

МЕХАНИЗМ СОХРАНЕНИЯ СЕПАРАТРИСЫ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА В УСЛОВИЯХ СИЛЬНОГО ХАОСА

В. В. Вечеславов, Б. В. Чириков***

*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 21 августа 2000 г.

Предлагается простая приближенная теория достаточно общего механизма сохранения сепаратрисы нелинейного резонанса, которое приводит к полному подавлению глобальной диффузии несмотря на сильный локальный хаос движения. Эта теория позволяет построить полную зависимость угла расщепления сепаратрисы от параметров системы и найти, в частности, те их значения, при которых сепаратриса остается нерасщепленной. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретические выводы для определенного класса динамических гамильтоновых систем. Обнаружены новые особенности подавления хаоса в таких системах. В заключение обсуждается область применения предлагаемой теории.

PACS: 05.45.+b, 05.60.+w

1. ВВЕДЕНИЕ: НЕОЖИДАННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЕПАРАТРИСЫ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

Динамика нелинейных гамильтоновых систем определяется взаимодействием нелинейных резонансов, каждый из которых в отличие от линейного резонанса занимает при малом возмущении относительно небольшую область фазового пространства, ограниченную так называемой сепаратрисой (см., например, [1–4]). Для одиночного резонанса сепаратриса представляет собой траекторию (в общем случае поверхность), отделяющую колебания фазы (внутри резонанса) от ее вращения (вне резонанса)¹⁾. На самом деле это две пространственно-совпадающие ветви, отвечающие ходу времени соответственно вперед и назад. Каждая ветвь является непрерывной траекторией с бесконечным периодом движения, которая выходит из положения неустойчивого равновесия (седло) и затем асимптотически к нему же приближается. В типичной (т. е. неинтегрируемой) гамильтоновой системе любое сколь угодно малое возмущение, например от

других (хотя бы одного) нелинейных резонансов, приводит к расщеплению сепаратрисы на две пересекающиеся ветви, которые по-прежнему выходят из седла навстречу друг другу, но более к нему не возвращаются. Свободные концы ветвей расщепленной сепаратрисы образуют бесконечное число петель неограниченно возрастающей длины, которые заполняют при этом узкую область вблизи невозмущенной сепаратрисы, формируя так называемый хаотический слой. Перекрывание хаотических слоев всех резонансов системы приводит к возникновению глобального хаоса и, в частности, диффузии, ограниченной только точными интегралами движения, например, поверхностью постоянной энергии.

Условия образования глобального хаоса зависят как от величины, так и от гладкости возмущения (по фазе). Последняя характеризуется скоростью убывания его фурье-амплитуд. Для аналитического возмущения убывание является экспоненциальным. В этом случае всегда существует критическая величина возмущения ϵ_{cr} , такая что глобальная диффузия возникает лишь при $\epsilon \gtrsim \epsilon_{cr}$. Если же $\epsilon \lesssim \epsilon_{cr}$, хаос локализован в относительно узких хаотических слоях, которые образуются при любом $\epsilon > 0$. При числе степеней свободы $N > 2$ глобальная диффузия все же возможна, однако только для специальных начальных условий и с очень малой скоростью (так

*E-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

**E-mail: chirikov@inp.nsk.su

¹⁾ Здесь и ниже мы используем канонические переменные действие–фаза.

называемая диффузия Арнольда [2]). При $\epsilon \rightarrow 0$ как скорость диффузии, так и мера ее области убывают экспоненциально по параметру $1/\epsilon$.

Характер движения существенно изменяется для гладкого возмущения гамильтониана, фурье-амплитуды которого убывают как некоторая степень γ их номера (см., например, [5] и ссылки там). В этом случае существует критическая гладкость γ_{cr} , такая что только при $\gamma > \gamma_{cr}$ происходит подавление глобальной диффузии при достаточно малом возмущении [6]. Существенно, что противоположное утверждение, вообще говоря, несправедливо, т. е. при $\gamma < \gamma_{cr}$ глобальная диффузия обычно наблюдается в численных экспериментах, однако известны и обратные примеры, когда траектория движения оставалась локализованной в некоторой части фазового пространства в течение всего весьма длинного времени счета (см., например, [7, 8]).

Недавно Овсянников нашел относительно простой точно решаемый пример (см. (2.1) ниже), для которого ему удалось доказать теорему о сохранении единой (нерасщепленной) сепаратрисы при специальных значениях параметра возмущения [9]. Эта теорема приведена полностью в [10] (Приложение). Интенсивные исследования модели (2.1), которую мы будем называть симметричным кусочно-линейным отображением, немедленно показали, что самым важным и неожиданным в этой теореме оказалось сохранение сепаратрисы в условиях сильного хаоса, а не в каком-то исключительном случае полностью интегрируемой системы без всякого хаоса вообще. Более того, при специальных значениях параметра возмущения, найденных как Овсянниковым, так и одним из авторов [10–12], сепаратрисы нелинейных резонансов не только не расщепляются, но и образуют непроходимые барьеры для других траекторий, т. е. полностью подавляют глобальную диффузию. И это несмотря на то, что гладкость возмущения в модели симметричного кусочно-линейного отображения существенно меньше критической и можно было бы ожидать глобальную диффузию при любой величине возмущения.

Между тем, изучение литературы показало, что значительно раньше такая же модель была подробно исследована математически Булитом [13] (см. также [14]). Хотя Овсянников доказал свою теорему независимо, такое совпадение моделей не случайно, поскольку решение линейного (хотя бы и кусочно) отображения существенно упрощает задачу. Отметим, что полное решение даже линейного отображения, полученное Овсянниковым, возможно только при сохранении сепаратрисы, так как в противном

случае две ветви расщепленной сепаратрисы образуют случайные траектории. По этой же причине модель симметричного кусочно-линейного отображения не может быть упрощена до чисто линейного отображения типа отображения Арнольда, в котором сепаратрисы нелинейных резонансов всегда расщеплены (см. разд. 3). Математические работы Булита и Овсянникова ограничены поэтому исследованием только самих инвариантных кривых нового типа (с рациональным числом вращения ν , включая сепаратрисы), первые примеры которых были приведены в [14].

В настоящей работе (как и в предшествующих работах этого направления [10–12]) мы опираемся, в основном, на численные эксперименты, что позволяет нам исследовать и окрестности инвариантных кривых как при различных начальных условиях движения, так и при различных параметрах модели. В этом отношении наш подход аналогичен исследованию [8] для другой модели.

2. МОДЕЛЬ

Овсянников рассматривал разностное уравнение, которое эквивалентно следующему двумерному отображению в канонических переменных действие p – фаза x :

$$\bar{p} = p + Kf(x), \quad \bar{x} = x + \bar{p}. \quad (2.1)$$

Здесь $K = \epsilon > 0$ – параметр возмущения (не обязательно малый), а «сила» $f(x)$ имеет форму антисимметричной ($f(-y) = -f(y)$, $y = x - 1/2$) кусочно-линейной «пилы» с периодом 1 (см. (2.2) ниже).

Пожалуй, самым неожиданным в этом примере является то, что гладкость гамильтониана (производящей функции) отображения (2.1) $\gamma = 1 < \gamma_{cr} \leq 4$ [6] существенно меньше критической. Иными словами, для определенного счетного множества специальных значений $K = K_m$ нерасщепленная сепаратриса «погружена в море» сильного хаоса и тем не менее сохраняется и запирает глобальную диффузию [10, 11]!

Поскольку на компьютере невозможно задать точное значение K , следующим решающим шагом было исследование поведения (расщепленной) сепаратрисы и других траекторий при малом отклонении $|K - K_m| \rightarrow 0$, что возможно только в численных экспериментах. Первые же исследования [12] показали, что угол расщепления сепаратрисы меняет знак вместе с разностью $K - K_m$, причем при нечетных m этот угол плавно проходит через нуль, а при четных — скачком меняет знак (см. рис. 1 в [11] и рис. 2

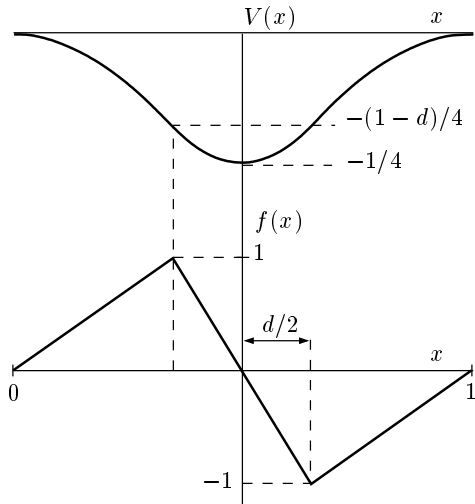


Рис. 1. Схема потенциала $V(x)$ и силы $f(x) = -dV/dx$ с периодом 1 для семейства моделей (2.2) с параметром d

ниже). Прежде всего, это позволило сразу же и относительно просто найти множество других специальных K_m , при которых сепаратриса сохраняется. Вместе с тем такое необычное поведение угла расщепления подсказало и динамический механизм сохранения сепаратрисы, что является основным предметом обсуждения в настоящей работе.

Удобно рассмотреть сразу целое семейство пилообразных возмущений, заданных силой²⁾ (см. рис. 1)

$$f(x) = \begin{cases} 2x/(1-d), & \text{если } |x| \leq (1-d)/2, \\ -2y/d, & \text{если } |y| \leq d/2, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $y = x - 1/2$, а $d < 1$ — расстояние между «зубьями» пилы $|f(x)| = 1$, расположенными в точках $y = y_{\pm} = \pm d/2$. Наиболее изученный частный случай симметричного кусочно-линейного отображения соответствует значению $d = 1/2$. В этих двух точках сила имеет сингулярность — разрыв первой производной $f' = df/dx$:

$$\Delta f' = \pm \frac{2}{d(1-d)}. \quad (2.3)$$

Исходная идея о механизме сохранения сепаратрисы состояла в том, что возмущение (сила) имеет две сингулярности, которые интерферируют между собой и, в частности, могут компенсировать друг друга, или сокращаться — термин, введенный в [8], где,

по-видимому, впервые был предложен и использован подобный механизм. Особенность нашего подхода состоит в том, что мы интересуемся действием такого механизма (и даем теорию) непосредственно для сепаратрисы нелинейного резонанса, тогда как в [8] такие сокращения определялись для любых произвольных траекторий и использовались как наводящее соображение для поиска среди них путем численных экспериментов возможных инвариантных кривых (не сепаратрис).

Для построения теории удобно перейти от исходного отображения (2.1) к непрерывной системе с гамильтонианом, явно зависящим от времени (см. [2–4, 10]):

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + KV(x)\delta_1(t) = H_0(x, p) + H_1(x, t), \quad (2.4)$$

где $\delta_1(t)$ обозначает δ -функцию периода 1. Невозмущенный гамильтониан

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + KV(x) \quad (2.5)$$

описывает основной (целый) резонанс в (2.1), а

$$H_1(x, t) = KV(x)(\delta_1(t) - 1) \quad (2.6)$$

— его возмущение (с прежним периодом $T_1 = 1$ и частотой $\Omega = 2\pi/T_1 = 2\pi$) от всех остальных целых резонансов.

Потенциал силы (2.2) равен

$$V(x) = - \int f(x) dx = \begin{cases} -x^2/(1-d), & \text{если } |x| \leq (1-d)/2, \\ (4y^2 - d)/4d, & \text{если } |y| \leq d/2. \end{cases} \quad (2.7)$$

Максимальное значение потенциала $V_{max} = 0$ определяет невозмущенную сепаратрису основного резонанса:

$$p_s(x) = \pm \sqrt{-2KV(x)}, \quad (2.8)$$

а минимальное значение $V_{min} = -1/4$ дает полную глубину U невозмущенной потенциальной «ямы»:

$$U = K(V_{max} - V_{min}) = \frac{K}{4}. \quad (2.9)$$

Особенность возмущения (2.6) состоит в том, что оно порядка невозмущенного гамильтониана независимо от параметра возмущения $K \rightarrow 0$. Тем не менее теория возмущений, вообще говоря, применима, если другой параметр возмущения

$$\lambda = \frac{\Omega}{\omega_0} \gg 1 \quad (2.10)$$

²⁾ Аналогичное семейство кратко упомянуто в [13].

является большим. Здесь $\omega_0 = \sqrt{2K/d}$ — частота малых колебаний на основном резонансе (2.5), а $\Omega = 2\pi$ — частота внешнего возмущения. Именно этот параметр «адиабатичности» и определяет расщепление сепаратрисы. Использование в данном случае термина «адиабатичность» подчеркивает, что эффект высокочастотного возмущения качественно такой же, как и низкочастотного.

Для исследования движения вблизи сепаратрисы найдем прежде всего изменение невозмущенного гамильтониана (2.5) для периода движения в малой окрестности невозмущенной сепаратрисы. Следуя [10], получаем

$$\begin{aligned} \Delta H_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \{H_1, H_0\} \approx \\ &\approx K \int_{-\infty}^{\infty} dt p_s f(x_s) (\delta_1(t) - 1). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В последнем выражении движение по близкой к сепаратрисе траектории приближенно заменено движением по невозмущенной сепаратрисе (отсюда бесконечные пределы интегрирования).

Поскольку сила $f(x)$ имеет две сингулярности (2.3) в точках $y_{\pm} = \pm d/2$, интегрируем (2.11) два раза по частям, так что

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \approx \frac{d^2 f(y)}{dy^2} p^2 = p^2 \Delta f' \delta_1(y - y_{\pm}), \quad (2.12)$$

где $p = dx/dt$ и оставлен только главный член с δ -функцией. В результате получаем

$$\Delta H_0 \approx K p_{\pm}^2 \Delta f' [\psi(t_+) - \psi(t_-)] = \frac{K^2}{d} \Delta \psi, \quad (2.13)$$

где t_{\pm} — моменты времени прохождения сингулярностей в точках y_{\pm} , а функция $\psi(t)$ определяется уравнением

$$\ddot{\psi} = \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \delta_1(t) - 1. \quad (2.14)$$

Для вычисления разности $\Delta \psi = \psi(t_+) - \psi(t_-)$ перейдем к новым переменным Δ и t_0 , где

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{t_+ - t_-}{2} = \sqrt{\frac{d}{2K}} \arcsin \sqrt{d} = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \sqrt{d} \end{aligned} \quad (2.15)$$

— половина времени движения между сингулярностями, а

$$t_0 = \frac{t_+ + t_-}{2} \quad (2.16)$$

— момент прохождения минимума потенциала ($y = 0$), где обычно и исследуется пересечение ветвей расщепленной сепаратрисы.

В общем случае $\Delta \psi$ не факторизуется в этих переменных, однако это возможно при дополнительном ограничении: $|t_0| \leq \Delta$ (> 0). В таком случае

$$\Delta \psi = t_0(1 - 2\Delta). \quad (2.17)$$

Угол $\alpha \ll 1$ между ветвями расщепленной сепаратрисы определяется приближенной формулой (см. [15, 12])

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \approx \frac{dp}{dy} \approx \frac{dH_0}{p_0^2 dt_0} \approx \frac{2K}{d}(1 - 2\Delta). \quad (2.18)$$

Здесь использованы соотношения: $dp = dH_0/p$, $dy = p dt$ и

$$\frac{dH_0}{dt} = \Delta \dot{\psi} = 1 - 2\Delta,$$

где все величины берутся в точке пересечения ветвей сепаратрисы ($y = 0$). Зависимость $\alpha(K, d)$ принимает исключительно простой вид:

$$\alpha_s \approx (1 - 2\lambda_s) \quad (2.19)$$

в преобразованных переменных

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \alpha \frac{d}{2K} = \alpha \frac{\lambda^2}{4\pi^2}, \\ \lambda_s &= \Delta = \frac{\lambda}{2\pi} \arcsin \sqrt{d} \pmod{1}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Подчеркнем, что осцилляции $\alpha(K)$ появились как раз вследствие двух особенностей в гамильтониане, интерферирующих между собой.

Соотношение (2.19) и является основным результатом нашей работы. Оно объясняет и описывает новое явление подавления хаоса сепаратрисы, а значит, и глобальной диффузии в определенном классе гамильтоновых систем.

Сравнение с результатами численных экспериментов приведено на рис. 2. Весьма высокая точность простой теории (при $K \ll 1$) ограничивается небольшим сдвигом критических значений $K = K_m$. В примере Овсянникова (симметричное кусочно-линейное отображение, $d = 1/2$) его можно получить и без численных экспериментов с помощью точных выражений для K_m , как предсказанных в [9], так и найденных позже в работе [12]:

$$K_m = \frac{\pi^2}{16m^2} \left(1 - \frac{\pi^2}{48m^2} + \dots \right) \approx \frac{\pi^2}{16m^2}. \quad (2.21)$$

Последний член представляет нашу теорию, а в скобках указана поправка первого порядка. Теория объясняет также неожиданный разрыв функции $\alpha(\lambda_s)$

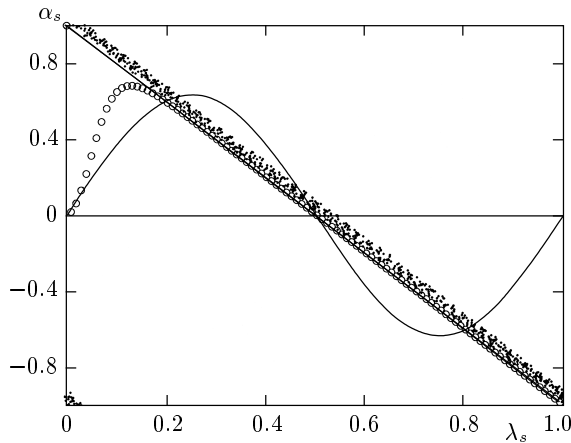


Рис. 2. Периодическая зависимость угла расщепления сепаратрисы α от параметров K и d в нормированных переменных $\alpha_s(\lambda_s)$ (2.20): $d = 0.25, 0.5, 0.75, 0.999$ (точки), $d = 0.01$ (кружки) по данным численного счета. Сплошная прямая — теория (2.19), кривая — первое приближение $\delta_1(t) - 1 \approx 2 \cos(2\pi t)$ (см. (2.11)). Аргумент λ_s берется по модулю один, так что все точки (но не кружки!) представляют много периодов зависимости $\alpha(K, d)$ (см. текст)

при $\lambda_s = 0 \pmod{1}$ (но не при $\lambda_s = 1/2$), который был обнаружен и обсуждался с другой точки зрения в [12].

На рисунке 2 показано также еще более простое приближение с сохранением только первого члена фурье-разложения $\delta_1(t) - 1 \approx 2 \cos(2\pi t)$, которое столь же точно представляет критические значения K_m , но не воспроизводит разрыва функции угла α .

Простое соотношение (2.19) также не дает полной картины для всего семейства (2.2), как это демонстрирует пример с малым значением $d = 0.01$, представленный на рис. 2 кружками. Отсюда видно, что расщепление сепаратрисы несимметрично при $d \rightarrow 0$ и $d \rightarrow 1$. С другой стороны, из формулы (2.2) для силы следует, что симметрия сохраняется при изменении обоих параметров семейства отображений: $d \rightarrow 1 - d$ и $K \rightarrow -K$. Следовательно, замена знака K также приводит к качественному изменению поведения сепаратрисы. Симметрия сохраняется только в частном случае $d = 1/2$, т. е. для модели симметричного кусочно-линейного отображения.

3. ПРЕДЕЛ $d \rightarrow 0$: РАЗРЫВ В СИЛЕ

Рассмотрим вначале предельный случай $d = 0$, $K > 0$, когда функция силы $f(x)$ претерпевает раз-

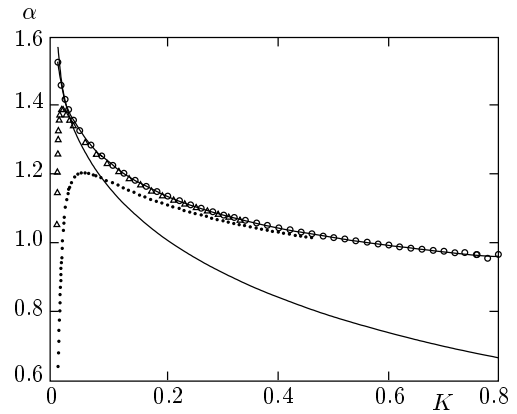


Рис. 3. Зависимость угла расщепления сепаратрисы α от параметра K при значениях $d = 0.01$ (точки), 0.001 (треугольники), $d = 0$ (кружки) по данным численного счета. Нижняя кривая — приближенная теория (3.6), верхняя кривая — точная теория (3.10)

рыв (см. рис. 1). Качественное отличие предела состоит в том, что две особенности потенциала при $d > 0$ сливаются теперь в одну и, следовательно, согласно нашей теории, угол расщепления сепаратрисы не будет менять знак, т. е. сепаратриса расщепляется при любом $K > 0$.

На рисунке 3 показаны результаты некоторых численных экспериментов как в самом пределе $d = 0$ (кружки), так и в его малой окрестности $d = 0.001$ (треугольники) и $d = 0.01$ (точки). Приведена непосредственно зависимость $\alpha(K)$, так как при $d = 0$ параметр адиабатичности $\lambda = \pi \sqrt{2d/K} = 0$ теряет смысл. Прежде всего, видно, что предельный переход $d \rightarrow 0$ в модели (2.2) является непрерывным с эмпирической границей (по максимуму $\alpha(K)$) при

$$K \sim K_B \sim 7d. \tag{3.1}$$

Физическая причина, по которой соотношение (2.18) становится неприменимым при $K \gtrsim K_B$, заключается в том, что при его выводе пренебрегается изменением скорости в промежутке между двумя сингулярностями за счет действия первой из них, а также изменением времени пролета Δ между ними (см. формулы (2.13) и (2.15)). В прежних переменных переход между двумя режимами представлен и на рис. 2 для $d = 0.01$ (кружки). Подчеркнем, что отклонение от (2.18) имеет место только при $K \gtrsim K_B$ и не повторяется периодически, как зависимость (2.18) (см. кружок в левом верхнем углу рис. 2). Таким образом, в пределе $d = 0$ функции угла расщепления

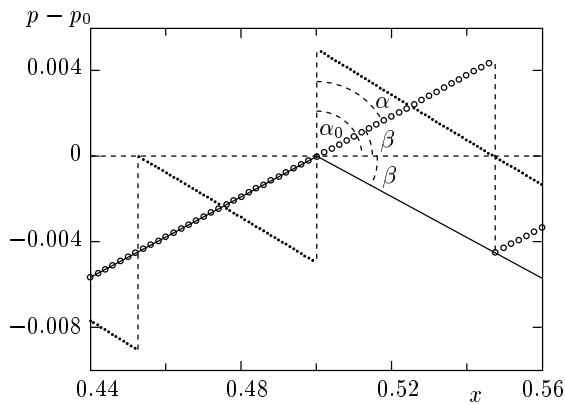


Рис. 4. Пример расщепления сепаратрисы при $K = 0.005$ и $d = 0$: сплошная линия с изломом в точке $x = 0.5$ — невозмущенная сепаратриса (3.7), ветви сепаратрисы представлены точками (вперед по времени) и кружками (назад по времени), разрывы ветвей соединены пунктиром, показывающим последовательность точек, $p_0 \approx 0.04756$ — ордината точки пересечения (3.8)

действительно не меняет знака и, следовательно, сепаратриса всегда расщепляется.

Для количественного анализа можно применить тот же метод, что и при $d \neq 0$ (разд. 2). Различие состоит лишь в том, что теперь разрыв $\Delta f(x) = -2$ имеет сама сила, и поэтому достаточно проинтегрировать (2.11) по частям только один раз. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta H_0 &\approx K \int_{-\infty}^{\infty} dt p_s f(x_s) (\delta_1(t) - 1) \approx \\ &\approx K p_0 \Delta f \dot{\psi}(t_0) \approx -\sqrt{2} K^{3/2} \dot{\psi}(t_0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь по-прежнему $p_0 \approx \sqrt{K/2}$, а

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1}{2} - t \pmod{1} \quad (3.3)$$

(см. (2.14)). Однако простое выражение (2.18) в приближении малых углов теперь уже неприменимо, поскольку при дифференцировании по t_0 возникает сингулярность

$$\frac{dH_0}{dt} = -K p_0 (\delta_1(t) - 1), \quad (3.4)$$

причем производная берется при двух значениях: $t = t_0 = 0$ и $1/2$, когда $\Delta H_0 = 0$ (пересечение ветвей сепаратрисы, формула (3.3)). Каждое из этих значений определяет угол наклона соответствующей ветви сепаратрисы относительно оси x (см. рис. 4).

Сингулярность возникает при $t = 0$ и отвечает углу $\alpha_0 = \pi/2$ ($\text{tg } \alpha_0 = \infty$). Угол другой ветви β определяется соотношением (ср. (2.18))

$$\text{tg } \beta = \frac{dp}{dx} \approx \frac{1}{2} \frac{dH_0}{p_0^2 dt_0} \approx \frac{K}{p_0} \approx \sqrt{2K}. \quad (3.5)$$

Множитель $1/2$ при производной возникает из-за того, что ΔH_0 вычисляется относительно невозмущенной сепаратрисы (сплошная ломаная линия на рис. 4), а угол β (как и α_0) берется относительно оси x . Знаки углов определяются с учетом того, что ветвь с α_0 соответствует движению вперед по времени, тогда как другая ветвь — обратному движению (см. [11]). Окончательно, для угла между ветвями сепаратрисы получаем

$$\alpha(K) = \alpha_0 - \beta \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{2K}. \quad (3.6)$$

Эта простая зависимость показана на рис. 3 сплошной линией. При малых K она хорошо согласуется с численными экспериментами, однако при увеличении K ошибка возрастает, достигая величины около 40% при $K \approx 0.6$. При больших K вся простая картина расщепления сепаратрисы отдельного резонанса теряет смысл из-за перекрытия многих резонансов (см. ниже).

Ошибка при больших значениях K связана с приближенным использованием при вычислении интеграла (3.2) невозмущенной сепаратрисы (см. формулы (2.8) и (2.7))

$$p_s(x) = \pm p_0 (1 - 2|y|) \quad (3.7)$$

с амплитудой $p_0 \approx \sqrt{K/2}$. Интересной особенностью рассматриваемой системы является сохранение формы невозмущенной сепаратрисы (две прямые) под действием возмущения (рис. 4). Это позволяет вычислить точное значение $p_0(K)$ при любом K по собственным векторам исходного отображения (2.1) в неустойчивой неподвижной точке $x = p = 0$. В результате получаем

$$p_0(K) = \frac{K}{\sqrt{2K + K^2 + K}}. \quad (3.8)$$

Однако при подстановке этого выражения в (3.5) согласие не только не улучшается, но даже ухудшается:

$$\text{tg } \beta \approx \frac{K}{p_0(K)} > \sqrt{2K}. \quad (3.9)$$

Причина этого лежит в другом приближении интеграла (3.2) — сохранении вклада только от скачка силы $\Delta f(x)$. Опять-таки, из-за специфической особенности невозмущенной сепаратрисы при $d = 0$

угол β находится точно безо всякого интегрирования прямо по результатам, приведенным на рис. 4: $\operatorname{tg} \beta = 2p_0(K)$. В результате получаем

$$\alpha(K) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 2/K}} \right). \quad (3.10)$$

Это выражение представляет наиболее точный результат нашей теории (верхняя сплошная линия на рис. 3), который прекрасно совпадает с численным экспериментом (кружки) вплоть до начала перекрытия резонансов. Поясним, что в силу периодичности отображения (2.1) не только по x , но и по p (и с тем же периодом 1), имеется бесконечная система целых резонансов при $p(0) = n$, $H_0 = n^2/2$, где n — любое целое число, как положительное, так и отрицательное, а также нуль. Последний частный случай и рассматривается в настоящей работе. При $p_0 = 1/2$ сепаратрисы соседних целых резонансов начинают перекрываться, что полностью разрушает их структуру. Формально это происходит лишь в пределе $K \rightarrow \infty$ (3.8). Однако фактически такое разрушение начинается значительно раньше из-за перекрытия с промежуточными дробными резонансами (см. [11]). Отметим также, что формально всегда угол расщепления $\alpha > \pi/4 \approx 0.785$ (см. формулу (3.10)), однако фактически, и по той же причине, регулярная зависимость $\alpha(K)$ резко обрывается уже при $\alpha \approx 0.96 \approx 55^\circ$, $K = K_{cr} \approx 0.8$, $p_0(K_{cr}) \approx 1/3$ (рис. 3). При $K > K_{cr}$ ветви сепаратрисы становятся настолько неустойчивыми, что сколько-нибудь надежное измерение угла расщепления не представляется возможным. Интересно отметить, что отклонение ординаты точки пересечения ветвей сепаратрисы $p_0(K)$ согласно (3.8) в этой области (вплоть до $K = 1.24$) не превышает 1%. Однако этого достаточно для очень сильного и нерегулярного искажения ветвей сепаратрисы.

Таким образом, даже при относительно больших значениях параметра $K < 0.8$ угол расщепления сепаратрисы далеко не достигает нуля и тем более не меняет знак, а значит, сепаратриса всегда расщепляется.

В работе [13] предел $d \rightarrow 0$ также рассмотрен кратко, но только для $K < 0$ (в наших обозначениях). Обратный предел, $d \rightarrow 1$, в [13] теряет смысл, поскольку семейство отображений определено таким образом, что в этом случае сила $f(x) \rightarrow 0$ исчезает. В нашем случае зависимость (2.19) при этом сохраняется по крайней мере до $d = 0.999$ (рис. 2). Следует, однако, отметить, что в самом пределе ($d = 1$) характер движения качественно изменяется, поскольку

ку движение по невозмущенной сепаратрисе представляет собой просто гармонические колебания (см. (2.7) и рис. 1).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ: НАСКОЛЬКО ТИПИЧНО СОХРАНЕНИЕ СЕПАРАТРИСЫ?

В настоящей работе предложена и проверена простая теория нового неожиданного явления — сохранения сепаратрисы нелинейного резонанса в условиях сильного хаоса на большей части фазовой плоскости динамической системы [9–13]. Механизм этого явления основан на простой идее об интерференции (в частности «сокращении» [8]) нескольких сингулярностей в гамильтониане динамической системы, которые и определяют расщепление сепаратрисы нелинейного резонанса. Численные эксперименты и теоретический анализ проводились для семейства $2D$ -отображений (2.1) в простейшем случае двух сингулярностей, включающего и первый пример симметричного кусочно-линейного отображения [13, 9, 11]. Результаты исследования не только подтвердили и объяснили такой механизм, но и позволили разработать простую теорию для вычисления как специальных значений параметра $K = K_m$, так и зависимости угла расщепления сепаратрисы $\alpha(K)$ в достаточно широком диапазоне параметров K и d , см. формулы (2.19), (3.6) и (3.10).

Отдельно рассмотрен переход к пределу $d \rightarrow 0$, в котором сепаратриса расщепляется при любом $K > 0$ (разд. 3). При этом зависимость (2.19) сохраняется, по крайней мере, до $d = 0.999$ (рис. 2). Следует, однако, отметить, что в самом пределе ($d = 1$) характер движения качественно изменяется. Прежде всего, движение по невозмущенной сепаратрисе представляет собой просто гармонические колебания с конечным периодом $T_1 = \pi\sqrt{2/K}$ (см. (2.7) и рис. 1). Помимо этого, внутри резонанса ($H_0 < 0$) траектория движения вообще не достигает сингулярности потенциала в точке $x = 0 \pmod{1}$. Наконец, наши предварительные численные эксперименты в этом пределе определенно указывают на очень быстрое уменьшение меры хаотической компоненты с уменьшением K . Было бы чрезвычайно интересно продолжить исследование этой специальной динамической системы.

В настоящей работе мы рассматривали только целые резонансы с $p(0) = n$, где n — любое целое. Как известно (см., например, [2, 3, 11]), дробные резонансы с $p(0) \approx n/q$ имеют такую же структуру в подходящих переменных. Поэтому можно ожидать,

что подобный механизм и его простая теория применимы и для дробных резонансов. В случае подтверждения, которое мы надеемся получить в ближайшее время, это позволило бы объяснить сохранение сепаратрисы некоторых дробных резонансов, предсказанное в [13] и обнаруженное в численных экспериментах [10–12]. Хотя совокупность всех дробных резонансов на оси p является всюду плотной, множество всех специальных значений $K = K_{qn}$, при которых сепаратриса сохраняется, таковым не является [13]. Однако его средняя плотность достаточно велика и можно ожидать сильное (хотя и не полное) подавление глобальной диффузии при любом значении K . Эта гипотеза подтверждается дополнительно большим количеством периодических инвариантных кривых, предсказанных в [13], как обычных с иррациональным числом вращения ν , так и новых с рациональным $\nu \neq 0$. Мы предполагаем, что появление последних можно интерпретировать как подавление самих резонансов вместе с их сепаратрисами. Один такой «странный» случай для $K = 1/4$ с $\nu = 1/3$ наблюдался в [11], однако его дальнейшее исследование было отложено на будущее.

Интересный и важный вопрос: насколько типичны сохранение сепаратрисы вообще и его конкретный механизм в частности. Хорошо известно, что к настоящему времени «сконструировано» большое число примеров и даже целых семейств, так называемых полностью интегрируемых нелинейных динамических систем (см., например, [16]). В таких системах хаос полностью отсутствует, однако они определенно не являются типичными, а образуют в некотором смысле множество меры нуль в пространстве всех возможных динамических систем. С этой точки зрения новое явление сохранения сепаратрис в хаотической системе представляется более типичным несмотря на весьма ограниченное в данный момент число примеров.

Условие существования нескольких сингулярностей потенциала, положенное в основу настоящего исследования, само по себе не является ни необходимым, ни достаточным для сохранения сепаратрисы. С одной стороны, предварительное исследование других примеров показало, что наличие нескольких сингулярностей силы еще не гарантирует сохранения сепаратрисы. Например, если просто продолжить силу (2.2) с $d = 0$ еще на один период, так что формально появятся две сингулярности, сепаратриса будет по-прежнему разрушаться при любом значении параметра K . В данном случае это происходит из-за того, что потенциал принимает форму двух сопряженных «ям» с неустойчивой неподвиж-

ной точкой как раз на границе между ними. В результате невозмущенная сепаратриса всегда оказывается локализованной в одной из них (в зависимости от начальных условий) с единственной сингулярностью.

С другой стороны, в случае аналитического потенциала сингулярности, определяющие расщепление сепаратрисы, могут быть расположены не на действительной оси времени, а в комплексной плоскости. Такая ситуация, по-видимому, действительно наблюдалась в совершенно другой задаче об удержании заряженных частиц в длинной магнитной ловушке Коэна [17] (см. также [18]).

Наконец, эффект прохождения угла расщепления сепаратрисы через нуль в зависимости от параметра системы, а значит, и сохранение сепаратрисы при определенных значениях этого параметра возможны, в принципе, и для особой формы потенциала безо всяких сингулярностей вообще. Все это несомненно заслуживает дальнейшего исследования.

В заключение можно сказать, что хотя новый эффект сохранения сепаратрисы в хаосе и не является универсальным (любимый термин в современных исследованиях динамического хаоса!), критерий интерференции сингулярностей как и разработанная на его основе теория (которая легко обобщается на произвольное число сингулярностей) могут значительно помочь, как мы надеемся, в исследованиях широкого класса гамильтоновых динамических систем.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 01-02-16836).

ЛИТЕРАТУРА

1. V. I. Arnold and A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Benjamin, New York (1968) [Имеется перевод: В. И. Арнольд, А. Аvez, *Эргодические проблемы классической механики*, РХД, Ижевск (1999)].
2. B. V. Chirikov, *Phys. Rep.* **52**, 263 (1979).
3. A. Lichtenberg and M. Leiberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer, New York (1992) (Имеется перевод 1-го издания: А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, Москва (1984)).

4. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
5. В. В. Chirikov, *Chaos, Solitons and Fractals* **1**, 79 (1991).
6. J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton (1973).
7. В. В. Chirikov, E. Keil and A. Sessler, *J. Stat. Phys.* **3**, 307 (1971).
8. М. Hénon and J. Wisdom, *Physica D* **8**, 157 (1983).
9. Л. В. Овсянников, частное сообщение, май 1999.
10. В. В. Вечеславов, *ЖЭТФ* **119**, 853 (2001).
11. В. В. Вечеславов, *Динамика пилообразного отображения: 1. Новые численные результаты*. Препринт ИЯФ 2000-27, Новосибирск, 2000; E-print archives, n-lin.CD/0005048.
12. В. В. Вечеславов, *Необычная динамика пилообразного отображения*, Препринт ИЯФ 99-69, Новосибирск, 1999.
13. S. Bullett, *Commun. Math. Phys.* **107**, 241 (1986).
14. M. Wojtkowski, *Commun. Math. Phys.* **80**, 453 (1981); *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **2**, 525 (1982).
15. В. В. Вечеславов, Б. В. Чириков, *ЖЭТФ* **114**, 1516 (1998).
16. В. Г. Конопелченко, *Nonlinear Integrable Equations*, Springer, Berlin (1987).
17. R. Cohen, Stochastic motion of particles in mirror machines, in: *Intrinsic Stochasticity in Plasmas*, ed. by G. Laval and D. Gresillon, Orsay, Edition de Physique (1979).
18. Б. В. Чириков, Динамика частиц в магнитных ловушках, в сб.: *Вопросы теории плазмы*, 13, ред. Б. Б. Кадомцев, Москва, Энергоатомиздат (1984).