

ПРОВОДИМОСТЬ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ И ТОКОВ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЕ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ ПРАВИЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Ю. Н. Овчинников^{ab}, И. А. Лукьянчук^{bc}

^a Max-Planck-Institut für Physik Komplexer Systeme
01187, Dresden, Germany

^b Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117940, Черноголовка, Московская обл., Россия

^c LPMC, Université de Picardie Jules Verne
F-80039, Amiens, France

Поступила в редакцию 31 августа 2001 г.

Исследуется задача об эффективной проводимости и распределении поля и токов в регулярной двухкомпонентной системе, составленной из правильных треугольников. Развита эффективный метод решения, допускающий обобщение на многокомпонентные системы.

PACS: 84.32.Ff

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1970 году в работе Дыхне [1] была высказана гипотеза об универсальной зависимости эффективной проводимости двухкомпонентной системы σ_{eff} от проводимостей $\sigma_{1,2}$ компонент:

$$\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (1)$$

Гипотеза состоит в том, что соотношение (1) справедливо всегда, если только выполнены два условия: проводимость каждой из компонент изотропна и распределение компонент симметрично относительно замены $1 \leftrightarrow 2$. Доказательство основано на рассмотрении уравнения для тока $\mathbf{j} = \sigma(r)\mathbf{E}$ и его же, умноженного векторно на \mathbf{n} (\mathbf{n} — вектор нормали к поверхности), $\mathbf{n} \times \mathbf{j} = \sigma(r)\mathbf{n} \times \mathbf{E}$. Величина $\mathbf{n} \times \mathbf{j}$ представима в виде $\mathbf{n} \times \mathbf{j} = \nabla \mathbf{H} = \mathbf{E}'$, где $\mathbf{j} = \text{rot}(0, 0, H)$ и H — магнитное поле. Вектор \mathbf{E}' можно рассматривать как электрическое поле в среде с той же структурой и проводимостью равной $\sigma' = \sigma_0^2/\sigma(\mathbf{r})$, где σ_0 — произвольная константа. Плотность тока \mathbf{j}' определяется уравнением $\mathbf{j}' = \sigma_0^2 \mathbf{n} \times \mathbf{E}$. Легко проверить, что для величин \mathbf{j}' , \mathbf{E}' , $\sigma_0^2/\sigma(\mathbf{r})$ выполняются как уравнения, так и граничные условия для поля и тока. Усредняя уравнения для \mathbf{j} и \mathbf{j}' по площади образца и учитывая изо-

тропность эффективной проводимости в двух средах, получим соотношение Дыхне [1, 2]

$$\sigma_{eff}(\sigma_1, \sigma_2) \sigma_{eff}(\sigma_0^2/\sigma_1, \sigma_0^2/\sigma_2) = \sigma_0^2. \quad (2)$$

Соотношение (1) есть частный случай уравнения (2) при $\sigma_0 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$. Соотношение (2) справедливо также и для многокомпонентных систем и допускает обобщение на анизотропный проводник. В работе [3] было получено точное решение задачи об эффективной проводимости и распределении поля в регулярной двухкомпонентной системе со структурой шахматной доски. Было показано, что в такой системе соотношение (1) выполняется при всех значениях параметра $Z = (\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2)$, хотя это и достигается весьма нетривиальным образом.

Теория возмущений по малому отклонению локальной проводимости от ее среднего значения рассмотрена в работе [4].

В общем случае задача о распределении поля и проводимости многокомпонентной системы может быть сведена к системе интегральных уравнений для плотности зарядов, возникающих вдоль границ областей. Для двухкомпонентной системы такая система уравнений зависит только от одного параметра Z .

Ниже мы приведем эффективный метод, позволяющий найти с высокой точностью распределение зарядов и поля в регулярной двухкомпонентной системе, составленной из правильных треугольников, при произвольных значениях параметра Z .

Соотношение Дыхне [1] будет использовано нами для проверки точности используемого приближения.

2. ПРОВОДИМОСТЬ РЕГУЛЯРНОЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ С ЯЧЕЙКАМИ ИЗ ПРАВИЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Рассматриваемая двухкомпонентная система из правильных треугольников представлена на рис. 1. Эффективная проводимость σ_{eff} такой системы изотропна. Поэтому достаточно найти ток для ориентации внешнего электрического поля, указанной на рис. 1. Из симметричных соображений очевидно, что для рассматриваемой структуры существуют только две независимые плотности зарядов $\rho_{1,2}$, распределенные вдоль ребер ячеек. Внутри каждого треугольника выполняется уравнение

$$\Delta\varphi = 0, \tag{3}$$

где φ — скалярный потенциал, всюду непрерывный, а Δ — оператор Лапласа. Уравнение (3) есть следствие закона сохранения тока \mathbf{j}

$$\text{div } \mathbf{j} = 0. \tag{4}$$

Из уравнения (3) следует, что потенциал φ можно представить в виде

$$\varphi = E_0 y - 4\pi \int d^2 r_1 G(r - r_1) \rho(r_1), \tag{5}$$

где G — двумерная функция Грина:

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln |r - r_1|. \tag{6}$$

Плотность заряда ρ распределена вдоль ребер треугольников

$$\rho(r) = \hat{\rho} \delta(\hat{y}), \tag{7}$$

где \hat{y} — локальная координата, поперечная к границе треугольника. В дальнейшем будем опускать значок $\hat{}$ у плотности заряда.

На границах треугольников выполняются соотношения

$$E_n^{(1)} - E_n^{(2)} = 4\pi \hat{\rho}, \quad \sigma_1 E_n^{(1)} = \sigma_2 E_n^{(2)}, \tag{8}$$

где $E = -\partial\varphi/\partial r$ — электрическое поле, \mathbf{n} — вектор нормали к границе треугольника. Из уравнений (5), (8) получаем замкнутую систему уравнений для величины плотности зарядов $\tilde{\rho}_{1,2}$:

$$\begin{aligned} & \frac{Z}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int_0^1 dt (\tilde{\rho}_1(t) - \tilde{\rho}_2(t)) \times \right. \\ & \times \left. \sum_{M=-\infty}^{\infty} \frac{\text{tg} \left(\frac{\pi}{2}(t+M) \right)}{\text{sh}^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{M}{2} - t_1 + \frac{t}{2} \right) \right) + \text{ch}^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{M}{2} - t_1 + \frac{t}{2} \right) \right) \text{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2}(M+t) \right)} \right\} = \tilde{\rho}_1(t_1), \\ & \frac{Z}{2\pi} \left\{ 1 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int_0^1 dt \tilde{\rho}_1(t) \times \right. \\ & \times \left[\sum_{M=-\infty}^{\infty} \frac{\text{tg} \left(\frac{\pi}{2}(t+M) \right)}{\text{sh}^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{M}{2} - t_1 + \frac{t}{2} \right) \right) + \text{ch}^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{M}{2} - t_1 + \frac{t}{2} \right) \right) \text{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2}(M+t) \right)} + \right. \\ & \left. \left. + \sum_{M=-\infty}^{\infty} \frac{\text{tg} \left(\frac{\pi}{2}(M+t) \right)}{\text{sh}^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{M}{2} + t_1 + \frac{t}{2} \right) \right) + \text{ch}^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{M}{2} + t_1 + \frac{t}{2} \right) \right) \text{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2}(M+t) \right)} \right] \right\} = -\tilde{\rho}_2(t_1). \end{aligned} \tag{9}$$

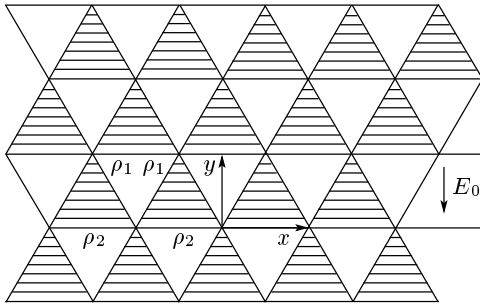


Рис. 1. Двухкомпонентная система с ячейками в виде правильных треугольников

В уравнении (9) мы перешли к безразмерным переменным

$$\hat{t} = a\tilde{t}, \quad \rho_{1,2} = E_0\tilde{\rho}_{1,2},$$

\hat{t} — длина вдоль ребра, отсчитанная от «угловой» точки (рис. 1), a — длина ребра треугольника. Эффективная проводимость σ_{eff} простым образом выражается через функцию $\tilde{\rho}_2(t)$:

$$\sigma_{eff} = -\frac{4\pi\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \int_0^1 dt \tilde{\rho}_2(t), \quad (10)$$

$$\frac{\sigma_{eff}}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} = -\frac{2\pi\sqrt{1-Z^2}}{Z} \int_0^1 dt \tilde{\rho}_2(t).$$

Исследование уравнений (9) показывает, что функции $\tilde{\rho}_{1,2}$ удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{\rho}_2(t) = \tilde{\rho}_2(1-t), \quad \tilde{\rho}_1(t) = -\frac{\tilde{\rho}_2(t)}{2} + \rho_1^1(t), \quad (11)$$

где функция ρ_1^1 меняет знак при замене t на $1-t$:

$$\rho_1^1(t) = -\rho_1^1(1-t). \quad (12)$$

Из системы уравнений (9) следует, что функции $\tilde{\rho}_{1,2}(t)$ являются двоякопериодическими аналитическими функциями комплексной переменной t с периодами $(1/2 \pm i\sqrt{3}/2)$. Точки

$$t_{N,M} = \frac{1}{2}(N+M) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(N-M)$$

являются точками ветвления функций $\tilde{\rho}_{1,2}$. В окрестности точки $t=0$ имеем

$$\tilde{\rho}_2(t) = -\frac{\tilde{C}}{t^{2\kappa}}, \quad \rho_1^1(t) = \frac{\tilde{A}}{t^{2\kappa}}, \quad (13)$$

где $\tilde{A}, \tilde{C}, \kappa$ — некоторые константы. Из уравнений (9), (11), (13) находим систему уравнений для коэффициентов $\tilde{A}, \tilde{C}, \kappa$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}Z \frac{\sin(\pi/6 - \pi\kappa/3)}{\cos(\pi\kappa)} \tilde{C} &= \tilde{A}, \\ 2Z \frac{\cos(\pi/6 - \pi\kappa/3)}{\sin(\pi\kappa)} \tilde{A} &= \tilde{C}. \end{aligned} \quad (14)$$

Условие разрешимости системы уравнений (14) дает уравнение для параметра κ :

$$3Z^2 \frac{\sin(\pi/3 - 2\pi\kappa/3)}{\sin(2\pi\kappa)} = 1. \quad (15)$$

Решая уравнение (15), находим явное выражение для величины параметра κ :

$$\kappa = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\pi} \arctg \left(\sqrt{3} \frac{1-Z^2}{1+3Z^2} \right). \quad (16)$$

Кроме особенности вида (13) функции $\tilde{\rho}_{1,2}$ имеют особенность вида

$$\tilde{\rho}_{1,2} \propto t^{2\tilde{\kappa}}, \quad \tilde{\kappa} > 0. \quad (17)$$

Параметр $\tilde{\kappa}$ удовлетворяет уравнению (15) с заменой $\kappa \rightarrow -\tilde{\kappa}$

$$\frac{3Z^2 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\tilde{\kappa} \right)}{\sin(2\pi\tilde{\kappa})} = -1, \quad (18)$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{\kappa} = \frac{1}{2} + \kappa + \frac{3L}{2}, \quad L = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Функции $\tilde{\rho}_{1,2}$ порождаются аналитическими двоякопериодическими функциями, имеющими периоды $T_{1,2}$, равные

$$T_1 = 2, \quad T_2 = Ke^{i\pi/3}, \quad (20)$$

где K — положительное целое число. Период $T_1 = 2$ следует из того, что при обходе точек $(0, 1)$ функции $\rho_{1,2}$ должны возвращаться к прежнему значению. Это означает, что у мероморфной эллиптической функции, являющейся базисной для построения $\rho_{1,2}$, положение полюсов и нулей на множестве $\{\tilde{K}e^{i\pi/3} + L\}$, где \tilde{K} — фиксировано, $L = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, упорядочено: при любом значении L в соседних точках $(L, L+1)$ может находиться только один полюс и один нуль одного порядка. При

всяком значении K существует $2K$ мероморфных эллиптических функций, положения полюсов и нулей которых упорядочены в упомянутом выше смысле. Среди них существует максимальный набор из $2K$ функций, преобразующихся между собой при сдвигах

$$t_{N,M} = \frac{1}{2}(N + M) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(N - M).$$

С учетом комплексного сопряжения при $K = 1, 2$ возникают эквивалентные наборы мероморфных функций, недостаточные для выполнения условий (14), (15), (17), (18). Они содержатся в наборах, возникающих при $K > 2$. Произвольная мероморфная функция с заданными периодами и положением полюсов и нулей выражается через тэта-функцию Яко-

би [5]. В нашем случае

$$\tau = 2, \quad \tau' = \frac{i\sqrt{3}}{2}K + \left(\frac{1}{2}K - 2L'\right),$$

где L' — целое число, такое, что $|K/2 - 2L'|$ минимально:

$$\vartheta_1\left(\frac{t}{\tau}\right) = i \sum_{N=-\infty}^{\infty} (-1)^N \exp\left(\frac{i\pi}{\tau}\tau' \left(N - \frac{1}{2}\right)^2\right) \times \exp\left\{\frac{2i\pi t}{\tau} \left(N - \frac{1}{2}\right)\right\}. \quad (21)$$

При $K = 1$ ($L' = 0$) существует всего одна мероморфная эллиптическая функция $\phi_1(t)$, которая может быть использована для построения плотностей зарядов ρ_1^1 и ρ_2 :

$$\phi_1(t) = \left(\frac{\sum_{N=1}^{\infty} \cos\left(\pi t \left(N - \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{4} \left(N - \frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi}{4}N(N-1)\right)}{\sum_{N=1}^{\infty} (-1)^{N+1} \sin\left(\pi t \left(N - \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{4} \left(N - \frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi}{4}N(N-1)\right)} \right)^2, \quad (22)$$

$$\phi_1(1-t) = \phi_1^{-1}(t), \quad \hat{\phi}_1(t) = \phi_1^k(t), \quad \hat{\phi}_1(1-t) = \frac{1}{\hat{\phi}_1(t)}.$$

Рассмотрим случай $K = 3$. Восемь мероморфных функций распадаются на два набора функций, инвариантных относительно сдвигов $t_{N,M}$. Один из них состоит из двух функций $\phi_1(t)$, $\phi_1(1-t)$, определенных в уравнении (22). Второй набор состоит из шести функций

$$\left\{ \phi_2(t), \quad \phi_2^{-1}(t), \quad \phi_2(t + e^{i\pi/3}), \quad \phi_2^{-1}(t + e^{i\pi/3}), \right. \\ \left. \phi_2(t + 2e^{i\pi/3}), \quad \phi_2^{-1}(t + 2e^{i\pi/3}) \right\}, \quad (23)$$

где

$$\phi_2(t) = \phi_1(t) \left(\frac{-e^{i\pi/2} \vartheta_1\left(\frac{e^{i\pi/3} - t}{\tau}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1 + e^{i\pi/3} - t}{\tau}\right)} \right)^4, \\ \phi_2(t + e^{i\pi/3}) = \phi_1(t) \left(\frac{\vartheta_1(t/\tau)}{\vartheta_1\left(\frac{1-t}{\tau}\right)} \right)^4, \quad (24) \\ \phi_2(t + 2e^{i\pi/3}) = \\ = \phi_1(t) \left(\frac{-e^{i\pi/2} \vartheta_1\left(\frac{2e^{i\pi/3} - t}{\tau}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1 + 2e^{i\pi/3} - t}{\tau}\right)} \right)^4.$$

В формуле (24) тэта-функция определяется выражением (21):

$$\vartheta_1\left(\frac{t}{\tau}\right) = i \sum_{N=-\infty}^{\infty} (-1)^N \exp\left\{\frac{i3\pi}{2}e^{i\pi/3} \left(N - \frac{1}{2}\right)^2\right\} \times \exp\left\{i\pi t \left(N - \frac{1}{2}\right)\right\}. \quad (25)$$

При сдвиге на периоды $\tau = 2$, $\tau' = 3e^{i\pi/3}$ тэта-функция преобразуется следующим образом:

$$\vartheta_1\left(\frac{t + \tau}{\tau}\right) = -\vartheta_1\left(\frac{t}{\tau}\right), \\ \vartheta_1\left(\frac{t + \tau'}{\tau}\right) = -\vartheta_1\left(\frac{t}{\tau}\right) \exp\left[-i\pi \left(t + \frac{3}{2}e^{i\pi/3}\right)\right]. \quad (26)$$

Введем функции $\hat{\phi}_2(t)$, $\hat{W}(t)$, $\hat{W}_1(t)$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}_2(t) &= \phi_2^\kappa(t), \quad \hat{\phi}_2(t+e^{i\pi/3}) = \phi_2^\kappa(t+e^{i\pi/3}), \\
 \hat{\phi}_2(t+2e^{i\pi/3}) &= \phi_2^\kappa(t+2e^{i\pi/3}), \\
 \hat{W}(t) &= \hat{\phi}_2(t) + \hat{\phi}_2(t+e^{i\pi/3}) + \hat{\phi}_2(t+2e^{i\pi/3}), \\
 \hat{W}_1(t) &= \hat{\phi}_2^{-1}(t) + \hat{\phi}_2^{-1}(t+e^{i\pi/3}) + \hat{\phi}_2^{-1}(t+2e^{i\pi/3}).
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Функции $\hat{\phi}_1(t), \hat{W}(t), \hat{W}_1(t)$ являются базисными для построения плотностей зарядов $\rho_{1,2}$. Сохраняя в качестве базиса только эти функции, получим с учетом свойств симметрии (11), (12):

$$\begin{aligned}
 \rho_2(t) &= -C_1 \left[\left(\hat{\phi}_1(t) + \hat{\phi}_1^*(t) \right) + \left(\frac{1}{\hat{\phi}_1(t)} + \frac{1}{\hat{\phi}_1^*(t)} \right) \right] + iC_2 \left[\left(\hat{\phi}_1(t) - \hat{\phi}_1^*(t) \right) + \left(\frac{1}{\hat{\phi}_1(t)} - \frac{1}{\hat{\phi}_1^*(t)} \right) \right] - \\
 &- C_3 \left[\left(\hat{W}(t) + \hat{W}^*(t) \right) + \left(\hat{W}_1(t) + \hat{W}_1^*(t) \right) \right] + iC_4 \left[\left(\hat{W}(t) - \hat{W}^*(t) \right) + \left(\hat{W}_1(t) - \hat{W}_1^*(t) \right) \right], \\
 \rho_1^1(t) &= A_1 \left[\left(\hat{\phi}_1(t) + \hat{\phi}_1^*(t) \right) - \left(\frac{1}{\hat{\phi}_1(t)} + \frac{1}{\hat{\phi}_1^*(t)} \right) \right] - iA_2 \left[\left(\hat{\phi}_1(t) - \hat{\phi}_1^*(t) \right) - \left(\frac{1}{\hat{\phi}_1(t)} - \frac{1}{\hat{\phi}_1^*(t)} \right) \right] + \\
 &+ A_3 \left[\left(\hat{W}(t) + \hat{W}^*(t) \right) - \left(\hat{W}_1(t) + \hat{W}_1^*(t) \right) \right] - iA_4 \left[\left(\hat{W}(t) - \hat{W}^*(t) \right) - \left(\hat{W}_1(t) - \hat{W}_1^*(t) \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

В формуле (28) звездочка означает комплексное сопряжение, коэффициенты C_{1-4}, A_{1-4} — некоторые константы, значение которых будет найдено ниже.

Выражения (28) для плотностей зарядов ρ_2, ρ_1^1 имеют требуемое поведение во всех точках $t_{N,M}$ и обладают симметрией (11), (12) при замене t на $1-t$. Поэтому можно надеяться, что если они и не являются точным решением системы уравнений (9), то могут служить хорошим первым приближением к точному решению равномерно во всем интервале значений параметра Z .

Перейдем теперь к вычислению коэффициентов C_{1-4}, A_{1-4} . Отметим, прежде всего, что вблизи особенности $t^{2\kappa}$ разложение идет по четным степеням t . Это означает, что величина L (см. (19)) равна 1 и, следовательно, $\tilde{\kappa} = \kappa + 2$. Условие обращения в нуль коэффициентов при $t^{2\kappa}$ и $t^{2\kappa+2}$ в величинах ρ_2 и ρ_1^1 дает четыре уравнения для коэффициентов C_{1-4}, A_{1-4} . Два уравнения возникают из условия разрешимости (14). Еще одно уравнение может быть получено интегрированием первого (или второго) уравнения (9) по t_1 в интервале (0,1). И, наконец, последнее (восьмое) уравнение мы выберем так, чтобы наилучшим образом приблизить функции $\rho_{1,2}$, определяемые уравнениями (28), к точному решению системы уравнений (9).

Введем восемь функций G_{1-4}, \hat{F}_{1-4} параметра κ с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \int_0^1 dt \left(\hat{\phi}_1(t) + \hat{\phi}_1^*(t) \right), \\
 G_3 &= -i \int_0^1 dt \left(\hat{\phi}_1(t) - \hat{\phi}_1^*(t) \right), \\
 \hat{F}_1 &= \int_0^1 dt \left(\hat{W}(t) + \hat{W}^*(t) \right), \\
 \hat{F}_3 &= -i \int_0^1 dt \left(\hat{W}(t) - \hat{W}^*(t) \right),
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

$$\begin{pmatrix} G_2 \\ G_4 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{F}_4 \end{pmatrix} = \sum_M \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2}(t+M) \right)}{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{M}{2} - t_1 + \frac{t}{2} \right) \right) + \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{M}{2} - t_1 + \frac{t}{2} \right) \right)} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2}(M+t) \right) \times \\ \times \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(t) + \hat{\phi}_1^*(t) \\ -i(\hat{\phi}_1(t) - \hat{\phi}_1^*(t)) \\ \hat{W}(t) + \hat{W}^*(t) \\ -i(\hat{W}(t) - \hat{W}^*(t)) \end{pmatrix}.$$

Выражение (29) для функций $G_{2,4}, \hat{F}_{2,4}$ можно существенно упростить. Выполняя суммирование по M , находим

$$\begin{pmatrix} G_2 \\ G_4 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{F}_4 \end{pmatrix} = 2 \int_0^1 dt \int_0^\infty dt_1 \left(\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi t}{2} \right)}{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\pi t_1}{\sqrt{3}} \right) + \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi t_1}{\sqrt{3}} \right)} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi t}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi t}{2} \right)}{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\pi t_1}{\sqrt{3}} \right) + \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi t_1}{\sqrt{3}} \right)} \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi t}{2} \right) \right) \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(t) + \hat{\phi}_1^*(t) \\ -i(\hat{\phi}_1(t) - \hat{\phi}_1^*(t)) \\ \hat{W}(t) + \hat{W}^*(t) \\ -i(\hat{W}(t) - \hat{W}^*(t)) \end{pmatrix} = \\ = \sqrt{3} \int_0^1 dt (1-2t) \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(t) + \hat{\phi}_1^*(t) \\ -i(\hat{\phi}_1(t) - \hat{\phi}_1^*(t)) \\ \hat{W}(t) + \hat{W}^*(t) \\ -i(\hat{W}(t) - \hat{W}^*(t)) \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Подставляя в формулу (10) выражение (28) для плотности заряда ρ_2 , получаем выражение для эффективной проводимости через коэффициенты C_{1-4} :

$$\frac{\sigma_{eff}}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} = \frac{4\pi}{Z} \sqrt{1-Z^2} \times \\ \times \left[(C_1 G_1 + C_2 G_3) + (C_3 \hat{F}_1 + C_4 \hat{F}_3) \right]. \quad (31)$$

Как было отмечено выше, существует семь естественных уравнений для восьми коэффициентов A_{1-4}, C_{1-4} . Эта система семи уравнений определяет однопараметрическое семейство функций $\rho_{1,2}$ (см. (28)). Вместе с этим семейством функций рассмотрим также семейство функций $\rho_{1,2}^{(it)}$, являющееся первой итерацией системы уравнений (9) по функциям $\rho_{1,2}$ нулевого приближения. В качестве нормы S выберем функционал вида

$$S = \int_0^1 dt \left\{ \left| \rho_2 - \rho_2^{(it)} \right| + \left| \rho_1 - \rho_1^{(it)} \right| \right\}. \quad (32)$$

Значение свободного параметра выбирается из условия минимума функционала S :

$$\delta S = 0. \quad (33)$$

Окончательное выражение для функций $\rho_{1,2}$ не зависит от способа выбора свободного параметра.

Для получения остальных семи уравнений необходимо использовать разложение функций $\hat{\phi}_{1,2}(t)$ в области $0 < t \ll 1$ до членов четвертого порядка включительно. Для упрощения вычислений воспользуемся общими свойствами мероморфных эллиптических функций. Предположим, что ψ — эллиптическая функция, имеющая в параллелограмме периодов один нуль и один полюс второго порядка и имеющая разложение вблизи полюса вида

$$\psi = \frac{a}{t^2} + b + ct^2 + \dots \quad (34)$$

Тогда функция $\psi(t)$ есть решение уравнения

$$\psi^3 - \frac{a}{4}(\psi')^2 - 3b\psi^2 - (5ac - 3b^2)\psi = 0. \quad (35)$$

В нашем случае функция $\psi(t)$ удовлетворяет также соотношению

$$\psi(1-t) = 1/\psi(t). \quad (36)$$

Из формул (35), (36) следует, что в этом случае коэффициент c равен

$$c = \frac{3b^2 - 1}{5a} \quad (37)$$

и, следовательно, ψ удовлетворяет уравнению

$$\psi^3 - \frac{a}{4}(\psi')^2 - 3b\psi^2 + \psi = 0. \quad (38)$$

Уравнение (38) существенно упрощает нахождение коэффициентов разложения в ряд Тэйлора функции $\psi(t)$.

Рассмотрим теперь функцию $\phi_1(t)$. В области $t \ll 1$ из формулы (22) находим первые два члена разложения функции $\phi_1(t)$ в ряд Лорана и восстанавливаем третий с помощью формулы (37):

$$\phi_1(t) = \frac{R_1 e^{i\gamma_1}}{t^2} [1 + R_2 e^{i\gamma_2} t^2 + R_3 e^{i\gamma_3} t^4], \quad (39)$$

где

$$R_1 e^{i\gamma_1} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\sum_{N=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\left(N-\frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi}{4}N(N-1)\right)}{\sum_{N=1}^{\infty} (-1)^{N+1} \left(N-\frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\left(N-\frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi}{4}N(N-1)\right)} \right)^2, \quad (40)$$

$$R_2 e^{i\gamma_2} = -\pi^2 \left[\frac{\sum_{N=1}^{\infty} \left(N-\frac{1}{2}\right)^2 \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\left(N-\frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi}{4}N(N-1)\right)}{\sum_{N=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\left(N-\frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi}{4}N(N-1)\right)} - \frac{1}{3} \frac{\sum_{N=1}^{\infty} (-1)^{N+1} \left(N-\frac{1}{2}\right)^3 \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\left(N-\frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi}{4}N(N-1)\right)}{\sum_{N=1}^{\infty} (-1)^{N+1} \left(N-\frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\left(N-\frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i\pi}{4}N(N-1)\right)} \right],$$

$$R_3 e^{i\gamma_3} = \frac{1}{5} [3R_2^2 e^{2i\gamma_2} - R_1^{-2} e^{-2i\gamma_1}].$$

Используя явные выражения для тэта-функций ($\tau = 2, \tau' = 3e^{i\pi/3}$), приведенные в Приложении А, находим первые два члена разложения в ряд Лорана функции

$$\left(\vartheta_1\left(\frac{1-t}{\tau}\right) / \vartheta_1\left(\frac{t}{\tau}\right) \right)^2.$$

Третий член восстанавливается, как и ранее, с помощью формулы (37):

$$\left(\frac{\vartheta_1\left(\frac{1-t}{\tau}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{t}{\tau}\right)} \right)^2 = \frac{D_1 e^{i\varphi_1}}{t^2} (1 + D_2 e^{i\varphi_2} t^2 + D_3 e^{i\varphi_3} t^4), \quad (41)$$

где

$$D_1 e^{i\varphi_1} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\sum_{N=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi 3\sqrt{3}}{4} \left(N - \frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i3\pi}{4} N(N-1)\right)}{\sum_{N=1}^{\infty} (-1)^{N+1} \left(N - \frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{\pi 3\sqrt{3}}{4} \left(N - \frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i3\pi}{4} N(N-1)\right)} \right)^2, \quad (42)$$

$$D_2 e^{i\varphi_2} = -\pi^2 \left[\frac{\sum_{N=1}^{\infty} \left(N - \frac{1}{2}\right)^2 \exp\left(-\frac{\pi 3\sqrt{3}}{4} \left(N - \frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i3\pi}{4} N(N-1)\right)}{\sum_{N=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi 3\sqrt{3}}{4} \left(N - \frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i3\pi}{4} N(N-1)\right)} - \frac{1}{3} \frac{\sum_{N=1}^{\infty} \left(N - \frac{1}{2}\right)^3 \exp\left(-\frac{\pi 3\sqrt{3}}{4} \left(N - \frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i3\pi}{4} N(N-1)\right)}{\sum_{N=1}^{\infty} (-1)^{N+1} \left(N - \frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{\pi 3\sqrt{3}}{4} \left(N - \frac{1}{2}\right)^2\right) \exp\left(\frac{i3\pi}{4} N(N-1)\right)} \right],$$

$$D_3 e^{i\varphi_3} = \frac{1}{5} [3D_2^2 e^{2i\varphi_2} - D_1^{-2} e^{-2i\varphi_1}].$$

Между эллиптическими функциями в правой части формулы (24) существует простое соотношение, прямо следующее из формул преобразования (26):

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{e^{i\pi/3} + t}{\tau}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1 + e^{i\pi/3} + t}{\tau}\right)} = \frac{\vartheta_1\left(\frac{2e^{i\pi/3} - t}{\tau}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1 + 2e^{i\pi/3} - t}{\tau}\right)}. \quad (43)$$

Эллиптические функции $\phi_2(t)/\phi_1(t)$, $\phi_2(t + e^{i\pi/3})/\phi_1(t)$ и $\phi_2(t + e^{2i\pi/3})/\phi_1(t)$ в правой части формулы (24) отличаются лишь сдвигом аргумента. По этой причине все они удовлетворяют одному уравнению, коэффициенты a, b которого определяются формулой (41):

$$a = D_1 e^{i\varphi_1}, \quad b = D_1 D_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (44)$$

Следовательно, для определения коэффициентов разложения в ряд Тэйлора функции $\phi_2(t)/\phi_1(t)$, равной

$$\left(\frac{e^{-i\pi/2} \vartheta_1\left(\frac{e^{i\pi/3} - t}{\tau}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1 + e^{i\pi/3} - t}{\tau}\right)} \right)^2 = \mathcal{F}_0 e^{i\chi_0} \left(1 + \mathcal{F}_1 e^{i\chi_1} t + \mathcal{F}_2 e^{i\chi_2} t^2 + \mathcal{F}_3 e^{i\chi_3} t^3 + \mathcal{F}_4 e^{i\chi_4} t^4 \right), \quad (45)$$

нам достаточно найти лишь ее значение при $t = 0$. Это сделано в Приложении. Значения остальных коэффициентов находятся с помощью уравнения (38):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 e^{i\chi_1} &= -\frac{2}{\sqrt{a}} \sqrt{-3b + \mathcal{F}_0 e^{i\chi_0} + \frac{1}{\mathcal{F}_0} e^{-i\chi_0}}, \\ \mathcal{F}_2 e^{i\chi_2} &= \frac{1}{a} \left(-6b + 3\mathcal{F}_0 e^{i\chi_0} + \frac{1}{\mathcal{F}_0} e^{-i\chi_0} \right), \\ \mathcal{F}_3 e^{i\chi_3} &= -\frac{4}{a\sqrt{a}} \sqrt{-3b + \mathcal{F}_0 e^{i\chi_0} + \frac{1}{\mathcal{F}_0} e^{-i\chi_0}} (-b + \mathcal{F}_0 e^{i\chi_0}), \\ \mathcal{F}_4 e^{i\chi_4} &= \frac{1}{a^2} \left[3 + 6b^2 - 15b\mathcal{F}_0 e^{i\chi_0} + 5\mathcal{F}_0^2 e^{2i\chi_0} - \frac{b}{\mathcal{F}_0} e^{-i\chi_0} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Численные значения коэффициентов $R_i, D_i, \mathcal{F}_i, \gamma_i, \varphi_i, \chi_i$ приведены в Приложении А. Выделяя член в выражениях (28) для ρ_1^1 и ρ_2 , имеющий особенность в нуле $\sim t^{-2\kappa}$, находим из уравнения (14) соотношения для коэффициентов A_i, C_i :

$$\begin{aligned} & A_1 \cos(\kappa\gamma_1) + A_2 \sin(\kappa\gamma_1) + A_3 \left[2\mathcal{F}_0^{2\kappa} \cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0)) - \left(\frac{D_1}{R_1}\right)^{2\kappa} \cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)) \right] + \\ & + A_4 \left[2\mathcal{F}_0^{2\kappa} \sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0)) + \left(\frac{D_1}{R_1}\right)^{2\kappa} \sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)) \right] = \frac{3}{2} Z \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi\kappa}{3}\right)}{\cos(\pi\kappa)} \left\{ C_1 \cos(\kappa\gamma_1) + C_2 \sin(\kappa\gamma_1) + \right. \\ & \quad \left. + C_3 \left[2\mathcal{F}_0^{2\kappa} \cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0)) + \left(\frac{D_1}{R_1}\right)^{2\kappa} \cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)) \right] + \right. \\ & \quad \left. + C_4 \left[2\mathcal{F}_0^{2\kappa} \sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0)) - \left(\frac{D_1}{R_1}\right)^{2\kappa} \sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)) \right] \right\}. \quad (47) \end{aligned}$$

С точностью до членов четвертого порядка по t включительно находим из формул (24), (39), (41), (45) выражение для функций $\hat{\phi}_1^{-1}, \hat{\phi}_2^{-1}$:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^{-1}(t) &= \frac{t^{2\kappa}}{R_1^\kappa} e^{-i\kappa\gamma_1} \left[1 - \kappa t^2 R_2 e^{i\gamma_2} + t^4 \left(-\kappa R_3 e^{i\gamma_3} + \frac{\kappa(\kappa+1)}{2} R_2^2 e^{2i\gamma_2} \right) \right], \\ \hat{\phi}_1(t + e^{i\pi/3}) &= \frac{t^{2\kappa}}{R_1^\kappa} \left(\frac{R_1}{D_1}\right)^{2\kappa} e^{i\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)} \left[1 + t^2 \mathcal{P}_1 e^{i\alpha_1} + t^4 \mathcal{P}_2 e^{i\alpha_2} \right], \\ \frac{1}{\hat{\phi}_2(t)} + \frac{1}{\hat{\phi}_2(t + e^{i\pi/3})} &= 2 \frac{t^{2\kappa}}{R_1^\kappa} \frac{e^{-i\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0)}}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} \left[1 + t^2 Q_1 e^{i\beta_1} + t^4 Q_2 e^{i\beta_2} \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

Выражение для коэффициентов $\mathcal{P}_i, Q_i, \alpha_i, \beta_i$ через $R_i, \mathcal{F}_i, D_i, \gamma_i, \chi_i$ приведено в Приложении Б. Используя выражение (П.8), (П.9) для плотностей зарядов $\rho_1^1(t)$ и $\rho_2(t)$, находим остальные пять уравнений для коэффициентов A_i, C_i . Первые четыре из них возникают из условия обращения в нуль коэффициентов при $t^{2\kappa}$ и $t^{2\kappa+2}$ в плотности зарядов ρ_1^1 и ρ_2 , последнее есть следствие уравнений (13), (14):

$$\begin{aligned} & C_1 \cos(\kappa\gamma_1) - C_2 \sin(\kappa\gamma_1) + C_3 \left[\left(\frac{R_1}{D_1}\right)^{2\kappa} \cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)) + \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} \cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0)) \right] + \\ & + C_4 \left[\left(\frac{R_1}{D_1}\right)^{2\kappa} \sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)) - \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} \sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0)) \right] = 0, \\ & - \kappa R_2 C_1 \cos(\kappa\gamma_1 - \gamma_2) + \kappa R_2 C_2 \sin(\kappa\gamma_1 - \gamma_2) + \\ & + C_3 \left[\left(\frac{R_1}{D_1}\right)^{2\kappa} \mathcal{P}_1 \cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_1) + \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} Q_1 \cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_1) \right] + \\ & + C_4 \left[\left(\frac{R_1}{D_1}\right)^{2\kappa} \mathcal{P}_1 \sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_1) - \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} Q_1 \sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_1) \right] = 0, \\ & - A_1 \cos(\kappa\gamma_1) + A_2 \sin(\kappa\gamma_1) + A_3 \left[\left(\frac{R_1}{D_1}\right)^{2\kappa} \cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)) - \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} \cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0)) \right] + \\ & + A_4 \left[\left(\frac{R_1}{D_1}\right)^{2\kappa} \sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)) + \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} \sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0)) \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \kappa A_1 R_2 \cos(\kappa\gamma_1 - \gamma_2) - \kappa R_2 A_2 \sin(\kappa\gamma_1 - \gamma_2) + \\
 & + A_3 \left[\left(\frac{R_1}{D_1} \right)^{2\kappa} \mathcal{P}_1 \cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_1) - \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} Q_1 \cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_1) \right] + \\
 & + A_4 \left[\left(\frac{R_1}{D_1} \right)^{2\kappa} \mathcal{P}_1 \sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_1) + \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} Q_1 \sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_1) \right] = 0, \\
 & - A_1 \left[-\kappa R_3 \cos(\kappa\gamma_1 - \gamma_3) + \frac{\kappa(\kappa + 1)}{2} R_2^2 \cos(\kappa\gamma_1 - 2\gamma_2) \right] + \\
 & + A_2 \left[-\kappa R_3 \sin(\kappa\gamma_1 - \gamma_3) + \frac{\kappa(\kappa + 1)}{2} R_2^2 \sin(\kappa\gamma_1 - 2\gamma_2) \right] + \\
 & + A_3 \left[\left(\frac{R_1}{D_1} \right)^{2\kappa} \mathcal{P}_2 \cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_2) - \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} Q_2 \cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_2) \right] + \\
 & + A_4 \left[\left(\frac{R_1}{D_1} \right)^{2\kappa} \mathcal{P}_2 \sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_2) + \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} Q_2 \sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_2) \right] = \\
 & = \frac{3Z}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi\kappa}{3}\right)}{\cos(\pi\kappa)} \left\{ C_1 \left[-\kappa R_3 \cos(\kappa\gamma_1 - \gamma_3) + \frac{\kappa(\kappa + 1)}{2} R_2^2 \cos(\kappa\gamma_1 - 2\gamma_2) \right] - \right. \\
 & - C_2 \left[-\kappa R_3 \sin(\kappa\gamma_1 - \gamma_3) + \frac{\kappa(\kappa + 1)}{2} R_2^2 \sin(\kappa\gamma_1 - 2\gamma_2) \right] + \\
 & + C_3 \left[\left(\frac{R_1}{D_1} \right)^{2\kappa} \mathcal{P}_2 \cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_2) + \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} Q_2 \cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_2) \right] + \\
 & \left. + C_4 \left[\left(\frac{R_1}{D_1} \right)^{2\kappa} \mathcal{P}_2 \sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_2) - \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} Q_2 \sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_2) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Функции $\rho_{1,2}$, определяемые уравнениями (28), не являются точным решением системы (9). Тем не менее они оказываются очень хорошим приближением к точному решению при всех значениях параметра Z . На рис. 2 отложено отношение $\sigma_{eff}/\sqrt{\sigma_1\sigma_2}$ как функция параметра Z для решения, определяемого формулой (28) (сплошная линия). Для точного решения это отношение не зависит от Z и тождественно равно единице. Используя выражение (28) в качестве нулевого приближения, мы нашли первую итерацию его с помощью системы уравнений (9). Выражение для величины $\sigma_{eff}/\sqrt{\sigma_1\sigma_2}$, найденное с помощью этих функций, изображено на рис. 2: штриховая линия соответствует первой итерации. На рис. 3, 4 приведены функции $\tilde{\rho}_{1,2}$ для значений $Z = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8$, определяемые формулами (28) (нулевое приближение) — сплошные линии, результат первой итерации — штриховые линии. Мы приведем также значения коэффициентов A_{1-4}, C_{1-4} в точках $Z = \{0.2; 0.4; 0.6; 0.8\}$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы проводимость, распределения заряда, плотности тока и электрического поля в двухкомпонентной системе, составленной из правильных треугольников. Предложен эффективный метод исследования свойств двухкомпонентных систем, основанный на использовании эллиптических функций. Примененный метод допускает обобщение на многокомпонентные системы.

Наличие угловых точек приводит к сингулярному распределению плотности зарядов. Поэтому обычная теория возмущений не эффективна. Метод, предложенный нами (см. также [3]), правильно учитывает все особенности, возникающие в распределении плотности зарядов. Функции $\rho_{1,2}$ (см. (28)) являются аналитическими, двоякопериодическими функциями переменной t с периодами $(1/2 \pm i\sqrt{3}/2)$, обусловленными структурой системы. Базис двоякопериодических функций, использованный нами, может быть легко расширен. Тем не менее минимальный базис, использованный для построения функ-

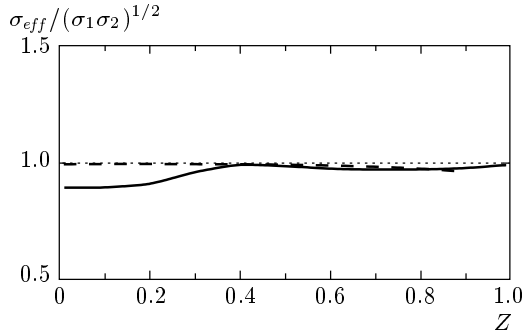


Рис. 2. Отношение $\sigma_{eff} / \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$ как функция параметра Z для решения, определяемого формулой (28), — сплошная линия, штриховая линия — результат, полученный с помощью первой итерации функций (28)

ций $\rho_{1,2}$, позволяет найти функции $\rho_{1,2}$ с высокой точностью и является хорошим нулевым приближением для итерационной процедуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке CRDF (грант RP1-2251), а также РФФИ (проект 00-02-17729а).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Приведем явное выражение для четырех тэта-функций, используемых в уравнении (24). Из формулы (21) находим

$$\tau = 2, \quad \tau' = 3 \exp\left(\frac{i\pi}{3}\right), \quad (\text{П.1})$$

$$\begin{aligned} & \vartheta_1\left(\frac{t}{\tau}\right) / \exp\left(\frac{3i\pi}{16}\right) = \\ & = 2 \sum_{N=1}^{\infty} (-1)^{N+1} S_N \sin\left(\pi\left(N - \frac{1}{2}\right)t\right) \times \\ & \quad \times (\cos T_N + i \sin T_N), \\ & \vartheta_1\left(\frac{1-t}{\tau}\right) / \exp\left(\frac{3i\pi}{16}\right) = \\ & = 2 \sum_{N=1}^{\infty} (-1)^{N+1} S_N \sin\left(\pi\left(N - \frac{1}{2}\right)(1-t)\right) \times \\ & \quad \times (\cos T_N + i \sin T_N), \\ & \vartheta_1\left(\frac{\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) - t}{\tau}\right) / \exp\left(\frac{3i\pi}{16}\right) = \sum_{N=1}^{\infty} (-1)^N S_N \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \left[\exp\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left(N - \frac{1}{2}\right)\right) \times \right. \right. \\ & \quad \times \sin\left(T_N - \pi\left(N - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - t\right)\right) - \\ & \quad - \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left(N - \frac{1}{2}\right)\right) \times \\ & \quad \times \sin\left(T_N + \pi\left(N - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - t\right)\right) \left. \right] - \\ & \quad - i \left[\exp\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left(N - \frac{1}{2}\right)\right) \times \right. \\ & \quad \times \cos\left(T_N - \pi\left(N - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - t\right)\right) - \\ & \quad - \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left(N - \frac{1}{2}\right)\right) \times \\ & \quad \times \cos\left(T_N + \pi\left(N - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - t\right)\right) \left. \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vartheta_1\left(\frac{1 + \exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) - t}{\tau}\right) / \exp\left(\frac{3i\pi}{16}\right) = \\ & = \sum_{N=1}^{\infty} (-1)^{N+1} S_N \left\{ \left(\exp\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left(N - \frac{1}{2}\right) \right) \times \right. \\ & \quad \times \sin\left(T_N + \pi\left(N - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + t\right)\right) - \\ & \quad - \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left(N - \frac{1}{2}\right)\right) \times \\ & \quad \times \sin\left(T_N - \pi\left(N - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + t\right)\right) \left. \right] - \\ & \quad - i \left[\exp\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left(N - \frac{1}{2}\right)\right) \times \right. \\ & \quad \times \cos\left(T_N + \pi\left(N - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + t\right)\right) - \\ & \quad - \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left(N - \frac{1}{2}\right)\right) \times \\ & \quad \times \cos\left(T_N - \pi\left(N - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + t\right)\right) \left. \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

Значения коэффициентов A_{1-4}, C_{1-4} в точках $Z = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$

Z	A_1	A_2	A_3	A_4	C_1	C_2	C_3	C_4
0.2	544.796	-95.428	-544.756	95.545	-11368.274	-1673.776	3789.333	-663.774
0.4	70.423	-60.533	-70.353	60.661	-766.805	-289.381	255.505	-218.651
0.6	7.124	-13.678	-7.090	13.791	-49.934	-36.644	16.617	-32.006
0.8	0.964	-3.208	-0.943	3.305	-6.685	-8.223	2.220	-7.718

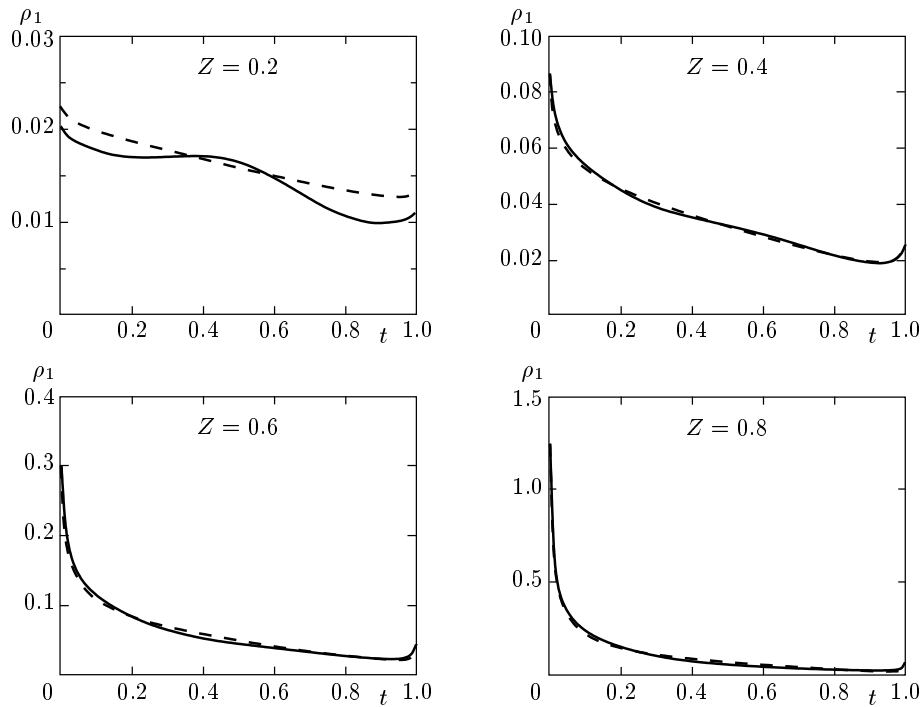


Рис. 3. Функция $\tilde{\rho}_1$ для значений $Z = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$, определяемая формулой (28), — сплошная линия, результат первой итерации — штриховая линия

$$S_N = \exp\left(-\frac{\pi 3\sqrt{3}}{4}\left(N - \frac{1}{2}\right)^2\right), \quad (\text{П.2})$$

$$T_N = \frac{3\pi}{4}N(N-1).$$

Численный расчет дает следующие значения коэффициентов $R_i, \gamma_i, D_i, \varphi_i$ (39), (41) и \mathcal{F}_0, χ_0 (45):

$$\begin{aligned} R_1 &= 0.39153, & R_2 &= 2.9492, \\ R_3 &= 6.5232, & \gamma_1 &= 0.5236, \\ \gamma_2 &= -2.0944, & \gamma_3 &= 2.0944, \\ D_1 &= 0.40528, & D_2 &= 1.6449, \\ D_3 &= 0.40591, & \varphi_1 &= -0.0022821, \\ \varphi_2 &= -3.1407, & \varphi_3 &= -0.0068458, \\ \mathcal{F}_0 &= 1.017408, & \chi_0 &= -0.26294. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Подставляя значения D_i, φ_i в уравнение (43), получаем значения коэффициентов a, b , с помощью которых определяем значения коэффициентов \mathcal{F}_i, χ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) (45):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= 6.229212, & \mathcal{F}_2 &= 19.52981, \\ \mathcal{F}_3 &= 51.3458, & \mathcal{F}_4 &= 129.1729 \\ \chi_1 &= \pi, & \chi_2 &= -0.066447, \\ \chi_3 &= 2.9839, & \chi_4 &= -0.23792. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

С точностью до членов четвертого порядка по t находим из уравнений (24), (40)

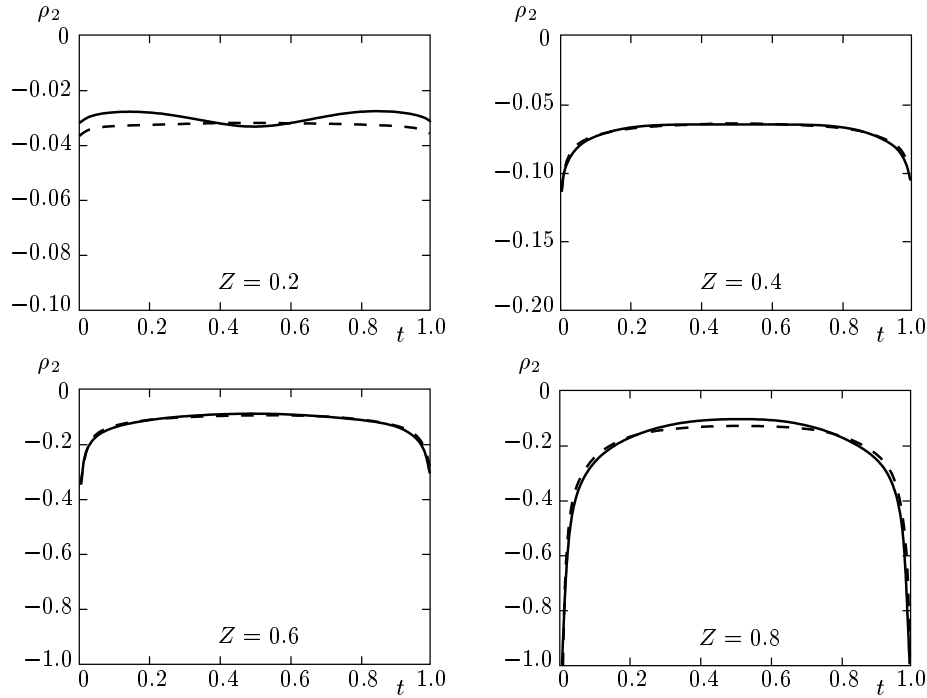


Рис. 4. Функция $\bar{\rho}_2$ для значений $Z = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$, определяемая формулой (28), — сплошная линия, результат первой итерации — штриховая линия

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_2(t + e^{i\pi/3}) &= \\ &= \frac{t^{2\kappa}}{R_1^\kappa} \left(\frac{R_1}{D_1} \right)^{2\kappa} \exp(i\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)) \times \\ &\times [1 + R_2 e^{i\gamma_2} t^2 + R_3 e^{i\gamma_3} t^4]^\kappa \times \\ &\times (1 + D_2 e^{i\varphi_2} t^2 + D_3 e^{i\varphi_3} t^4)^{-2\kappa}. \quad (\text{II.5}) \end{aligned}$$

Сравнивая выражение (45) с (II.5) для $\hat{\phi}_2(t + e^{i\pi/3})$, получаем значения параметров \mathcal{P}_i, α_i :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 e^{i\alpha_1} &= \kappa [R_2 e^{i\gamma_2} - 2D_2 e^{i\varphi_2}], \\ \mathcal{P}_2 e^{i\alpha_2} &= \kappa \left[R_3 e^{i\gamma_3} - 2D_3 e^{i\varphi_3} + \frac{\kappa-1}{2} R_2^2 e^{2i\gamma_2} - \right. \\ &\quad \left. - 2\kappa R_2 D_2 e^{i(\gamma_2+\varphi_2)} + (2\kappa+1) D_2^2 e^{2i\varphi_2} \right]. \quad (\text{II.6}) \end{aligned}$$

Аналогичным образом находим значения коэффициентов Q_i, β_i из уравнений (24), (44), (45):

$$\begin{aligned} Q_1 e^{i\beta_1} &= \\ &= \kappa [-R_2 e^{i\gamma_2} - 2\mathcal{F}_2 e^{i\chi_2} + (2\kappa+1)\mathcal{F}_1^2 e^{2i\chi_1}], \\ Q_2 e^{i\beta_2} &= \kappa \left\{ -R_3 e^{i\gamma_3} - 2\mathcal{F}_4 e^{i\chi_4} + \right. \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{aligned} &+ (2\kappa+1)\mathcal{F}_2^2 e^{2i\chi_2} + 2(2\kappa+1)\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_3 e^{i(\chi_1+\chi_3)} - \\ &- 2(\kappa+1)(2\kappa+1)\mathcal{F}_1^2 \mathcal{F}_2 e^{i(2\chi_1+\chi_2)} + \\ &+ \frac{(\kappa+1)(2\kappa+1)(2\kappa+3)}{6} \mathcal{F}_1^4 e^{4i\chi_1} + \\ &+ 2\kappa R_2 \mathcal{F}_2 e^{i(\chi_2+\gamma_2)} - \\ &\left. - \kappa(2\kappa+1)R_2 \mathcal{F}_1^2 e^{i(\gamma_2+2\chi_1)} + \frac{\kappa+1}{2} R_2^2 e^{2i\gamma_2} \right\}. \end{aligned}$$

Найдем слагаемое в плотности зарядов ρ_2 и ρ_1^1 , пропорциональное величине $t^{2\kappa}$. Из уравнений (28), (45) находим

$$\begin{aligned} \rho_2(t) \rightarrow & -\frac{2t^{2\kappa}}{R_1^\kappa} \left\{ C_1 \left[\cos(\kappa\gamma_1) - \kappa t^2 R_2 \cos(\kappa\gamma_1 - \gamma_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + t^4 \kappa \left(-R_3 \cos(\kappa\gamma_1 - \gamma_3) + \frac{\kappa+1}{2} R_2^2 \cos(\kappa\gamma_1 - 2\gamma_2) \right) \right] - \right. \\ & \left. - C_2 \left[\sin(\kappa\gamma_1) - \kappa t^2 R_2 \sin(\kappa\gamma_1 - \gamma_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + t^4 \kappa \left(-R_3 \sin(\kappa\gamma_1 - \gamma_3) + \frac{\kappa+1}{2} R_2^2 \sin(\kappa\gamma_1 - 2\gamma_2) \right) \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_3 \left[\left(\frac{R_1}{D_1} \right)^{2\kappa} \left(\cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)) + t^2 \mathcal{P}_1 \cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_1) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + t^4 \mathcal{P}_2 \cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_2) \right) + \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} \left(\cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + Q_1 t^2 \cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_1) + t^4 Q_2 \cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_2) \right) \right] + \\
& + C_4 \left[\left(\frac{R_1}{D_1} \right)^{2\kappa} \left(\sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)) + t^2 \mathcal{P}_1 \sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_1) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + t^4 \mathcal{P}_2 \sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_2) \right) - \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} \left(\sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + t^2 Q_1 \sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_1) + t^4 Q_2 \sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_2) \right) \right] \Bigg\}, \quad (\text{П.8})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_1^1(t) \rightarrow \frac{2t^{2\kappa}}{R_1^{2\kappa}} \Bigg\{ & -A_1 \left[\cos(\kappa\gamma_1) - \kappa R_2 t^2 \cos(\kappa\gamma_1 - \gamma_2) + \right. \\
& \left. + t^4 \kappa \left(-R_3 \cos(\kappa\gamma_1 - \gamma_3) + \frac{\kappa+1}{2} R_2^2 \cos(\kappa\gamma_1 - 2\gamma_2) \right) \right] + \\
& + A_2 \left[\sin(\kappa\gamma_1) - \kappa R_2 t^2 \sin(\kappa\gamma_1 - \gamma_2) + t^4 \kappa \left(-R_3 \sin(\kappa\gamma_1 - \gamma_3) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\kappa+1}{2} R_2^2 \sin(\kappa\gamma_1 - 2\gamma_2) \right) \right] + \\
& + A_3 \left[\left(\frac{R_1}{D_1} \right)^{2\kappa} \left(\cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)) + \mathcal{P}_1 t^2 \cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_1) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + t^4 \mathcal{P}_2 \cos(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_2) \right) - \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} \left(\cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + t^2 Q_1 \cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_1) + t^4 Q_2 \cos(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_2) \right) \right] + \\
& + A_4 \left[\left(\frac{R_1}{D_1} \right)^{2\kappa} \left(\sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1)) + \mathcal{P}_1 t^2 \sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_1) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mathcal{P}_2 t^4 \sin(\kappa(\gamma_1 - 2\varphi_1) + \alpha_2) \right) + \frac{2}{\mathcal{F}_0^{2\kappa}} \left(\sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + Q_1 t^2 \sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_1) + Q_2 t^4 \sin(\kappa(\gamma_1 + 2\chi_0) - \beta_2) \right) \right] \Bigg\}. \quad (\text{П.9})
\end{aligned}$$

Выражения (П.8), (П.9) были использованы нами для получения уравнений (46) для коэффициентов A_i, C_i .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
2. В. Г. Марихин, Письма в ЖЭТФ **71**, 391 (2000).
3. Yu. N. Ovchinnikov and A. M. Dyugaev, ЖЭТФ **117**, 1013 (2000).
4. I. M. Khalatnikov and A. Yu. Kamenshick, ЖЭТФ **118**, 1456 (2000).
5. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Физматгиз, Москва (1958).