

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО МЕХАНИЗМА ПРОЦЕССА УПРУГОГО ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. В. Король^{a}, А. Г. Лялин^b, О. И. Оболенский^c, А. В. Соловьев^c, И. А. Соловьев^a*

^a *Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
198262, Санкт-Петербург, Россия*

^b *Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского государственного университета
198504, Санкт-Петербург, Россия*

^c *Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 16 октября 2001 г.

Предложен полностью релятивистский формализм для описания процесса поляризационного тормозного излучения при упругом столкновении заряженной частицы с многоэлектронной мишенью. Получены мультипольные разложения для амплитуды и сечения процесса, учитывающие эффект запаздывания излучения. Показано, что учет старших мультиполей приводит к существенной асимметрии угловых распределений излученных фотонов по сравнению с дипольным случаем, а также к заметному изменению спектральных характеристик поляризационного излучения. Показано, что сечение поляризационного тормозного излучения логарифмически растет с увеличением энергии налетающей частицы.

PACS: 32.30.Rj, 34.80.Dp

1. ВВЕДЕНИЕ

При столкновении заряженных частиц с мишенью, обладающей внутренней электронной структурой, тормозное излучение является результатом так называемых обычного и поляризационного механизмов. В первом из них излучение возникает за счет торможения налетающей частицы в статическом поле мишени (см., например, [1, 2]). Вторым механизмом обусловлен динамической поляризуемостью мишени электрическим полем налетающей частицы. При этом излучение фотона происходит в результате виртуального возбуждения (поляризации) электронов мишени электрическим полем налетающей частицы (см., например, [3]). Существование этого механизма излучения было обнаружено сравнительно недавно [4–7]. Целью данной работы является изучение частотной и угловой зависимостей спектра поляризационного тормозного излучения (ПТИ), возника-

ющего при релятивистских столкновениях заряженной частицы с многоэлектронной мишенью.

В отличие от хорошо изученного процесса обычного тормозного излучения, процесс ПТИ более сложен, поскольку при его описании необходимо учитывать динамический отклик атома-мишени на действие двух полей, создаваемых налетающей частицей и испущенным фотоном. В результате этого задача приобретает существенно многочастичный характер (за исключением случая столкновения с атомом водорода или водородоподобным ионом, когда возможно использование более простых методов [7–11]).

Процесс ПТИ может сопровождаться возбуждением или ионизацией мишени в конечном состоянии. Далее мы будем называть процесс ПТИ без возбуждения мишени в конечном состоянии упругим, а с возбуждением или ионизацией — неупругим. Существует широкая область частот фотонов, в которой упругий канал процесса ПТИ доминирует над неупругим каналом при рассеянии как тя-

*E-mail: korol@rpro.ioffe.rssi.ru

желых [12–18], так и легких [19] частиц на многоэлектронном атоме. Причина этого заключается в том [13, 20], что в процессе упругого ПТИ атомные электроны излучают когерентно (подобно тому, как это происходит при рэлеевском рассеянии света). А в процессе неупругого ПТИ вклады в полный спектр излучения отдельных электронов мишени некогерентны (аналогично случаю комбинационного рассеяния света) и поэтому должны суммироваться не по амплитуде, а по сечению процесса. В результате сечение неупругого ПТИ оказывается параметрически малым в случае многоэлектронных ($Z \gg 1$) мишеней. Для мишеней с малым Z вклад обоих каналов процесса приблизительно одинаков [13]. Заметим, что это справедливо и в случае, когда рассеиваемая (налетающая) частица обладает внутренней структурой (атом-атомные, ион-атомные, ион-ионные столкновения). В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случая упругого ПТИ.

Всесторонний обзор используемых теоретических подходов и полученных экспериментальных данных по ПТИ можно найти в [3, 21–24] и в работах, цитируемых в них. Здесь мы лишь кратко перечислим методы, которые использовались для описания ПТИ, возникающего при столкновениях заряженных частиц с многоэлектронными атомами. Все они могут быть условно разделены на две части: методы, применяемые для анализа процесса рассеяния, и приближения, используемые для описания динамического атомного отклика.

Для описания процесса рассеяния как легких (позитрон, электрон), так и тяжелых (протон, ион, атом) налетающих частиц на многоэлектронных атомах широко используются два основных приближения: борновское приближение (как для релятивистских, так и для нерелятивистских столкновений) и приближение, основанное на использовании нерелятивистского формализма метода искаженных парциальных волн (DPWA) [25–30]. При этом борновское приближение обеспечивает хорошие результаты в случае рассеяния тяжелых частиц. Использование метода DPWA, обобщающего борновское приближение, позволяет установить границы применимости последнего, а также проводить расчеты сечений ПТИ для относительно низких энергий столкновения, когда борновское приближение неприменимо.

Динамический отклик мишени на совместное действие полей налетающей частицы и излученного фотона в большинстве работ (за исключением трех, указанных ниже) описывается в рамках нерелятивистского дипольного приближения, применяемого

в случае мишеней с малым атомным номером Z и излучения фотонов с длиной волны ($\sim k^{-1}$), существенно превышающей размеры мишени. Для более высоких значений Z (когда движение атомных электронов приобретает существенно релятивистский характер) и для $k^{-1} \ll R_{at}$ (R_{at} — радиус мишени) это приближение уже не может рассматриваться как адекватное.

При этом амплитуда ПТИ выражается через дипольные поляризуемости мишени, зависящие от энергии ω и абсолютной величины импульса \mathbf{q} виртуального фотона, но не зависящие от величины импульса \mathbf{k} испущенного фотона. В случае нерелятивистской налетающей частицы (без учета эффектов запаздывания) амплитуда ПТИ пропорциональна скалярной дипольной поляризуемости $\alpha_d(\omega, q)$, учитывающей виртуальное возбуждение атома-мишени при взаимодействии с кулоновским полем налетающей частицы [3, 21–24]. В случае рассеяния релятивистской частицы (эффекты запаздывания учитываются) амплитуда ПТИ содержит, кроме $\alpha_d(\omega, q)$, вторую поляризуемость $\beta_d(\omega, q)$, которая описывает динамический отклик атома на векторную часть поля виртуального фотона [19]. При этом обе поляризуемости совпадают в пределе $q \rightarrow 0$. До сих пор все численные расчеты проводились только для поляризуемости $\alpha_d(\omega, q)$.

Вне рамок дипольного приближения поляризационное тормозное излучение рассматривалось при столкновении тяжелой частицы с нерелятивистским многоэлектронным атомом [31–33] с использованием различных приближений, основанных на нерелятивистском формализме теории многих тел [3, 21–24], а также в случае столкновения с атомом водорода, когда возможно непосредственное применение аналитических методов [7–11]. Кроме того, для описания атомного отклика при рассмотрении процесса ПТИ использовалось нерелятивистское приближение дезэранированного атома [34]. В недавних работах [35, 36] ПТИ, возникающее при столкновении быстрого электрона (позитрона) с многоэлектронным атомом, рассматривалось в приближении локальной электронной плотности и статистической модели Томаса–Ферми.

Теория ПТИ, формирующегося при столкновениях релятивистских частиц, существенно менее разработана. Общие выражения для амплитуды и сечения процесса ПТИ в рамках релятивистского борновского приближения для случая излучения мягких фотонов (для которых выполняется условие дипольности излучения $kR_{at} \ll 1$) были получены в работе [19]. Там же было предсказано, что в реляти-

вистском случае вклад поляризационного механизма тормозного излучения в полный спектр тормозного излучения превышает соответствующий вклад в нерелятивистском случае, логарифмически возрастающая с ростом энергии налетающей частицы. Эта особенность возникает вследствие запаздывания взаимодействия налетающей частицы с атомом¹⁾.

В недавней работе [37] был впервые представлен полностью релятивистский формализм, описывающий процесс формирования тормозного излучения при упругом столкновении заряженной частицы с многоэлектронной мишенью, состояния которой могут быть описаны в рамках релятивистского одночастичного приближения самосогласованного поля. При этом учитывались оба основных механизма формирования тормозного излучения — обычный и поляризационный, а также их интерференция. Для описания движения налетающей частицы был использован релятивистский формализм метода DPWA. Данный подход обобщает применявшиеся ранее более простые приближения и позволяет выполнять расчеты спектральных и спектрально-угловых характеристик тормозного излучения для различных режимов столкновений (от нерелятивистских до ультрарелятивистских) с участием нерелятивистских (легких) и релятивистских (тяжелых) атомов и ионов.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случая столкновения тяжелой налетающей частицы с многоэлектронной мишенью в рамках подхода, развитого в [37]. При этом будем полагать, что ПТИ возникает при столкновении налетающей частицы, движение которой может быть описано в рамках релятивистского борновского приближения, со сферически-симметричной мишенью (атомом или ионом), начальное и конечное состояния которой совпадают. Как было показано в [37], в этом случае характеристики ПТИ выражаются через обобщенные мультипольные поляризуемости мишени трех типов, соответствующих допустимым

комбинациям типов (продольный, электрический, магнитный) виртуального и испущенного фотонов в амплитуде процесса ПТИ.

Представленный в данной работе формализм позволяет получить мультипольные разложения для амплитуды и сечения процесса ПТИ, учитывающие эффекты запаздывания излучения и излучение фотонов высокой мультипольности, и произвести численные расчеты спектральных и угловых характеристик ПТИ. При этом основное внимание уделяется изучению ПТИ электронов внутренних оболочек мишени. Целесообразность такого исследования определяется двумя важными обстоятельствами. Во-первых, электроны внутренних оболочек вносят основной вклад в формирование полного спектра ПТИ в очень широкой области частот [3]. Во-вторых, особенности, приносимые электронами внутренних оболочек в полный спектр тормозного излучения, могут быть описаны в рамках простых приближений (водородоподобное приближение, приближение Хартри–Фока–Дирака) без учета многоэлектронных корреляций. Причем использование подобных приближений делает возможной простую физическую интерпретацию наблюдаемых эффектов, а также значительно снижает трудоемкость расчетов.

До настоящего времени подробного численного анализа спектральных и угловых распределений ПТИ электронов внутренних атомных оболочек проведено не было (за исключением нескольких первых численных результатов, опубликованных в [37]), поэтому цель данной работы представляется весьма актуальной. Результаты расчетов, представленные в данной работе, показывают, что учет высших мультиполей приводит к существенной асимметрии угловых распределений излученных фотонов по сравнению с дипольным случаем, а также к заметному изменению спектральных характеристик поляризационного излучения. Помимо этого наглядно продемонстрирована важная особенность сечения ПТИ в релятивистском случае, заключающаяся в его логарифмическом росте с увеличением энергии налетающей частицы.

Необходимо отметить, что подобные расчеты особенно важны с точки зрения точного сравнения с недавно полученными экспериментальными данными по тормозному излучению при столкновениях электронов с энергиями 10–100 кэВ с различными твердотельными, тонкопленочными и газовыми мишенями: Al, Cu, Ni, Ag, Xe [38–40]. Результаты экспериментов, представленные в этих работах, указывают на существенность вклада поляризационного ме-

¹⁾ При рассмотрении поляризационного механизма тормозного излучения необходимо различать эффекты, возникающие вследствие запаздывания взаимодействия, и излучение фотонов высокой мультипольности. Запаздывание взаимодействия подразумевает, что налетающая релятивистская частица взаимодействует с мишенью не только посредством кулоновского поля, но и (а в ультрарелятивистском случае и в основном) посредством поля поперечных виртуальных фотонов (см. [1]). В последнем случае эффективный радиус взаимодействия возрастает с увеличением скорости налетающей частицы. Мультипольный характер излучения определяется исключительно величиной параметра kR_{at} . В случае $kR_{at} \ll 1$ излучение носит существенно дипольный характер, независимо от скорости налетающей частицы.

ханизма тормозного излучения в полный спектр излучения в диапазонах энергий, где необходимо релятивистское описание процесса ПТИ. Кроме того, существенный интерес представляют расчеты, связанные с релятивистскими столкновениями с участием тяжелых ионов, ввиду попыток, предпринимавшихся в этом направлении в последнее время [41]. В указанной работе измерялся спектр тормозного излучения, формирующегося при столкновениях гелиеподобных ионов урана с энергией 223 МэВ/нуклон с газовыми мишенями N₂ и Ar.

2. АМПЛИТУДА И СЕЧЕНИЕ ПРОЦЕССА ПТИ

Рассмотрим процесс ПТИ (рис. 1) при упругом столкновении налетающей частицы с зарядом $Z_p e$ и массой m_p со сферически-симметричной мишенью (атомом или ионом), сопровождающийся переходом частицы из начального состояния (\mathbf{p}_1, μ_1) (с энергией $\varepsilon_1 = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_p^2}$) в конечное состояние (\mathbf{p}_2, μ_2) (с энергией $\varepsilon_2 = \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_p^2}$). Поскольку начальное и конечное состояния мишени совпадают, то закон

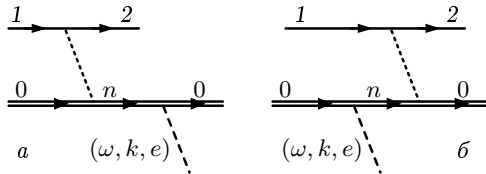


Рис. 1. Фейнмановские диаграммы, изображающие процесс упругого ПТИ бесструктурной заряженной частицы, рассеивающейся на многоэлектронном атоме. Сплошные линии обозначают волновые функции налетающей частицы, удовлетворяющие уравнению Дирака (представление Фарри). Начальное (индекс «1») и конечное (индекс «2») состояния налетающей частицы характеризуются импульсами $\mathbf{p}_{1,2}$ и поляризациями $\mu_{1,2}$. Двойные линии обозначают состояния мишени: индексы «0» и «n» соответствуют начальному (конечному) и промежуточному (виртуальному) состояниям мишени. Пунктирные линии соответствуют волновой функции испущенного фотона с энергией ω , импульсом \mathbf{k} и вектором поляризации \mathbf{e} , а точечные обозначают функцию Грина виртуального фотона с энергией ω и импульсом \mathbf{q}

сохранения энергии имеет вид²⁾

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \omega. \quad (1)$$

Спектрально-угловое распределение излучения $d^2\sigma/d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}$, получаемое из дифференциального сечения интегрированием по направлению импульса рассеянной частицы \mathbf{p}_2 , суммированием по поляризациям испущенного фотона λ_p и рассеянной частицы μ_2 и усреднением по поляризациям налетающей частицы μ_1 , записывается следующим образом:

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{p_2}{8p_1} \frac{\omega}{(2\pi)^4} \sum_{\lambda_p} \sum_{\mu_1, \mu_2} \int_{(4\pi)} d\Omega_{\mathbf{p}_2} |\mathcal{M}|^2, \quad (2)$$

где $d\Omega_{\mathbf{k}}$, $d\Omega_{\mathbf{p}_2}$ — элементы телесных углов, соответственно, испущенного фотона и рассеянной частицы. Амплитуда процесса \mathcal{M} описывается двумя фейнмановскими диаграммами (рис. 1), которые соответствуют составным матричным элементам перехода мишени из начального «0» в возбужденное «n» и затем обратно в конечное состояние «0» под действием поля испущенного фотона $\mathbf{A}_{(\gamma)}$ и поля виртуального фотона, характеризуемого 4-потенциалом $A^\nu = (\Phi, \mathbf{A})$, и имеет вид

$$\mathcal{M} = e^2 \sum_n \left\{ \frac{\langle 0 | \mathbf{A}_{(\gamma)} \boldsymbol{\gamma} | n \rangle \langle n | \boldsymbol{\gamma}^\nu A_\nu | 0 \rangle}{\varepsilon_n(1 - i0) - \varepsilon_0 - \omega} + \frac{\langle 0 | \boldsymbol{\gamma}^\nu A_\nu | n \rangle \langle n | \mathbf{A}_{(\gamma)} \boldsymbol{\gamma} | 0 \rangle}{\varepsilon_n(1 - i0) - \varepsilon_0 + \omega} \right\}. \quad (3)$$

Здесь $\boldsymbol{\gamma}^\nu = (\boldsymbol{\gamma}^0, \boldsymbol{\gamma})$ — матрицы Дирака. Суммирование выполняется по квантовым числам полного спектра возбужденных состояний мишени и включает вклады промежуточных состояний как с положительной ($\varepsilon_n > 0$), так и с отрицательной ($\varepsilon_n < 0$) энергиями. Потенциал поля испущенного фотона имеет вид³⁾

$$\mathbf{A}_{(\gamma)} = \sum_{a=1}^N \mathbf{e} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a), \quad (4)$$

где \mathbf{e} — вектор поляризации (далее, предполагая линейную поляризацию фотона, будем считать $\mathbf{e}^* = \mathbf{e}$). Суммирование проводится по электронам мишени, \mathbf{r}_a соответствует координате a -го электрона, N — полное число электронов.

²⁾ В работе используется релятивистская система единиц ($\hbar = c = 1$). Для четырехмерных величин используется метрика с сигнатурой $(+ - - -)$.

³⁾ Нормировочный множитель $\sqrt{2\pi/\omega}$ не включен в определение $\mathbf{A}_{(\gamma)}$.

В рамках релятивистского борновского приближения начальное и конечное состояния налетающей частицы описываются волновыми функциями

$$\Psi_{\mathbf{p}\mu}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = u_{\mu}(\varepsilon, \mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \quad (5)$$

с биспинорными амплитудами $u_{\mu}(\varepsilon, \mathbf{p})$, определенными согласно [2],

$$u_{\mu}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m} \chi_{\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{p}}) \\ \sqrt{\varepsilon - m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p}}) \chi_{\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{p}}) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь и далее $\mathbf{n}_{\mathbf{a}}$ обозначает единичный вектор вдоль направления \mathbf{a} , $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули. Двухкомпонентные спиноры $\chi_{\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{p}})$ удовлетворяют условию нормировки $\chi_{\mu}^{\dagger}(\mathbf{n}_{\mathbf{p}}) \chi_{\mu}(\mathbf{n}_{\mathbf{p}}) = 1$ (значок «†» обозначает эрмитово сопряжение).

Четырехмерный потенциал поля, создаваемого налетающей частицей, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} A^{\nu} &= Z_p e \sum_{a=1}^N \int d\mathbf{r} \Psi_{\mathbf{p}_2 \mu_2}^{(-)\dagger}(\mathbf{r}) \times \\ &\quad \times \gamma^{\mu} D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \Psi_{\mathbf{p}_1 \mu_1}^{(+)}(\mathbf{r}) = \\ &= Z_p e \sum_{a=1}^N \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_a) D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{q}) B_{21}^{\mu}(\mathbf{q}). \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь ω и \mathbf{q} — энергия и импульс виртуального фотона, $D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$ обозначает функцию Грина фотона⁴⁾, 4-вектор $B_{21}^{\mu}(\mathbf{q})$ представляет собой фурье-образ тока налетающей частицы

$$\begin{aligned} B_{21}^{\mu}(\mathbf{q}) &= \int d\mathbf{r} \Psi_{\mathbf{p}_2 \mu_2}^{(-)\dagger}(\mathbf{r}) \gamma^0 \gamma^{\mu} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \Psi_{\mathbf{p}_1 \mu_1}^{(+)}(\mathbf{r}) = \\ &= (2\pi)^3 b^{\mu} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}), \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$b^{\mu} = u_{\mu_2}^{\dagger}(\varepsilon_2, \mathbf{p}_2) \gamma^0 \gamma^{\mu} u_{\mu_1}(\varepsilon_1, \mathbf{p}_1). \quad (9)$$

Присутствующая в (8) δ -функция позволяет легко выполнить интегрирование по $d\mathbf{q}$ в последнем интеграле в (7), и импульс виртуального фотона оказывается равным разности начального и конечного импульсов налетающей частицы:

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2. \quad (10)$$

Для фиксированной энергии фотона минимальное и максимальное значения переданного импульса равны $q_{min} = p_1 - p_2$, $q_{max} = p_1 + p_2$.

⁴⁾ Мы используем кулоновскую калибровку фотонного пропагатора.

По аналогии с подходом, используемым в приближении Хартри–Фока–Дирака (см., например, [42]), будем считать, что состояния мишени $|0\rangle$, $|n\rangle$ могут быть описаны с помощью одноэлектронных волновых функций, соответствующих состояниям с определенными значениями релятивистской энергии ε , полного углового момента j , орбитального углового момента $l = j \pm 1/2$ и проекции полного углового момента m . Тогда при подстановке выражений (4)–(7) в (3) суммирование по электронам мишени может быть заменено суммированием по квантовым числам $\varepsilon_i, j_i, l_i, m_i$ (i принимает значения 0 и n) подоболочек мишени в основном и возбужденном состояниях. При этом одноэлектронные волновые функции $\Psi_{\varepsilon_i j_i l_i m_i}(\mathbf{r})$ имеют следующую биспинорную структуру:

$$\Psi_{\varepsilon_i j_i l_i m_i}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} g(r) \Omega_{j_i l_i m_i}(\mathbf{n}) \\ -i f(r) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \Omega_{j_i l_i m_i}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Здесь $g(r) \equiv g_{\varepsilon_i j_i l_i}(r)$ и $f(r) \equiv f_{\varepsilon_i j_i l_i}(r)$ — соответственно, большая и малая компоненты релятивистской волновой функции, которые могут быть получены путем решения системы радиальных уравнений Хартри–Фока–Дирака (см., например, [43]), $\Omega_{j l m}(\mathbf{n})$ — сферические спиноры, определенные в соответствии с [44].

Таким образом, в случае многоэлектронной мишени амплитуда процесса ПТИ принимает вид

$$\mathcal{M} = Z_p e b^{\mu} D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{q}) M^{\nu}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{e}; \mathbf{q}). \quad (12)$$

Динамический отклик мишени описывается выражением

$$\begin{aligned} M^{\nu}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{e}; \mathbf{q}) &= \\ &= e^2 \sum_{\{0, n\}} \left\{ \frac{\langle 0 | \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\gamma} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | n \rangle \langle n | \boldsymbol{\gamma}^{\nu} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} | 0 \rangle}{\omega_{n0} - \omega} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle 0 | \boldsymbol{\gamma}^{\nu} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} | n \rangle \langle n | \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\gamma} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | 0 \rangle}{\omega_{n0} + \omega} \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Здесь $\omega_{n0} = \varepsilon_n(1 - i0) - \varepsilon_0$ — энергия перехода, суммирование $\sum_{\{0\}}$ проводится по квантовым числам $\varepsilon_0, j_0, l_0, m_0$ подоболочек мишени в начальном (конечном) состоянии. Предполагая заполненными все подоболочки мишени, имеем $m_0 = -l_0, \dots, l_0$.

Сумма $\sum_{\{n\}}$ вычисляется по квантовым числам $\varepsilon_n, j_n, l_n, m_n$ промежуточных состояний и содержит вклады состояний как с положительной ($\varepsilon_n > 0$), так и с отрицательной ($\varepsilon_n < 0$) энергиями.

Разделяя вклады скалярной и векторной частей потенциала A^ν (см. (7)), представим амплитуду процесса в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (4\pi)^2 Z_p e (\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}) = \\ &= (4\pi)^2 Z_p e \mathbf{e} \cdot (\mathbf{F}^{(s)} + \mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}^{(m)}), \end{aligned} \quad (14)$$

где члены $\mathbf{F}^{(s,e,m)}$ (пояснение смысла индексов (s, e, m) дано ниже) записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}^{(s)} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{q^2} b^0 \sum_{\{0,n\}} \left[\frac{\mathcal{F}_{0n}(\mathbf{e}, -\mathbf{k}) F_{n0}(\mathbf{q})}{\omega_{n0} - \omega} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{F_{0n}(\mathbf{q}) \mathcal{F}_{n0}(\mathbf{e}, -\mathbf{k})}{\omega_{n0} + \omega} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}^{(m)}) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{\omega^2 - q^2} \times \\ &\times \sum_{\{0,n\}} \left[\frac{\mathcal{F}_{0n}(\mathbf{e}, -\mathbf{k}) \mathcal{F}_{n0}(\mathbf{R}, \mathbf{q})}{\omega_{n0} - \omega} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathcal{F}_{0n}(\mathbf{R}, \mathbf{q}) \mathcal{F}_{n0}(\mathbf{e}, -\mathbf{k})}{\omega_{n0} + \omega} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Вектор \mathbf{R} , ортогональный \mathbf{q} , определен как

$$\mathbf{R} = \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q}}{q^2}. \quad (17)$$

Матричный элемент $\mathcal{F}_{n0}(\mathbf{e}, -\mathbf{k})$ описывает переход мишени из основного состояния «0» в возбужденное (виртуальное) состояние « n » под действием оператора $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\gamma} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n0}(\mathbf{e}, -\mathbf{k}) &= \int d\mathbf{r} \Psi_{\varepsilon_n j_n l_n m_n}^\dagger(\mathbf{r}) \times \\ &\times \gamma^0 \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\gamma} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \Psi_{\varepsilon_0 j_0 l_0 m_0}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (18)$$

Матричные элементы $F_{n0}(\mathbf{q})$ и $\mathcal{F}_{n0}(\mathbf{R}, \mathbf{q})$ описывают переход $0 \rightarrow n$, возникающий в результате взаимодействия электрона мишени со скалярной (пропорциональной $\gamma^0 \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$) и векторной (пропорциональной $\boldsymbol{\gamma} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$) частями поля виртуального фотона, создаваемого налетающей частицей:

$$\begin{aligned} F_{n0}(\mathbf{q}) &= \\ &= \int d\mathbf{r} \Psi_{\varepsilon_n j_n l_n m_n}^\dagger(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \Psi_{\varepsilon_0 j_0 l_0 m_0}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n0}(\mathbf{R}, \mathbf{q}) &= \int d\mathbf{r} \Psi_{\varepsilon_n j_n l_n m_n}^\dagger(\mathbf{r}) \times \\ &\times \gamma^0 \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\gamma} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \Psi_{\varepsilon_0 j_0 l_0 m_0}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (20)$$

Матричные элементы $\mathcal{F}_{0n}(\mathbf{e}, -\mathbf{k})$, $F_{0n}(\mathbf{q})$, $\mathcal{F}_{0n}(\mathbf{R}, \mathbf{q})$, соответствующие виртуальному переходу $n \rightarrow 0$, можно получить из (18)–(20) с помощью замены $n \leftrightarrow 0$.

Подставляя в приведенные выше формулы мультипольные разложения операторов $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\gamma} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ и $\exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$ по, соответственно, шаровым векторным $\mathbf{Y}_{lm}^{(0,1)}(\mathbf{n})$ и сферическим $Y_{lm}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{lm}^{(-1)}(\mathbf{n})$ гармоникам, определенным согласно [44], и выполняя необходимые преобразования (пользуясь формулами из [44, §§ 5, 7]), можно получить представленные ниже мультипольные разложения для векторов $\mathbf{F}^{(s,e,m)}$. Правила отбора для мультипольных переходов магнитного (индекс (m) , $\lambda = 0$), электрического (индекс (e) , $\lambda = 1$) и продольного (индекс (s) , $\lambda = -1$) типов различны:

$$l_n + l_0 + l = \begin{cases} \text{нечетно,} & \lambda = 0, \\ \text{четно,} & \lambda = \pm 1. \end{cases} \quad (21)$$

Поэтому выражение для $\mathbf{F}^{(s)}$ содержит лишь компоненты, пропорциональные электрическим мультиполям поля испущенного фотона, в то время как члены $\mathbf{F}^{(e)}$ и $\mathbf{F}^{(m)}$ диагональны по индексам λ виртуального и реального фотонов.

Таким образом, в случае сферически-симметричной мишени амплитуда процесса ПТИ выражается через парциальные обобщенные поляризуемости трех различных типов, соответствующих следующим комбинациям типов виртуального–реального фотонов: продольный–электрический, электрический–электрический и магнитный–магнитный. Каждая из этих поляризуемостей зависит от энергии фотона ω и его орбитального момента l (эти величины одинаковы для обоих фотонов), а также от абсолютных величин импульсов q и k виртуального и реального фотонов.

Такая форма представления амплитуды ПТИ имеет значительные преимущества как принципиального, так и вычислительного характера. Тот факт, что \mathcal{M} может быть выражена через указанные типы поляризуемостей, несущих всю необходимую информацию о динамической структуре многоэлектронной мишени, упрощает задачу и позволяет существенно сократить затраты машинного времени при вычислении характеристик ПТИ.

Аналитические выражения для $\mathbf{F}^{(s,e,m)}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(s)} &= -\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{q}}{q} \sum_{lm} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2l+1} \times \\ &\times Y_{lm}^*(\mathbf{n}_q) \mathbf{Y}_{lm}^{(1)}(\mathbf{n}_k) \alpha_l(\omega, q, k), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathbf{F}^{(e)} = \frac{1}{\omega^2 - q^2} \sum_{lm} \frac{l(l+1)}{2l+1} \times \left(\mathbf{b} \cdot \mathbf{Y}_{lm}^{(1)*}(\mathbf{n}_q) \right) \mathbf{Y}_{lm}^{(1)}(\mathbf{n}_k) \beta_l^{(1)}(\omega, q, k), \quad (23)$$

$$\mathbf{F}^{(m)} = \frac{1}{\omega^2 - q^2} \sum_{lm} \frac{l(l+1)}{2l+1} \times \left(\mathbf{b} \cdot \mathbf{Y}_{lm}^{(0)}(\mathbf{n}_q) \right) \mathbf{Y}_{lm}^{(0)}(\mathbf{n}_k) \beta_l^{(0)}(\omega, q, k). \quad (24)$$

При записи (22) было учтено соотношение $b^0 \omega = \mathbf{b} \cdot \mathbf{q}$, которое следует из закона сохранения 4-вектора тока налетающей частицы. Суммирование по l проводится от $l = 1$ до бесконечности. Парциальные обобщенные поляризуемости в правых частях выражений (22)–(24) определены следующим образом:

$$\alpha_l(\omega, q, k) = \frac{2l+1}{q} e^2 \times \sum_{\substack{\varepsilon_0 j_0 l_0 \\ \varepsilon_n j_n l_n}} \frac{2C_{0n}^{(-1)}(l) f_{0n}^{(1)}(k; l) f_{n0}^{(-1)}(q; l)}{\omega_{n0}^2 - \omega^2}, \quad (25)$$

$$\beta_l^{(\lambda)}(\omega, q, k) = (2l+1) e^2 \times \sum_{\substack{\varepsilon_0 j_0 l_0 \\ \varepsilon_n j_n l_n}} \frac{2\omega_{n0} C_{0n}^{(\lambda)}(l) f_{0n}^{(\lambda)}(k; l) f_{n0}^{(\lambda)}(q; l)}{\omega_{n0}^2 - \omega^2}, \quad (26)$$

$\lambda = 0, 1$.

В свою очередь, радиальные интегралы $f_{ba}^{(\lambda)}(s; l)$ ($\lambda = -1, 0, 1$; $(b, a) = (0, n)$; $x = (k, q)$) и коэффициенты $C_{0n}^{(\lambda)}(l)$ заданы выражениями

$$f_{ba}^{(-1)}(x; l) = \int_0^\infty dr \left(g_b^*(r) g_a(r) + f_b^*(r) f_a(r) \right) j_l(xr), \quad (27)$$

$$f_{ba}^{(0)}(x; l) = \int_0^\infty dr \left(g_b^*(r) f_a(r) + f_b^*(r) g_a(r) \right) j_l(xr), \quad (28)$$

$$f_{ba}^{(1)}(x; l) = \int_0^\infty dr \left\{ \left(g_b^*(r) f_a(r) - f_b^*(r) g_a(r) \right) \times \frac{j_l(xr)}{xr} - \frac{\kappa_b - \kappa_a}{l(l+1)} \left(g_b^*(r) f_a(r) + f_b^*(r) g_a(r) \right) \times \left[\frac{1}{x} \frac{dj_l(xr)}{dr} + \frac{j_l(xr)}{xr} \right] \right\}, \quad (29)$$

$$C_{0n}^{(\lambda)}(l) = \xi(l_n l_0 l \lambda 1) \Pi_{j_0 j_n}^2 \left(\begin{matrix} j_0 & j_n & l \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix} \right)^2 \times \begin{cases} 1, & \lambda = \pm 1, \\ -\frac{(\kappa_0 + \kappa_n)^2}{l^2(l+1)^2}, & \lambda = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Здесь $j_n(z)$ — сферическая функция Бесселя, релятивистское квантовое число

$$\kappa = l(l+1) - j(j+1) - \frac{1}{4},$$

$3j$ -символ Вигнера, квадрат которого входит в выражение для $C_{0n}^{(\lambda)}(l)$ (коэффициент перед фигурной скобкой в (30)), определен согласно [44], величины

$$\Pi_{l_a l_b \dots} = \sqrt{(2l_a + 1)(2l_b + 1) \dots},$$

$$\xi(l_a l_b l_c l_d l_e) = \frac{1 + (-1)^{l_a + l_b + l_c + l_d + l_e}}{2}.$$

Правые части выражений (25), (26) можно преобразовать к более удобному для вычислений виду, введя релятивистскую одночастичную функцию Грина для описания возбужденных электронных состояний мишени. Соответствующие выражения приведены в Приложении.

Для получения спектрально-углового распределения ПТИ необходимо подставить выражение (14) в (2). Выполняя суммирование по поляризациям испущенного фотона (с учетом того, что

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{F}^{(s,e,m)} \propto \mathbf{k} \cdot \mathbf{Y}_{lm}^{(0,1)}(\mathbf{n}_k) = 0),$$

и представляя дифференциал $d\Omega_{\mathbf{p}_2}$ в виде $d\phi_{\mathbf{q}} dq / (p_1 p_2)$, получаем

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}} = Z_p^2 \alpha \frac{2\omega}{p_1^2} \sum_{\mu_1, \mu_2} \int_0^{2\pi} d\phi_{\mathbf{q}} \int_{q_{min}}^{q_{max}} dq d\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\dagger. \quad (31)$$

Здесь $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры.

Дальнейшие преобразования выражения (31) включают суммирование (усреднение) по поляризациям налетающей частицы, мультипольное разложение квадратичной формы $\mathbf{Y}_{lm}^{(\lambda)}(\mathbf{n}_k) \cdot \mathbf{Y}_{l'm'}^{(\lambda')*}(\mathbf{n}_k)$, интегрирование по углу $d\phi_{\mathbf{q}}$.

Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательный результат для сечения (31), определяющего спектрально-угловое распределение ПТИ,

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}} = \sum_{l_k=0}^\infty (2l_k + 1) P_{l_k}(\cos \theta_{\mathbf{k}}) \frac{d\sigma_{l_k}}{d\omega}, \quad (32)$$

$$\frac{d\sigma_{l_k}}{d\omega} = Z_p^2 \alpha \frac{\omega}{8\pi p_1^2} \int_{q_{min}}^{q_{max}} dq^2 [A_{l_k} + B_{l_k} + C_{l_k} + D_{l_k}], \quad (33)$$

$$A_{l_k} = \left(\frac{q^2 - \omega^2}{4} + (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}_q)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}_q) \right) P_{l_k}(y) \times \\ \times \sum_{l, l'=1}^{\infty} \left(l(l+1) + l'(l'+1) - l_k(l_k+1) \right) \times \\ \times \begin{pmatrix} l' & l & l_k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \operatorname{Re} \left[\alpha_l(\omega, q, k) \alpha_{l'}^*(\omega, q, k) \right], \quad (34)$$

$$B_{l_k} = \frac{1}{(q^2 - \omega^2)^2} \left(\frac{q^2 - \omega^2}{2} + p_1^2 \sin^2 \theta_q \right) P_{l_k}(y) \times \\ \times \sum_{l, l'=1}^{\infty} \sum_{\lambda, \lambda'=0}^1 \xi(l_k l l' \lambda \lambda') \times \\ \times l l' (l+1)(l'+1) \begin{pmatrix} l' & l & l_k \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 \times \\ \times \operatorname{Re} \left[\beta_l^{(\lambda)}(\omega, q, k) \beta_{l'}^{(\lambda')*}(\omega, q, k) \right], \quad (35)$$

$$C_{l_k} = \frac{p_1^2 \sin^2 \theta_q}{(q^2 - \omega^2)^2} \frac{2y P_{l_k}'(y) - l_k(l_k+1) P_{l_k}(y)}{\sqrt{(l_k-1)l_k(l_k+1)(l_k+2)}} \times \\ \times \sum_{l, l'=1}^{\infty} \sum_{\lambda, \lambda'=0}^1 (-1)^{\lambda \lambda'} \xi(l_k l l' \lambda \lambda') \times \\ \times l l' (l+1)(l'+1) \begin{pmatrix} l' & l & l_k \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l_k & l' \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \operatorname{Re} \left[\beta_l^{(\lambda)}(\omega, q, k) \beta_{l'}^{(\lambda')*}(\omega, q, k) \right], \quad (36)$$

$$D_{l_k} = \frac{4p_1(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}_q) \sin^2 \theta_q}{q^2 - \omega^2} \frac{P_{l_k}'(y)}{\sqrt{l_k(l_k+1)}} \times \\ \times \sum_{l, l'=1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^1 \xi(l_k l l' \lambda 1) \times \\ \times l(l+1) \sqrt{l'(l'+1)} \begin{pmatrix} l' & l & l_k \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l' & l_k & l \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \operatorname{Re} \left[\beta_l^{(\lambda)}(\omega, q, k) \alpha_{l'}^*(\omega, q, k) \right]. \quad (37)$$

В приведенных формулах $P_{l_k}'(y)$ — производная от полинома Лежандра по его аргументу. Пользуясь законом сохранения энергии (1) и соотношением (10), можно выразить все кинематические множители,

входящие в выражения (34)–(37), через переменные ω, q, q_{min} и q_{max} :

$$\sin^2 \theta_q = \frac{p_1^2 q^2 - (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q})^2}{p_1^2 q^2} = \\ = \frac{(q^2 - q_{min}^2)(q_{max}^2 - q^2)}{4p_1^2 q^2}, \quad (38)$$

$$2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q} = q_{min} q_{max} + q^2, \\ 2\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q} = q_{min} q_{max} - q^2, \quad (39)$$

$$y = \cos \theta_q = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}}{p_1 q} = \frac{q_{min} q_{max} + q^2}{2p_1 q}, \quad (40)$$

$$\frac{q^2 - \omega^2}{4} + (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}_q)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}_q) = \\ = \frac{q_{min}^2 q_{max}^2 - q^2 \omega^2}{4q^2}. \quad (41)$$

Нетрудно заметить, что члены $C_{0,1}$ и D_0 в (36), (37) тождественно равны нулю из-за обращения в нуль соответствующих комбинаций полиномов Лежандра и их производных. Поэтому суммирование по l_k в (32) начинается с $l_k = 0$ для A_{l_k} и B_{l_k} , с $l_k = 2$ для C_{l_k} , с $l_k = 1$ для D_{l_k} .

Спектральное распределение излучения получается из (32) интегрированием по телесному углу $d\Omega_{\mathbf{k}}$:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = Z_p^2 \alpha \frac{\omega}{2p_1^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l(l+1)}{2l+1} \times \\ \times \int_{q_{min}}^{q_{max}} dq^2 \left[\left(\frac{q^2 - \omega^2}{2} + 2(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}_q)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}_q) \right) \times \right. \\ \times \left| \alpha_l(\omega, q, k) \right|^2 + \frac{q^2 - \omega^2 + 2p_1^2 \sin^2 \theta_q}{2(q^2 - \omega^2)^2} l(l+1) \times \\ \left. \times \sum_{\lambda=0,1} \left| \beta_l^{(\lambda)}(\omega, q, k) \right|^2 \right]. \quad (42)$$

Важной особенностью сечения релятивистского ПТИ является его логарифмический рост с увеличением энергии налетающей частицы [3]. Качественно причину этого можно объяснить следующим образом. В отличие от нерелятивистского случая релятивистская частица взаимодействует с мишенью не только посредством кулоновского поля, но также (а в ультрарелятивистском случае, главным образом) посредством поля поперечных виртуальных фотонов (см., например, [12]). Эффективный радиус

этого поля растет с увеличением энергии налетающей частицы, становясь почти бесконечным в ультрарелятивистском случае. В результате, расстояния, на которых налетающая частица может эффективно поляризовать мишень, увеличиваются, что ведет к росту сечения ПТИ. Ниже в данном разделе мы проанализируем это утверждение.

Будем считать, что начальная и конечная энергии налетающей частицы и энергия испущенного фотона удовлетворяют соотношению $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2 \gg \omega$. В этом случае можно положить

$$q_{min} \approx \frac{\omega}{v_1}, \quad q_{max} \approx 2p_1,$$

где v_1 — начальная скорость налетающей частицы.

Поскольку релятивистская налетающая частица эффективно поляризует мишень, даже проходя на больших расстояниях от нее, характерные переданные импульсы малы $q \sim q_{min} \sim R_{at}^{-1}$. Формально при значениях $q R_{at} \gg 1$ матричные элементы $f_{n0}^{(-1,0,1)}(q; l)$ в (25), (26) содержат быстроосциллирующую функцию и поэтому близки к нулю.

Для краткости обозначим через $\mathcal{H}_{l_k}^{A,B,C,D}(\omega, q, k)$ части выражений, стоящие справа от кинематических множителей в (34)–(37) и являющиеся гладкими функциями от q . Тогда вклад области $q \sim q_{min}$ в интеграл (33) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\sigma_{l_k}}{d\omega} \right]_{q \sim q_{min}} &= Z_p^2 \alpha \frac{\omega}{8\pi p_1^2} \int_{q_{min}}^{q_0} dq^2 \times \\ &\times \left[\left(\frac{q^2 - \omega^2}{4} + (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}_q)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}_q) \right) \mathcal{H}_{l_k}^A(\omega, q, k) + \right. \\ &+ \frac{q^2 - \omega^2 + 2p_1^2 \sin^2 \theta_q}{2(q^2 - \omega^2)^2} \mathcal{H}_{l_k}^B(\omega, q, k) + \\ &+ \frac{p_1^2 \sin^2 \theta_q}{(q^2 - \omega^2)^2} \mathcal{H}_{l_k}^C(\omega, q, k) + \\ &\left. + \frac{4p_1(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}_q) \sin^2 \theta_q}{q^2 - \omega^2} \mathcal{H}_{l_k}^D(\omega, q, k) \right]. \quad (43) \end{aligned}$$

Здесь q_0 — параметр обрезания, удовлетворяющий соотношению $q_{max} \gg q_0 \gg q_{min}$ и по порядку величины равный $q_0 R_{at} \sim 1$.

Полагая $\mathcal{H}_{l_k}^{A,B,C,D}(\omega, q, k) \approx \mathcal{H}_{l_k}^{A,B,C,D}(\omega, q_{min}, k)$ и отбрасывая малые члены порядка $\omega/\varepsilon_{1,2} \ll 1$, про-

интегрируем по q каждое из четырех слагаемых в (43):

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\sigma_{l_k}}{d\omega} \right]_{q \sim q_{min}} &\approx Z_p^2 \alpha \frac{\omega^3}{4\pi v_1^2} \times \\ &\times \left\{ \mathcal{H}_{l_k}^A(\omega, q_{min}, k) \ln \left(\frac{q_0}{q_{min}} \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon_1^2 \omega^2} \mathcal{H}_{l_k}^B(\omega, q_{min}, k) \times \\ &\times \left[\ln \left(\frac{q_0 \gamma}{q_{min}} \right) + \frac{p_1^2}{\omega^2} \left(\frac{2}{v_1^2} \ln \gamma - 1 \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{\omega^4} \mathcal{H}_{l_k}^C(\omega, q_{min}, k) \left[\ln \gamma - \frac{v_1^2}{2} \right] + \\ &+ \frac{4}{\omega^2} \mathcal{H}_{l_k}^D(\omega, q_{min}, k) \times \\ &\left. \times \left[1 - \frac{1}{2v_1 \gamma^2} \ln \left(\frac{1+v_1}{1-v_1} \right) \right] \right\}. \quad (44) \end{aligned}$$

Здесь введен релятивистский параметр $\gamma = \varepsilon_1/m_p c^2$. Для спектрального распределения излучения имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\sigma}{d\omega} \right]_{q \sim q_{min}} &\approx Z_p^2 \alpha \frac{\omega^3}{v_1^2} \times \\ &\times \left\{ \mathcal{H}_0^A(\omega, q_{min}, k) \ln \left(\frac{q_0}{q_{min}} \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon_1^2 \omega^2} \mathcal{H}_0^B(\omega, q_{min}, k) \times \\ &\times \left[\ln \left(\frac{q_0 \gamma}{q_{min}} \right) + \frac{p_1^2}{\omega^2} \left(\frac{2}{v_1^2} \ln \gamma - 1 \right) \right] \left. \right\}, \quad (45) \end{aligned}$$

где величины $\mathcal{H}_0^A(\omega, q, k)$, $\mathcal{H}_0^B(\omega, q, k)$ могут быть записаны в виде

$$\mathcal{H}_0^A(\omega, q, k) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l(l+1)}{2l+1} \left| \alpha_l(\omega, q, k) \right|^2,$$

$$\mathcal{H}_0^B(\omega, q, k) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^2(l+1)^2}{2l+1} \sum_{\lambda=0,1} \left| \beta_l^{(\lambda)}(\omega, q, k) \right|^2.$$

Таким образом, поведение сечения ПТИ при $\varepsilon_{1,2} \gg \omega$ определяется членами, пропорциональными $\ln(q_{min}^{-1} R_{at}^{-1})$ и $\ln \gamma$, которые соответствуют вкладам продольной (кулоновской) и поперечной (векторной) частей электромагнитного взаимодействия релятивистской налетающей частицы с электронами

мишени. При этом с увеличением энергии налетающей частицы вклад членов с $\ln \gamma$ возрастает, становясь доминирующим при $\gamma \gg 1$, что обуславливает рост сечения ПТИ. Эта особенность была впервые отмечена в [19], где ПТИ, возникающее при столкновении релятивистской частицы с мишенью, рассматривалось в рамках дипольного приближения.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА СЕЧЕНИЙ ПРОЦЕССА ПТИ

Результаты, представленные в данном разделе (кроме рис. 4), относятся к случаю столкновения протона с водородоподобными ионами Al^{+12} , Ag^{+46} и Au^{+78} . При этом из-за большой массы протона механизм обычного тормозного излучения оказывается подавлен фактором $m_p^{-2} \sim 10^{-6}$ и поэтому может быть исключен из рассмотрения в широком диапазоне энергий излученных фотонов [21–24]. Кроме того, в рассматриваемой области энергий излученных фотонов, близких к потенциалам ионизации внутренних оболочек мишеней, ПТИ доминирует над другими механизмами излучения, такими как тормозное излучение вторичных электронов [45], радиационная ионизация [46, 13, 20] и молекулярно-орбитальное излучение [47].

Расчет сечений ПТИ проводился в рамках релятивистского борновского приближения с помощью выражений (42) и (32) для спектрального и спектрально-углового распределений излучения. При этом учитывались вклады первых пяти мультиполей. Для описания динамического отклика мишени использовался метод, основанный на представлении обобщенных парциальных поляризуемостей с помощью релятивистской кулоновской функции Грина [37]. Кривые, соответствующие нерелятивистскому дипольному случаю, получены с помощью метода, описанного в [28].

Электроны внутренних оболочек мишени вносят основной вклад в формирование полного спектра ПТИ в области частот фотонов, лежащих выше потенциалов ионизации соответствующих оболочек (см., например, [3]). Поэтому представленные результаты могут быть легко обобщены на случай нейтральных атомов Al, Ag и Au путем умножения сечений, полученных для водородоподобных ионов, на фактор 4, учитывающий двукратное увеличение поляризуемостей заполненных K -оболочек атомов.

На рис. 2 представлены результаты расчета спектральных зависимостей $\omega d\sigma/d\omega$ для двух значений энергии налетающего протона, $\varepsilon_1 = 1.5, 3$ ГэВ.

Следует отметить две особенности, характерные для представленных графиков. Во-первых, с ростом энергии налетающей частицы вклад части сечения, пропорциональной квадрату модуля поляризуемости $\beta_i^{(1)}(\omega, q, k)$ (см. (42)), становится более заметным. Это происходит из-за относительного увеличения роли механизма обмена поперечными виртуальными фотонами между электронами мишени и налетающей частицей с ростом энергии последней, в то время как вклад кулоновской части взаимодействия определяется лишь скоростью частицы (см. (45)) и при $v_1 \approx c$ фактически не зависит от ε_1 .

Вторая особенность связана с соотношением релятивистских и нерелятивистских кривых. Для промежуточных значений энергии $\varepsilon_1 \sim m_p c^2$ величина сечения $\omega d\sigma/d\omega$, полученного в рамках нерелятивистского дипольного приближения, превышает величину релятивистского сечения ПТИ. Это связано с тем, что при заданной энергии фотона нерелятивистская дипольная поляризуемость $\alpha_d(\omega, q)$ превышает соответствующую ей релятивистскую составляющую $\alpha_1(\omega, q, k)$, которая дает наибольший вклад в спектральную зависимость ПТИ для средних значений энергии налетающей частицы (более детальный анализ вкладов различных мультиполей в сечение ПТИ представлен ниже в данном разделе). С ростом энергии налетающей частицы вклад слагаемого, пропорционального $|\beta_i^{(1)}(\omega, q, k)|^2$, становится более существенным. Это приводит к тому, что релятивистское сечение начинает возрастать и превышает нерелятивистское сечение. Такое поведение следует из анализа подынтегрального выражения в (33), выполненного в предыдущем разделе.

На рис. 3 построены зависимости сечения $\omega d\sigma/d\omega$ (а также зависимости вкладов отдельных частей сечения, пропорциональных квадратам модулей соответствующих поляризуемостей) как функции релятивистского фактора $\gamma = \varepsilon_1/m_p c^2$ налетающего протона для двух указанных значений энергии испущенного фотона для каждого из рассматриваемых ионов Al^{+12} , Ag^{+46} и Au^{+78} . Представленные результаты наглядно демонстрируют логарифмический рост сечения ПТИ с увеличением энергии налетающей частицы.

Важной чертой предложенного в данной работе подхода является учет эффектов, связанных с запаздыванием излучения и излучением фотонов высокой мультипольности. Причем влияние мультипольного характера излучения проявляется уже при низких значениях энергии налетающей частицы $\varepsilon_1 \sim m_p c^2$ в виде асимметрии углового распределения излучения. На рис. 4 представлено сравнение

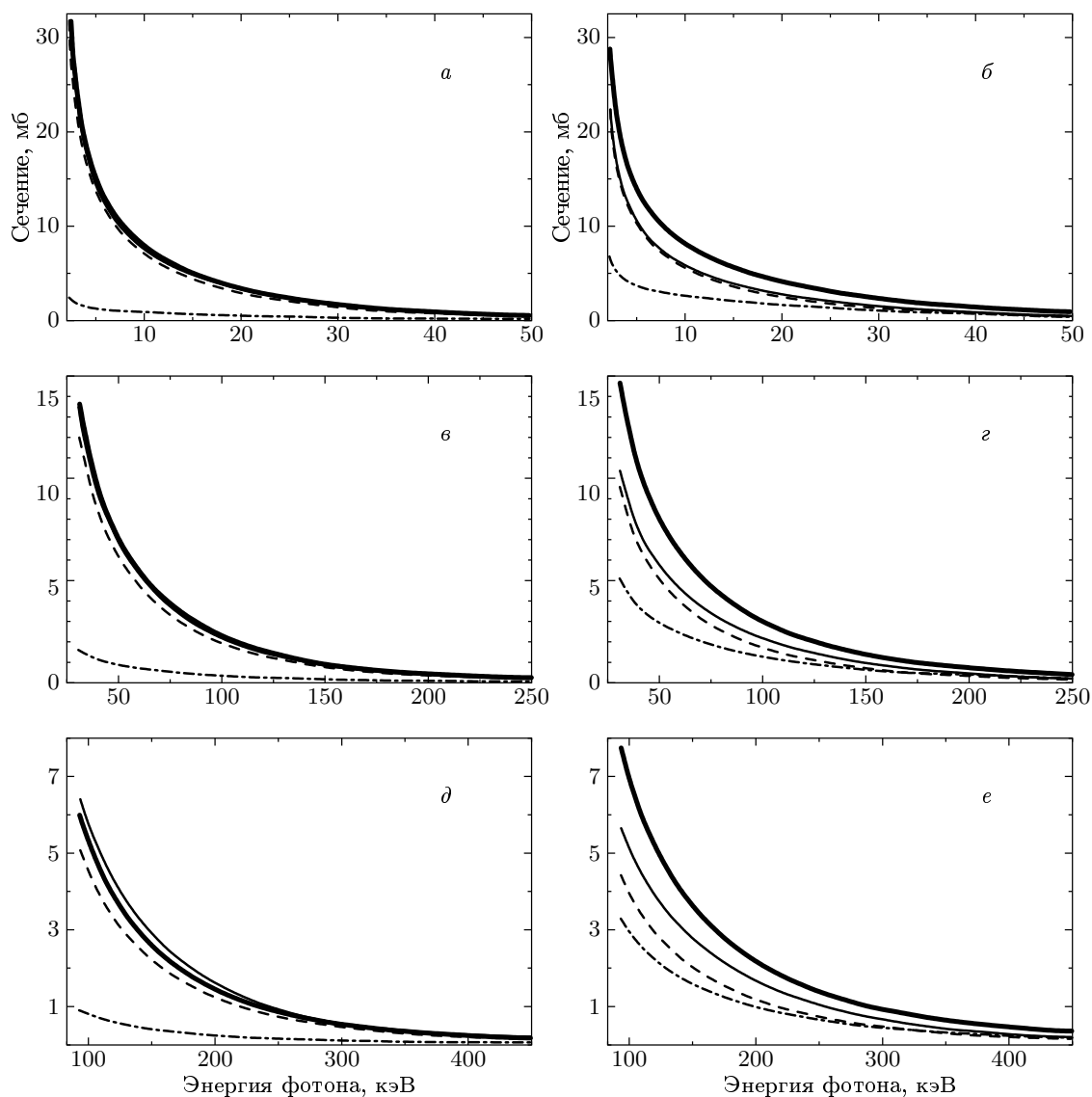


Рис. 2. Спектральные зависимости $\omega d\sigma/d\omega$ ПТИ, возникающего при столкновении протона с энергиями 1.5 ГэВ (*a*, *в*, *д*) и 3 ГэВ (*б*, *г*, *е*) с ионами Al^{+12} (*a*, *б*), Ag^{+46} (*в*, *г*), Au^{+78} (*д*, *е*). Жирная сплошная линия описывает поведение релятивистского сечения (42), тонкая сплошная линия соответствует нерелятивистскому дипольному случаю. Вклады членов, пропорциональных квадратам модулей поляризуемостей $\alpha_1(\omega, q, k)$ и $\beta_1^{(1)}(\omega, q, k)$ (см. (42)), обозначены соответственно штриховой и штрих-пунктирной линиями. Вклад слагаемого, пропорционального квадрату модуля поляризуемости $\beta_1^{(0)}(\omega, q, k)$, мал и на графиках не представлен

результатов расчета углового распределения излучения, выполненного по формуле (32), с результатами, полученными в рамках нерелятивистского дипольного приближения, а также с экспериментальными данными, приведенными в работе [15]. Представленные кривые соответствуют рассеянию протона с кинетической энергией 1.5 МэВ на атоме алюминия. Значения энергии испущенного фотона лежат в диапазоне 5.18–5.67 кеВ, в котором ПТИ до-

минирует над другими механизмами излучения [15]. Вычисления проводились с использованием водородоподобных волновых функций с эффективным зарядом мишени, равным $Z_T = 12.7$ (см. [48]). Следует заметить, что кривая, соответствующая сечению (32) и учитывающая мультипольный характер излучения, хорошо воспроизводит экспериментально наблюдаемое смещение излучения в направлении движения налетающей частицы, в отличие от сим-

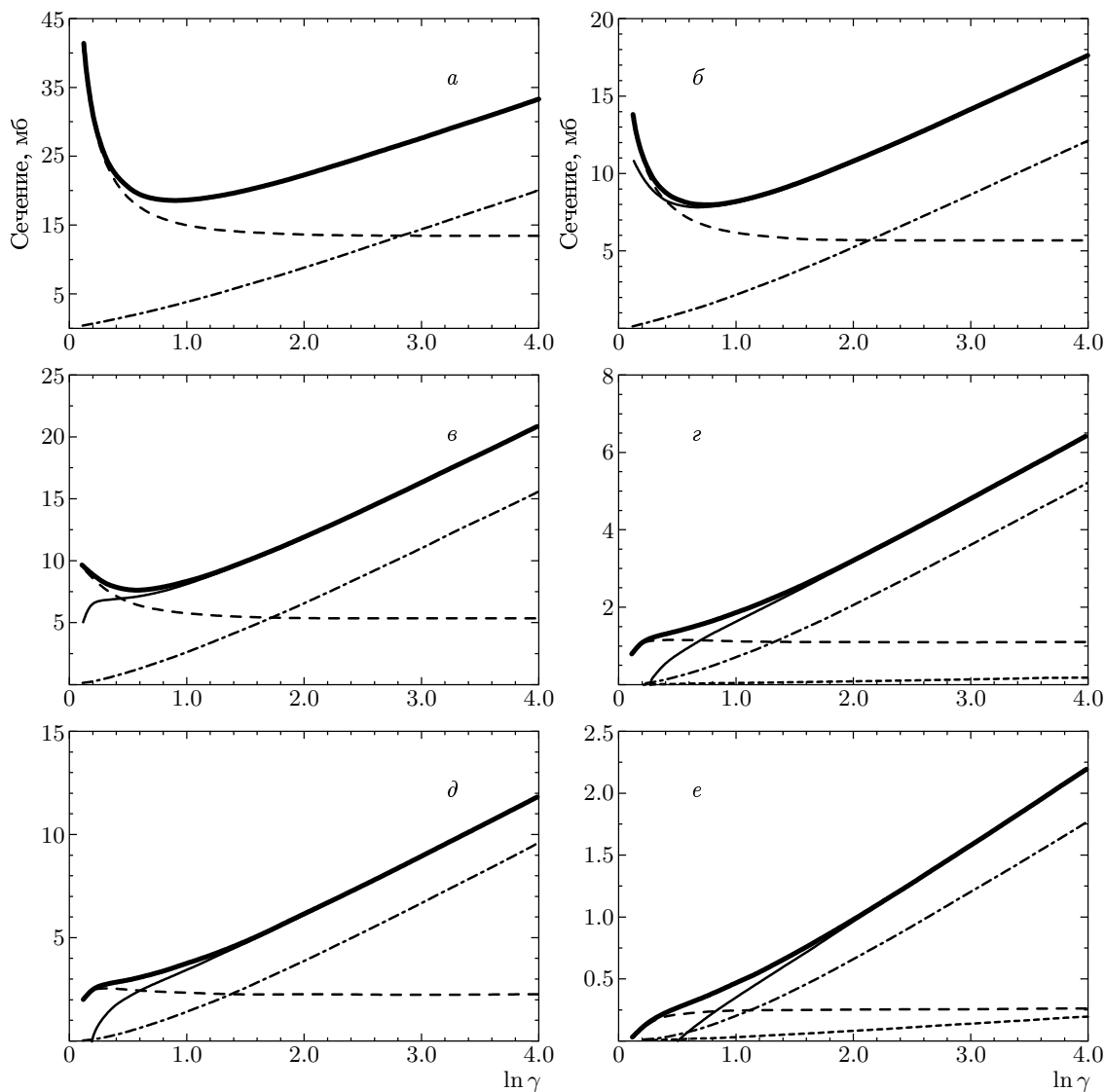


Рис. 3. Зависимость сечения ПТИ $\omega d\sigma/d\omega$ от релятивистского фактора γ налетающего протона при столкновении с ионами Al^{+12} (а, б), Ag^{+46} (в, г) и Au^{+78} (д, е) для двух значений энергии испущенного фотона $\omega = 1.5I$ (а, в, д), $4I$ (б, г, е) (здесь I — потенциал ионизации $1s$ -подоболочки мишени, равный $I \approx 2.3, 31, 93.5$ кэВ для, соответственно, Al^{+12} , Ag^{+46} , Au^{+78}). Жирная сплошная линия соответствует релятивистскому сечению (42). Поведение членов, пропорциональных квадратам модулей поляризуемостей $\alpha_l(\omega, q, k)$, $\beta_l^{(0)}(\omega, q, k)$ и $\beta_l^{(1)}(\omega, q, k)$ (см. (42)), показано, соответственно, с помощью штриховой, пунктирной и штрих-пунктирной линий

метричной кривой, соответствующей нерелятивистскому дипольному приближению. Причем к данному результату приводит учет уже квадрупольных поправок. Это позволяет считать предложенный в работе подход адекватным и использовать его для расчета сечений ПТИ.

С увеличением энергии налетающей частицы наряду с эффектами излучения фотонов высокой мультипольности возрастает роль релятивистских эффектов, связанных с запаздыванием излучения,

что приводит к еще более существенным отличиям в угловом распределении излучения от нерелятивистского дипольного случая. Для иллюстрации важности учета этих эффектов при рассмотрении ПТИ, возникающего при столкновении релятивистской налетающей частицы с тяжелой мишенью, на рис. 5 представлены профили спектрально-углового распределения излучения $\omega d^2\sigma/d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}$, построенные для случая столкновения протона с энергией $\varepsilon_1 = 3$ ГэВ с ионами Al^{+12} , Ag^{+46} и Au^{+78} для ука-

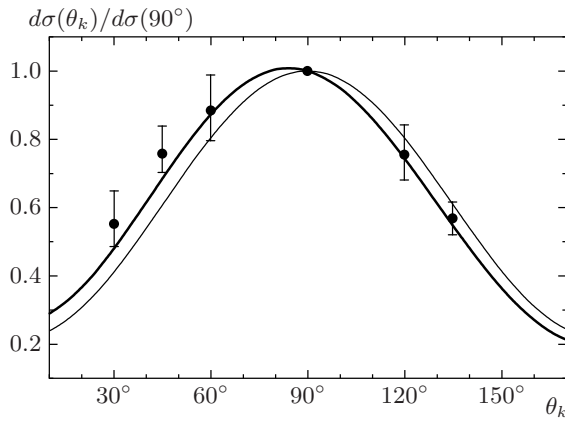


Рис. 4. Угловая зависимость сечения ПТИ (нормированная на величину сечения при $\theta_k = 90^\circ$) при рассеянии протона с кинетической энергией 1.5 МэВ на атоме алюминия для значений энергии испущенного фотона в диапазоне 5.18–5.67 кэВ. Жирная сплошная линия соответствует сечению (32), тонкая сплошная линия обозначает кривую, полученную в рамках нерелятивистского дипольного приближения. Точками обозначены экспериментальные данные (см. [15])

занных значений энергии испущенного фотона. На этих графиках (а также на рис. 6, 7) длина отрезка, соединяющего начало координат с точкой на кривой, равна величине дифференциального сечения ПТИ (в миллибарнах) в соответствующем направлении. Направление вдоль горизонтальной оси слева направо ($\theta_k = 0$) соответствует направлению движения налетающей частицы. Кривые, соответствующие вкладам частей сечения, пропорциональных квадратам модулей поляризуемостей $\alpha_l(\omega, q, k)$, $\beta_l^{(0)}(\omega, q, k)$ и $\beta_l^{(1)}(\omega, q, k)$, также представлены на рис. 5. Однако, в отличие от случая спектрального распределения, сумма этих кривых не соответствует полному сечению (32), учитывающему также и вклады перекрестных слагаемых.

Представленные результаты наглядно демонстрируют, что учет релятивистских эффектов и эффектов, связанных с излучением фотонов высокой мультипольности, заметно изменяют угловые распределения излученных фотонов, приводя к их существенной асимметрии по сравнению с нерелятивистским дипольным случаем, для которого характерна их симметричная (по отношению к замене $\theta_k \rightarrow \pi - \theta_k$) форма. При этом форма релятивистских угловых распределений оказывается смещенной в направлении движения налетающей частицы, и асимметрия возрастает с увеличением

энергии испускаемого фотона.

Анализ вкладов отдельных мультиполей в угловое распределение излучения для случаев столкновения протона с ионами Ag^{+46} и Au^{+78} (для тех же значений параметров, как и на рис. 5) представлен на рис. 6. Изображенные кривые получены путем сохранения в выражениях (34)–(37) только членов с $l, l' = 1$ для дипольного случая, $l, l' = 1, 2$ для случая учета квадрупольных поправок и $l, l' = 1, 2, 3$ для случая учета октупольных поправок.

Необходимо отметить, что наряду с вкладами квадрупольных и октупольных поправок, в значительной степени определяющих несимметричность формы углового распределения излучения, кривые, соответствующие дипольному приближению, также имеют несимметричную форму, существенно отличающуюся от нерелятивистского дипольного случая. Причина этого состоит в том, что в дипольном приближении сечение (32), в отличие от нерелятивистского случая, учитывает вклады перекрестных членов, пропорциональных произведениям поляризуемостей $\beta_1^{(0)}(\omega, q, k)$, $\beta_1^{(1)}(\omega, q, k)$ и $\beta_1^{(0)}(\omega, q, k)$, $\alpha_1(\omega, q, k)$, соответствующим интерференции при излучении фотонов различных типов. В этом можно убедиться, представив выражение для двойного дифференциального сечения (32) для дипольного случая в виде

$$\left[\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}} \right]_{dip} = \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right)_{dip} \times \left(1 + a_1(\omega)P_1(\cos \theta_{\mathbf{k}}) + a_2(\omega)P_2(\cos \theta_{\mathbf{k}}) \right), \quad (46)$$

где a_1, a_2 — коэффициенты угловой анизотропии в дипольном приближении, явные выражения для которых могут быть получены из (32)–(37), но ввиду их громоздкости здесь не приводятся. Их зависимость от энергии испущенного фотона для рассматриваемого случая рассеяния протона с энергией 3 ГэВ на ионах Ag^{+46} , Au^{+78} изображена на рис. 8. Представленные графики проясняют причину несимметричности дипольных кривых на рис. 6. Действительно, если вклад членов, связанных с коэффициентом a_1 , мал для небольших значений энергии испущенного фотона ($kr \ll 1$), то с увеличением ω он быстро растет, становясь доминирующим, что наряду с вкладами высших мультиполей приводит к представленным на рис. 6 распределениям.

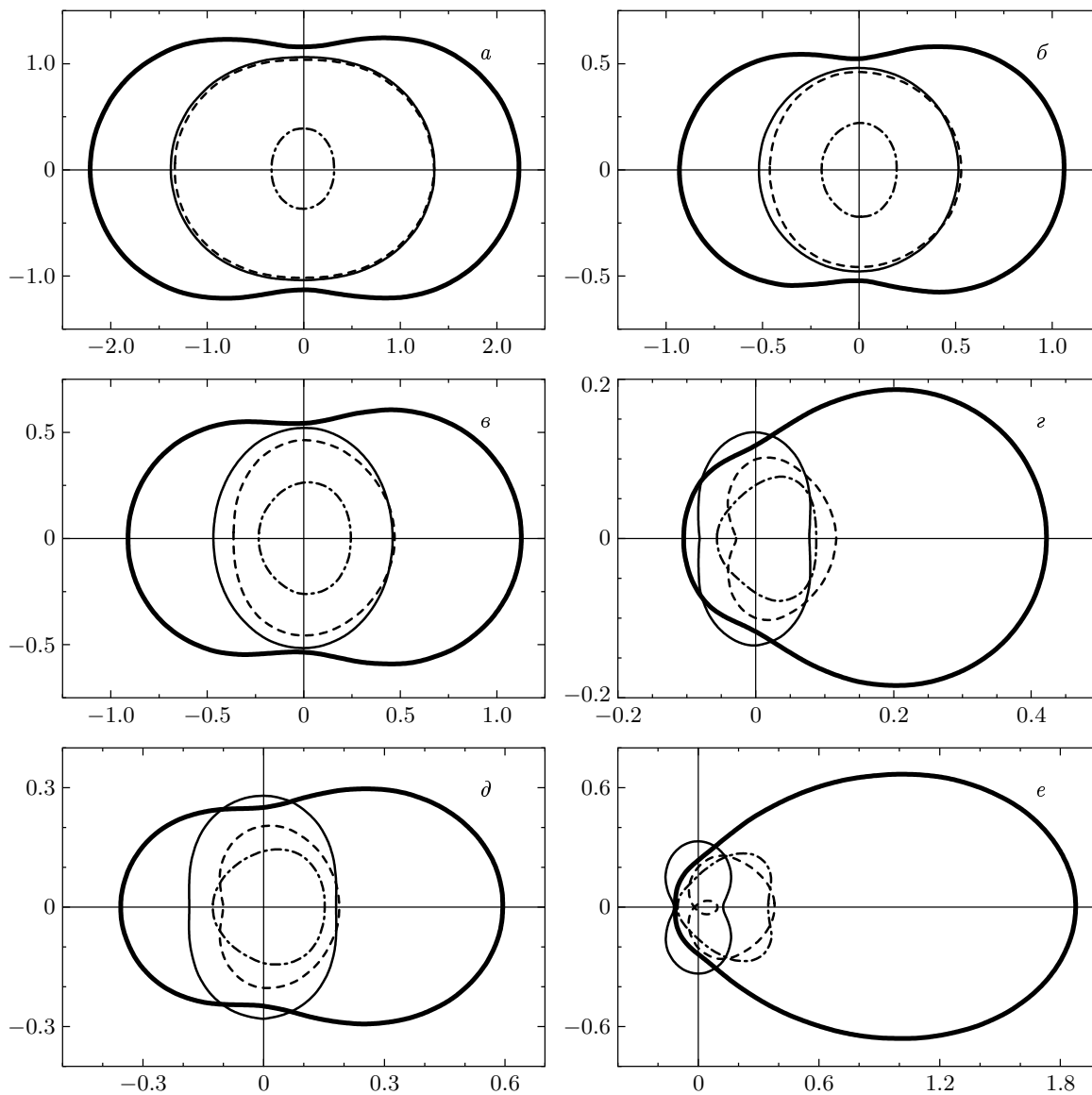


Рис. 5. Угловое распределение $\omega d^2\sigma/d\omega d\Omega_k$ ПТИ, формирующегося при столкновении протона с энергией 3 ГэВ с ионами Al^{+12} (а, б), Ag^{+46} (в, г), Au^{+78} (д, е) для двух значений энергии испущенного фотона, равных $1.5I$ (а, в, д) и $4I$ (б, г, е) (см. рис. 3). Жирная сплошная линия соответствует релятивистскому сечению (32), тонкая сплошная линия — результату, полученному в рамках нерелятивистского дипольного приближения. Штриховая, пунктирная и штрих-пунктирная линии обозначают, соответственно, вклады членов, пропорциональных квадратам модулей поляризуемостей $\alpha_l(\omega, q, k)$, $\beta_l^{(0)}(\omega, q, k)$ и $\beta_l^{(1)}(\omega, q, k)$ (см. (32)–(37))

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлен полностью релятивистский формализм для описания процесса ПТИ при упругом столкновении заряженной частицы с многоэлектронной мишенью. Предложенный подход позволяет получать спектральные и угловые

распределения излучения в широкой области энергий столкновений и частот испускаемых фотонов и с небольшими изменениями может быть применен для описания широкого класса столкновительных систем, обладающих внутренней структурой, для которых существенна роль релятивистских эффектов. Например, он может быть использован для описания ПТИ, возникающего при релятивистских столк-

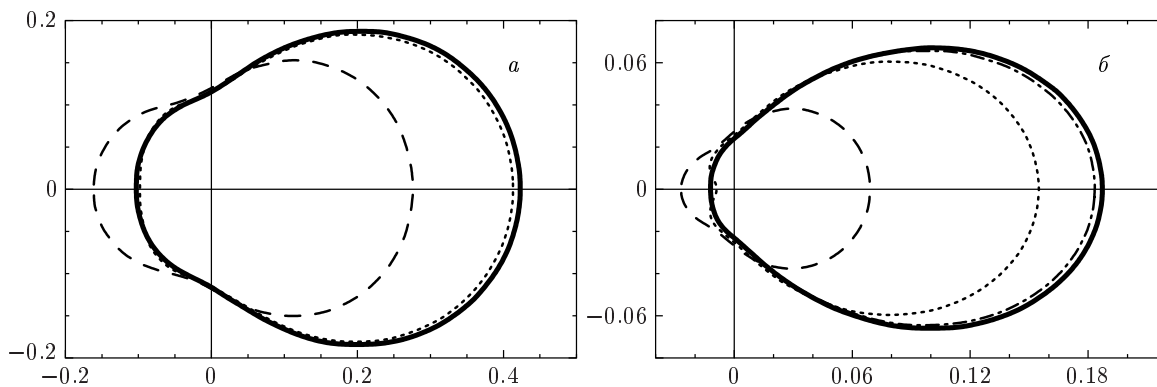


Рис. 6. Мультипольные вклады в угловое распределение $\omega d^2\sigma/d\omega d\Omega_k$ ПТИ, формирующегося при столкновении протона с энергией 3 ГэВ с ионами Ag^{+46} (а), Au^{+78} (б), для значений энергии излученного фотона, равных четырехкратным потенциалам ионизации 1s-подоболочек мишеней. Штриховая, пунктирная и штрих-пунктирная линии изображают профили углового распределения с учетом, соответственно, вкладов дипольного, квадрупольного и октупольного излучений. Жирная сплошная линия соответствует точному результату, учитывающему вклады первых пяти мультиполей

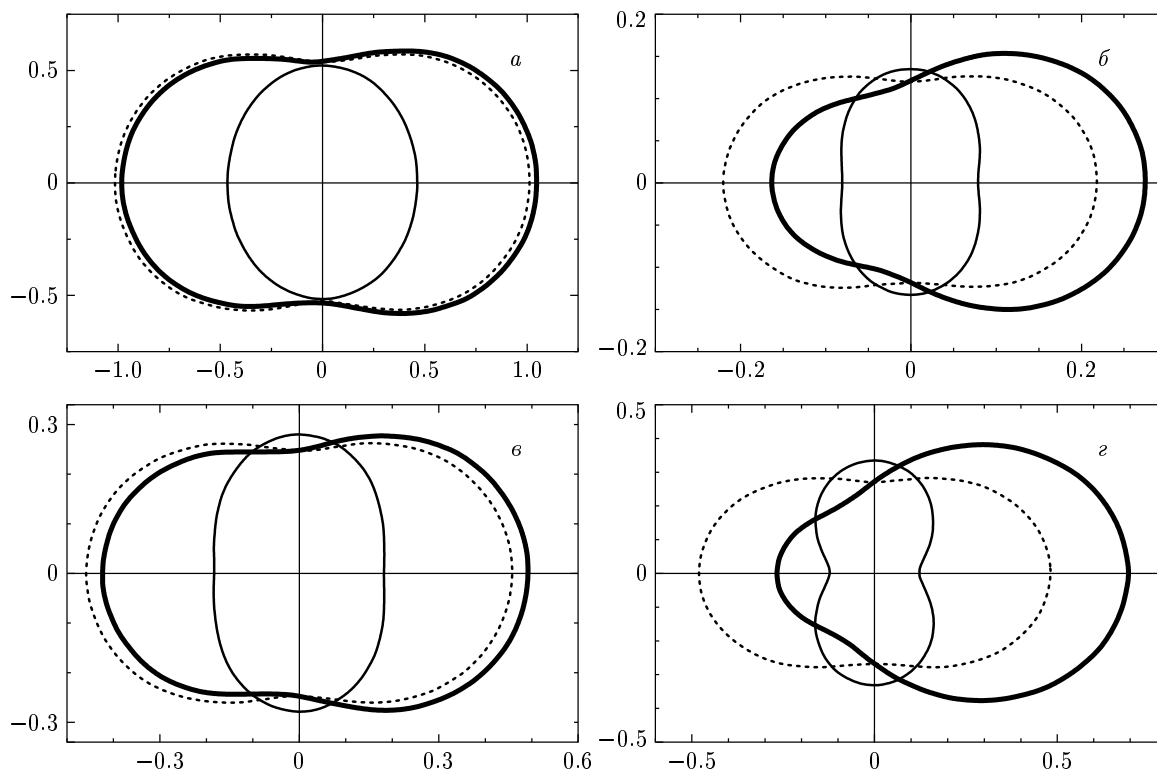


Рис. 7. Угловое распределение $\omega d^2\sigma/d\omega d\Omega_k$ ПТИ при столкновении протона с энергией 3 ГэВ с ионами Ag^{+46} (а, б), Au^{+78} (в, г) для двух значений энергии излученного фотона, равных $1.5I$ (а, в) и $4I$ (б, г) (см. рис. 5). Жирная сплошная линия соответствует результату, полученному в рамках релятивистского дипольного приближения (выражение (46)), тонкая сплошная линия — результату, полученному в рамках нерелятивистского дипольного приближения. Пунктирной линией показан суммарный вклад в сечение слагаемых с $l_k = 0$ и $l_k = 2$ в дипольном случае (см. (46))

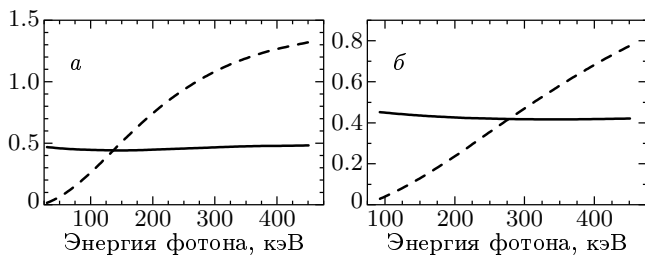


Рис. 8. Зависимость коэффициентов угловой анизотропии для дипольного случая a_1 (штриховая линия), a_2 (сплошная линия) (см. (46)) от энергии испущенного фотона при столкновении протона с энергией 3 ГэВ с ионами Ag^{+46} (а), Au^{+78} (б)

новениях ядер. В этом случае динамическая поляризация сталкивающихся ядер приводит к испусканию фотона посредством поляризационного механизма тормозного излучения, и основной вклад вносится недипольным излучением (квадрупольное излучение и излучение более высокой мультипольности).

В случае, когда релятивистская налетающая частица обладает внутренней структурой, нет необходимости разрабатывать новый формализм, учитывающий ПТИ налетающей частицы. Соответствующие формулы могут быть получены из представленных в данной работе выражений путем учета особенностей, обусловленных эффектом Доплера и абберацией света, подобно тому, как это было сделано в [49, 50] для случая релятивистских атом-атомных столкновений. В этих работах внутренняя структура сталкивающихся частиц описывалась нерелятивистски в рамках дипольного приближения.

На базе предложенного формализма был разработан эффективный метод расчета сечений ПТИ, основанный на использовании водородоподобного приближения для описания динамического атомного отклика. Преимущество такого подхода состоит в том, что водородоподобная модель позволяет с хорошей точностью получать значения сечений ПТИ в области частот фотонов, лежащих выше потенциалов ионизации внутренних оболочек мишени, без необходимости проведения сложных численных расчетов. Заметим, что в рамках предложенного подхода возможно использование различных приближений для релятивистских волновых функций мишени. В этой связи следует отметить приближение Хартри–Фока–Дирака, использование которого позволяет учитывать многоэлектронные корреляции при расчете динамических поляризуемостей ми-

шени. Кроме того, эффективный подход к вычислению поляризуемостей также может быть развит на основе метода Штернхаймера, суть которого заключается в сведении суммирования по бесконечному числу промежуточных атомных состояний к решению неоднородных дифференциальных уравнений (см., например, [51]).

В рамках предложенного метода были проведены численные расчеты спектральных и угловых характеристик поляризационного тормозного излучения, возникающего при рассеянии тяжелой частицы (протона) на водородоподобных ионах Al^{+12} , Ag^{+46} и Au^{+78} , что позволило исследовать ряд общих особенностей сечений ПТИ в релятивистском случае. Было показано, что учет релятивистских и мультипольных эффектов приводит к существенной асимметрии угловых распределений излученных фотонов по сравнению с нерелятивистским дипольным случаем, а также к заметному изменению спектральных характеристик поляризационного излучения. Также показано, что сечение поляризационного тормозного излучения логарифмически растет с увеличением энергии налетающей частицы. Представленные результаты могут быть полезны при постановке новых и повторении на новом техническом уровне проведенных ранее экспериментов по исследованию ПТИ.

Интересной задачей, заслуживающей отдельного рассмотрения, является анализ асимптотического поведения полностью релятивистского сечения тормозного излучения, включающего вклады как обычного, так и поляризационного механизмов, в области больших энергий фотонов, сравнимых с массой покоя электрона. В этом случае нерелятивистское описание атомного отклика становится неадекватным и возникает необходимость использования более сложных подходов при описании возбуждения атомных электронов в континуум отрицательных частот.

Рассмотрение процессов неупругого ПТИ было вынесено нами за рамки настоящей работы. Разработка полностью релятивистского формализма для описания этих процессов представляет отдельный интерес.

Данная работа стала возможной благодаря финансовой поддержке РФФИ (проект 99-02-18294а) и Российской академии наук (6-ой конкурс научных проектов молодых ученых РАН по фундаментальным и прикладным исследованиям, грант № 44).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Запись обобщенных поляризуемостей с помощью релятивистской функции Грина

Мультипольная биспинорная структура одночастичной релятивистской функции Грина определяется выражением (см., например, [52])

$$G_E(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \sum_{\varepsilon jlm} \frac{\Psi_{\varepsilon jlm}(\mathbf{r}_2) \Psi_{\varepsilon jlm}^\dagger(\mathbf{r}_1) \gamma^0}{E - \varepsilon(1 - i0)} = \frac{1}{r_2 r_1} \sum_{jl} \begin{pmatrix} G_{Ejl}^{(1)}(r_2, r_1) Y_{ll}(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1) & i G_{Ejl}^{(2)}(r_2, r_1) Y_{l'l'}(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1) \\ i G_{Ejl}^{(3)}(r_2, r_1) Y_{l'l'}(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1) & -G_{Ejl}^{(4)}(r_2, r_1) Y_{ll}(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1) \end{pmatrix}, \quad (47)$$

где

$$Y_{l_1 l_2}(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1) = \sum_{m=-j}^j \Omega_{j l_1 m}(\mathbf{n}_2) \Omega_{j l_2 m}^\dagger(\mathbf{n}_1)$$

и радиальные части функции Грина выражаются через радиальные функции большой $g_{\varepsilon jl}(r)$ и малой $f_{\varepsilon jl}(r)$ компонент волновой функции возбужденного электрона:

$$\begin{pmatrix} G_{Ejl}^{(1)}(r_2, r_1) & G_{Ejl}^{(2)}(r_2, r_1) \\ G_{Ejl}^{(3)}(r_2, r_1) & G_{Ejl}^{(4)}(r_2, r_1) \end{pmatrix} = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{E - \varepsilon(1 - i0)} \begin{pmatrix} g_{\varepsilon jl}(r_2) g_{\varepsilon jl}^*(r_1) & g_{\varepsilon jl}(r_2) f_{\varepsilon jl}^*(r_1) \\ f_{\varepsilon jl}(r_2) g_{\varepsilon jl}^*(r_1) & f_{\varepsilon jl}(r_2) f_{\varepsilon jl}^*(r_1) \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Используя (48), из (25), (26) получим следующие выражения для поляризуемостей $\alpha_l(\omega, q, k)$, $\beta_l^{(0,1)}(\omega, q, k)$ через величины $G_{Ejl}^{(1-4)}(r_2, r_1)$:

$$\alpha_l(\omega, q, k) = \frac{e^2}{q \omega} (2l + 1) \sum_{\varepsilon_0 j_0 l_0} \sum_{j_n l_n} C_{0n}^{(-1)}(l) \sum_{i=1,2} (-1)^i \int_0^\infty \int_0^\infty dr_1 dr_2 j_l(qr_1) \times \\ \times \begin{pmatrix} f_0^*(r_2), g_0^*(r_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2^-(r_2) G_{\varepsilon_i j_n l_n}^{(1)}(r_2, r_1) & I_2^-(r_2) G_{\varepsilon_i j_n l_n}^{(2)}(r_2, r_1) \\ I_2^+(r_2) G_{\varepsilon_i j_n l_n}^{(3)}(r_2, r_1) & I_2^+(r_2) G_{\varepsilon_i j_n l_n}^{(4)}(r_2, r_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(r_1) \\ f_0(r_1) \end{pmatrix}, \quad (49)$$

$$\beta_l^{(0)}(\omega, q, k) = e^2 (2l + 1) \sum_{\varepsilon_0 j_0 l_0} \sum_{j_n l_n} C_{0n}^{(0)}(l) \sum_{i=1,2} \int_0^\infty \int_0^\infty dr_1 dr_2 j_l(qr_1) j_l(kr_2) \times \\ \times \begin{pmatrix} f_0^*(r_2), g_0^*(r_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{\varepsilon_i j_n l_n}^{(1)}(r_2, r_1) & G_{\varepsilon_i j_n l_n}^{(2)}(r_2, r_1) \\ G_{\varepsilon_i j_n l_n}^{(3)}(r_2, r_1) & G_{\varepsilon_i j_n l_n}^{(4)}(r_2, r_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(r_1) \\ g_0(r_1) \end{pmatrix}, \quad (50)$$

$$\beta_l^{(1)}(\omega, q, k) = e^2 (2l + 1) \sum_{\varepsilon_0 j_0 l_0} \sum_{j_n l_n} C_{0n}^{(1)}(l) \sum_{i=1,2} \int_0^\infty \int_0^\infty dr_1 dr_2 \begin{pmatrix} f_0^*(r_2), g_0^*(r_2) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} I_1^+(r_1) I_2^-(r_2) G_{\varepsilon_i j_n l_n}^{(1)}(r_2, r_1) & I_1^-(r_1) I_2^-(r_2) G_{\varepsilon_i j_n l_n}^{(2)}(r_2, r_1) \\ I_1^+(r_1) I_2^+(r_2) G_{\varepsilon_i j_n l_n}^{(3)}(r_2, r_1) & I_1^-(r_1) I_2^+(r_2) G_{\varepsilon_i j_n l_n}^{(4)}(r_2, r_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(r_1) \\ g_0(r_1) \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \omega$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 + \omega$, а функции $I_{1,2}^\pm(r)$ определены следующим образом:

$$I_1^\pm(r) = \frac{\kappa_0 - \kappa_n}{l(l+1)} \left(\frac{1}{q} \frac{dj_l(qr)}{dr} + \frac{j_l(qr)}{qr} \right) \pm \frac{j_l(qr)}{qr}, \quad (52)$$

$$I_2^\pm(r) = \frac{\kappa_n - \kappa_0}{l(l+1)} \left(\frac{1}{k} \frac{dj_l(kr)}{dr} + \frac{j_l(kr)}{kr} \right) \pm \frac{j_l(kr)}{kr}. \quad (53)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1969).
2. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
3. М. Я. Амусья, В. М. Буймистров, Б. А. Зон, В. Н. Цытович и др., *Поляризаационное тормозное излучение частиц и атомов*, Наука, Москва (1987).
4. М. Я. Амусья, А. С. Балтенков, А. А. Пайзиев, Письма в ЖЭТФ **24**, 366 (1976).
5. M. S. Pindzola and H. P. Kelly, Phys. Rev. A **14**, 204 (1976).
6. G. Wendin and K. Nuroh, Phys. Rev. Lett. **39**, 48 (1977).
7. В. М. Буймистров, Л. И. Трахтенберг, ЖЭТФ **69**, 108 (1975).
8. В. М. Буймистров, Л. И. Трахтенберг, ЖЭТФ **73**, 850 (1977).
9. A. Duboious and A. Maquet, Phys. Rev. A **40**, 4288 (1989).
10. A. Duboious, A. Maquet, and S. Jetzke, Phys. Rev. A **34**, 1888 (1986).
11. А. В. Король, О. И. Оболенский, А. В. Соловьев, ЖТФ **69**, 7 (1999).
12. М. Я. Амусья, М. Ю. Кучиев, А. В. Соловьев, Письма в ЖТФ **10**, 1025 (1984).
13. М. Я. Амусья, М. Ю. Кучиев, А. В. Соловьев, Письма в ЖТФ **11**, 1401 (1985).
14. М. Я. Амусья, М. Ю. Кучиев, А. В. Соловьев, ЖЭТФ **89**, 1512 (1985).
15. K. Ishii and S. Morita, Phys. Rev. A **30**, 2278 (1984).
16. K. Ishii and S. Morita, Phys. Rev. A **31**, 1168 (1985).
17. K. Ishii, Nucl. Instr. Meth. B **99**, 165 (1995).
18. M. C. Pacher and J. E. Miraglia, Phys. Rev. A **41**, 2574 (1990).
19. М. Я. Амусья, А. В. Король, М. Ю. Кучиев, А. В. Соловьев, ЖЭТФ **88**, 383 (1985).
20. М. Я. Амусья, А. В. Король, А. В. Соловьев, Письма в ЖТФ **12**, 705 (1986).
21. M. Ya. Amusia, Phys. Rep. **142**, 269 (1988).
22. M. Ya. Amusia and R. H. Pratt, Comm. At. Mol. Phys. **28**, 247 (1992).
23. A. V. Korol and A. V. Solov'yov, J. Phys. B **30**, 1105 (1997).
24. M. C. Pacher and J. E. Miraglia, Phys. Rev. A **39**, 2905 (1989).
25. M. Ya. Amusia, L. V. Chernysheva, and A. V. Korol, J. Phys. B **23**, 2899 (1990).
26. M. Ya. Amusia and A. V. Korol, J. Phys. B **25**, 2383 (1992).
27. A. V. Korol, A. G. Lyalin, and A. V. Solov'yov, J. Phys. B **28**, 4947 (1995).
28. А. В. Король, А. Г. Лялин, О. И. Оболенский, А. В. Соловьев, ЖЭТФ **114**, 458 (1998).
29. А. В. Король, А. Г. Лялин, А. В. Соловьев, Опт. и спектр. **86**, 552 (1999).
30. A. V. Korol, A. G. Lyalin, R. H. Pratt, and A. V. Solov'yov, *12th Int. Conference on Vacuum Ultraviolet Radiation Physics*, San Francisco (1998), Abstracts, p. We116.
31. A. D. Gonzalez, M. C. Pacher, and J. E. Miraglia, Phys. Rev. A **37**, 4974 (1988).
32. A. V. Solov'yov, *5th EPS Conf. on At.Mol.Phys.*, Edinburgh, UK (1995), Abstracts, p. 711.
33. L. G. Gerchikov, A. V. Korol, S. A. Sheinerman, and A. V. Solov'yov, *17th Int. Conf. on X-Ray and Inner-Shell Processes*, Hamburg, Germany (1996), Abstracts, p. 167.
34. В. А. Астапенко, В. М. Буймистров, Ю. А. Кротов, Л. К. Михайлов, Л. И. Трахтенберг, ЖЭТФ **88**, 1560 (1985).
35. В. А. Астапенко, Л. А. Буреева, В. С. Лисица, ЖЭТФ **117**, 496 (2000).
36. В. А. Астапенко, Л. А. Буреева, В. С. Лисица, ЖЭТФ **117**, 906 (2000).
37. A. V. Korol, O. I. Obolensky, A. V. Solov'yov, and I. A. Solov'yov, J. Phys. B **34**, 1589 (2001).
38. V. Ambrose, C. A. Quarles, and R. Ambrose, Nucl. Instr. Meth. B **124**, 457 (1997).
39. S. Portillo, C. A. Quarles, F. D. McDaniel, J. L. Duggan et al., *21st Int. Conference on the Physics of Electronic and Atomic Collisions*, Sendai, Japan (1999), p. 574.

40. C. A. Quarles and S. Portillo, in *Applications of Accelerators in Research and Industry*, ed. by J. L. Duggan, I. L. Morgan, AIP Press, New York (1999), p. 174.
41. T. Ludziejewski, Th. Stohlker, S. Keller, H. Beyer et al., *J. Phys. B* **31**, 2601 (1998).
42. I. Lindgren and J. Morrison, *Atomic Many-Body Theory*, Springer, Berlin (1986).
43. L. V. Chernysheva and V. L. Yakhontov, *Comp. Phys. Comm.* **119**, 232 (1999).
44. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Москва (1995). [D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, and V. K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific, New York (1988).]
45. A. R. Sohval, J. P. Delvaile, K. Kalata, and H. W. Schnopper, *J. Phys. B* **8**, L426 (1975).
46. K. Ozawa, J. H. Chang, Y. Yamamoto, S. Morita et al., *Phys. Rev. A* **33**, 3018 (1986).
47. A. V. Solov'yov, *Z. Phys. D* **24**, 5 (1992).
48. А. А. Радциг, Б. М. Смирнов, *Справочник по атомной и молекулярной физике*, Атомиздат, Москва (1980).
49. М. Я. Амусья, М. Ю. Кучиев, А. В. Соловьев, *ЖЭТФ* **94**, 74 (1988).
50. М. Я. Амусья, А. В. Соловьев, *ЖЭТФ* **97**, 745 (1990).
51. P. M. Bergstrom Jr., T. Suric, K. Pisk, and R. H. Pratt, *Phys. Rev. A* **48**, 1134 (1993).
52. С. А. Запрягаев, Н. Л. Манаков, В. Г. Пальчиков, *Теория многозарядных ионов с одним и двумя электронами*, Энергоатомиздат, Москва (1985).