

НЕТЕМПЕРАТУРНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЧЕРНЫХ ДЫР

Р. В. Коркин, И. Б. Хриплович***

*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия*

*Новосибирский государственный университет
630000, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 15 августа 2001 г.

Нетемпературное излучение керровской черной дыры рассматривается как туннелирование рождающихся частиц через эффективную дираковскую щель. В старшем квазиклассическом приближении этот подход годится и для бозонов. Наши квазиклассические ответы для фотонов и гравитонов не противоречат прежним результатам. Для нейтрино результат нашего полного квантовомеханического расчета примерно вдвое превышает прежний.

PACS: 04.62.+v, 04.70.-s, 04.70.Dy

1. ВВЕДЕНИЕ

Усиление электромагнитной волны при отражении от вращающейся черной дыры, так называемая суперрадиация, было предсказано Зельдовичем [1], а также Мизнером [2]. Затем оно было подробно изучено Старобинским и Чуриловым [3] для электромагнитной и гравитационной волн (см. также [4]). Представляется достаточно очевидным, что если возможно усиление волны при отражении, то возможна и ее генерация вращающейся черной дырой. Действительно, прямой расчет Пэйджа [5] показал, что обсуждаемое нетемпературное излучение существует, причем не только для бозонов, фотонов и гравитонов, но и для нейтрино. Последнее выглядит несколько загадочным, поскольку для фермионов суперрадиация отсутствует.

В настоящей работе эти процессы рассматриваются с иной точки зрения, а именно как туннелирование рождающихся квантов сквозь эффективную дираковскую щель. Разумеется, такой подход годится сам по себе лишь для фермионов. Ясно, однако, что в старшем квазиклассическом приближении рождение фермионов и бозонов описывается соотно-

шениями, одинаковыми с точностью до спинового статистического веса.

Заметим, что в недавней работе Калогеракоса и Воловика [6] (она стала нам известна уже после написания настоящей статьи) был рассмотрен сходный механизм для описания трения, испытываемого телом, вращающимся в сверхтекучей жидкости при $T = 0$: туннелирование квазичастиц в область, где их энергия во вращающейся системе отрицательна.

Наши квазиклассические результаты для фотонов и гравитонов находятся в разумном качественном согласии с расчетом [5]. Количественного совпадения здесь ожидать не приходится, так как для наиболее существенных парциальных волн подбарьерное действие если и превосходит единицу, то ненамного. Что же касается нейтрино, то для них при полных моментах, играющих основную роль, мнимая часть действия заметно меньше единицы. Поэтому для спина $s = 1/2$ мы провели полный численный квантовомеханический расчет эффекта. Здесь наш результат примерно вдвое превышает ответ, приведенный в [5]. К сожалению, отсутствие в [5] деталей расчета не позволяет установить причину расхождения.

*E-mail: korkin@vxinpz.inp.nsk.su

**E-mail: khriplovich@inp.nsk.su

2. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Начнем с задачи, представляющей скорее методический, чем прямой физический, интерес: с изучения вращающейся черной дырой скалярных безмассовых частиц.

Квазиклассическое решение задачи начнем с хорошо известных уравнений Гамильтона–Якоби, описывающих движение безмассовой частицы в поле Керра (см., например, [7]):

$$\left(\frac{\partial S_r(r)}{\partial r}\right)^2 = -\frac{\kappa^2}{\Delta} + \frac{[(r^2 + a^2)\varepsilon - a l_z]^2}{\Delta^2}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial S_\theta(\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = \kappa^2 - \left(a\varepsilon \sin\theta - \frac{l_z}{\sin\theta}\right)^2. \quad (2)$$

Здесь $S_r(r)$ и $S_\theta(\theta)$ — соответственно радиальное и угловое действия,

$$\Delta = r^2 - r_g r + a^2, \quad r_g = 2kM,$$

$\mathbf{a} = \mathbf{J}/M$ — момент количества движения дыры в единицах ее массы M , ε — энергия частицы, l_z — проекция момента количества движения частицы на \mathbf{a} (скорость света c полагается всюду равной единице).

Что же касается константы разделения переменных κ^2 , то в сферически-симметричном пределе $a \rightarrow \infty$ она равна квадрату полного момента частицы \mathbf{I}^2 , или $l(l+1)$ в квантовой механике (постоянная Планка \hbar также полагается всюду равной единице). Влияние вращения черной дыры, т. е. конечного a , на κ^2 учитывается с помощью теории возмущений, примененной к уравнению (2). Результат равен [3]

$$\kappa^2 = l(l+1) - 2\omega\alpha l_z + \frac{2}{3}\omega^2\alpha^2 \left[1 + \frac{3l_z^2 - l(l+1)}{(2l-1)(2l+3)}\right]. \quad (3)$$

Здесь и ниже используются безразмерные переменные

$$\omega = \varepsilon kM, \quad x = r/kM, \quad \alpha = a/kM.$$

Напомним, что в квазиклассическом приближении следует провести замену

$$l(l+1) \rightarrow (l+1/2)^2.$$

Кроме того, в точной квантовомеханической задаче при редукции радиального волнового уравнения к каноническому виду,

$$R'' + p^2(r)R = 0,$$

в выражении для $p^2(r)$ возникают дополнительные (по сравнению с правой частью уравнения (1))

неклассические слагаемые, которые, строго говоря, следовало бы учитывать при $l \approx 1$. Однако для простоты мы отбрасываем здесь и ниже неклассические поправки в $p^2(r)$, что не влияет качественно на полученные результаты.

Зависимость от расстояния x границ классически недоступной области, в которой квадрат радиального импульса p^2 отрицательный, при разных орбитальных моментах представлена на рисунке. На горизонте щель обращается в нуль [8]. При $r \rightarrow \infty$ границы классически недоступной области ведут себя как $\pm(l+1/2)/r$. Иными словами, центробежный член в случае безмассовых частиц играет в некотором смысле роль квадрата массы. Заметим, что при $l > 1$ обе ветви уравнения $p^2(r) = 0$ убывают, а при $l = 1$ одна ветвь вблизи горизонта растет, а другая падает. Таким образом, механизм излучения — туннелирование, уход частиц из заштрихованной области на бесконечность.

Следует отметить аналогию между излучением заряженных частиц заряженной черной дырой и обусловленным эффектом. В первом случае излучение обусловлено кулоновским отталкиванием, а в рассматриваемом здесь — отталкивающим взаимодействием моментов количества движения частицы и черной дыры [9].

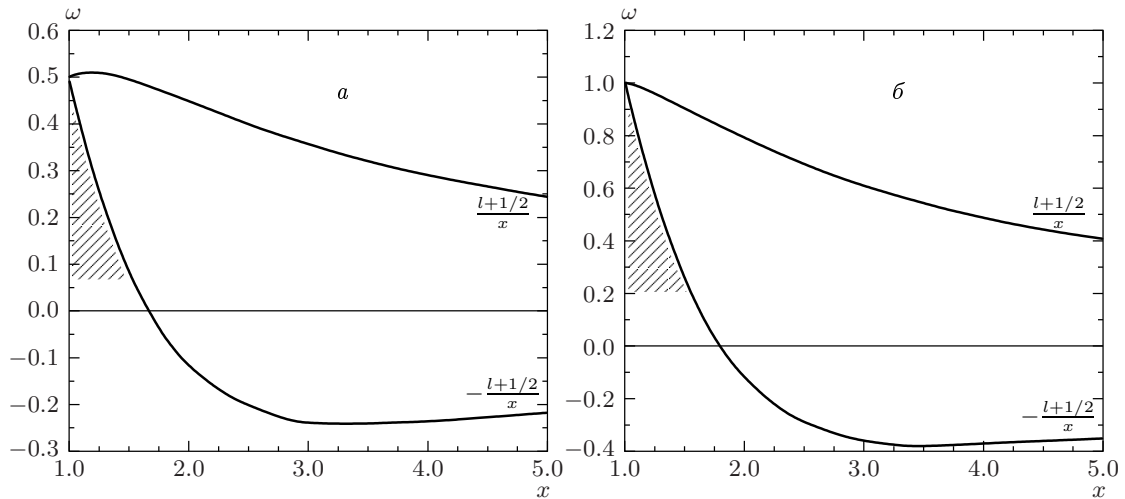
Подбарьерное действие для радиального уравнения (1) выглядит следующим образом:

$$|S_r| = \int dx \sqrt{\frac{k^2}{(x-1)^2} - \frac{[\omega(x^2+1) - l_z]^2}{(x-1)^4}}, \quad (4)$$

интеграл берется между двумя точками поворота. Мы ограничиваемся пока случаем предельной черной дыры, $a = kM$. Заметим, что благодаря сингулярной зависимости p от x подбарьерное действие не обращается в нуль при $l > 1$ даже для предельной энергии $\omega = l_z/2$. Тем более оно остается конечным при $l = 1$ (ср. рисунки *a* и *б*).

Отталкивающее взаимодействие пропорционально проекции момента частицы l_z и входит в вероятность туннелирования в экспоненте, а барьер зависит от самого орбитального момента l . Ясно поэтому, что главный вклад в эффект будут давать частицы с l_z , близким к l . Численный расчет показывает, что вкладом состояний с $l_z \neq l$ можно вообще пренебречь. Кроме того, поскольку подбарьерное действие падает с ростом энергии, основной вклад в эффект дают частицы с энергией, близкой к максимальной.

К сожалению, даже в случае предельной дыры аналитическое вычисление подбарьерного действия



Энергетическая щель при $l = 1$ (а) и 2 (б)

провести до конца не удастся. Поэтому, для того чтобы получить качественное представление о характере эффекта, воспользуемся упрощенным выражением для κ^2 :

$$\kappa^2 = l^2 + l - 2\omega l + \omega^2. \quad (5)$$

(Результаты более аккуратного численного расчета с использованием выражения (3) будут приведены ниже.) В этом приближении для всех моментов, кроме $l = 1$, можно получить простую аналитическую формулу для подбарьерного действия. Пусть

$$\omega = \frac{l}{2}(1 - \delta),$$

где $\delta \ll 1$; именно эта область энергий дает наибольший вклад в излучение. Тогда интересующие нас точки поворота, которые лежат справа от горизонта, таковы:

$$x_{1,2} = 1 + \frac{2\delta}{2 \pm \sqrt{1 + 4/l}}. \quad (6)$$

Теперь легко находим

$$|S_{an}| = \frac{\pi l}{2} \left(2 - \sqrt{3 - \frac{4}{l}} \right). \quad (7)$$

Из этого выражения для действия нетрудно видеть, что слагаемое l (рядом с l^2) в формуле (5) очень существенно даже для больших моментов: оно генерирует члены $4/l$ в формулах (6) и (7), увеличивая $|S|$ при $l \gg 1$ на $\pi/\sqrt{3}$. Соответственно, коэффициент прохождения

$$D = \exp(-2|S|)$$

Таблица 1. Подбарьерное действие для скалярных частиц

l	1	2	3
$ S $	3.45	3.15	3.33
$ S_{an} $		3.14	3.34

уменьшается примерно в 40 раз. Заметим, что даже переход в κ^2 от $l(l+1)$ к $(l+1/2)^2$ заметно уменьшает эффект при l , сравнимых с единицей; однако это подавление исчезает при больших моментах.

Из формулы (7) следует, что подбарьерное действие велико, оно монотонно растет с ростом l , начиная с $|S| = \pi$ при $l = 2$. Что же касается $l = 1$, то, как видно из сравнения рисунков а и б, здесь барьер шире, чем при $l = 2$, и, соответственно, действие должно быть большим. Действительно, численный расчет подбарьерного действия $|S|$ с κ^2 , заданным формулой (3), подтверждает эти оценки. Его результаты приведены в табл. 1, где для сравнения приведены также аналитические оценки $|S_{an}|$ по формуле (5). Кстати, это сравнение показывает, что приближенная аналитическая формула (5) очень хорошо выполняется. Числа, приведенные в табл. 1, относятся к предельной черной дыре и максимальной энергии испускаемых частиц. Ясно, однако, что переход к непредельным дырам, меньшим энергиям и большим l приводит только к увеличению подбарьерного действия. Поскольку оно оказывается здесь всегда большим единицы, использование квазиклассическо-

го приближения внутри барьера вполне разумно.

Проверим теперь его применимость слева от барьера. Соответствующее условие имеет обычный вид:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{p(x)} \ll 1. \quad (8)$$

Иначе говоря, минимальный размер начального волнового пакета слева от барьера не должен превышать расстояния от горизонта до точки поворота. Вблизи горизонта можно пренебречь в выражении для импульса $p(x)$ слагаемым, связанным с центробежным барьером, так что

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{p(x)} \approx \frac{d}{dx} \frac{(x-1)^2}{\omega(x^2 + \alpha^2) - \alpha l}.$$

Нетрудно проверить, что для не слишком больших l , важных в нашем случае, это выражение сравнимо с единицей и условие (8) не выполнено. Тем не менее, несмотря на это обстоятельство, а также на пренебрежение неклассическими поправками к $p^2(r)$, упомянутыми выше, результаты квазиклассического расчета, приведенные ниже, качественно верны.

Вернемся к самому расчету интенсивности излучения. Плотность радиального тока свободных частиц в интервале энергий $d\varepsilon$ при $r \rightarrow \infty$ равна

$$j_r(\varepsilon, l)d\varepsilon = \sum \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_r} = \sum_{l, l_z} \frac{2\pi dp_r}{(2\pi)^3 r^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_r}. \quad (9)$$

Действительно, исходное суммирование здесь сводится к интегрированию по азимутальному углу вектора \mathbf{l} , которое дает 2π , и к учету вкладов всех проекций l_z орбитального момента. В нашем случае, как уже отмечалось, достаточно учесть лишь одну из них, $l_z = l$. С помощью тождества

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_r} dp_r = d\varepsilon$$

получаем в результате, что полный поток свободных частиц при $r \rightarrow \infty$ равен

$$4\pi r^2 j_r(\varepsilon, l) = 4\pi r^2 \sum_{l_z} \frac{2\pi}{(2\pi)^3 r^2} \rightarrow \frac{1}{\pi}. \quad (10)$$

Нетрудно сообразить, что в нашей задаче полный поток излученных частиц отличается от последнего выражения лишь коэффициентом проницаемости барьера. Таким образом, в используемом квазиклассическом приближении получаем следующее выражение для потери массы черной дырой в единицу времени:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\varepsilon_{max}} \varepsilon \exp(-2|S(\varepsilon, l)|) d\varepsilon. \quad (11)$$

Таблица 2. Потеря массы (в единицах $10^{-3}/\pi M^2$) и момента (в единицах $10^{-3}/\pi M$) за счет излучения скалярных частиц

α	$ dM/dt $	$ dJ/dt $
0.999	2.6	6.4
0.9	0.19	0.77

Здесь максимальная энергия излученных квантов

$$\varepsilon_{max} = \frac{al}{r_h^2 + a^2}, \quad (12)$$

где

$$r_h = kM + \sqrt{k^2 M^2 - a^2}$$

— радиус горизонта керровской дыры. Аналогичное выражение для потери момента имеет вид

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\varepsilon_{max}} l \exp(-2|S(\varepsilon, l)|) d\varepsilon. \quad (13)$$

Результаты численного расчета по формулам (11) и (13) потерь массы и момента дыры для разных значений параметров вращения α приведены в табл. 2. Мы приводим здесь и ниже для частиц со спином лишь результаты для достаточно быстрого вращения, $\alpha \approx 1$. Дело в том, что с дальнейшим убыванием α не только быстро растет температурное излучение, но и еще быстрее уменьшается обсуждаемый эффект. Этот эффект при меньших α становится много меньше температурного, так что там его рассмотрение не имеет особого смысла.

Как видно из табл. 2, темп потери момента черной дырой в сопоставимых единицах выше, чем темп потери массы. Фактически это следует сразу из выражения (12). Уже из этого выражения видно, что даже для предельно большой энергии соответствующие числа относятся как 2:1. Реальные отношения еще больше. Отсюда следует важный вывод: предельных черных дыр не существует. Даже если предельная дыра каким-то образом образовалась, в процессе излучения она немедленно теряет свою предельность.

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ И ГРАВИТОНОВ

Исследование излучения реальных частиц начнем с электромагнитного поля. У фотона есть две

моды разной четности: так называемая электрическая с $l = j \pm 1$ и магнитная с $l = j$ [10]. Из дуальной инвариантности следует, что интенсивности излучения этих мод равны. Поэтому достаточно ограничиться решением задачи для магнитной моды, а затем удвоить результат.

Можно показать, что ситуация с гравитационными волнами аналогична. Снова есть две моды, которые в силу своеобразной дуальности, дают одинаковый вклад в излучение, причем для одной из этих мод $l = j$.

Очевидно, что для моды с $l = j$ радиальное уравнение в квазиклассическом приближении такое же, как и для скалярного поля, однако с иным значением κ^2 . Это можно показать также, исходя из так называемого уравнения Тьюкольского [11] (снова пренебрегая неклассическими поправками к $p^2(r)$). Собственные значения углового уравнения для частиц со спином s , найденные и здесь по теории возмущений, имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \kappa^2 = & j(j+1) + \frac{1}{4} - 2\alpha\omega j_z - \frac{2\alpha\omega j_z s}{j(j+1)} + \\ & + \alpha^2\omega^2 \left\{ \frac{2}{3} \left[1 + \frac{3j_z^2 - j(j+1)}{(2j-1)(2j+3)} \right] - \right. \\ & - \frac{2s^2}{j(j+1)} \frac{3j_z^2 - j(j+1)}{(2j-1)(2j+3)} + \\ & + 2s^2 \left[\frac{(j^2 - s^2)(j^2 - j_z^2)}{j^2(2j-1)(2j+1)} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{((j+1)^2 - j_z^2)((j+1)^2 - s^2)}{(j+1)^3(2j+1)(2j+3)} \right] \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Мы включили в это выражение слагаемое $1/4$, необходимое для правильного квазиклассического описания. Заметим, что из рассмотрения спиральности безмассовой частицы следует ограничение $j \geq s$. Соответственно, для фотона $j \geq 1$, а для гравитона $j \geq 2$. Так же, как и в скалярном случае, основной вклад в излучение дают состояния с максимальной проекцией момента, $j_z = j$.

Обсудим прежде всего, насколько применимо здесь квазиклассическое приближение. Что касается ситуации слева от барьера, то она качественно не отличается от скалярного случая. Иначе обстоит дело в подбарьерной области. Как видно из уравнения (14), наличие спина приводит к уменьшению κ^2 и, соответственно, центробежного отталкивания. В результате уменьшается и барьер, а с ним подбарьерное действие. Это качественное соображение

Таблица 3. Подбарьерное действие для фотонов и гравитонов

	$s = 1$		$s = 2$	
j	1	2	2	3
$ S $	1.84	2.17	1.0	1.7

Таблица 4. Потеря массы (в единицах $10^{-3}/\pi M^2$) и момента (в единицах $10^{-3}/\pi M$) за счет излучения фотонов и гравитонов

	$s = 1$		$s = 2$	
α	$ dM/dt $	$ dJ/dt $	$ dM/dt $	$ dJ/dt $
0.999	16.5(9.6)	39(24)	66(228)	148(549)
0.9	0.72(2.26)	2.8(8.2)	0.58(12.9)	2(48)

подтверждается численным расчетом $|S|$ для фотонов и гравитонов с максимальной проекцией момента $j_z = j$ и максимальной энергией в случае предельной черной дыры (см. табл. 3).

Таким образом, следует ожидать, что точность квазиклассических результатов здесь ниже, чем в скалярном случае.

Квазиклассические формулы для электромагнитного и гравитационного излучений формально отличаются от соответствующих скалярных (11) и (13) лишь дополнительным множителем 2, отражающим наличие двух мод. Результаты этого расчета приведены в табл. 4. В ней для сравнения указаны в скобках результаты полного квантовомеханического расчета [5], учитывающего также температурное излучение.

Из табл. 4 видно, что наш квазиклассический расчет согласуется с полным лишь качественно, даже при $\alpha = 0.999$, когда температурное излучение пренебрежимо мало. Это неудивительно, если учесть, что квазиклассическое действие в данной задаче если и превышает единицу, то ненамного. В пользу этого объяснения говорит тот факт, что для фотона, где $|S|$ заметно больше (см. табл. 3), согласие квазиклассического расчета с полным заметно лучше.

4. ИЗЛУЧЕНИЕ НЕЙТРИНО

И наконец, рассмотрим излучение вращающейся черной дырой нейтрино, безмассовых частиц со

спином 1/2. Волновую функцию двухкомпонентного нейтрино запишем в виде (см., например, [5])

$$\psi = \exp(-i\varepsilon t + ij_z\phi) \begin{pmatrix} R_1 S_1 \\ R_2 S_2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Важно, что в метрике Керра волновые уравнения для нейтрино также допускают разделение переменных [11]. Радиальные уравнения в безразмерных переменных выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{dx} - i \frac{\omega(x^2 + \alpha^2) - j_z \alpha}{\Delta} R_1 &= \frac{\kappa}{\sqrt{\Delta}} R_2, \\ \frac{dR_2}{dx} + i \frac{\omega(x^2 + \alpha^2) - j_z \alpha}{\Delta} R_2 &= \frac{\kappa}{\sqrt{\Delta}} R_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Соответствующие угловые уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{d\theta} + \left(\omega \alpha \sin \theta - \frac{j_z}{\sin \theta} \right) S_1 &= \kappa S_2, \\ \frac{dS_2}{d\theta} - \left(\omega \alpha \sin \theta - \frac{j_z}{\sin \theta} \right) S_2 &= -\kappa S_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Для κ^2 имеет место та же формула (14), но теперь уже, разумеется, при $s = 1/2$. Так же, как для бозонов, здесь практически достаточно учесть состояния с $j_z = j$.

Существенно, что R_1 соответствует на бесконечности (при $x \rightarrow \infty$) и на горизонте (при $x \rightarrow 1$) волне, бегущей вправо, а R_2 соответствует при $x \rightarrow \infty$ и при $x \rightarrow 1$ волне, бегущей влево. (Для этой классификации решений удобно использовать так называемую «черепашью» координату $\xi(x)$; при $x \rightarrow \infty$ $\xi \approx x \rightarrow +\infty$, при $x \rightarrow 1$ $\xi \approx \ln(x-1) \rightarrow -\infty$.) Вполне естественно, что плотность радиального тока здесь равна

$$j_r = |R_1|^2 - |R_2|^2.$$

Нас интересует вероятность проникновения через барьер для состояния, которое выглядит на бесконечности, как расходящаяся волна. Для нейтрино или антинейтрино такое состояние имеет заданную спиральность, но не имеет определенной четности. Между тем, в нашей задаче потенциальный барьер зависит, грубо говоря, от орбитального момента и поэтому намного ниже для состояний с $l = j - 1/2$, чем для состояний с $l = j + 1/2$. (Эти состояния с заданным l обладают определенной четностью и являются суперпозициями нейтрино и антинейтрино.) Более того, при $l = j - 1/2$ для малых j , дающих основной вклад в излучение, действие либо вообще не имеет мнимой части, либо его мнимая часть мала, так что наш прежний подход неприменим. Поэтому

Таблица 5. Потеря массы (в единицах $10^{-3}/\pi M^2$) и момента (в единицах $10^{-3}/\pi M$) за счет излучения нейтрино

α	$ dM/dt $	$ dJ/dt $
0.99	4.4(2.1)	11(5.65)
0.9	0.7(1)	2.7(3.25)

будем решать численно точную задачу об излучении нейтрино.

Технически удобно найти коэффициент отражения R в задаче рассеяния нейтрино на черной дыре, а затем воспользоваться очевидным соотношением для искомого коэффициента прохождения D :

$$D = 1 - R.$$

В этом случае выражения для потерь массы и момента черной дырой выглядят следующим образом:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1/2}^{\infty} \int_0^{\varepsilon_{max}} \varepsilon D(\varepsilon, j) d\varepsilon, \quad (18)$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1/2}^{\infty} \int_0^{\varepsilon_{max}} j D(\varepsilon, j) d\varepsilon, \quad (19)$$

$$\varepsilon_{max} = \frac{aj}{r_h^2 + a^2}. \quad (20)$$

Результаты, полученные численным решением системы радиальных уравнений (16), представлены в табл. 5. В скобках приводятся результаты работы [5], включающие вклад хокинговского излучения. Для дыры, близкой к предельной, при $\alpha = 0.99$, где температурное излучение практически отсутствует, наши ответы примерно вдвое больше прежних.

Мы признательны Г. Е. Воловику, обратившему наше внимание на статью [6]. Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 01-02-16898), Ведущих научных школ (грант 40-15-96811), Министерства образования (грант Е00-3.3-148), Федеральной программы Интеграция-2001.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович, Письма в ЖЭТФ 14, 270 (1971); ЖЭТФ 62, 2076 (1972).

2. C. W. Misner, Bull. Am. Phys. Soc. **17**, 472 (1972).
3. А. А. Старобинский, ЖЭТФ **64**, 48 (1973); А. А. Старобинский, С. М. Чурилов, ЖЭТФ **65**, 3 (1973).
4. J. D. Bekenstein and M. Schiffer, Phys. Rev. D **58**, 064014 (1998).
5. D. N. Page, Phys. Rev. D **14**, 3260 (1976).
6. А. Калогеракос, Г. Е. Воловик, Письма в ЖЭТФ **69**, 257 (1999); E-print archives cond-mat/9901163.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
8. N. Deruelle and R. Ruffini, Phys.Lett. B **52**, 437 (1974).
9. W. G. Unruh, Phys. Rev. D **10**, 3194 (1974).
10. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
11. S. A. Teukolsky, Phys. Rev. Lett. **29**, 1114 (1972).