняющимися плотностями и их значениями в начальном гидродинамическом состоянии. Соответствие сохраняется вплоть до значений C , близких к предельной величине $C_m = 0.4157$. Это показывает, что использование максимизатора для расчета статистических характеристик турбулентного состояния оказывается весьма эффективным даже при максимальных плотностях газа взаимодействующих солитонов.

Авторы признательны С. П. Новикову за полезное обсуждение. Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 99-1068) и РФФИ (грант № 00-15-96594л).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат ЖЭТФ **61**, 118 (1971).
2. *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, под ред. С. П. Новикова, Наука, Москва (1980).
3. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, Г. А. Эль, ЖЭТФ **115**, 333 (1999).
4. А. В. Гуревич, Н. Г. Мазур, К. П. Зыбин, ЖЭТФ **117**, 797 (2000).
5. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, *Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере*, Наука, Москва (1973).
6. Y. Kodama, SIAM J. Appl. Math. **59**, 2162 (1999).
7. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
8. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, Москва (1980).
9. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
10. Я. Г. Синай, Е. И. Динабург, частное сообщение (1998).
11. Г. М. Заславский, *Стохастичность динамических систем*, Наука, Москва (1984).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, т. 1, Наука, Москва (1986).
13. I. Kay and H. E. Moses, J. Appl. Phys. **27**, 1503, (1956).
14. М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, Москва (1987).