

ВОЗБУЖДЕНИЕ КИЛЬВАТЕРНОГО ПОЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ СГУСТКОМ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

*В. А. Балакирев, И. Н. Онищенко, Д. Ю. Сидоренко, Г. В. Сотников**

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
61108, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 22 декабря 2000 г.

Кильватерное поле, возбуждаемое релятивистским электронным сгустком в полубесконечном металлическом волноводе, заполненном диэлектриком, складывается из излучения Вавилова–Черенкова, поля «гасящей волны» и переходного излучения, интерферирующих между собой. Впервые получено точное аналитическое выражение для переходной составляющей поля тонкого релятивистского кольцевого сгустка. Представлена эволюция пространственного распределения поля, возбуждаемого сгустком конечных размеров, полученная с помощью численных расчетов. Изучено возбуждение кильватерного поля периодической последовательностью сгустков в волноводе конечной длины.

PACS: 02.90.+p, 41.60.-m

1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение волнового сигнала в диспергирующей среде является классической задачей во многих областях физики. Такие задачи встречаются в акустике [1], теории твердого тела [2], физике плазмы [3], радиофизике [4, 5]. Для анализа распространения сигналов в диспергирующих средах обычно используются разложения в степенной ряд фазы входного сигнала [2, 3, 5–7] или асимптотические методы (см. [8, 9] и цитированную в обзоре [2] литературу). Точное решение задачи было выполнено только для случая звуковых [1] и электромагнитных волн в ионосфере [10] или в плоском волноводе [11].

В указанных выше работах рассматривалась ситуация, когда источник волнового сигнала неподвижен, т. е. на вход $z = 0$ в момент времени $t = 0$ подается квазимонохроматический или импульсный сигнал. В то же время при рассмотрении прохождения заряженной частицы через границу двух сред вопрос о распространении в этих условиях электромагнитного излучения возникает естественным образом. Такие задачи детально рассматривались в теории переходного излучения [12]. Если условие возникновения черенковского излучения не выпол-

няется в каждой из сред, то распространение переходного излучения может быть понято также в рамках формализма, применяемого для изучения распространения импульсных сигналов в диспергирующей среде. При выполнении этого условия переходное излучение может интерферировать с излучением Вавилова–Черенкова. Существует большое число публикаций, посвященных исследованию переходного излучения при наличии излучения Вавилова–Черенкова (см., например, библиографию работ по переходному излучению [13]). Однако проведенные до настоящего времени исследования ограничивались расчетом полных потерь энергии на переходное излучение и черенковское излучение. В случаях, когда полные потери можно разделить на составляющие, анализировалось черенковское излучение, прошедшее в среду, где условие черенковского излучения уже не выполнено [14].

Новый интерес к излучению Вавилова–Черенкова связан с возможностью его применения для ускорения заряженных частиц в так называемом кильватерном методе ускорения [15–18]. В этом методе интенсивный сгусток или последовательность сгустков, двигаясь в среде, возбуждает за собой электромагнитное поле, которое затем используется для ускорения другого пучка до более высоких энергий.

*E-mail: sotnikov@kpt.kharkov.ua

При теоретическом описании возбуждения кильватерных полей обычно рассматривают неограниченные в направлении движения сгустка замедляющие среды. При таком подходе кильватерная волна существует во всей области позади сгустка и распространяется с фазовой скоростью, равной скорости сгустка. Учет ограниченности реальных систем может качественно изменить пространственно-временную структуру электромагнитной волны хотя бы потому, что распространение черенковского излучения в диспергирующей среде (как частного вида волнового сигнала [2, 6, 7, 19]) должно значительно усложниться. Кроме того, возникает переходное излучение, которое будет интерферировать с черенковским.

В настоящей работе проведено исследование возбуждения электромагнитной волны электронным сгустком и последовательностью электронных сгустков в полубесконечной замедляющей среде. Рассматривается наиболее простая постановка задачи. В качестве замедляющей среды выбран диэлектрик с $\epsilon = \text{const}$, заполняющий цилиндрический волновод с металлическими стенками и торцом. Отметим, что аналогичная задача об излучении одиночного заряда, движущегося по оси полубесконечного волновода, заполненного диэлектриком, была поставлена в работе [20]. В ней получены асимптотические решения (при больших временах t). Ниже мы покажем, что существует точное решение такой задачи, пригодное для любых значений времени t и продольной координаты z . Это позволяет нам провести детальный анализ процесса становления пространственно-временной структуры электромагнитного поля, возбуждаемого сгустком или последовательностью сгустков электронов, и дать рекомендации по использованию полученных результатов в целях ускорения заряженных частиц. Результаты работы позволяют определить длину области локализации возбуждаемого сгустком электромагнитного поля и соответственно оценить длительность импульса тока ускоряемых частиц.

2. ПОЛЕ ТОНКОГО КОЛЬЦЕВОГО СГУСТКА

Рассмотрим цилиндрический металлический волновод радиуса b , заполненный однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . В продольном направлении волновод занимает область $0 \leq z < \infty$, с торца $z = 0$ он закорочен металлической стенкой. Предполагаем, что в волновод со сто-

роны стенки влетает и затем движется с постоянной скоростью v_0 вдоль оси z аксиально-симметричный моноэнергетический электронный сгусток. Условие возникновения черенковского излучения в волноводе $v_0 > c/\sqrt{\epsilon}$ выполнено. Пренебрежем влиянием узкого вакуумного пролетного канала на электродинамику системы и для упрощения расчетов будем считать диэлектрическое заполнение сплошным.

Для определения поля от сгустка с произвольным распределением плотности необходимо сначала найти поле бесконечно короткого и тонкого заряженного кольца, плоскость которого перпендикулярна оси волновода. Плотность заряда такого кольца в общем случае записывается в виде

$$\rho = -\frac{eN}{2\pi r_L v_L} \delta(r - r_L) \delta(t - t_L),$$

где $-e$ — заряд электрона, N — число электронов в кольце, $v_L(t_0, r_0, z)$ и $r_L(t_0, r_0, z)$ — соответственно лагранжевы скорость и радиус кольцевого сгустка, $t_L(t_0, r_0, z)$ — лагранжево время частицы, t_0 — момент влета кольца в волновод, r_0 — начальный радиус кольца. В приближении равномерного движения скорость и радиус кольца постоянные, $v_L = v_0$ и $r_L = r_0$, а лагранжево время кольца $t_L = t_0 + z/v_0$.

Электромагнитное поле, возбуждаемое зарядом в полубесконечном волноводе, удовлетворяет следующим граничным условиям. Во-первых, на боковой проводящей поверхности волновода $r = b$ обращается в нуль продольная составляющая электрического поля: $E_z|_{r=b} = 0$. Во-вторых, на металлической стенке при $z = 0$ должна обращаться в нуль поперечная компонента электрического поля: $E_r|_{z=0} = 0$. С учетом этого выражение для фурье-компоненты продольной составляющей электрического поля аксиально-симметричной E -волны имеет вид [20]

$$E_z^\omega = \frac{2iNe}{\pi b^2 \epsilon} \sum_n \left\{ \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v_0^2} \right) \frac{\omega \exp[i\omega(z/v_0 + t_0)]}{k_{zn}^2 - \omega^2/v_0^2} - \frac{\lambda_n^2}{b^2} \frac{\exp(ik_{zn}z + i\omega t_0)}{k_{zn} v_0 (k_{zn}^2 - \omega^2/v_0^2)} \right\} \times \frac{J_0(\lambda_n r_0/b) J_0(\lambda_n r/b)}{J_1^2(\lambda_n)}, \quad (1)$$

где λ_n — n -й корень цилиндрической функции Бесселя J_0 ,

$$k_{zn}^2 = \epsilon \omega^2/c^2 - \lambda_n^2/b^2$$

— продольное волновое число свободных электромагнитных колебаний в диэлектрическом волноводе.

Выполняя обратное преобразование Фурье, получаем

$$E_z(t, r, z, t_0, r_0) = \frac{2iNe}{\pi b^2 \epsilon} \times \sum_n \left\{ I_1^n - \frac{c\lambda_n^2}{\sqrt{\epsilon}v_0 b^2} \frac{I_2^n}{\epsilon/c^2 - 1/v_0^2} \right\} \times \frac{J_0(\lambda_n r_0/b) J_0(\lambda_n r/b)}{J_1^2(\lambda_n)}, \quad (2)$$

$$I_1^n = \int_L d\omega \omega \frac{\exp[-i\omega t + i\omega(z/v_0 + t_0)]}{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}, \quad (3)$$

$$I_2^n = \int_L d\omega \frac{\exp(-i\omega\tau + i\xi\sqrt{\omega^2 - \alpha^2})}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}, \quad (4)$$

где

$$\omega_0 = \frac{\lambda_n}{b\sqrt{\epsilon/c^2 - 1/v_0^2}}, \quad \alpha = \frac{\lambda_n c}{b\sqrt{\epsilon}},$$

$$\tau = t - t_0, \quad \xi = \frac{z\sqrt{\epsilon}}{c}.$$

Величина ω_0 вещественная, и соответствующие полюсы подынтегральных функций в (3) и (4) расположены на вещественной оси ω . Контур интегрирования L представляет собой прямую в комплексной плоскости ω , параллельную действительной оси и расположенную выше ее на некоторую малую величину [10].

Интеграл (3) описывает кильватерное поле заряда, движущегося в бесконечном волноводе [21]. Он легко вычисляется и равен

$$I_1^n = -2\pi i \cos \left[\omega_0 \left(t - t_0 - \frac{z}{v_0} \right) \right] \times \theta \left(t - t_0 - \frac{z}{v_0} \right), \quad (5)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Интеграл (4) соответствует свободным собственным колебаниям цилиндрического волновода, появляющимся из-за ограниченности системы по z . Учет этого дополнительного слагаемого позволяет удовлетворить граничному условию на торцевой металлической стенке. Как будет показано далее, (4) дает «гасящую волну» и переходное излучение. Интегралы подобного вида встречаются в теории распространения сигналов в диспергирующих средах

[2, 6, 7, 19]. Обычно для их вычисления используются численные или асимптотические методы. В [20] при вычислении соответствующего интеграла был применен метод перевала, поэтому было получено асимптотическое решение, пригодное только при временах, много больших времени распространения волны поперек волновода. Вместе с тем, нахождение поля свободных колебаний (4) допускает точное аналитическое решение. Впервые аналитическое решение для подобного интеграла было получено в работе [10] при изучении распространения электромагнитного сигнала в ионизированном газе. Позднее точное решение найдено в работе [11] немного отличающимся от [10] способом. Ниже мы будем в основном придерживаться метода, предложенного в [10].

Прежде чем приступить к вычислению интеграла (4), отметим, что функция

$$k(\omega) = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

имеет при $\omega = \pm\alpha$ точки ветвления. Поэтому необходимо сделать разрез в комплексной плоскости ω по отрезку $(-\alpha; \alpha)$. Выберем такой лист римановой поверхности $k(\omega)$, на котором

$$0 < \arg(\omega \pm \alpha) < 2\pi.$$

На этом листе знаки вещественной и мнимой частей $k(\omega)$, а значит и $k_{zn}(\omega)$, будут равны соответственно знакам вещественной и мнимой частей ω . Именно это условие должно выполняться в нашей задаче, поскольку мы рассматриваем только волны, распространяющиеся в положительном направлении оси z , у которых должно быть

$$\text{sgn}[\text{Re}(k_{zn})] = \text{sgn}[\text{Re}(\omega)].$$

При этом в верхней полуплоскости, в которой проходит контур интегрирования L , будет выполнено условие

$$\text{Im}(k_{zn}) > 0,$$

т. е. волна будет затухать при $z \rightarrow +\infty$.

Если $\tau < \xi$, то нетрудно заметить, что мы можем замкнуть контур интегрирования L интеграла (4) через полуокружность бесконечного радиуса в верхней полуплоскости ω , интеграл по которой равен нулю. Очевидно, что искомым интеграл также будет равен нулю, поскольку внутри получающегося замкнутого контура нет никаких особых точек.

Для вычисления (4) при $\tau > \xi$ проведем интегрирование по замкнутому контуру, составленному из исходного контура L , верхнего и нижнего берегов разреза и полуокружности бесконечного радиуса в

полуплоскости $\text{Im } \omega \leq 0$. Данный контур имеет отрицательное направление обхода, он ограничивает односвязную область, содержащую внутри себя два полюса в точках $\omega = \pm\omega_0$. По теореме о вычетах имеем

$$I_2^n + I_{cut} + I_{-\infty} = -2\pi i (\text{Res } F(-\omega_0) + \text{Res } F(\omega_0)), \quad (6)$$

где I_{cut} — интеграл по берегам разреза, $I_{-\infty}$ — интеграл по полуокружности бесконечного радиуса в нижней полуплоскости (он равен нулю при $\tau > \xi$), $\text{Res } F(\pm\omega_0)$ — вычет подынтегральной функции интеграла (4) в соответствующем полюсе $\omega = \pm\omega_0$.

Для определения интеграла по берегам разреза I_{cut} рассмотрим двусвязную область, внешней границей которой является эллипс C_ω^- , а внутренней — берега разреза. C_ω^- имеет фокусы в точках $\omega = \pm\alpha$ и содержит внутри себя полюсы $\omega = \pm\omega_0$. Согласно теореме о вычетах, интегрирование по границе этой области дает следующее выражение:

$$I_{cut} + I_{el} = -2\pi i (\text{Res } F(-\omega_0) + \text{Res } F(\omega_0)), \quad (7)$$

где I_{el} — интеграл от подынтегральной функции в (4) по C_ω^- . Сравнивая (6) и (7), нетрудно заметить, что

$$I_2^n = I_{el}.$$

Таким образом, на комплексной плоскости ω мы переходим от интегрирования по бесконечной прямой L к интегрированию по эллиптическому контуру C_ω^- с отрицательным направлением обхода. Заметим, что вместо эллипса можно использовать любую замкнутую кривую без самопересечений, охватывающую все полюсы и разрез, но эллиптический контур преобразуется наиболее просто.

В интеграле I_{el} проводится ряд последовательных преобразований. Сначала вводим новую переменную интегрирования $p = -i\omega$. Потом проводим замену переменной

$$\alpha\zeta = \sqrt{p^2 + \alpha^2} - p.$$

Далее выполняем замену

$$\zeta = -\beta w,$$

где

$$\beta = \sqrt{(\tau - \xi)/(\tau + \xi)}.$$

При этом I_{el} преобразуется в интеграл следующего вида:

$$I_{el} = \frac{4}{\alpha^2 \beta^2} \int_{C_w^+} dw \times \frac{w \exp \left[(\alpha/2) \sqrt{\tau^2 - \xi^2} (w - 1/w) \right]}{(w - w_1)(w - w_2)(w - w_3)(w - w_4)},$$

где

$$w_1 = \frac{i}{\beta} \sqrt{\frac{1 - c/\sqrt{\varepsilon}v_0}{1 + c/\sqrt{\varepsilon}v_0}}, \quad w_2 = \frac{i}{\beta} \sqrt{\frac{1 + c/\sqrt{\varepsilon}v_0}{1 - c/\sqrt{\varepsilon}v_0}},$$

$w_3 = -w_1$, $w_4 = -w_2$, контур C_w^+ — окружность в комплексной плоскости w с центром в точке $w = 0$, которая обходится в положительном направлении и не содержит внутри себя полюсов $w = w_j$, $j = 1, 2, 3, 4$.

В конечном итоге после несложных преобразований можем записать, что

$$I_{el} = \frac{1}{2\alpha\omega_0 \sqrt{\omega_0^2/\alpha^2 - 1}} \times \int_{C_w^+} dw \exp \left[\frac{\alpha}{2} \sqrt{\tau^2 - \xi^2} \left(w - \frac{1}{w} \right) \right] \times \left\{ \frac{1}{w - w_1} - \frac{1}{w - w_2} + \frac{1}{w - w_3} - \frac{1}{w - w_4} \right\}. \quad (8)$$

Поскольку контур интегрирования C_w^+ не охватывает полюсов $w = w_j$, на нем справедливы следующие разложения:

$$-\frac{1}{w - w_j} = \frac{1}{w_j} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w}{w_j} \right)^k. \quad (9)$$

Заметим также, что [22]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_w^+} dw w^k \exp \left[\alpha \sqrt{\tau^2 - \xi^2} \frac{1}{2} \left(w - \frac{1}{w} \right) \right] = (-1)^{k+1} J_{k+1} \left(\alpha \sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right). \quad (10)$$

Подставляя в (8) ряды (9) и меняя местами порядок интегрирования и суммирования, с учетом (10) получаем, что искомый интеграл (4) равен

$$I_2^n = 2\pi i \frac{\sqrt{\varepsilon}v_0 b^2}{c\lambda_n^2} \left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v_0^2} \right) \times \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{\tau - \xi}{\tau + \xi} \right)^m \times \left[\left(\frac{1 - c/\sqrt{\varepsilon}v_0}{1 + c/\sqrt{\varepsilon}v_0} \right)^m - \left(\frac{1 + c/\sqrt{\varepsilon}v_0}{1 - c/\sqrt{\varepsilon}v_0} \right)^m \right] \times J_{2m} \left(\alpha \sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right). \quad (11)$$

Функция Ломмеля от двух аргументов $U_n(q, x)$ определяется как [23]

$$U_n(q, x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{q}{x}\right)^{n+2m} J_{n+2m}(x). \quad (12)$$

Перепишем (11), используя функции Ломмеля второго порядка от двух аргументов:

$$I_2^n = 2\pi i \frac{\sqrt{\varepsilon} v_0 b^2}{c \lambda_n^2} \left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v_0^2}\right) \times [U_2(r_2 y, y) - U_2(r_1 y, y)], \quad (13)$$

где

$$y = \alpha \sqrt{\tau^2 - \xi^2}, \quad r_1 = \beta \sqrt{\frac{1 - c/\sqrt{\varepsilon} v_0}{1 + c/\sqrt{\varepsilon} v_0}},$$

$$r_2 = \beta \sqrt{\frac{1 + c/\sqrt{\varepsilon} v_0}{1 - c/\sqrt{\varepsilon} v_0}}.$$

Подчеркнем, что формула (13) дает точное значение интеграла (4).

Для вычисления функции Ломмеля $U_n(q, x)$ при $q \leq x$ удобно пользоваться формулой (12), так как в этом случае ряд по функциям Бесселя в (12) сходится очень быстро. Если $q > x$, можно применить следующую формулу [23]:

$$U_n(q, x) = \cos\left(\frac{q}{2} + \frac{x^2}{2q} - \frac{n\pi}{2}\right) + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \left(\frac{x}{q}\right)^{-n+2+2m} J_{-n+2+2m}(x). \quad (14)$$

При $q > x$ этот ряд также является быстро сходящимся. Нетрудно заметить, что при $x = q$ формулы (12) и (14) дают одинаковый результат. Поэтому мы можем записать, что

$$U_2(r y, y) = \begin{cases} -\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m r^{2m} J_{2m}(y) & \text{при } r \leq 1, \\ -\cos\left(\frac{r y}{2} + \frac{y}{2r}\right) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{r^{2m}} J_{2m}(y) & \text{при } r > 1. \end{cases} \quad (15)$$

Введем

$$v_{pr} = c/\sqrt{\varepsilon}, \quad v_{gr} = c^2/\varepsilon v_0.$$

При $t - t_0 - z/v_{pr} \geq 0$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 0 \leq r_1 < 1, \\ 0 \leq r_2 \leq 1 & \quad \text{при } t - t_0 - z/v_{gr} \leq 0, \\ r_2 > 1 & \quad \text{при } t - t_0 - z/v_{gr} > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом (15) и (16) при $t - t_0 - z/v_{pr} \geq 0$ и $t - t_0 - z/v_{gr} \leq 0$ можно записать, что:

$$U_2(r_2 y, y) - U_2(r_1 y, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (r_1^{2m} - r_2^{2m}) J_{2m}(y). \quad (17)$$

Соответственно при $t - t_0 - z/v_{gr} > 0$ имеем

$$U_2(r_2 y, y) - U_2(r_1 y, y) = -\cos\left[\omega_0 \left(t - t_0 - \frac{z}{v_0}\right)\right] + J_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(r_1^{2m} + \frac{1}{r_2^{2m}}\right) J_{2m}(y). \quad (18)$$

Первое слагаемое в правой части (18) описывает существующую в области

$$0 < z < (t - t_0) v_{gr}$$

электромагнитную волну, которая совпадает с полем излучения Вавилова–Черенкова (5), взятым с противоположным знаком. Это «гасящая волна» [20], компенсирующая черенковское излучение в соответствующей области z . Оставшиеся слагаемые в (18) соответствуют той части переходного излучения, которая распространяется со скоростью меньшей, чем v_{gr} . Выражение (17) соответствует более быстрой части переходного излучения.

Подставим (13) и (5) в (2) с учетом (17) и (18). В результате поле, которое создает в полубесконечном волноводе заряженное тонкое кольцо, движущееся с постоянной скоростью, удобно записать, аналогично [20], в виде суперпозиции ограниченного в пространстве поля излучения Вавилова–Черенкова E_z^{cher} и поля переходного излучения E_z^{trans} :

$$E_z(t, r, z, t_0, r_0) = E_z^{cher}(t, r, z, t_0, r_0) + E_z^{trans}(t, r, z, t_0, r_0), \quad (19)$$

$$E_z^{cher}(t, r, z, t_0, r_0) = \frac{4Ne}{b^2\varepsilon} \sum_n \frac{J_0(\lambda_n r_0/b) J_0(\lambda_n r/b)}{J_1^2(\lambda_n)} \times \cos \left[\omega_0 \left(t - t_0 - \frac{z}{v_0} \right) \right] \times \left\{ \theta \left(t - t_0 - \frac{z}{v_0} \right) - \theta \left(t - t_0 - \frac{z}{v_{gr}} \right) \right\}, \quad (20)$$

$$E_z^{trans}(t, r, z, t_0, r_0) = \frac{4Ne}{b^2\varepsilon} \times \sum_n \frac{J_0(\lambda_n r_0/b) J_0(\lambda_n r/b)}{J_1^2(\lambda_n)} \times \left\{ \left[\theta \left(t - t_0 - \frac{z}{v_{pr}} \right) - \theta \left(t - t_0 - \frac{z}{v_{gr}} \right) \right] \times \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (r_1^{2m} - r_2^{2m}) J_{2m}(y) + \theta \left(t - t_0 - \frac{z}{v_{gr}} \right) \times \left[J_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(r_1^{2m} + \frac{1}{r_2^{2m}} \right) J_{2m}(y) \right] \right\}. \quad (21)$$

Кильватерное поле Вавилова–Черенкова (20) с учетом «гасящей волны» отлично от нуля при

$$(t - t_0) v_{gr} \leq z < (t - t_0) v_0.$$

В пределах этой области огибающая черенковского сигнала постоянна (см. рис. 1б). Величина v_{gr} есть не что иное, как групповая скорость синхронной со сгустком электромагнитной волны. Плоскость

$$z^{gr} = (t - t_0) v_{gr}$$

является задним фронтом кильватерного поля. Этот фронт перемещается вслед за сгустком с групповой скоростью v_{gr} .

Поле переходного излучения (21) существует в области

$$0 \leq z < (t - t_0) v_{pr}.$$

Величина v_{pr} есть наибольшая скорость распространения электромагнитных сигналов в диэлектрическом волноводе. Именно с этой скоростью распространяется наиболее быстрая высокочастотная часть переходного сигнала — так называемый «предвестник». Огибающая переходного сигнала максимальна вблизи заднего фронта (линия 1 на рис. 1в)

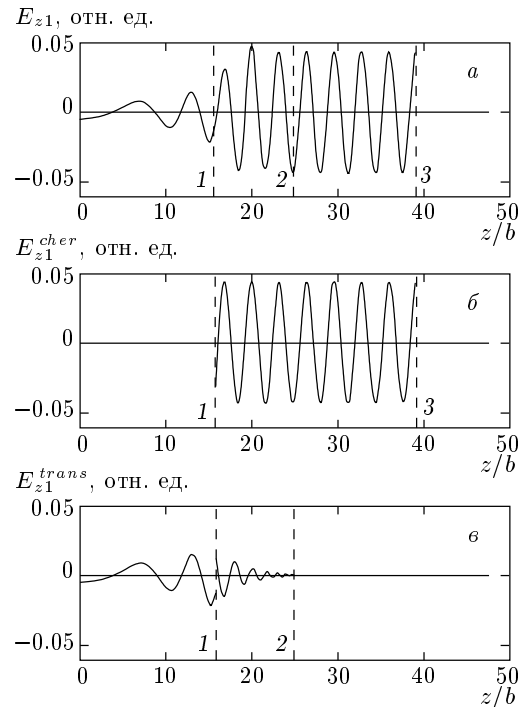


Рис. 1. Структура первой гармоники продольной составляющей кильватерного поля, возбуждаемого бесконечно коротким заряженным диском в диэлектрическом волноводе: а — суммарное поле E_{z1} , б — поле излучения Вавилова–Черенкова E_{z1}^{cher} , в — переходное излучение E_{z1}^{trans} . Цифры у кривых: 1 — $z = z^{gr}$, 2 — $z = z^{pr}$, 3 — положение заряда. Время наблюдения $tc/b = 40$, $t_0 = 0$, $\gamma = 5$, $\varepsilon = 2.6$

и убывает по мере удаления от него. В предвестнике (линия 2 на рис. 1в) она стремится к нулю. Вблизи задней стенки огибающая мала, но отличается от нуля и убывает со временем. Переходное поле (21) терпит скачок на плоскости заднего фронта (см. рис. 1в). Это объясняется тем, что мы искусственно разделили непрерывное суммарное поле (19) на составляющие, при этом выделенное поле Вавилова–Черенкова (20) при переходе через плоскость заднего фронта также скачком обращается в нуль.

В результате в фиксированный момент времени t пространственная структура результирующего поля имеет вид, изображенный на рис. 1а. Перед сгустком поле равно нулю. Левее $z^{pr} = (t - t_0) v_{pr}$ (линия 2) огибающая поля начинает убывать, при $z = z^{gr}$ (линия 1) она равна половине поля черенковского излучения. В области $z \ll z^{gr}$ поле мало и убывает со временем.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Заряженный сгусток конечных размеров характеризуется следующими параметрами: радиус сгустка a , длительность сгустка T_b ($T_b = L_b/v_0$, где L_b — длина сгустка, полагаем, что скорость v_0 постоянна и одинакова у всех частиц сгустка), распределение плотности тока в сгустке $j_z(r_0, t_0)$ ($0 \leq t_0 \leq T_b$, $0 \leq r_0 \leq a$, t_0 — время влета в систему рассматриваемого сечения сгустка), полное количество заряженных частиц в сгустке N_0 . Такой сгусток может быть представлен в виде набора колец с различными значениями заряда, радиуса и времени влета. Поле от сгустка получим, просуммировав поля от всех макрочастиц, которые образуют сгусток:

$$E_z(t, r, z) = \sum_i E_z(t, r, z, t_{0i}, r_{0i}),$$

где элементарное поле $E_z(t, r, z, t_{0i}, r_{0i})$ макрочастицы с номером i определяется выражениями (19)–(21).

В схемах ускорения частиц кильватерными полями часто используется профилирование ведущего сгустка, в результате чего его плотность плавно нарастает от головы к хвосту, а затем резко уменьшается до нуля. Такой сгусток позволяет достичь большого значения коэффициента трансформации [16], т. е. отношения поля, возбуждаемого сгустком, к величине тормозящего поля, действующего на частицы сгустка. Коэффициент трансформации определяет максимальное приращение энергии ускоряемых частиц. Возьмем, например, распределение плотности тока в виде

$$j_z(r_0, t_0) = j_0 J_0 \left(\lambda_1 \frac{r_0}{a} \right) \exp \left[-4 \left(\frac{t_0}{T_b} - 1 \right)^2 \right], \quad (22)$$

где j_0 — максимальное значение плотности тока в сгустке. Такое распределение часто реализуется в экспериментальных условиях и используется при численном моделировании. В этом случае имеет место следующее соотношение между полным зарядом и максимальной плотностью тока:

$$eN_0 = \frac{\pi^{3/2}}{2} \frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1} \frac{a^2 L_b}{v_0} j_0.$$

Это выражение используется при определении характерного масштаба электрического поля в численных расчетах, если задан полный заряд сгустка.

На рис. 2 представлена эволюция во времени продольного распределения кильватерного поля, возбуждаемого в полубесконечном диэлектриче-

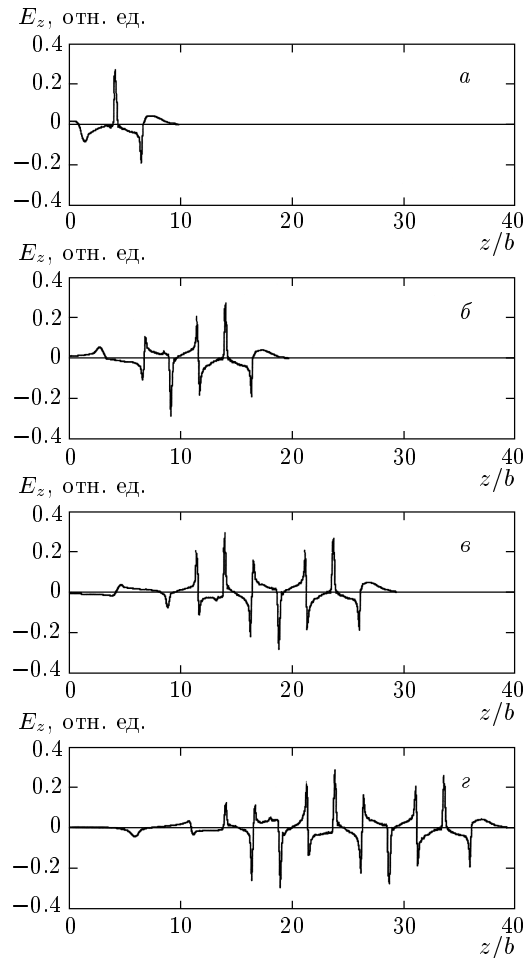


Рис. 2. Эволюция кильватерного поля, возбуждаемого на оси волновода длинным релятивистским сгустком с несимметричным профилем плотности (22). Учтены 10 гармоник: $tc/b = 10$ (а), 20 (б), 30 (в), 40 (г); $\gamma = 5$, $\varepsilon = 2.6$, $a/b = 0.143$, $L_b/b = 3.2$

ском волноводе релятивистским электронным сгустком, несимметричный продольный профиль которого описывается формулой (22). Отметим, что поле за сгустком значительно превышает поле в области сгустка, что и характеризует большое значение коэффициента трансформации. Электрическое поле на рис. 2 нормировано на величину $4\pi j_0 a/c$, имеющую смысл кулоновского поля вблизи поверхности сгустка. Поскольку в диэлектрическом волноводе возбуждается целый ряд радиальных гармоник, амплитуды которых оказываются сравнимы между собой, здесь учтены 10 гармоник (дальнейшее увеличение их числа практически не изменяет численные результаты). Интерференция большого числа ради-

альных гармоник привела к появлению острых пиков поля, амплитуда которых значительно превышает амплитуду какой-либо одной гармоники. Четко видно, что область, в которой огибающая кильватерного поля максимальна, заключена между заряженным сгустком и движущейся вслед за ним границей — задним фронтом излучения, причем скорость движения этого фронта примерно в ϵ раз меньше скорости сгустка. Позади заднего фронта поле значительно меньше, чем перед ним, и имеет другую структуру. Со временем длина возбужденного кильватерного поля возрастает.

Наличие у кильватерного поля заднего фронта, перемещающегося с групповой скоростью, ограничивает длину волнового пакета и накладывает соответствующие требования на время запаздывания, в течение которого ускоряемый сгусток заряженных частиц должен быть инжектирован в ускоряющую систему. Конечная длина области существования возбуждаемого поля накладывает ограничение на длительность импульса тока ускоряемых частиц.

Перспективным методом получения кильватерных полей большой амплитуды является использование цепочки коротких сгустков малой плотности, промодулированной так, чтобы поля от отдельных сгустков складывались когерентно [24]. Исследуем генерацию кильватерного поля последовательностью коротких релятивистских сгустков в полубесконечном волноводе. Для прояснения качественной картины сначала ограничимся учетом первой гармоники поля. Каждый сгусток последовательности моделируется одной макрочастицей — тонким диском. Частота следования зарядов равна резонансной частоте первой гармоники. Количество сгустков ограничено. Из рис. 3а видно, что в бесконечном волноводе поле будет линейно расти от начала к концу последовательности, за последним сгустком (линия 1) амплитуда поля постоянна. При наличии границы $z = 0$ ситуация радикально меняется. Как видно на рис. 3б, теперь поле растет от головы последовательности до линии 2, а затем убывает, причем за последним сгустком (линия 1) скорость убывания поля возрастает, появляется задняя граница волнового пакета, за которой поле стремится к нулю. Линия 2 соответствует положению заднего фронта кильватерного поля, возбуждаемого головным сгустком последовательности, и определяет количество сгустков, поля от которых могут складываться когерентно, т. е. в сечении, отмеченном этой линией, суммируются поля от всех сгустков, расположенных правее. До тех пор, пока в последовательности из конечного числа сгустков задний фронт поля от первого

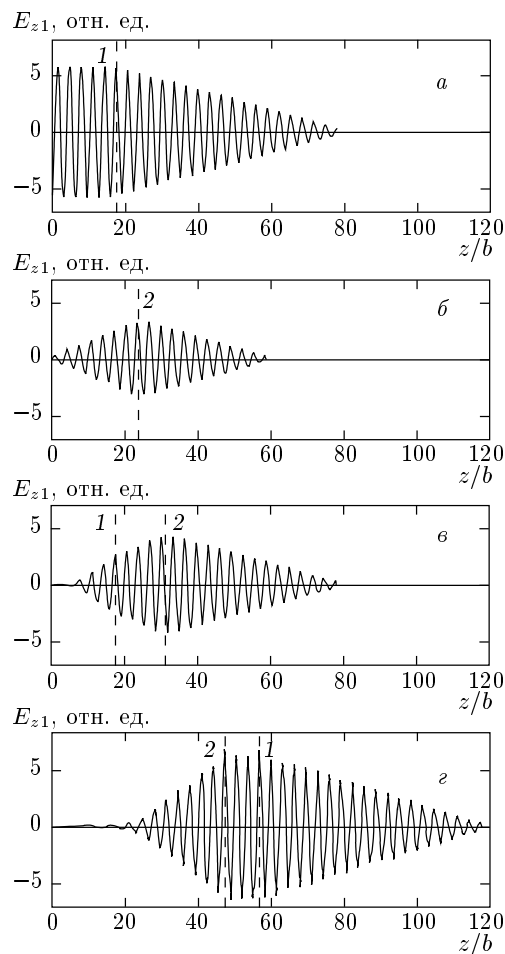


Рис. 3. а — Структура первой гармоники продольного электрического кильватерного поля, возбуждаемого на оси волновода последовательностью из 20 заряженных дисков без учета влияния границы $z = 0$; б, в, г — то же, но в полубесконечном волноводе: $tc/b = 80$ (а), 60 (б), 80 (в), 120 (г). Цифры у кривых: 1 — координата последнего заряда последовательности z_{20} , 2 — положение заднего фронта поля от первого заряда последовательности z_1^{gr} ; $\gamma = 5$, $\epsilon = 2.6$, $a/b = 0.143$, $\Delta z_0/b = 3.2$

заряда будет находиться в границах последовательности (как на рис. 3б и рис. 3в), максимальное возбуждаемое поле будет меньше максимального поля этой же последовательности в бесконечном волноводе. После того как последний заряд цепочки обгоняет этот фронт (рис. 3г), появляется область, в которой когерентно складываются поля от всех сгустков и амплитуда поля такая же, как и в бесконечном волноводе. На рис. 3г эта область ограничена линиями 1 и 2.

Пространственное распределение продольного

электрического поля существенно зависит от длины системы. Если рассматривается полубесконечная система $0 < z < +\infty$, то поле, возбуждаемое непрерывной последовательностью электронных сгустков, будет максимальным вблизи заднего фронта кильватерного поля от головного сгустка последовательности

$$z_1^{gr} = (t - t_{01}) v_{gr}.$$

В этой плоскости будут складываться поля от следующего количества сгустков:

$$N_t^{max} \approx \frac{t(v_0 - v_{gr})}{\Delta z_0} + 1, \quad (23)$$

где Δz_0 — расстояние между соседними сгустками. Со временем этот максимум будет расти и перемещаться вслед за сгустками с групповой скоростью. За максимумом поле будет линейно убывать и в начале системы ($z \approx 0$) оно не будет превышать поля от одного сгустка (рис. 3б)¹⁾.

Для замедляющей системы конечной длины может быть реализована иная ситуация. Пусть волновод конечной длины L_{syst} , закрытый металлической стенкой при $z = 0$, на выходном торце $z = L_{syst}$ подключен к идеально согласованной нагрузке. В этом случае можно пренебречь пограничными эффектами на правом торце волновода и для вычисления поля внутри системы использовать выражения (19)–(21). Рассмотрим на участке $0 < z < L_{syst}$ поле, возбуждаемое непрерывной последовательностью зарядов. В качестве примера можно привести рис. 3б, если полагать, что $L_{syst}/b = 20$. Огибающая поля максимальна на правой границе участка $z = L_{syst}$. В этом сечении складываются поля от наибольшего числа сгустков. Для оценки их количества воспользуемся формулой (23), в которой положим $t = L_{syst}/v_{gr}$:

$$N_L^{max} \approx \frac{L_{syst}}{\Delta z_0} \left(\varepsilon - 1 - \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \right) + 1. \quad (24)$$

Для $L_{syst} = 70$ см, $\varepsilon = 2.6$, $\gamma = 5$, $\Delta z_0 = 11.2$ см получаем $N_L^{max} \approx 10$. Это с хорошей точностью подтверждает рис. 3б.

Когда в бесконечном диэлектрическом волноводе непрерывная последовательность сгустков, промодулированная на частоте первой резонансной гармоники, возбуждает многомодовое кильватерное поле,

¹⁾ Мы можем использовать этот рисунок для иллюстрации случая непрерывной последовательности сгустков, так как на нем изображено распределение поля в такой момент времени, когда еще не все из учтенных сгустков влетели в систему.

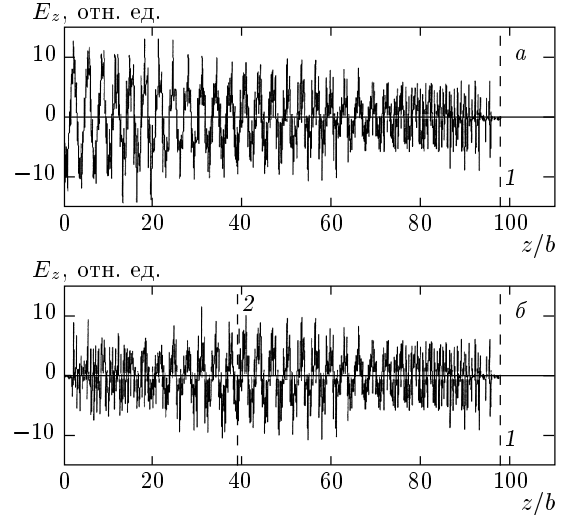


Рис. 4. *a* — Структура продольного электрического кильватерного поля, возбуждаемого на оси волновода непрерывной последовательностью заряженных дисков без учета влияния границы $z = 0$; *б* — то же самое в полубесконечном волноводе. $tc/b = 100$. Учтены 10 гармоник. Цифры у кривых: 1 — координата первого заряда последовательности z_1 , 2 — положение заднего фронта кильватерного поля от первого заряда последовательности z_1^{gr} . Всего на рисунке находится 31 сгусток; $\gamma = 5$, $\varepsilon = 2.6$, $a/b = 0.143$, $\Delta z_0/b = 3.2$

происходит следующее (рис. 4а). В начале последовательности складываются поля от небольшого количества сгустков и суммарное поле имеет сложный вид из-за того, что поля от каждого заряда состоят из пиков, частота следования которых отличается от частоты модуляции последовательности (область $70 < z/b < 100$ на рис. 4а). Затем, по мере удаления от головы цепочки и увеличения количества сгустков, поля от которых складываются когерентно, начинает выделяться резонансная частота модуляции, поле растет и принимает вид, близкий к одномодовому (область $0 < z/b < 15$ на рис. 4а).

В ограниченной системе число сгустков, поля которых складываются в некотором поперечном сечении, растет по мере удаления плоскости сечения от металлического торца и достигает предельного значения (24) на согласованном выходном торце волновода. Поэтому при условии многомодового возбуждения кильватерного поля цепочкой сгустков в начале волновода (область $0 < z/b < 20$ на рис. 4б, вблизи металлической стенки) поле имеет примерно такой же качественный сложный вид, как и вблизи головы последовательности в бесконечном волноводе.

Если длина системы достаточно велика, то колебания вблизи идеально согласованного правого торца станут близки к одномодовым из-за выделения резонансной частоты модуляции (область $30 < z/b < 40$ на рис. 4б, если $L_{\text{sys}}/b = 40$).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдено точное аналитическое решение для задачи распространения электромагнитного сигнала, возбуждаемого движущимся заряженным сгустком в полубесконечном диэлектрическом волноводе. Полученные выражения точно описывают структуру поля в любой точке в произвольный момент времени, в том числе когда частица переместилась от стенки $z = 0$ на расстояние, не превышающее нескольких длин волн. Это важно при исследовании систем, длина которых сравнима с их радиусом.

Наличие движущегося с групповой скоростью заднего фронта возбуждаемого электромагнитного поля существенно для ускорения заряженных частиц кильватерным полем заряженного сгустка. В модели безграничной среды ускоряемый сгусток может инжектироваться в произвольный период волны, возбуждаемой ведущим сгустком. Для полуограниченной среды увеличение времени запаздывания либо приведет к уменьшению темпа ускорения, либо может сделать ускорение вообще невозможным.

При возбуждении кильватерного поля последовательностью сгустков в ускоряющей системе конечной длины наибольшая амплитуда продольного электрического поля достигается на выходном конце системы. Максимально достижимое поле определяется параметрами волновода и цепочки зарядов, оно не зависит от количества сгустков, пролетевших через систему.

Обсудим границы применимости полученного решения. Перечислим основные предположения, позволившие записать поле в аналитическом виде (19)–(21). Во-первых, это прямолинейное и равномерное движение частиц сгустка параллельно оси волновода. Во-вторых, отсутствие частотной дисперсии диэлектрической проницаемости ε . В-третьих, сплошное диэлектрическое заполнение волновода, определяющее электродинамику замедляющей среды.

Выбрав приближение заданного прямолинейного и равномерного движения частиц сгустка, мы пренебрегли обратным влиянием на них возбуждаемого электромагнитного поля. Такое приближение часто применяется при рассмотрении излучения одиночно-

го заряда или слаботочного сгустка зарядов [2, 20, 21]. В реальных условиях область его применимости накладывает ограничение на количество электронов в сгустке и длину системы. Тормозящее продольное электрическое поле E_z , действующее на короткий сгусток с прямоугольным распределением плотности, имеет следующий порядок величины:

$$E_z \sim 8eN_0/b^2\varepsilon.$$

Условие пренебрежения изменением скорости частицы на длине системы имеет вид

$$\frac{8e^2N_0L_{\text{sys}}}{mv_0^2\gamma^3\varepsilon b^2} \ll 1.$$

Для $b = 4$ см, $L_{\text{sys}}/b = 100$, $\varepsilon = 2.6$, $\gamma = 5$ неравенство будет выполняться при $N_0 \ll 4 \cdot 10^{12}$. Это предельное значение существенно превышает достигнутое в настоящее время в экспериментах. При экспериментальной реализации кильватерного метода ускорения используются сгустки с гораздо большей энергией γ , что позволяет применять приближение заданной скорости для плотных сгустков. Поперечное движение заряженных частиц можно не учитывать при наложении сильного внешнего продольного магнитного поля [25].

Пренебрежение зависимостью $\varepsilon(\omega)$ является достаточно оправданным и существенно упрощает выкладки. Выражения (19)–(21) с хорошей точностью описывают картину поля, если требуемый диапазон возбуждаемых резонансных частот соответствует горизонтальному участку зависимости $\varepsilon(\omega)$, на котором нет областей поглощения. Это, как правило, отвечает экспериментальным условиям. Так, диэлектрическая проницаемость полистирола [26] практически постоянна в диапазоне частот от 1 до 25 ГГц и равна 2.55, при этом потери очень малы. Учет частотной дисперсии $\varepsilon(\omega)$ приведет к тому, что в выражениях (3)–(4) изменятся полюсы и точки ветвления подынтегральных функций, возможно появление дополнительных полюсов. В областях частоты, для которых будет выполняться условие $v_0 < c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$, полюсы ω_0 станут чисто мнимыми. Соответственно, наряду с волновым черенковским полем возникнет квазистатическое кулоновское поле, сильно локализованное в области заряда. Поскольку в пределе $\omega \rightarrow \infty$ имеет место $\varepsilon \approx 1$, скорость распространения предвестника переходного излучения возрастет: $v_{pr} \rightarrow c$. Тем самым допускается существование поля впереди сгустка. Однако указанные эффекты определяются колебаниями с очень высокой частотой, амплитуда которых будет мала, поэтому их можно не учитывать.

Третье предположение не является принципиальным. Такое же рассмотрение, но более громоздкое, может быть проведено для конечной толщины пролетного канала волновода. Влияние вакуумного пролетного канала на дисперсионные свойства среды несущественно, если его поперечное сечение мало по сравнению с поперечным сечением диэлектрика. Кроме того, надо иметь в виду, что высшие радиальные гармоники поля, удовлетворяющие условию

$$d\lambda_n \gg b\gamma\sqrt{\varepsilon v_0^2/c^2 - 1}$$

(d — поперечный размер канала), будут слабо возбуждаться сгустком из-за сильного провисания поля в вакуумный канал.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Сорренс, J. Acoust. Soc. Amer. **25**, 525 (1953).
2. М. Элайсез, Ф. Гарсиа-Молинер, в сб. *Физическая акустика*, т. 5, под ред. У. Мезона, Мир, Москва (1973).
3. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, 2-е изд., Физматгиз, Москва (1967).
4. Л. А. Жекулин, Изв. АН СССР, ОТН **7**, 409 (1938).
5. Б. Н. Гершман, ЖТФ **22**, 101 (1952).
6. А. Sommerfeld, Ann. der Phys. **44**(10), 177 (1914).
7. L. Brillouin, Ann. der Phys. **44**(10), 203 (1914).
8. Н. G. Ваервальд, Ann. der Phys. **6**, 295 (1930).
9. Н. G. Ваервальд, Ann. der Phys. **7**, 731 (1930).
10. Н. Г. Денисов, ЖЭТФ **21**, 1354 (1951).
11. J. R. Wait and K. P. Spies, Appl. Sci. Res. **16**, 455 (1966).
12. В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович, *Переходное излучение и переходное рассеяние*, Наука, Москва (1984).
13. *Библиография работ по переходному излучению заряженных частиц (1945–1982)*, под ред. Г. М. Гарибяна, ЕрФИ, Ереван (1983).
14. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ **33**, 1403 (1957).
15. P. Chen, J. M. Dawson, R. W. Huff, and T. Katsouleas, Phys. Rev. Lett. **54**, 692 (1985).
16. T. Katsouleas, Phys. Rev. A **33**, 2056 (1986).
17. W. Gai, P. Schoessow, B. Cole et al., Phys. Rev. Lett. **61**, 2756 (1989).
18. R. Keinigs, M. E. Jones, and W. Gai, Particle Accelerators **24**, 223 (1989).
19. В. Л. Гинзбург, *Теория распространения радиоволн в ионосфере*, Гостехиздат, Москва (1949).
20. Э. Л. Бурштейн, Г. В. Воскресенский, ЖТФ **33**, 34 (1963).
21. Б. М. Болотовский, УФН **75**, 295 (1961).
22. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функции комплексного переменного*, Наука, Москва (1973).
23. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, ИИЛ, Москва (1949).
24. Я. Б. Файнберг, В. А. Балакирев, И. Н. Онищенко и др., ФП **20**, 674 (1994).
25. А. А. Рухадзе, Л. С. Богданкевич, С. Е. Росинский, В. Г. Рухлин, *Физика сильноточных релятивистских электронных пучков*, Атомиздат, Москва (1980).
26. А. Р. Хиппель, *Диэлектрики и их применение*, Гостехиздат, Москва (1959).