

СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА

*Т. В. Дмитриева, Н. М. Рыскин**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410026, Саратов, Россия*

Поступила в редакцию 12 апреля 2001 г.

Рассматривается динамика системы трех параметрически связанных волн с запаздывающей обратной связью. Представлены результаты подробного численного моделирования процессов возникновения автомодуляции, а также режимов сложной динамики и хаоса. Изучена связь автомодуляционных режимов с процессами образования и распространения солитонов. Обнаружено, что с ростом параметра накачки синхронизация фаз взаимодействующих волн, характерная для режимов стационарной генерации и периодической автомодуляции, нарушается и происходит переход к хаосу через перемежаемость.

PACS: 05.45.Jn, 42.65.Sf, 42.65.Yj

1. ВВЕДЕНИЕ

Для современной нелинейной динамики одной из центральных проблем является изучение пространственно-временного хаоса в распределенных автоколебательных системах. В данной работе рассматривается хаотическая динамика системы трех параметрически взаимодействующих волн, распространяющихся в квадратично-нелинейной среде. Параметрическая неустойчивость играет важную роль в нелинейной оптике, гидродинамике, физике плазмы и т. д. [1–3]. Усилители и генераторы, принцип действия которых основан на этом явлении, широко используются в радио-, микроволновом и оптическом диапазонах [4–6]. С точки зрения нелинейной динамики распределенные параметрические генераторы относятся к классу распределенных автоколебательных систем с запаздывающей обратной связью. Хорошо известно, что подобные системы способны демонстрировать сложные, в том числе хаотические, режимы колебаний (см., например, [2, 7, 8]). Возможность перехода к хаосу в системе параметрически связанных волн была показана в работе [9], где рассматривалась задача об акустооптическом взаимодействии с учетом отражений акустической волны от границ. В нашей работе [10] исследовалось параметрическое взаимодействие с участием встречных

волн, которое обеспечивает внутреннюю распределенную обратную связь. Было обнаружено, что по мере увеличения амплитуды накачки режим стационарной генерации теряет устойчивость и сменяется хаотическими колебаниями, причем как сам хаотический аттрактор, так и последовательность бифуркаций, предшествующая его появлению, демонстрируют аналогию с рядом известных конечномерных моделей нелинейной динамики, в том числе с системой Лоренца [1, 2, 8].

Однако в целом сложная динамика при параметрическом взаимодействии изучена недостаточно. Для системы с попутными волнами, которая представляет наибольший интерес с практической точки зрения, результаты подробных исследований автомодуляционных и хаотических режимов в широком диапазоне управляющих параметров на сегодняшний день отсутствуют. Нет ответа даже на ключевой вопрос: по какому сценарию происходит переход к хаосу. Особый интерес представляет сопоставление такой системы с другими распределенными автоколебательными системами, динамика которых изучена достаточно подробно, такими как генераторы на основе пучковых или пучково-плазменных усилителей бегущей волны с внешней обратной связью [11–13], лазеры на свободных электронах [14–16], микроволновые генераторы обратной волны [17–19]. Как показывают исследования последних лет, подобные системы демонстриру-

*E-mail: ryskinm@info.sgu.ru

ют богатый набор различных динамических режимов, включая переходы к хаосу по всем известным сценариям, характерным для конечномерных динамических систем [17, 18]. Поэтому построение полной картины сложной динамики волнового параметрического взаимодействия будет существенным шагом для выяснения общих закономерностей хаотического поведения в распределенных автоколебательных системах. Исследования нестационарных колебательных режимов также имеют очевидное практическое значение, так как позволяют выявить механизмы различных паразитных неустойчивостей в параметрических генераторах. Кроме того, генерация хаотических сигналов представляет самостоятельный интерес в связи с перспективами их использования в системах связи, обработки информации и т. д. (см., например, [20–23]).

Целью настоящей работы является подробное теоретическое исследование сложной динамики распределенного параметрического генератора с запаздывающей внешней обратной связью. В разд. 2 обсуждается модель генератора и приводятся основные уравнения, описывающие его динамику. Исследуемая система представляет собой резонатор, заполненный квадратично-нелинейной средой, в которой распространяются три параметрически связанные волны. Условия самовозбуждения колебаний и режимы стационарной генерации на основной моде кратко обсуждаются соответственно в разд. 3 и 4. В разд. 5 представлены результаты численного моделирования. Подробно исследованы механизмы возникновения автомодуляции и перехода к хаосу.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим систему трех параметрически связанных волн, частоты и волновые числа которых удовлетворяют резонансным условиям

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3,$$

$$k_1 + k_2 = k_3.$$

Для медленно меняющихся комплексных амплитуд волн $A_{1,2,3}$ можно записать известную систему уравнений [1–3]:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} = \sigma_1 A_2^* A_3, \quad (1)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial A_2}{\partial x} = \sigma_2 A_1^* A_3, \quad (2)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial A_3}{\partial x} = -\sigma_3 A_1 A_2, \quad (3)$$

где $v_{1,2,3}$ — групповые скорости, $\sigma_{1,2,3}$ — вещественные коэффициенты нелинейного взаимодействия. Уравнения (1)–(3) описывают взаимодействие высокочастотной волны накачки (A_3) с низкочастотными сигнальной (A_1) и холостой (A_2) волнами. Будем считать, что $v_{1,2,3} > 0$, т. е. все волны распространяются в одном направлении и $\sigma_{1,2,3} > 0$, т. е. рассматриваются волны с положительной энергией. В этом случае неустойчивость является конвективной [1–3], и для превращения системы в автоколебательную необходима обратная связь, которая может быть реализована, например, за счет отражений от границ системы или за счет внешней цепи. Ограничимся наиболее простым случаем обратной связи только по сигнальной волне. Ему соответствует следующее граничное условие:

$$A_1(0, t) = R A_1(l, t - \Delta t), \quad (4)$$

где $R = \rho e^{i\psi}$ — комплексный параметр обратной связи, Δt — время запаздывания сигнала в цепи обратной связи, l — протяженность нелинейной среды. Например, при наличии отражений

$$\rho = |R_0 R_l|, \quad \psi = \arg(R_0 R_l) - 2k_1 l,$$

$$\Delta t = \frac{l}{v_1},$$

$R_{0,l}$ — комплексные коэффициенты отражения соответственно от левой и правой границ. Будем считать, что на левой границе системы волна накачки имеет постоянную амплитуду, а холостая волна отсутствует. Тогда граничные условия для этих волн имеют вид

$$A_2(0) = 0, \quad A_3(0) = A_0 = \text{const}. \quad (5)$$

Введем безразмерные координату и время

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{v_1 v_2 (t - x/v_2)}{l(v_2 - v_1)},$$

а также новые зависимые переменные

$$A'_1 = \sqrt{\frac{\sigma_3 v_1}{\sigma_1 v_3}} \frac{A_1}{A_0}, \quad A'_2 = \sqrt{\frac{\sigma_3 v_2}{\sigma_2 v_3}} \frac{A_2}{A_0}, \quad A'_3 = \frac{A_3}{A_0}.$$

Тогда исходные уравнения (1)–(3) приводятся к виду (штрихи у безразмерных переменных опускаем):

$$\frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi} = \alpha A_2^* A_3, \quad (6)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial \xi} = \alpha A_1^* A_3, \quad (7)$$

$$(1 + u) \frac{\partial A_3}{\partial \tau} + \frac{\partial A_3}{\partial \xi} = -\alpha A_1 A_2, \quad (8)$$

где

$$\alpha = A_0 l \sqrt{\frac{\sigma_1 \sigma_2}{v_1 v_2}}$$

— параметр, имеющий смысл нормированной амплитуды волны накачки на входе в систему,

$$u = \frac{v_2(v_1 - v_3)}{v_3(v_2 - v_1)}$$

— параметр, характеризующий расстройку групповых скоростей взаимодействующих волн.

Граничные условия (4), (5) в новых переменных имеют следующий вид:

$$A_1(0, \tau) = RA_1(1, \tau - \delta), \quad (9)$$

$$A_2(0, \tau) = 0, \quad A_3(0, \tau) = 1, \quad (10)$$

где

$$\delta = \frac{v_1 v_2 (\Delta t + l/v_2)}{l(v_2 - v_1)}$$

— безразмерное время запаздывания. Выберем начальные условия в виде:

$$A_3(x, 0) = 1, \quad |A_{1,2}(x, 0)| \ll 1,$$

что соответствует возбуждению генератора от малых флуктуаций холостой и сигнальной волн.

Таким образом, рассматриваемая модель параметрического генератора фактически представляет собой резонатор (одномерный или кольцевой), заполненный нелинейной средой, в которой распространяются параметрически взаимодействующие волны. Собственные частоты этого резонатора нетрудно определить. Действительно, в отсутствие накачки уравнение (6) для сигнальной волны примет вид

$$\frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi} = 0.$$

Рассмотрим возбуждение резонатора гармоническим входным сигналом $A_0 \exp(i\Omega\tau)$. Здесь Ω — отстройка от частоты точного резонанса ω_1 . Тогда вместо граничного условия (9) будем иметь

$$A_1(0, \tau) = A_0 e^{i\Omega\tau} + RA_1(1, \tau - \delta).$$

Ищем решение в виде

$$A_1 = \hat{A} \exp[i\Omega(\tau + \xi)],$$

в результате получаем

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{A_0}{1 - \rho \exp(-i\theta)} = \\ &= \frac{A_0 \exp[i \arctg(\rho \sin \theta / (1 - \rho \cos \theta))]}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta}}, \end{aligned}$$

где $\theta = \Omega(\delta + 1) - \psi$. Частоты, на которых амплитуда вынужденных колебаний максимальна, можно интерпретировать как частоты собственных мод резонатора. Они находятся из условия $\cos \theta = 1$ и имеют вид

$$\Omega_n = \frac{2\pi n + \psi}{1 + \delta}. \quad (11)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении спектр собственных частот является эквидистантным, причем межмодовое расстояние равно $2\pi/(1 + \delta)$. Очевидно, что резонансные свойства системы выражены тем сильнее, чем больше ρ .

3. УСЛОВИЯ САМОВОЗБУЖДЕНИЯ

Линейная теория параметрического генератора в литературе рассматривается достаточно подробно (см., например, [5, 6, 24, 25]). Поэтому ограничимся тем, что приведем основные сведения, необходимые для дальнейшего изложения. Прежде всего необходимо найти коэффициент усиления $G(\Omega)$ параметрического усилителя без обратной связи. Тогда условие самовозбуждения генератора, очевидно, можно представить в виде

$$G(\Omega)R = 1.$$

На начальной стадии, когда истощение накачки еще не сказывается, можно положить $A_3 = 1$ и получить из (6),(7) линеаризованную систему уравнений

$$\frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi} = \alpha A_2^*, \quad (12)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial \xi} = \alpha A_1^*. \quad (13)$$

Полагая $A_{1,2} \propto \exp[i(\Omega\tau - \kappa\xi)]$, находим дисперсионное соотношение

$$(\Omega - \kappa)\kappa = \alpha^2,$$

корни которого равны

$$\kappa_{\pm} = \frac{\Omega}{2} \pm \sqrt{\frac{\Omega^2}{4} - \alpha^2}.$$

Отсюда видно, что полоса усиления параметрического усилителя определяется из условия $\Omega^2 < 4\alpha^2$. В этой области частот имеем пару комплексно-сопряженных волновых чисел

$$\kappa_{\pm} = \frac{\Omega}{2} \pm i\lambda,$$

где

$$\lambda = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\Omega^2}{4}} \quad (14)$$

— инкремент параметрической неустойчивости. Таким образом, решения системы (12), (13) можно представить в виде суперпозиции нарастающей и затухающей волн:

$$A_1 = [a_+ \exp(\lambda\xi) + a_- \exp(-\lambda\xi)] \exp \left[i\Omega \left(\tau - \frac{\xi}{2} \right) \right],$$

$$A_2^* = [b_+ \exp(\lambda\xi) + b_- \exp(-\lambda\xi)] \exp \left[i\Omega \left(\tau - \frac{\xi}{2} \right) \right].$$

Постоянные a_{\pm} , b_{\pm} можно определить из граничных условий, которые для усилителя имеют вид

$$A_1(\xi = 0) = A_0 e^{i\Omega\tau}, \quad A_2^*(\xi = 0) = 0,$$

где A_0 — амплитуда входного сигнала. После несложных вычислений находим, что

$$A_1 = A_0 \left[\operatorname{ch}(\lambda\xi) - \frac{i\Omega}{2\lambda} \operatorname{sh}(\lambda\xi) \right] \exp \left[i\Omega \left(\tau - \frac{\xi}{2} \right) \right],$$

$$A_2^* = \frac{\alpha A_0}{\lambda} \operatorname{sh}(\lambda\xi) \exp \left[i\Omega \left(\tau - \frac{\xi}{2} \right) \right].$$

Тогда коэффициент усиления выражается как

$$G(\Omega) = \frac{A_1(\xi = 1)}{A_1(\xi = 0)} = \left[\operatorname{ch} \lambda - \frac{i\Omega}{2\lambda} \operatorname{sh} \lambda \right] \exp \left(-\frac{i\Omega}{2} \right).$$

С учетом граничного условия для сигнальной волны (9) получаем условие самовозбуждения в виде

$$1 = \rho \left[\operatorname{ch} \lambda - \frac{i\Omega}{2\lambda} \operatorname{sh} \lambda \right] \exp \left[i \left(\psi - \delta\Omega - \frac{\Omega}{2} \right) \right]. \quad (15)$$

Отсюда можно определить пороговое значение параметра накачки $\alpha = \alpha_{st}$ и частоту генерации.

Очевидно, что самовозбуждение облегчается, когда одна из собственных частот резонатора (11) близка к нулю, так как при $\Omega = 0$ инкремент параметрической неустойчивости (14) максимален, $\lambda = \alpha$. Таким образом, значения $\psi = 2\pi n$ являются оптимальными. Как следует из уравнения (15), при этом условие самовозбуждения принимает простой вид

$$\rho \operatorname{ch} \alpha_{st} = 1. \quad (16)$$

Наоборот, при $\psi \approx 2\pi n + \pi$, когда частоты двух соседних мод равноудалены от центра полосы усиления, самовозбуждение затрудняется. Численный анализ соотношения (15) показывает, что зависимость α_{st} от ψ достаточно слабая. Частота генерации близка к частоте нулевой собственной моды резонатора,

$$\Omega \approx \frac{\psi}{1 + \delta}.$$

В области неблагоприятных фаз возможно самовозбуждение на частотах двух соседних мод одновременно.

4. РЕЖИМЫ СТАЦИОНАРНОЙ ГЕНЕРАЦИИ

Решения, описывающие стационарные режимы генерации на основной моде, можно также исследовать аналитически. Для простоты рассмотрим случай $\psi = 0$ (т. е. параметр R чисто вещественный и положительный), что оптимально для самовозбуждения генератора. Частота генерации при этом равна нулю. Полагая, что амплитуды $A_{1,2,3}$ в уравнениях (6)–(8) зависят только от координаты ξ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{d\xi} &= \alpha A_2^* A_3, & \frac{dA_2}{d\xi} &= \alpha A_1^* A_3, \\ \frac{dA_3}{d\xi} &= -\alpha A_1 A_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что параметр u не входит в эти уравнения, т. е. стационарные решения не зависят от расстройки групповых скоростей (в выбранной нами нормировке переменных). В безграничной среде решения уравнений (17) хорошо известны [1, 3]. В данном случае к ним надо добавить граничные условия

$$A_1(0) = \rho A_1(1), \quad A_2(0) = 0, \quad A_3(0) = 1.$$

Переходя в (17) к вещественным амплитудам и фазам,

$$A_j = a_j e^{i\varphi_j},$$

нетрудно показать (детали вычислений мы не приводим, так как они аналогичны представленным в [10]), что выполняется соотношение $\sin \Phi = 0$, где $\Phi = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$, т. е. фазы волн в стационарном режиме синхронизованы. Далее, используя закон сохранения (соотношение Мэнли–Роу [1–4])

$$a_2^2(\xi) + a_3^2(\xi) = a_2^2(0) + a_3^2(0) = 1$$

и осуществляя замену

$$a_1 = \frac{1}{2\alpha} \frac{d\theta}{d\xi}, \quad a_2 = \sin \frac{\theta}{2}, \quad a_3 = \cos \frac{\theta}{2},$$

можно получить уравнение маятника

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = \sin \theta, \quad (18)$$

где $z = \alpha\xi$, с граничными условиями (нижний индекс означает дифференцирование по z)

$$\theta(0) = 0, \quad \theta_z(0) = \rho\theta_z(\alpha). \quad (19)$$

Обратим внимание, что уравнение (18) описывает маятник, который при $\theta = 0$ находится в неустойчивом состоянии равновесия, так что интересующим нас стационарным решениям отвечают ротационные колебания (движения с прокручиванием).

Записав для уравнения (18) интеграл энергии

$$\frac{\theta_z^2}{2} + \cos \theta = E,$$

где

$$E = 1 + \frac{\theta_z^2(0)}{2}$$

— полная энергия, можно с помощью граничных условий (19) найти, что

$$\frac{(1 - \rho^2)\theta_z^2(\alpha)}{2} = 1 - \cos \theta(\alpha). \quad (20)$$

Таким образом, на фазовой плоскости маятника стационарным решениям будут соответствовать участки фазовых траекторий, которые начинаются на вертикальной оси и заканчиваются на кривой, определяемой уравнением (20). Поскольку $a_1 = \theta_z/2$, отсюда следует, что амплитуда выходного сигнала $a_1(z = \alpha)$ достигает максимального значения

$$a_{max} = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad (21)$$

при $\theta(\alpha) = \pi$, т. е. при $z = T/4$, где T — период колебаний маятника. С учетом известного выражения для периода колебаний (см., например, [26]) находим оптимальное значение параметра α :

$$\alpha_{max} = \sqrt{1 - \rho^2} K(\sqrt{1 - \rho^2}), \quad (22)$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода. Итак, с ростом параметра накачки амплитуда выходного сигнала растет, пока α не превысит α_{max} . После этого начинается обратный процесс перекачки энергии сигнальной и холостой волн в волну накачки, и амплитуда сигнала падает.

Можно также найти пространственные распределения амплитуд волн в стационарном режиме. Записывая точное решение для ротационных колебаний [26] с учетом того, что при $\theta = 0$ маятник находится в неустойчивом положении, получим

$$\begin{aligned} \frac{\psi_z}{2} &= \frac{1}{m} \operatorname{dn}\left(\frac{z}{m} + K(m); m\right) = \\ &= \sqrt{\frac{1 - m^2}{m^2}} \frac{1}{\operatorname{dn}(z/m; m)}, \end{aligned}$$

где $\operatorname{dn}(z; m)$ — эллиптическая функция Якоби,

$$m^2 = \frac{1}{1 + \psi_z^2(0)/4} = \frac{1}{1 + a_1^2(0)}.$$

Таким образом, находим зависимость амплитуды сигнальной волны от координаты

$$a_1(\xi) = \frac{a_1(0)}{\operatorname{dn}\left(\alpha\xi\sqrt{1 + a_1^2(0)}; (1 + a_1^2(0))^{-1/2}\right)}.$$

Это соотношение следует рассматривать совместно с граничным условием $a_1(0) = \rho a_1(1)$. Поэтому найти точные стационарные решения в явном виде, как это было сделано в [10] для генератора встречной волны, в данном случае не удастся. Можно решить получившиеся уравнения графически. Такой подход аналогичен анализу при помощи отображения последования, которое было предложено в работе [24]. В данном случае отображение будет иметь вид

$$a_{n+1} = \frac{\rho a_n}{\operatorname{dn}\left(\alpha\sqrt{1 + a_n^2}; (1 + a_n^2)^{-1/2}\right)}, \quad (23)$$

где $a_n = a_1(\xi = 0, \tau = n(1 + \delta))$. Неподвижные точки отображения (23) соответствуют амплитудам стационарной генерации. С его помощью можно также провести анализ устойчивости стационарных режимов и процессов установления колебаний [24]. Однако корректно определить условия устойчивости данный метод не позволяет. Целесообразно прибегнуть к непосредственному численному моделированию нестационарных уравнений, результаты которого приведены в следующем разделе.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

5.1. Возникновение автомодуляции

Численное интегрирование нестационарных уравнений (6)–(8) с граничными условиями (9), (10) проводилось при помощи конечно-разностной схемы второго порядка точности, аналогичной использовавшейся в [10]. Прежде всего было исследовано самовозбуждение колебаний. Результаты расчетов (пороговое значение параметра накачки и частота генерации) полностью согласуются с теоретическими (разд. 3). Следует отметить, что в неблагоприятной области фаз параметра обратной связи $\psi \approx \pi$ возможно самовозбуждение на частотах двух соседних собственных мод. Частота установившихся колебаний зависит от начальных условий: «выживает» та мода, начальная амплитуда которой была больше. Такая картина типична для процессов конкуренции сильно связанных мод [1].

Поскольку исследуемая система является распределенной и характеризуется большим количеством

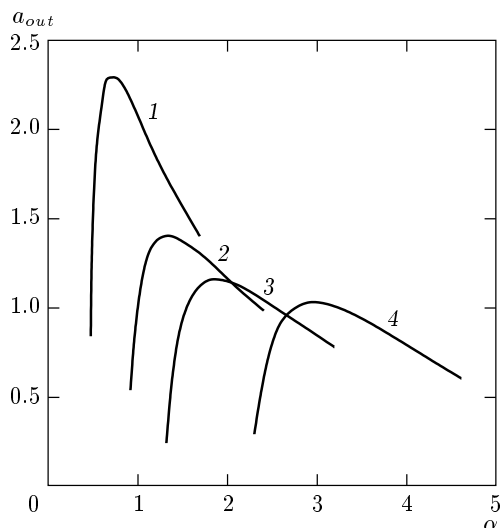


Рис. 1. Зависимость амплитуды стационарной генерации от α при различных ρ : $\rho = 0.9$ (1), 0.7 (2), 0.5 (3), 0.2 (4)

управляющих параметров, в дальнейшем мы ограничимся случаем $\psi = 0$. Напомним, что это соответствует ситуации, когда несущая частота сигнальной волны, для которой точно выполняются условия трехволнового параметрического резонанса, совпадает с одной из собственных частот резонатора (11). При этом значение α_{st} определяется из соотношения (16), а основная частота равна нулю. Будем также считать, что групповые скорости волны накачки и холостой волны одинаковы, т. е. параметр расстройки групповых скоростей $u = -1$. Такой выбор параметров соответствует работе [9].

При не слишком больших превышениях над порогом генерации реализуются стационарные режимы одночастотных колебаний. На начальной стадии переходного процесса быстро устанавливается состояние, в котором $\sin \Phi = 0$, т. е. фазы волн синхронизуются. После этого происходит установление амплитуды колебаний. Отметим, что после того, как наступила синхронизация фаз, амплитуды волн можно считать чисто вещественными. Рассчитанные зависимости амплитуды выходного сигнала $a_{out} = a_1(\xi = 1)$ от параметра α приведены на рис. 1. Они полностью согласуются с теоретическими результатами (разд. 4). В частности, максимальное значение амплитуды и соответствующее значение α удовлетворяют формулам (21), (22).

С ростом параметра α одночастотный режим теряет устойчивость. Возникает автомодуляция, т. е. периодические осцилляции амплитуды выходного

сигнала. В спектре появляется пара сателлитов, симметрично отстоящих от основной частоты. Как показали проведенные исследования, автомодуляция связана с возбуждением колебаний на высших собственных модах резонатора. Значения частот автомодуляции Ω_{sm} достаточно близки к частотам собственных мод (11). При малых δ возбуждаются моды с номерами $n = \pm 1$, частоты которых оказываются наиболее близкими к частоте, на которой инкремент автомодуляционной неустойчивости максимален. Как показывают расчеты, эта частота примерно равна 2π . С ростом δ собственные частоты (11) уменьшаются. Поэтому инкремент неустойчивости падает и, соответственно, значение порога автомодуляции α_{sm} слегка увеличивается. Наоборот, частоты $\Omega_{\pm 2}$ приближаются к оптимальной и инкремент этих мод начинает возрастать. В области $\delta \approx 0.8-0.9$ происходит одновременное возбуждение двух пар паразитных мод, так что автомодуляция в момент своего возникновения является квазипериодической. Однако с ростом α одна из пар паразитных мод подавляется в процессе конкуренции, и автомодуляция вновь становится периодической.

При $\delta > 0.9$ вторая мода находится в более выигрышных условиях, чем первая, и подавляет ее (значение α_{sm} в этой области несколько уменьшается). Эффекты конкуренции мод иллюстрирует рис. 2, где приведена типичная картина переходного процесса ($\delta = 1$). На начальной стадии происходит быстрое нарастание основной (нулевой) моды, затем — возбуждение мод с $n = \pm 1$, что приводит к глубоким осцилляциям амплитуды. Постепенно эти осцилляции сменяются более высокочастотными, что соответствует медленному возбуждению мод с $n = \pm 2$.

После того как превышен порог автомодуляции, переходный процесс, изображенный на рис. 2, завершается формированием солитоноподобного импульса, периодически распространяющегося вдоль системы. На рис. 3 приведена соответствующая картина пространственно-временной динамики. Аналогичное поведение было описано в работе [9]. Отметим, что автомодуляция возникает жестко, так как сразу устанавливается режим глубокой периодической модуляции амплитуды. Данный режим является сильно нелинейным и характеризуется появлением в спектре большого числа гармоник частоты автомодуляции Ω_{sm} . При выбранных значениях параметров величина $\Omega_{sm} \approx 2\pi$. Поскольку спектр собственных мод резонатора эквидистантный, высшие гармоники близки к частотам мод Ω_n , $n = 4, 6, \dots$. Таким образом, реализуется режим самосинхрони-

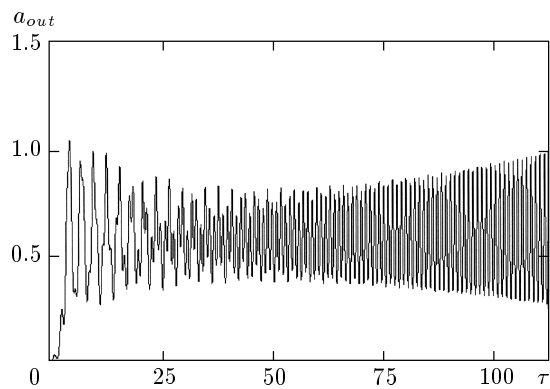


Рис. 2. Зависимость амплитуды выходного сигнала a_{out} от времени в ходе переходного процесса: $\rho = 0.2, \alpha = 4.75, \delta = 1$

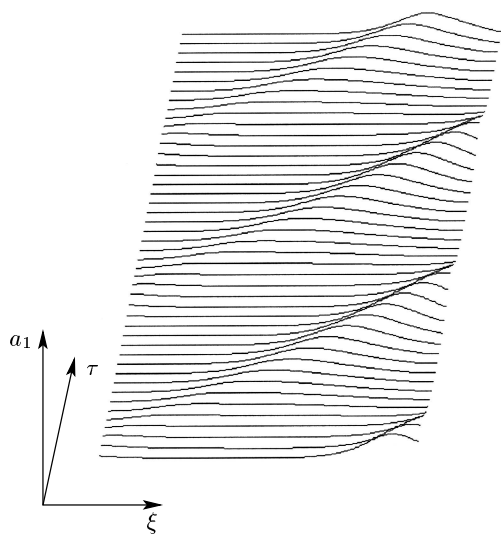


Рис. 3. Пространственно-временная динамика амплитуды сигнальной волны в режиме периодической автомодуляции. Значения параметров те же, что и на рис. 2

зации мод, характерный и для других резонансных генераторов [2, 15, 16]. Одновременное возбуждение большого числа мод резонатора, частоты которых жестко связаны между собой, приводит к образованию солитона. Подобные процессы представляют практический интерес в связи с проблемой генерации ультракоротких импульсов [27].

Как показали расчеты, дальнейшее увеличение времени запаздывания δ приводит к постепенному переходу к автомодуляции на базе мод со все более высокими номерами, причем одновременно возбуждается все большее число мод. Очевидно, что это обусловлено сгущением спектра собственных частот

резонатора.

По терминологии, принятой в теории распределенных автоколебательных систем [7, 11, 12, 14], описанный механизм автомодуляции называется частотным или фазовым, поскольку на начальной стадии развития неустойчивости доминируют осцилляции фазы колебаний (конечно, это не означает, что осцилляции амплитуды отсутствуют). Частотный механизм характерен для многих распределенных автоколебательных систем таких, например, как пучковые и пучково-плазменные генераторы с запаздыванием [11–13] и лазеры на свободных электронах [15, 16]. Другой механизм, называемый амплитудным, реализуется при наличии на амплитудной характеристике усилителя крутого падающего участка [7, 11, 12, 14]. Амплитудная автомодуляция возникает мягко, а ее период близок к удвоенному характерному времени обратной связи (для рассматриваемой системы это время равно $1 + \delta$). При частотном механизме происходит возбуждение нескольких собственных мод колебательной системы, а амплитудный связан с модуляцией только одной моды¹⁾. В данном случае паразитные моды возбуждаются раньше, чем успевает проявиться амплитудный механизм неустойчивости. Об этом убедительно свидетельствуют как частоты автомодуляционных спутников, так и жесткий характер их возникновения. Следует, однако, заметить, что в режиме автомодуляции на начальной стадии переходного процесса по-прежнему устанавливается синхронизация фаз, так что осциллируют только амплитуды. Поэтому принятая терминология представляется не вполне удачной.

Как известно, частотный механизм проявляется в случае, когда амплитудно-частотная характеристика усилителя вблизи основной частоты имеет вогнутый, седлообразный участок [7, 11, 12]. На рис. 4 приведены результаты расчетов для усилителя без обратной связи в режиме усиления гармонического сигнала $A_1(\xi = 0) = A_0 \exp(i\Omega\tau)$.

При малых A_0 (кривая 1) амплитудно-частотная характеристика является выпуклой в достаточно широкой области вблизи максимума, приходящегося на частоту точного резонанса $\Omega = 0$, и соответствует линейной теории (разд. 3). С ростом A_0 амплитуда выходного сигнала увеличивается (кривая 2), пока не достигнет максимально возможного значения $\sqrt{1 + |A_0|^2}$, соответствующего полной перекачке энергии накачки в сигнальную волну. После это-

¹⁾ Такая неустойчивость приближенно описывалась бы отображением (23) при $da_{n+1}/da_n < -1$.

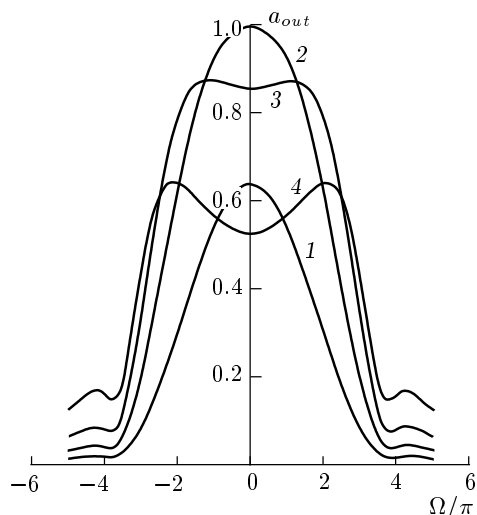


Рис. 4. Зависимость амплитуды выходного сигнала параметрического усилителя от частоты при $\alpha = 5.0$ и различных амплитудах входного сигнала: $A_0 = 0.01$ (1), 0.025 (2), 0.05 (3), 0.1 (4)

го на основной частоте начинается обратный процесс регенерации накачки и выходной сигнал уменьшается, тогда как на соседних частотах, где инкремент неустойчивости меньше, этот эффект еще не сказывается. Таким образом, амплитудно-частотная характеристика становится локально вогнутой вблизи $\Omega = 0$ (кривые 3, 4), что подтверждает наличие частотного механизма потери устойчивости.

5.2. Разрушение фазовой синхронизации и переход к хаосу

Описанные выше режимы периодической автомодуляции устойчивы в некотором диапазоне изменения параметра накачки α выше порога неустойчивости. Однако с увеличением α становится возможным образование двух солитонов, укладывающихся вдоль длины системы. При этом в некоторых точках амплитуда сигнальной волны $a_1(\xi) = 0$, что приводит к возникновению состояний с быстро меняющимися фазами. В результате синхронизация фаз нарушается, т. е. $\sin \Phi \neq 0$. Быстрые осцилляции фазы приводят к тому, что эффективность взаимодействия резко падает и осцилляции амплитуд уменьшаются. При этом фазовая синхронизация вновь восстанавливается. Таким образом, в некоторые моменты времени фазовая траектория соскакивает с многообразия $\sin \Phi = 0$, а затем возвращается на него. Аналогичное поведение характерно и для системы со встречными волнами [10].

Описанную картину иллюстрирует рис. 5, на котором приведены временные реализации амплитуды выходного сигнала и фазы $\Phi_{out} = \Phi(\xi = 1)$. Хорошо видны чередующиеся участки нарастания осциллирующей амплитуды, когда фазы синхронизованы (в этих режимах при прохождении солитона через правую границу системы Φ_{out} скачком изменяется на π), и участки нерегулярных колебаний, соответствующие разрушению фазовой синхронизации. Таким образом, колебания становятся хаотическими, причем переход к хаосу происходит через перемежаемость. Спектр выходного сигнала становится сплошным, хотя и содержит отчетливо выделенные компоненты на частотах собственных мод резонатора. Отметим, что переход через перемежаемость характерен и для систем, рассмотренных в работах [11–13].

Поскольку в хаотических режимах $\sin \Phi \neq 0$, считать амплитуды взаимодействующих волн чисто вещественными, как это было сделано в работе [9], уже нельзя. Поэтому хаотические режимы, описанные в [9], вообще говоря, неустойчивы. Тем не менее, поскольку длительность переходных процессов велика, их скорее следует считать метастабильными. Возможно, они могут быть реализованы, например, при импульсной накачке.

Общую картину помогает представить карта динамических режимов на плоскости параметров ρ, α , которая приведена на рис. 6. На ней обозначены границы самовозбуждения (см. формулу (16)), автомодуляции и перехода к хаосу. Однако следует подчеркнуть, что в области хаоса имеются многочисленные «окна» регулярного поведения. Детальное исследование структуры хаотических режимов представляет самостоятельный интерес.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Распределенный параметрический генератор, рассматриваемый в настоящей работе, является типичным примером распределенной автоколебательной системы с запаздыванием и демонстрирует общий для подобных систем переход от одночастотных колебаний к многочастотным и хаотическим по мере увеличения параметра неравновесности. В данной работе подробно изучен механизм возникновения автомодуляции. Показано, что автомодуляция вызвана возбуждением еще одной или нескольких пар собственных мод резонатора, номера которых зависят от времени запаздывания δ . Этот механизм называют частотным; он связан с появлением провала на амплитудно-частотной

Рис. 5. Временные реализации амплитуды (a) и фазы (b) выходного сигнала в режиме перемежаемости: $\rho = 0.2$, $\alpha = 5.2$, $\delta = 1$

характеристике усилителя в окрестности основной частоты. Развитие неустойчивости приводит к образованию солитоноподобного импульса, периодически распространяющегося вдоль системы. Автомодаляция возникает жестко, т. е. сразу возникают глубокие осцилляции амплитуды выходного сигнала.

По мере увеличения параметра накачки про-

исходит переход к хаосу через перемежаемость, вызванный разрушением фазовой синхронизации за счет появления состояний с быстро осциллирующими фазами. Сравнение с результатами работ [11–13] позволяет предположить, что такое поведение достаточно типично для распределенной автоколебательной системы с частотным механизмом автомодаляции, тогда как при амплитудном

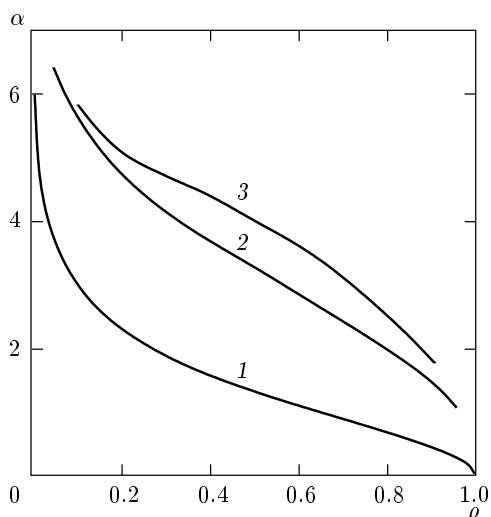


Рис. 6. Карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров: 1 — граница самовозбуждения автоколебаний; 2 — граница возникновения автомодуляции; 3 — граница перехода к хаосу через перемежаемость

механизме переход к хаосу, как правило, происходит по сценарию Фейгенбаума [7, 11, 12, 17, 18].

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (грант № 992604) и Американского фонда развития и поддержки гражданских исследований (CRDF), Award № REC-006.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, Наука, Москва (1984).
2. П. С. Ланда, *Нелинейные колебания и волны*, Наука, Москва (1997).
3. Н. М. Рыскин, Д. И. Трубецков, *Нелинейные волны*, Наука, Москва (2000).
4. У. Люнселл, *Связанные и параметрические колебания в электронике*, Изд-во ИЛ, Москва (1963).
5. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, *УФН* **88**, 439 (1966).
6. В. Г. Дмитриев, Л. В. Тарасов, *Прикладная нелинейная оптика*, Сов. радио, Москва (1985).
7. С. П. Кузнецов, *Изв. ВУЗов, радиофизика* **25**, 1410 (1982).
8. Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда, *Стохастические и хаотические колебания*, Наука, Москва (1987).
9. Г. Н. Бурлак, К. Ишкабулов, *ЖЭТФ* **109**, 774 (1996).
10. Т. В. Дмитриева, Н. М. Рыскин, *ЖЭТФ* **116**, 1871 (1999).
11. Ю. П. Блюх, А. В. Бородкин, М. Г. Любарский, И. Н. Онищенко, Я. Б. Файнберг, *Изв. ВУЗов, прикладная нелинейная динамика* **1** (1-2), 34 (1993).
12. Ю. П. Блюх, М. Г. Любарский, В. О. Подобинский, Я. Б. Файнберг, *Физика плазмы* **20**, 718 (1994).
13. Yu. P. Bliokh, M. G. Liubarskii, V. O. Podobinskii, Ya. B. Fainberg, G. S. Nusinovich, S. Kobayashi, Y. Carmel, and V. L. Granatstein, *Phys. Plasmas* **5**, 4061 (1998).
14. T. M. Antonsen and B. Levush, *Phys. Fluids B* **1**, 1097 (1989).
15. N. S. Ginzburg and M. I. Petelin, *Int. J. Electronics* **59**, 291 (1985).
16. Н. С. Гинзбург, М. И. Петелин, *Изв. ВУЗов, прикладная нелинейная динамика* **2** (6), 3 (1994).
17. Н. М. Рыскин, В. Н. Титов, Д. И. Трубецков, *ДАН* **358**, 620 (1998).
18. Н. М. Рыскин, В. Н. Титов, *Изв. ВУЗов, прикладная нелинейная динамика* **6** (1), 75 (1998).
19. N. M. Ryskin and V. N. Titov, *J. Comm. Technol. Electr.* **45** (Suppl. 1), S46 (2000).
20. L. Kosarev, K. S. Halle, K. Eckert, L. O. Chua, and U. Parlitz, *Int. J. Bifurcations and Chaos* **2**, 709 (1992).
21. S. Hayes, C. Grebogy, and E. Ott, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3031 (1993).
22. А. С. Дмитриев, *Радиотехника и электроника* **38**, 1 (1993).
23. M. Hasler, *Int. J. Bifurcations and Chaos* **8**, 647 (1998).
24. М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, *Изв. ВУЗов, радиофизика* **13**, 631 (1970).
25. А. Ярив, *Квантовая электроника*, Сов. радио, Москва (1980).
26. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса*, Наука, Москва (1988).
27. E. Ibragimov, A. A. Struthers, D. J. Kaup, J. D. Khaydarov, and K. D. Singer, *Phys. Rev. E* **59**, 6122 (1999).