

ОБ ЭФФЕКТЕ ХОЛЛА В СЛОИСТЫХ ТРЕХМЕРНЫХ СТРУКТУРАХ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С. Е. Бренер*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 18 октября 2001 г.

Рассмотрена трехмерная электронная система с ферми-поверхностью типа гофрированный цилиндр. Показано, что в такой системе при наличии плавного случайного потенциала должен наблюдаться квантовый эффект Холла. Полученные результаты качественно согласуются с имеющимися экспериментальными наблюдениями.

PACS: 72.15.Eb, 72.15.Gd

Сильные магнитные поля открывают возможность наблюдения квантового эффекта Холла (КЭХ) в слоистых трехмерных структурах. Первые на возможность наблюдения целочисленного КЭХ в таких структурах указал Азбель [1]. Первые эксперименты были проведены в работе [2] на сверхрешетке GaAs/(AlGa)As, причем трехмерный характер электронного спектра был проверен экспериментально. Квантовый эффект Холла в трехмерной системе также наблюдался в работе [3].

В настоящей работе рассмотрим целочисленный КЭХ и некоторые особенности зависимости холловской проводимости σ_{xy} от химического потенциала в трехмерных системах с плавным случайным потенциалом в сравнении с двумерными, используя квазиклассический подход к локализации невзаимодействующих электронов в магнитном поле. Будем предполагать выполненными следующие условия:

$$l_H \ll L, \quad T \ll U_0.$$

Здесь $l_H = (c\hbar/eH)^{1/2}$ — магнитная длина, L — характерный масштаб случайного потенциала, T — температура, U_0 — среднеквадратичная величина размаха случайного потенциала $U(\mathbf{r})$, e — заряд электрона, c — скорость света. В двумерном случае при выполнении этих условий электроны будут двигаться вблизи линий уровня случайного потенциала.

Закон дисперсии предполагается имеющим вид

$$\varepsilon = \frac{p_{\perp}^2}{2m_{\perp}} + t(p_z), \quad (1)$$

где $-t_0 \leq t(p_z) \leq t_0$. Здесь p_z — квазиимпульс в направлении магнитного поля, а ширина зоны t_0 предполагается малой по сравнению с циклотронной энергией $\hbar\omega_H$. Для обеспечения возможности локализации мы также будем считать $t_0 \ll U_0$.

В этом случае классические уравнения движения электрона

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dt(p_z)}{dp_z}, \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{\perp}}{dt} = -\frac{\left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_{\perp}} \times \mathbf{e}_z\right] c}{eH} + \frac{c[\mathbf{E} \times \mathbf{e}_z]}{H}. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{e}_z — единичный вектор в направлении магнитного поля, \mathbf{E} — электрическое поле. Под z и \mathbf{r}_{\perp} здесь понимаются координаты ведущего центра орбиты электрона. Заметим, что эти уравнения сохраняют энергию электрона $\varepsilon = t(p_z) + U(\mathbf{r})$. Такие уравнения были предметом рассмотрения в работах [4, 5], причем в первой из них проделана численная оценка точности этих уравнений. В работе [4] движение вдоль z предполагалось быстрым по сравнению с движением в перпендикулярной магнитному полю плоскости. В этом случае у движения имеется адиабатический инвариант

$$\oint p_z dz = I(x, y),$$

*E-mail: brener@itp.ac.ru

где интеграл берется между точками остановки по z . Наличие такого инварианта должно определять форму проекций траекторий электрона на плоскость, перпендикулярную магнитному полю. Однако, как было отмечено в [5], такой подход является слишком грубым, так как он не учитывает возможности скачкообразного изменения точек поворота по z , что приводит к хаотизации движения электрона. В дальнейшем будем считать скорость дрейфа перпендикулярно магнитному полю порядка скорости вдоль него, таким образом, адиабатический подход становится неприменимым.

В рассматриваемой задаче существенную роль играют перколяционные свойства случайного потенциала. В двумерном случае неограниченные электронные траектории, несущие ток в направлении, перпендикулярном электрическому полю, могут реализовываться только вблизи порога перколяции (для потенциала, статистические свойства которого не меняются при замене $U \rightarrow -U$ порог перколяции соответствует $U = 0$) [6]. Это приводит к картине КЭХ [7] с правильными значениями квантованного холловского сопротивления. При этом переход между плато происходит при химическом потенциале, близком к $\hbar\omega_H (n + 1/2)$ (т. е. вблизи линий уровня с $U(\mathbf{r}) = 0$), а ширина области перехода оказывается малой и определяется либо квантовыми эффектами, либо приложенным электрическим полем [8]. Если применить подобные рассуждения к трехмерному случаю, то, в отличие от двумерной картины, поверхности уровня $U(\mathbf{r}) = \text{const}$ заведомо замкнуты только при $U > U_c$ и $U < -U_c$ (мы рассматриваем симметричный случай). При этом, в отличие от двумерного случая, доля объема, занимаемая бесконечными поверхностями уровня, равна не нулю, а величине порядка одной второй [5]. Если мы не интересуемся деталями поведения σ_{xy} на границе плато и переходной области (эти детали будут изучены ниже), нам достаточно считать, что при $|U| > U_c$ все поверхности уровня замкнуты, а при $|U| < U_c$ при каждом U существует одна открытая изоповерхность, причем совокупность таких поверхностей занимает конечный объем, который будем называть проводящим по причинам, которые станут ясны ниже.

В отличие от двумерного случая электроны не двигаются (с точностью до магнитной длины) вдоль поверхностей уровня, а сходят с них в меру изменения $t(p_z)$, так что $\varepsilon - t_0 \leq U \leq \varepsilon + t_0$. (Под ε здесь и ниже мы понимаем сумму потенциальной энергии электрона и кинетической энергии его движения вдоль магнитного поля. Большую величину

$\hbar\omega_H (n + 1/2)$, которая не меняется в процессе движения, не учитываем.) При условии $t_0 \ll U_0$, которое мы предполагаем выполненным, это малосущественно, и можно считать, что электрон движется по поверхности уровня. Таким образом, состояния с $\varepsilon > U_c + t_0$ и $\varepsilon < -U_c - t_0$ (или, пренебрегая t_0 по сравнению с U_c , с $\varepsilon > U_c$ и $\varepsilon < -U_c$) заведомо локализованы. Так как при прохождении химическим потенциалом области локализованных состояний σ_{xy} не меняется, эти области соответствуют плато. Когда химический потенциал находится между плато, появляются бесконечные траектории, несущие средний холловский ток. Мы примем эргодическую гипотезу, согласно которой траектория электрона заполняет всю энергетически доступную область пространства. Это может, например, обеспечиваться короткодействующими нейтральными примесями, на которых электрон может упруго рассеиваться.

В отсутствие внешнего электрического поля никакого среднего тока нет в силу статистической изотропии. Сама величина среднего холловского тока в квазиклассическом приближении может быть найдена по формуле

$$j_H = e \int_V \frac{d^3r}{V} \int_{-\pi\hbar/a}^{\pi\hbar/a} \frac{dp_z}{2\pi\hbar} \frac{d\mathbf{r}_\perp}{dt} n(p_z, \mathbf{r}), \quad (4)$$

где $d\mathbf{r}_\perp/dt$ задается формулой (3). Здесь V — объем трехмерной системы, a — постоянная решетки в направлении магнитного поля, $n(p_z, \mathbf{r})$ — функция распределения электронов, которая зависит только от их энергии $\varepsilon = U(\mathbf{r}) + t(p_z)$ (диссипацию мы считаем отсутствующей). При нулевой температуре

$$\begin{aligned} n(p_z, \mathbf{r}) &\equiv n(\varepsilon) = 1/2\pi l_H^2 && \text{при } \varepsilon < \mu, \\ n(p_z, \mathbf{r}) &\equiv n(\varepsilon) = 0 && \text{в обратном случае} \end{aligned} \quad (5)$$

(μ — химический потенциал, который мы, как и ε , отсчитываем от $\hbar\omega_H (n + 1/2)$). Если химический потенциал велик и находится в щели плотности состояний, так что плотность в любой точке пространства постоянна, то из формулы (4) с учетом того, что первое слагаемое в правой части (3) при усреднении по пространству обращается в нуль, следует

$$j_H = \frac{ce[\mathbf{E} \times \mathbf{e}_z]}{H} \frac{1}{2\pi l_H^2 a}.$$

Эта величина дает постоянную холловскую проводимость на плато в расчете на заполненный уровень Ландау:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar a}. \quad (6)$$

При уменьшении μ холловское сопротивление будет меняться. При $\mu \approx U_c$ химический потенциал попадет в область делокализованных состояний и некоторые токонесящие состояния будут выключаться по мере уменьшения μ . С учетом (5) выражение для среднего холловского тока можно переписать в виде

$$j_H = \int_{\varepsilon < \mu} \frac{d^3r}{V} \frac{dp_z}{2\pi\hbar} \frac{d\mathbf{r}_\perp}{dt}.$$

Перейдем от интегрирования по d^3r к интегрированию по dU с заменой

$$\frac{d^3r}{V} \rightarrow \mathcal{P}(U)dU,$$

где $\mathcal{P}(U)$ — нормированная на единицу плотность распределения величины случайного потенциала. Учтем также, что в областях, занятых замкнутыми поверхностями уровня, среднее значение $d\mathbf{r}_\perp/dt$ равно нулю, а в остальных, т. е. в проводящем объеме, оно равно $c[\mathbf{E} \times \mathbf{e}_z]/H$. Ввиду малости t_0 по сравнению с U_0 пренебрежем зависимостью подинтегрального выражения от p_z . Вычитая из проводимости на плато (6) ту ее часть, которая обеспечивалась делокализованными электронными состояниями с энергией больше химического потенциала, окончательно получаем

$$\sigma_{xy}(\mu) = \frac{e^2}{2\pi\hbar a} \left(1 - \gamma \int_{\mu}^{U_c} \mathcal{P}(U) dU \right). \quad (7)$$

Здесь γ — множитель, меньший единицы, появляющийся из-за того, что не все изоповерхности с $|U| < U_c$ принадлежат проводящему объему; γ слабо зависит от химического потенциала, если он не близок к порогам перколяции. Здесь и ниже мы отсчитываем σ_{xy} от $ne^2/2\pi\hbar a$, где n — число уровней Ландау, лежащих ниже химического потенциала. Аналогично, увеличивая химический потенциал от больших отрицательных значений, получим для проводимости выражение

$$\sigma_{xy}(\mu) = \frac{e^2}{2\pi\hbar a} \gamma \int_{-U_c}^{\mu} \mathcal{P}(U) dU. \quad (8)$$

Из-за пренебрежения величиной t_0 , выражения (7), (8) не применимы в непосредственной близости к порогам перколяции.

Как было сказано выше, γ порядка одной второй практически во всей области $(-U_c; U_c)$. Поэто-

му, используя известный результат теории перколяций (см., например, [5, 6]):

$$\int_{-U_c}^{U_c} \mathcal{P}(U) dU \approx 0.7, \quad (9)$$

можно оценить $\sigma_{xy}(\mu = 0)$ из уравнения (7) и (8). Из первого получим $(0.8-0.9)e^2/2\pi\hbar a$, а из второго — $(0.1-0.2)e^2/2\pi\hbar a$. Расхождение объясняется тем, что у электронов с энергией в интервале $(-t_0; t_0)$ кроме трехмерных каналов проводимости, имеются еще и двумерные, аналогичные обычным каналам в двумерном КЭХ [7, 8]. Отсюда следует, что в относительно узкой (не шире чем $2t_0$) области в окрестности $\mu = 0$ должно наблюдаться более резкое изменение проводимости. Схематичный вид зависимости $\sigma_{xy}(\mu)$ представлен на рисунке.

Рассмотрим поведение $\sigma_{xy}(\mu)$ в окрестности $\mu = -U_c - t_0$ (окрестность $U_c + t_0$ рассматривается аналогично). Пусть $\mu = -U_c - t_0 + \delta$, где $\delta \lesssim t_0$. Теперь нельзя пренебрегать t_0 по сравнению с U_0 . Рассуждаем так же, как при переходе от (4) к (7). Перейдем к интегрированию по dU в области, определяемой условием $\varepsilon < \mu$, но не будем пренебрегать зависимостью $n(\varepsilon)$ от p_z . Также из теории перколяций известно [5], что объем, занятый бесконечными изоповерхностями (проводящий объем), с $U \in (U_1; U_1 + dU)$ равен нулю при $|U_1| > U_c$ и пропорционален $|(U_c - U_1)/U_c|^\beta dU$ вблизи порогов перколяции при $|U_1| < U_c$ с $\beta = 0.4$. Определим функцию $\mathcal{P}_\infty(U)$ таким образом, что проводящий объем, заключенный между U и $U + dU$, будет равен $V\mathcal{P}_\infty(U) dU$. Получаем область интегрирования по U и p_z , определяемую следующими условиями:

$$U + t(p_z) < \mu,$$

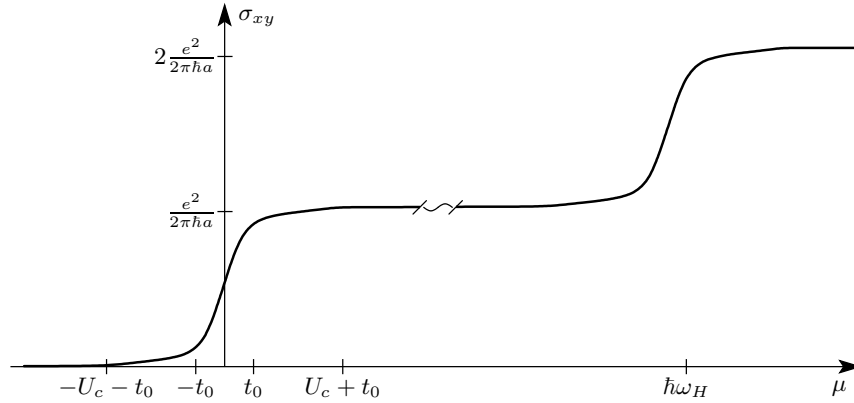
$$U > -U_c.$$

Таким образом, существенны значения p_z , при которых $t(p_z)$ близко к минимуму, где можно считать

$$t(p_z) = -t_0 + \frac{p_z^2}{2m_\parallel},$$

$1/m_\parallel$ — величина порядка $t_0 a^2/\hbar^2$. Переходя к переменной $u = U + U_c$, получим

$$j_H = \frac{ceE}{2\pi l_H^2 H} \int_{-\sqrt{2\delta m_\parallel}}^{\sqrt{2\delta m_\parallel}} \frac{dp_z}{2\pi\hbar} \int_0^{\delta - \frac{p_z^2}{2m_\parallel}} \mathcal{P}_\infty(u - U_c) du.$$



Схематичный ход зависимости холловской проводимости от химического потенциала. Начало координат соответствует $\mu = \hbar\omega_H (n + 1/2)$, $\sigma_{xy} = ne^2/2\pi\hbar a$

Функция $\mathcal{P}_\infty(U)$ в рассматриваемой области пропорциональна $[(U + U_c)/U_c]^\beta$. Отсюда находим с точностью до постоянного множителя:

$$\sigma_{xy} \sim \frac{e^2}{2\pi\hbar a} \frac{\delta^{\beta+3/2}}{t_0^{1/2} U_0^{\beta+1}} \approx \frac{e^2}{2\pi\hbar a} \frac{\delta^{1.9}}{t_0^{0.5} U_0^{1.4}}. \quad (10)$$

Так же ведет себя и отличие холловской проводимости от ее значения на плато при $\mu = U_c + t_0 - \delta$.

Проделанная выше оценка холловской проводимости основана на пренебрежении квантовыми эффектами, наиболее существенным из которых является возможность локализации электронов вдоль направления магнитного поля из-за квантовой интерференции падающей и рассеянной волн. Как хорошо известно из теории слабой локализации, магнитное поле препятствует локализации, разрушая фазовую когерентность. Этот эффект для случая плавного случайного потенциала можно оценить качественно с помощью квазиклассического подхода. Смещение траектории электрона на δz с изоэнергетической поверхности составляет величину порядка $\delta z \sim Lt_0/U_0$, при этом требуемое время

$$\tau \sim \delta z / \left(\frac{\partial t}{\partial p_z} \right) \sim \frac{L\hbar}{U_0 a}.$$

За это время электрон сдвинется в плоскости xy на расстояние

$$\delta r_\perp \sim \tau \frac{c}{eH} \frac{U_0}{L} \sim \frac{l_H^2}{a}.$$

Сбой фазы из-за магнитного поля при этом составит величину

$$\delta\phi \sim \frac{e}{c\hbar} H \delta r_\perp^2 \sim \frac{l_H^2}{a^2}.$$

В достижимых полях при не слишком больших значениях a сбой фазы $\delta\phi$ оказывается много больше

единицы, а значит, интерференционные поправки к холловской проводимости будут малы. Однако при $a \gtrsim l_H$ квантовые эффекты приведут к локализации движения вдоль магнитного поля и приведенное рассмотрение окажется неприменимым. Это может иметь место в сверхрешетках с большим ($\gtrsim 30$) числом атомных слоев на каждый слой сверхрешетки в сильных полях ($\gtrsim 5$ Тл).

В эксперименте непосредственно измеряется зависимость $\sigma_{xy}(H)$, а не $\sigma_{xy}(\mu)$. Из (9), симметричности потенциала и известного выражения для числа состояний на один уровень Ландау ($N = VeH/2\pi\hbar ca$) следует, что границы $H_{n\pm}$ n -ого плато (в пренебрежении величиной t_0) определяются условиями

$$\frac{eH_{n\pm}}{2\pi\hbar a} (n \mp 0.15) = n_e.$$

Здесь n_e — объемная концентрация электронов. Видно, что ширина первого плато в несколько раз меньше, чем в двумерном случае, а ширины следующих уменьшаются обратно пропорционально n^2 . Это в сочетании с тем, что при низких магнитных полях условие $l_H \ll L$ начинает выполняться хуже, объясняет то, что в работах [2, 3] удавалось наблюдать только 1–2 плато.

Приведенные выше рассуждения показывают, что в слоистых трехмерных системах существуют внутренние причины для конечной ширины переходной зоны между квантованными значениями холловской проводимости на плато, в отличие от двумерного случая, где предполагается, что переходная зона может быть сделана сколь угодно узкой при уменьшении температуры и внешнего электрического поля. Это не противоречит экспериментальным данным [2, 3], дающим более плавный

переход в трехмерном случае по сравнению с двумерным.

Автор благодарен С. В. Иорданскому за постановку задачи и за плодотворные дискуссии в процессе ее решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ya. Azbel', Sol. State Commun. **54**, 127 (1985).
2. Н. L. Störmer, J. P. Eisenstein, A. C. Gossard, W. Wiegmann, and K. Baldwin, Phys. Rev. Lett. **56**, 85 (1986).
3. S. S. Murzin, A. G. M. Jansen, and P. v. d. Linden, Phys Rev. Lett. **80**, 2681 (1998).
4. М. Ya. Azbel' and O. Entin-Wohlman, Phys. Rev. B **32**, 562 (1985).
5. М. В. Isichenko, Rev. of Mod. Phys. **64**, 961 (1992).
6. А. Л. Эфрос, Б. И. Шкловский, *Электрические свойства легированных полупроводников*, Наука, Москва (1979).
7. S. V. Iordansky, Sol. State Commun. **43**, 1 (1982).
8. S. A. Trugman, Phys. Rev. B **27**, 7539 (1983).