

ЭФФЕКТ ХАНЛЕ ПРИ РАССЕЙАНИИ ВПЕРЕД В ВОЗБУЖДЕННЫХ СРЕДАХ

*Б. А. Векленко**

*Московский энергетический институт
111250, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 11 мая 2000 г.

Предложен новый метод расчета матрицы плотности квантованного электромагнитного поля, взаимодействующего с окружением при наличии в среде кинетических процессов. Этот метод наряду с точным учетом квантовых корреляторов фотон–фотон обладает рядом симметричных свойств, существенно облегчающих суммирование возникающих в нем диаграмм Фейнмана. В качестве приложения рассмотрен процесс рассеяния вперед резонансного излучения двухуровневыми атомами газа, находящимися в магнитном поле. Показано, что из квантовой электродинамики следует недостаточность полуклассического описания этого когерентного процесса в возбужденных средах с помощью единого тензорного показателя преломления. Необходимо введение еще одной функции, зависящей от частоты облучения и концентрации возбужденных атомов. Указаны эксперименты, одновременно определяющие как эту дополнительную функцию, так и стандартный показатель преломления среды.

PACS: 42.50.Ct

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа [1], обратившая внимание на специфику эффекта Ханле при рассеянии вперед, вызвала неослабевающий поток исследований [2–11]. Характерной особенностью этого эффекта в отличие от стандартного эффекта Ханле [12] служит когерентность вторичных источников излучения. Как правило, рассматриваются два круга вопросов: линейное рассеяние с целью диагностирования рассеивающих сред [9–11] и нелинейные магнитооптические эффекты [1–8] с целью изучения их характерных особенностей.

Как в теоретических, так и в экспериментальных исследованиях до сих пор не обращалось должного внимания на влияние возбужденных атомов на исследуемые процессы. Молчаливо, а иногда явно [2, 4], предполагалось, что влияние возбужденных атомов через поляризацию среды, зависящую от разности $n_\mu - n_m$ (n_μ — концентрация невозбужденных атомов, n_m — возбужденных), способно лишь ослабить наблюдаемые эффекты.

В действительности — и мы обращаем на это внимание — роль возбужденных атомов в условиях когерентности вторичных источников излучения значительно более существенна даже при линейных процессах рассеяния, которыми мы ограничимся. Последовательная квантовая электродинамика, оперирующая с квантованным электромагнитным полем, показывает, что описать в данном случае рассеивающую среду с помощью одного тензора поляризации или показателя преломления не представляется возможным: нужна еще одна функция, зависящая от частоты электромагнитного поля. Похожая ситуация возникает при исследовании эффектов селективного отражения резонансного излучения от возбужденных сред [13, 14]. Таким образом, речь идет об общих свойствах эволюции квантованного электромагнитного поля в возбужденных диспергирующих средах. Эффект Ханле при рассеянии вперед удобен тем, что позволяет на существующих экспериментальных установках при наблюдении взаимно перпендикулярных поляризаций рассеянного света диагностировать разные характеристики среды, в том числе не описываемые ее показателем преломления.

*E-mail: phf@deans.mpei.ac.ru

Напомним, что показатель преломления естественным образом возникает в классической оптике при описании детерминированной (не флуктуационной) компоненты излучения путем исключения динамических переменных среды из системы уравнений Максвелла. Подобная процедура над полевыми операторами в квантовой электродинамике при наличии поглощающих сред не представляется возможной. Показатель преломления в квантовой электродинамике естественным образом присутствует в методе квантовых функций Грина [15]. Такой путь расчета уже использовался в ряде оптических работ [16–20]. Но проблема остается, и она заключается в следующем. Замкнутых уравнений для квантово-усредненных величин получить нельзя, поскольку при их выводе приходится разрывом корреляторов замыкать цепочку уравнений Боголюбова. В технике гриновских функций эквивалентной процедурой служит пренебрежение корреляторами $\langle \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle$, где $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ ($\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^+$) — оператор уничтожения (рождения) фотона в состоянии с волновым вектором \mathbf{k} и индексом поляризации λ . Тем или иным способом оправдывается относительно малая роль этих корреляторов (все \mathbf{k} , λ одинаковы) в итоговых выражениях. В то же время в возбужденных средах наличие вынужденных процессов излучения влечет за собой возникновение корреляторов именно такого типа. Коэффициенты перед ними сингулярны из-за наличия δ -функций, следящих за выполнением законов сохранения. По этой причине возможность пренебрежения такими корреляторами не представляется очевидной.

С целью сохранения этих корреляторов и выявления их роли в настоящей работе используется другой путь исключения параметров среды из схемы расчетов. Если обозначить через ρ матрицу плотности системы атомы + электромагнитное поле и осуществить суммирование по параметрам атомов среды, то естественным путем возникает матрица плотности электромагнитного поля в среде: $\rho_{ph} = \text{Sp}_a \rho$. Средние характеристики поля находятся стандартным образом:

$$\langle \hat{\mathcal{E}}^\nu \rangle = \text{Sp}_{ph} \hat{\mathcal{E}}^\nu \rho_{ph}, \quad \langle \hat{\mathcal{E}}^\nu \hat{\mathcal{E}}^{\nu'} \rangle = \text{Sp}_{ph} \hat{\mathcal{E}}^\nu \hat{\mathcal{E}}^{\nu'} \rho_{ph},$$

где $\hat{\mathcal{E}}^\nu$ — оператор напряженности электромагнитного поля. Этот путь не предполагает разрыва корреляторов фотон–фотон.

Ниже предлагается новый метод вывода замкнутого уравнения для ρ_{ph} . Этот метод обладает внутренней симметрией, сильно облегчающей проведение расчетов.

Попытки нахождения уравнений для матрицы плотности подсистем (каковой является фотонное поле), взаимодействующих с окружением, предпринимались ранее [21–23]. Вид уравнений и отсутствие симметричных соотношений затрудняли выход за рамки теории возмущений. В целях преодоления проблемы в работах [13, 14] был разработан метод Г-операторов. Опыт показал, что знакомство с методом, использующим абстрактное Г-пространство, вызывает большие трудности. Это обстоятельство побуждает к разработке другого независимого метода расчета ρ_{ph} , обладающего аналогичными симметричными свойствами.

Нами будет использован метод матричных функций Грина. Этот метод был разработан в работе [24] для расчета квантовых средних. Мы покажем, что некоторая его модификация позволяет рассчитывать ρ_{ph} . Такой путь расчета требует ряд неочевидных предварительных построений и потому не был востребован ранее.

Последовательный учет корреляторов фотон–фотон влечет за собой неочевидные следствия. Например, недостаточность описания оптических свойств возбужденных сред посредством единого тензора поляризации. Более того, оказывается, что наличие такого тензора противоречило бы основам квантовой электродинамики. Последнее утверждение можно проиллюстрировать на предлагаемом ниже примере, допускающем элементарный анализ.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Ряд свойств света, прошедшего через термически возбужденный и находящийся в магнитном поле слой газа, можно предвидеть на основе следующего нестроого полуколичественного анализа. Воспользуемся теорией \hat{S} -матрицы. Пусть ρ — матрица плотности системы среда + поле после включения гамильтониана взаимодействия. Матрица плотности ρ_{ph} фотонной подсистемы всегда может быть представлена [14] в виде суммы двух слагаемых:

$$\rho_{ph} = \rho_{ph}^{(c)} + \rho_{ph}^{(n)}. \quad (1)$$

При этом $\rho_{ph}^{(c)}$ описывает процессы рассеяния электромагнитного поля, в результате которых среда не изменяет своего начального состояния (когерентный канал рассеяния). Компонента $\rho_{ph}^{(n)}$ описывает процессы, в результате которых состояние среды изменяется (некогерентный канал рассеяния). Сумма (1) свидетельствует о том, что между этими каналами квантовых, т. е. описываемых волновой функцией,

явлений интерференции нет из-за ортогональности атомных функций среды в конечных состояниях. Пусть $\hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} = \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ — оператор числа фотонов в состоянии, отвечающем моде (\mathbf{k}, λ) . Из (1) следует, что

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle &= \langle \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(c)} + \langle \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)}, \\ \langle \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(c)} &= \text{Sp}_{ph} \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rho_{ph}^{(c)}, \\ \langle \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)} &= \text{Sp}_{ph} \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rho_{ph}^{(n)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, если (\mathbf{k}, λ) — оптическая мода, в которую осуществилось рассеяние фотонов из начального состояния $(\mathbf{k}_0, \lambda_0)$ в результате взаимодействия их со средой, то среднее $\langle \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle$ в этой моде представимо в виде двух положительно определенных слагаемых. Этот факт имеет принципиальное значение. Положительная определенность слагаемых в (2) следует из принципиальной возможности их измерения. Формальное доказательство содержится в [13].

Теперь рассмотрим результат рассеяния поперечных ($\lambda = 1, 2$) фотонов на двух структурно одинаковых атомах, один из которых не возбужден и находится в точке \mathbf{R}_1 , а другой, возбужденный атом — в точке \mathbf{R}_2 . Будем считать атомы двухуровневыми, но обладающими зеэмановскими подуровнями. Рассеиваемый свет пусть находится в квазирезонансе, $|k - \omega_{m\mu}| < k$, с частотой $\omega_{m\mu}$ оптических переходов в атомах, $\hbar = c = 1$. Условие резонансности осложняет исследование и, вообще говоря, делает неприменимой теорию возмущений. Для предварительного анализа поступим следующим образом. Воспользуемся теорией возмущений, сохраняя в резонансных знаменателях слагаемые $\pm i0$, возникающие как следствие адиабатической гипотезы. В более полной теории из-за наличия массовых операторов эти слагаемые будут заменены на $\pm i\gamma/2$, где γ — ширина энергетических уровней атомов. Всегда будем считать столкновительную ширину больше радиационной. Знаки перед $i0$ и $i\gamma/2$ обязаны совпадать вследствие принципа причинности. Таким образом, учет членов $i0$, которые сразу заменим на $i\gamma/2$, позволит нам предвидеть структуру итоговых выражений в более развитой теории.

Будем считать, что каждый из атомов обладает одним валентным электроном. Спинные эффекты опускаем. В представлении вторичного квантования гамильтониан системы примем в виде

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}^0 + \hat{H}', \\ \hat{H}^0 &= \sum_j \varepsilon_j \hat{b}_j^+ \hat{b}_j + \sum_j \varepsilon_j \hat{\beta}_j^+ \hat{\beta}_j + \sum_{\mathbf{k}\lambda} k \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= - \sum_{ij} \frac{P_{ij}^\lambda(\mathbf{k})}{\sqrt{2kV}} \times \\ &\times \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_1} \hat{b}_i^+ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{b}_j + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_2} \hat{\beta}_i^+ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{\beta}_j \right) + \text{H.c.} \end{aligned}$$

Здесь $V = L_x L_y L_z$ — нормировочный объем, ε_j — разрешенные значения энергии атомов с учетом наличия магнитного поля, \hat{b}_j ($\hat{\beta}_j^+$) и $\hat{\beta}_j$ ($\hat{\beta}_j^+$) — операторы уничтожения (рождения) соответствующих этим энергетическим уровням состояний первого и второго атомов. В этой конкретной задаче все операторы можно считать принадлежащими полям Бозе-Эйнштейна. Далее,

$$P_{ij}^\lambda(\mathbf{k}) = \frac{e}{m} \int \psi_i^*(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\lambda e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \psi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\nabla_{\mathbf{r}},$$

причем ψ_i — волновая функция атома в состоянии с энергией ε_i , а $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\lambda$ — орты линейной поляризации фотонов.

При расчете \hat{S} -матрицы ограничимся третьим порядком теории возмущений:

$$\hat{S} = 1 + \hat{S}^{(1)} + \hat{S}^{(2)} + \hat{S}^{(3)}.$$

Стандартный расчет показывает, что для когерентного канала [14]

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(c)} &= \langle \hat{S}^{(2)} | \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} | \hat{S}^{(2)} \rangle = 4\pi^2 \left| \frac{P_{m\mu}^{\lambda*}(\mathbf{k}) P_{m\mu}^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)}{2kV} \right. \\ &\times \delta^2(k - k_0) \left[\frac{\exp[i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}_1]}{k - \omega_{m\mu} + i\gamma/2} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{\exp[i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}_2]}{\omega_{m\mu} - k + i\gamma/2} \right] \right|^2 N_0, \quad (3) \end{aligned}$$

где N_0 — число фотонов в рассеиваемой моде. Здесь учтено, что в силу зеэмановского расщепления лишь подуровни ε_m и ε_μ резонансны с частотой k , и потому лишь они сохранены в выражении (3).

Для некогерентного канала рассеяния имеем

$$\langle \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(n)} = \langle \hat{S}^{(1)} + \hat{S}^{(3)} | \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} | \hat{S}^{(1)} + \hat{S}^{(3)} \rangle \geq 0. \quad (4)$$

Член $\langle \hat{S}^{(1)} | \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} | \hat{S}^{(1)} \rangle$ нас не интересует, так как он не описывает процессы рассеяния. Явное вычисление (4) с сохранением, как и в (3), членов четвертого порядка по заряду приводит к

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}^{(1)} | \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} | \hat{S}^{(3)} \rangle + \text{c.c.} &= -8\pi^3 i \times \\ &\times \left| \frac{P_{m\mu}^{\lambda*}(\mathbf{k}) P_{m\mu}^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)}{2kV} \right|^2 N_0 \times \\ &\times \frac{\delta^2(\varepsilon_\mu - \varepsilon_m - k_0) \delta(k - k_0)}{k - \omega_{m\mu} + i\gamma/2} \times \\ &\times \exp[-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)] + \text{c.c.} \quad (5) \end{aligned}$$

Займемся анализом выражений (3)–(5), учитывая, что рассеяние происходит вперед. Если некогерентный канал отсутствует, то, согласно (3), в моде рассеяния (\mathbf{k}_0, λ) , отличающейся от исходной моды $(\mathbf{k}_0, \lambda_0)$ перпендикулярной к ней поляризацией, в формировании $\langle \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle$ принимает участие лишь когерентный канал рассеяния. При этом, согласно (3), если $k = \omega_{m\mu}$, то амплитуды рассеянных на различных атомах волн алгебраически складываются. Это означает, что при наличии многих рассеивателей и малой их концентрации

$$\langle \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(c)} \propto n_\mu + n_m. \quad (6)$$

Если же $|k - \omega_{m\mu}| > \gamma/2$, то, согласно тому же выражению (3), амплитуды рассеянных волн вычитаются друг из друга, и в случае протяженных сред следует ожидать, что

$$\langle \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle^{(c)} \propto n_\mu - n_m. \quad (7)$$

Различие в формулах (6) и (7) находится в противоречии с расчетами, основанными на стандартных методах квантовой функции Грина с использованием показателя преломления среды κ , связанного с поляризационным оператором Π формулой $\kappa = 1 - \Pi/k^2$ [15]. Такие расчеты с использованием процедуры разрыва корреляторов фотон–фотон показывают [20], что $\Pi \propto n_\mu - n_m$ для любых частот.

Может показаться, что проведенный анализ не полон, пока упущен из виду некогерентный канал рассеяния. Может ли его учет восстановить согласие между теориями? На первый взгляд кажется, что именно так и обстоит дело: сумма выражений (3) и (5) приводит к полному результату, отличающемуся от (3) лишь знаком перед $i\gamma/2$ в знаменателе второго члена. Согласно такому выражению, амплитуды рассеяния оптических волн на возбужденных и невозбужденных атомах в направлении $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ для любых частот всегда находятся в противофазе, что влечет за собой формулу (7), восстанавливающую, как будто, согласие между теориями. Такое заключение ошибочно. Дело в том, что выражение (5) при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ отрицательно, и это противоречит положительной определенности вклада в $\langle \hat{N}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle$ некогерентного канала рассеяния. Положительная определенность восстанавливается последовательным учетом члена $\hat{S}^{(3)}$ в (4). Отсюда, в свою очередь, следует необходимость учета в (4) членов шестого порядка по заряду, определяющих знак общего результата. Теперь ясно, что члены шестого порядка в некогерентном канале превосходят по модулю слагаемые четвертого порядка, и теория возмущений оказывается неприменимой. Элементарное суммирование

фейнмановских диаграмм, влекущее за собой замену $i0$ на $i\gamma/2$, ситуацию не изменяет: необходимо использование других дополнительных методов суммирования.

Итак, для учета вклада некогерентного канала в процесс резонансного рассеяния при наличии в среде возбужденных атомов всегда необходим выход за рамки теории возмущений и учет бесконечных подпоследовательностей фейнмановских диаграмм. В то же время положительная определенность некогерентного канала рассеяния свидетельствует о неравенстве

$$\langle \hat{N}_{\mathbf{k}_0\lambda} \rangle \geq \langle \hat{N}_{\mathbf{k}_0\lambda} \rangle^{(c)} \propto n_\mu + n_m$$

при

$$k = \omega_{m\mu}, \quad \lambda \neq \lambda_0.$$

Рассмотренный пример показывает, что процесс изменения поляризации на ортогональную исходной при прохождении света через находящиеся в магнитном поле возбужденные резонансные среды не может быть описан в рамках стандартных показателей преломления и поляризуемости среды, зависящих от $n_\mu - n_m$. Интенсивность прошедшего через среду света с учетом рассеяния, но без изменения поляризации ($\lambda = \lambda_0$), как будет показано ниже, такое описание допускает, и использование показателя преломления здесь уместно.

Таким образом, квантовая электродинамика для исследования оптических свойств возбужденных изотропных резонансных сред требует одновременного использования по крайней мере двух функций, зависящих от \mathbf{k} . Отсутствие одной из них противоречило бы основам квантовой теории. Явные выражения для этих функций приведены ниже.

Заметим, что расчет этих выражений требует использования методов теории квантованного поля. В полуклассической теории, оперирующей неквантованным полем, наши результаты получены быть не могут. Обычное утверждение о том, что в сильных полях результаты квантовой оптики, использующей когерентные [25] состояния, и классической оптики должны совпадать, поскольку ряды теории возмущений в этих теориях различаются лишь несущественными здесь вакуумными членами, неприменимо из-за неприменимости здесь теории возмущений.

Остановимся на результатах полуклассической теории более подробно. Согласно этой теории механизм рассеяния света заключается в индуцировании рассеиваемым излучением дипольного момента атома и затем излучения индуцированным и потому переменным во времени дипольным моментом второй волны.

Если на двухуровневый атом, находящийся в возбужденном состоянии ψ_m , падает классическая электромагнитная волна, напряженность которой описывается формулой

$$\mathcal{E}^\nu = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^\nu (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}),$$

то, согласно [26], индуцированный дипольный момент в используемых нами единицах измерения равен

$$d_m^\nu = e \int \psi_m^* r^\nu \psi_\mu d\mathbf{r} = -\frac{e^2}{8\pi} \times \\ \times \sum_{\nu'} \mathcal{E}_0^{\nu'} \langle \mu | r^{\nu'} | m \rangle \langle m | r^\nu | \mu \rangle \times \\ \times \left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega_{m\mu} - \omega - i\gamma/2} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{m\mu} + \omega - i\gamma/2} \right) + \text{c.c.}$$

Если же атом находится в основном состоянии ψ_μ , то внешнее поле наводит дипольный момент

$$d_m^\nu = -\frac{e^2}{8\pi} \sum_{\nu'} \mathcal{E}_0^{\nu'} \langle m | r^{\nu'} | \mu \rangle \langle \mu | r^\nu | m \rangle \times \\ \times \left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega_{\mu m} - \omega - i\gamma/2} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{\mu m} + \omega - i\gamma/2} \right) + \text{c.c.}$$

Если возбужденный и невозбужденный атомы расположены рядом, то в квазирезонансном приближении, $\omega \approx \omega_{m\mu}$, результирующий дипольный момент определяется суммой

$$d_m^\nu + d_\mu^\nu = -\frac{e^2}{8\pi} \sum_{\nu'} \mathcal{E}_0^{\nu'} \left(\frac{\langle \mu | r^{\nu'} | m \rangle \langle m | r^\nu | \mu \rangle}{\omega_{m\mu} - \omega - i\gamma/2} + \right. \\ \left. + \frac{\langle m | r^{\nu'} | \mu \rangle^* \langle \mu | r^\nu | m \rangle^*}{-\omega_{m\mu} + \omega + i\gamma/2} \right) e^{i\omega t} + \text{c.c.}$$

Теперь видно, что происходит полная компенсация всех компонент дипольных моментов. Этим объясняется тот факт, что амплитуда рассеяния в протяженных средах определяется разностью $n_\mu - n_m$, и при $n_m \rightarrow n_\mu$ рассеяние, согласно полуклассической теории, исчезает.

Теория эффекта Ханле на основе полуклассического рассмотрения с учетом наличия возбужденных атомов изложена в работе [4]. В этой работе показано, что в согласии с приведенным анализом в полуклассической теории эффект Ханле определяется разностью $n_\mu - n_m$, причем не только в линейном,

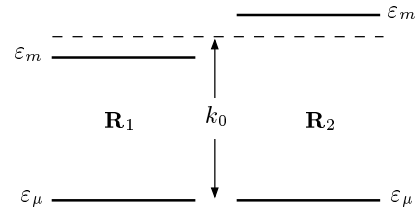


Схема энергетических уровней, отвечающая арифметическому сложению амплитуд света, отраженно-возбужденным и невозбужденным атомами

но даже в любом нелинейном по полю \mathcal{E}_0 порядке приближения.

Теперь заметим, что с помощью той же полуклассической теории можно получить иной результат. Пусть энергетические ширины у атомов отсутствуют. Дипольным рассеянием система, состоящая из возбужденного и невозбужденного атомов, не обладает. Пусть теперь к одному из атомов приблизилась посторонняя частица. Под воздействием такого возмущения энергетический уровень атома смещается. Резонансные частоты возбужденного и невозбужденного атомов перестают совпадать. Это означает, что рассеянные в противофазе возбужденным и невозбужденным атомами волны из-за разных энергетических знаменателей в амплитудах рассеяния перестают строго компенсировать друг друга. Появляется дипольное рассеяние. Более того, если частота рассеиваемого света попадает в расстройку резонансных частот (см. рисунок), то из-за изменения знака одного из резонансных знаменателей рассеянные атомами волны оказываются синфазными и арифметически складываются. Происходит вспышка рассеянного света.

Такое элементарное рассмотрение в рамках полуклассической теории показывает, что интенсивность света, резонансно рассеянного двумя атомами, один из которых возбужден, должна быть пропорциональной сумме $n_\mu + n_m$. К сожалению, формальный учет процессов столкновения в полуклассической теории посредством введения столкновительной ширины, как продемонстрировано выше, ведет к иному результату. Отсюда следует вывод о том, что в полуклассической теории излучения учет ширины атомных уровней при наличии возбужденных сред не всегда осуществляется адекватным образом.

Последовательная теория квантовой электродинамики этим недостатком не обладает. Переходим к ее изложению.

3. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ ФОТОННОЙ ПОДСИСТЕМЫ

3.1. Основные положения теории

Будем рассматривать газ, состоящий из двухуровневых, но обладающих зеемановскими подуровнями атомов с одним валентным электроном каждый. Поперечное электромагнитное поле будем считать находящимся в квазирезонансе, $|k - \omega_{m\mu}| < k$, с оптическими атомными переходами. Учитывая трансляционные степени свободы, примем уравнение Шредингера в виде

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}',$$

$$\hat{H}^0 = \hat{H}_a + \hat{H}_{ph}, \quad \hat{H}_a = \sum_{i\mathbf{p}} \varepsilon_i(p) \hat{b}_{i\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{i\mathbf{p}},$$

$$\hat{H}_{ph} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} k \left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right),$$

$$\hat{H}' = -\frac{e}{m} \int \hat{\psi}^+(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d\mathbf{r} d\mathbf{R},$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \sum_{i\mathbf{p}} \psi_i(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{\sqrt{V}} \hat{b}_{i\mathbf{p}},$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^\lambda}{\sqrt{2kV}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \alpha_{\mathbf{k}\lambda} + \text{H.c.}$$

Здесь $\varepsilon_i(p) = \varepsilon_i + p^2/2M$, \mathbf{p} — импульс атома, M — масса, $\hat{b}_{i\mathbf{p}}$ ($\hat{b}_{i\mathbf{p}}^+$) — операторы уничтожения (рождения) атома в состоянии с импульсом \mathbf{p} и внутренним состоянием, описываемым волновой функцией ψ_i . В отсутствие теплового вырождения все операторы можно считать принадлежащими полю Бозе-Эйнштейна.

В уравнении Шредингера можно учесть гамильтониан \hat{H} , ответственный за взаимодействие атомов среды с резервуаром. Мы явно этого делать не будем, полагая тем не менее, что резервуар поддерживает неизменной концентрацию возбужденных атомов и способствует уширению их энергетических уровней.

Уравнение Шредингера перепишем в интегральной форме:

$$\Psi = \Psi^0 + \mathcal{G}_r^0 \hat{H}' \Psi, \quad i \frac{\partial \Psi^0}{\partial t} - \hat{H}^0 \Psi^0 = 0, \quad (8)$$

где Ψ^0 описывает начальное состояние системы до включения гамильтониана \hat{H}' ,

$$i \frac{\partial \mathcal{G}_r^0}{\partial t} - \hat{H}^0 \mathcal{G}_r^0 = I. \quad (9)$$

Решение уравнения (8) можно представить в виде

$$\Psi = \Psi^0 + \mathcal{G}_r \hat{H}' \Psi^0, \quad i \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial t} - \hat{H} \mathcal{G}_r = I. \quad (10)$$

3.2. Матричные функции Грина \mathcal{G}_{ii}^0

Пусть

$$\mathcal{G}_{vac}^0 = \mathcal{G}_r^0 - \mathcal{G}_a^0, \quad \mathcal{G}_a^0 = \mathcal{G}_r^{0+}.$$

Введем собственные функции и собственные значения операторов свободных полей

$$\hat{H}_{ph} \Phi_{\mathbf{N}} = \varepsilon_{ph}(\mathbf{N}) \Phi_{\mathbf{N}}, \quad \hat{H}_a \chi_{\mathbf{N}} = \varepsilon_a(\mathbf{N}) \chi_{\mathbf{N}},$$

где аргумент фотонного поля $\mathbf{N} = N_{\mathbf{k}_1\lambda_1}, N_{\mathbf{k}_2\lambda_2}, \dots$, причем $N_{\mathbf{k}_j\lambda_j}$ — числа заполнений состояний $(\mathbf{k}_j, \lambda_j)$; аргумент атомного поля $\mathbf{N} = N_{i_1\mathbf{p}_1}, N_{i_2\mathbf{p}_2}, \dots$, причем $N_{i_j\mathbf{p}_j}$ — числа заполнений состояний (i_j, \mathbf{p}_j) . Положим

$$\mathcal{G}_{21}^0 = \mathcal{G}_{vac}^0 - iZ\Psi^0\Psi^{0+}, \quad \mathcal{G}_{12}^0 = -iZ\Psi^0\Psi^{0+},$$

$$\Psi^0 = \Phi_{\mathbf{N}_0} \exp[-i\varepsilon_{ph}(\mathbf{N}_0)t] \chi_{\mathbf{N}'_0} \times \exp[-i\varepsilon_a(\mathbf{N}'_0)t], \quad (11)$$

причем векторы \mathbf{N}_0 и \mathbf{N}'_0 соответствуют начальным состояниям системы и Z — произвольная безразмерная константа. Далее, согласно определению, положим

$$\mathcal{G}_{11}^0 = \mathcal{G}_{21}^0 \theta^> + \mathcal{G}_{12}^0 \theta^<, \quad \mathcal{G}_{22}^0 = \mathcal{G}_{21}^0 \theta^< + \mathcal{G}_{12}^0 \theta^>, \quad (12)$$

причем $\theta^> = \theta(t - t')$, $\theta^< = \theta(t' - t)$, θ — функция Хевисайда. Из (12) следует, что

$$\mathcal{G}_{11}^0 + \mathcal{G}_{22}^0 = \mathcal{G}_{12}^0 + \mathcal{G}_{21}^0 \quad (13)$$

и

$$\mathcal{G}_{11}^0 - \mathcal{G}_{12}^0 = \mathcal{G}_r^0, \quad \mathcal{G}_{11}^0 - \mathcal{G}_{21}^0 = \mathcal{G}_a^0. \quad (14)$$

Функции \mathcal{G}_r^0 и \mathcal{G}_a^0 обладают запаздывающим и опережающим характерами. Они удовлетворяют уравнению (9).

3.3. Матричные функции Грина \mathcal{G}_{ii}'

Определим эти функции как решение следующего интегрального уравнения

$$\mathcal{G}_{ii}' = \mathcal{G}_{ii}^0 + \mathcal{G}_{ii_1}^0 \sigma_{i_1 i_1}^{(3)} \hat{H}'_{i_1 i_2} \mathcal{G}_{i_2 i'}', \quad (15)$$

где $\sigma_{ii'}^{(3)} = \delta_{ii'} (-1)^{l+1}$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Зададимся следующим вопросом. При каких свойствах оператора $\hat{H}'_{ll'}$ функция $\mathcal{G}_{ll'}$ будет обладать алгебраическими свойствами (13), (14), присутствующими функции $\mathcal{G}'_{ll'}$?

Подействуем на уравнение (15) слева матрицей [24]

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и справа матрицей $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^+$. Приравнивая друг другу элементы возникшего таким образом матричного уравнения, с учетом (13), (14) получим четыре равенства:

$$\mathcal{G}_{12} + \mathcal{G}_{21} = \mathcal{G}_{12}^0 + \mathcal{G}_{21}^0 + (\mathcal{G}_{12}^0 + \mathcal{G}_{21}^0)\hat{H}'_a \mathcal{G}_a + \mathcal{G}_r^0 \hat{H}'_r (\mathcal{G}_{12} + \mathcal{G}_{21}) + \mathcal{G}_r^0 (\hat{H}'_{21} - \hat{H}'_{12}) \mathcal{G}_a, \quad (16)$$

$$\mathcal{G}_r = \mathcal{G}_r^0 + \mathcal{G}_r^0 \hat{H}'_r \mathcal{G}_r, \quad \mathcal{G}_a = \mathcal{G}_a^0 + \mathcal{G}_a^0 \hat{H}'_a \mathcal{G}_a, \quad (17)$$

$$\hat{H}'_{11} - \hat{H}'_{22} = \hat{H}'_{21} - \hat{H}'_{12}, \quad (18)$$

где использованы обозначения

$$\hat{H}'_r = \hat{H}'_{11} + \hat{H}'_{12}, \quad \hat{H}'_a = \hat{H}'_{11} - \hat{H}'_{12}. \quad (19)$$

Из равенства $\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_r^+$ следует, что

$$\hat{H}'_a = \hat{H}'_r^+. \quad (20)$$

Из уравнения (16), в свою очередь, вытекает

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{12} &= (1 + \mathcal{G}_r \hat{H}'_r) \mathcal{G}_{12}^0 (1 + \hat{H}'_a \mathcal{G}_a) - \mathcal{G}_r \hat{H}'_{12} \mathcal{G}_a, \\ \mathcal{G}_{21} &= (1 + \mathcal{G}_r \hat{H}'_r) \mathcal{G}_{21}^0 (1 + \hat{H}'_a \mathcal{G}_a) + \mathcal{G}_r \hat{H}'_{21} \mathcal{G}_a. \end{aligned} \quad (21)$$

Условиям (18)–(20) можно удовлетворить, если потребовать, чтобы

$$\hat{H}'_{ll'} = \delta_{ll'} \delta(t - t') \hat{H}'_l. \quad (22)$$

Уравнения (17) теперь эквивалентны дифференциальному уравнению (10). Из (21) и (11) следует, что

$$\mathcal{G}_{12} = -iZ\Psi\Psi^+,$$

где Ψ удовлетворяет уравнению (8).

Мы показали, что произведение $\Psi\Psi^+$, где Ψ — решение уравнения (8), может быть найдено из решения интегрального уравнения (15) при условии (22). Теперь

$$\rho_{ph} = iZ^{-1}\langle \mathcal{G}_{12} \rangle, \quad t \rightarrow t'. \quad (23)$$

Усреднение в (23) осуществляется по атомным переменным как в квантовом, так и в статистическом смыслах.

3.4. Усреднение по ансамблю систем

Введем обозначение $\mathcal{G}_{ll'}|_{Z=0} = \Delta_{ll'}$. Ограничившись первым членом разложения $\mathcal{G}_{ll'}$ в ряд по Z , имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ll'} &= \Delta_{ll'} - iZ\rho_{ll'}, \quad \mathcal{G}_{ll'}^0 = \Delta_{ll'}^0 - iZ\rho_{ll'}^0, \\ \rho_{ll'}^0 &= \Psi^0\Psi^{0+}. \end{aligned} \quad (24)$$

Все элементы матрицы $\rho_{ll'}^0$ равны между собой. Согласно (23),

$$\langle \rho_{12} \rangle \xrightarrow{t \rightarrow t'} \rho_{ph}, \quad \langle \Delta_{12} \rangle = 0.$$

Решаем уравнение (15) методом итераций и полагаем $Z = 0$. Находим, что

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta^0 + \Delta^0 \sigma^{(3)} \hat{H}' \Delta^0 + \\ &+ \Delta^0 \sigma^{(3)} \hat{H}' \Delta^0 \sigma^{(3)} \hat{H}' \Delta^0 + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Теперь дифференцируем итерационный ряд по Z и затем полагаем $Z = 0$. Приходим к

$$\rho = \rho^0 + \rho^0 \sigma^{(3)} \hat{H}' \Delta^0 + \Delta^0 \sigma^{(3)} \hat{H}' \rho^0 + \dots \quad (26)$$

Структура ряда (26) повторяет структуру ряда (25) с последовательной заменой каждой матрицы Δ^0 на ρ^0 так, что в каждом члене ряда (26) матрица ρ^0 обязательно содержится, но лишь в первой степени.

Усредним уравнения (25) и (26), предварительно умножив их на оператор $\exp[i\hat{H}_a(t - t')]$ слева. Выполнение усреднения продемонстрируем на примере матрицы \mathcal{G}'_{rr} . Поскольку

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'_{rr} &= -i\theta(t - t') \sum_{\mathbf{N}\mathbf{N}'} \chi_{\mathbf{N}'} \Phi_{\mathbf{N}} \chi_{\mathbf{N}}^+ \Phi_{\mathbf{N}}^+ \times \\ &\times \exp\{-i[\varepsilon_a(\mathbf{N}') + \varepsilon_{ph}(\mathbf{N})](t - t')\}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} &\langle \exp[i\hat{H}_a(t - t')] \mathcal{G}'_{rr} \rangle = \\ &= -i \sum_{\mathbf{N}} \Phi_{\mathbf{N}} \Phi_{\mathbf{N}}^+ \exp[-i\varepsilon_{ph}(\mathbf{N})(t - t')] \theta(t - t') = \langle \Delta_r^0 \rangle. \end{aligned}$$

Далее, согласно (11), (24),

$$\langle \rho_{12}^0 \rangle = \Phi_{\mathbf{N}_0} \Phi_{\mathbf{N}_0}^+ \exp[-i\varepsilon_{ph}(\mathbf{N}_0)(t - t')]$$

и, принимая во внимание (14),

$$\langle \Delta_{21}^0 \rangle = \langle \Delta_r^0 \rangle - \langle \Delta_a^0 \rangle, \quad \langle \Delta_{12}^0 \rangle = 0, \quad \langle \Delta_a^0 \rangle = \langle \Delta_r^0 \rangle^+.$$

Остальные элементы $\langle \Delta'_{ll'} \rangle$ определяются равенствами (12). Между ними существуют соотношения (13).

Это означает, что

$$\Delta'_{ll'} = \langle \Delta'_{ll'} \rangle \exp[-i\hat{H}_a(t - t')] I.$$

Вернемся к ряду (26) и усредним третье слагаемое (второй порядок теории возмущений). Воспользуемся представлением взаимодействия

$$\exp(i\hat{H}_a t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \exp(-i\hat{H}_a t) = \hat{\psi}(X),$$

$$X = \{\mathbf{r}, \mathbf{R}, t\}.$$

Учтем стохастическое (гауссово) распределение атомов по степеням свободы. Получим

$$\langle \hat{\psi}^+(X_1) \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}} \hat{\psi}(X_1) \hat{\psi}^+(X_2) \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}} \hat{\psi}(X_2) \rangle =$$

$$= -\hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}} G_{21}(X_1, X_2) \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}} G_{12}(X_2, X_1),$$

где

$$G_{12}(X_2, X_1) = -i \langle \hat{\psi}^+(X_1) \hat{\psi}(X_2) \rangle,$$

$$G_{21}(X_1, X_2) = -i \langle \hat{\psi}(X_1) \hat{\psi}^+(X_2) \rangle.$$

Другие возможные слагаемые проведенной факторизации в итоге дадут нулевой результат. Введем обозначение

$$\hat{\mathcal{P}}_{l_1 l_2}(t_1, t_2) = -\left(\frac{e}{m}\right)^2 \times$$

$$\times \int \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}} G_{21}(X_1, X_2) \langle \Delta_{l_1 l_2}^0(t_1 t_2) \rangle \times$$

$$\times \sigma_{l_2 l_2}^{(3)} \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}} G_{12}(X_2, X_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{R}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{R}_2. \quad (27)$$

Теперь рассчитываемое выражение выглядит так:

$$\langle \Delta_{ll_1}^0 \rangle \sigma_{l_1 l_1}^{(3)} \hat{\mathcal{P}}_{l_1 l_2} \langle \Delta_{l_2 l'}^0 \rangle.$$

Эта формула методом Г-операторов была получена в работе [13]. Аналогично вычисляется слагаемое, описывающее второй порядок итерационного ряда для матрицы $\rho_{ll'}$. В итоге имеем

$$\langle \Delta_{ll'} \rangle = \langle \Delta_{ll'}^0 \rangle + \langle \Delta_{ll_1}^0 \rangle \sigma_{l_1 l_1}^{(3)} \hat{\mathcal{P}}_{l_1 l_2} \langle \Delta_{l_2 l'}^0 \rangle, \quad (28)$$

$$\langle \rho_{ll'} \rangle = \langle \rho_{ll'}^0 \rangle + \langle \rho_{ll_1}^0 \rangle \sigma_{l_1 l_1}^{(3)} \hat{\mathcal{P}}_{l_1 l_2} \langle \Delta_{l_2 l'}^0 \rangle +$$

$$+ \langle \Delta_{ll_1}^0 \rangle \sigma_{l_1 l_1}^{(3)} \hat{\mathcal{P}}_{l_1 l_2}^{\rho} \langle \Delta_{l_2 l'}^0 \rangle + \langle \Delta_{ll_1}^0 \rangle \sigma_{l_1 l_1}^{(3)} \hat{\mathcal{P}}_{l_1 l_2} \langle \rho_{l_2 l'}^0 \rangle. \quad (29)$$

Нечетные члены итерационного ряда обращаются в нуль, если изначально среда не обладает когерентными свойствами. Выражения (28), (29), найденные во втором порядке теории возмущений, содержат $\langle \Delta^0 \rangle$ и $\langle \rho^0 \rangle$ в качестве правых своих сомножителей. Замена этих функций на полные функции $\langle \Delta \rangle$ и $\langle \rho \rangle$ происходит в результате учета последующих членов теории возмущений и дайсоновского суммирования фейнмановских диаграмм. Возникшие уравнения оказываются точными, если под $\hat{\mathcal{P}}_{ll'}$ и $\hat{\mathcal{P}}_{ll'}^{\rho}$

понимать полные выражения для поляризационных операторов. В простейшем, так называемом однопетлевом, приближении для $\hat{\mathcal{P}}_{ll'}$ имеем выражение (27). Для $\hat{\mathcal{P}}_{ll'}^{\rho}$ в однопетлевом приближении возникает аналогичное выражение с заменой $\langle \Delta^0 \rangle$ на $\langle \rho^0 \rangle$. Из обращения в нуль $\langle \Delta_{12}^0 \rangle$ следует $\langle \Delta_{12} \rangle = \hat{\mathcal{P}}_{12} = 0$. Теперь

$$\langle \Delta_{11} \rangle = \langle \Delta_r \rangle, \quad -\langle \Delta_{22} \rangle = \langle \Delta_a \rangle, \quad \langle \Delta_a \rangle = \langle \Delta_r \rangle^+,$$

$$\hat{\mathcal{P}}_{11} = \hat{\mathcal{P}}_r, \quad \hat{\mathcal{P}}_{22} = \hat{\mathcal{P}}_a, \quad \hat{\mathcal{P}}_a = \hat{\mathcal{P}}_r^+.$$

Уравнения такой же алгебраической конструкции, что и (28), (29), были рассмотрены в работе [13]. Повторяя рассуждения этой работы, находим

$$\langle \rho_{12} \rangle = \langle \rho_{12} \rangle^{(c)} + \langle \rho_{12} \rangle^{(n)},$$

$$\langle \rho_{12} \rangle^{(c)} = \left(1 + \langle \Delta_r \rangle \hat{\mathcal{P}}_r\right) \langle \rho_{12}^0 \rangle \left(1 + \hat{\mathcal{P}}_a \langle \Delta_a \rangle\right),$$

$$\langle \rho_{12} \rangle^{(n)} = -\langle \Delta_r \rangle \hat{\mathcal{P}}_{12}^{\rho} \langle \Delta_a \rangle, \quad (30)$$

$$\langle \Delta_r \rangle = \langle \Delta_r^0 \rangle + \langle \Delta_r^0 \rangle \hat{\mathcal{P}}_r \langle \Delta_r \rangle,$$

$$\langle \Delta_a \rangle = \langle \Delta_a^0 \rangle + \langle \Delta_a^0 \rangle \hat{\mathcal{P}}_a \langle \Delta_a \rangle.$$

Из этой системы уравнений видно, что эволюция квантованного поля в среде в общем случае управляется двумя операторами $\hat{\mathcal{P}}_r$ и $\hat{\mathcal{P}}_{12}^{\rho}$. Невозможность использования единого тензора поляризации среды теперь представляется очевидной. Когерентные процессы рассеяния описываются посредством оператора $\hat{\mathcal{P}}_r$, а некогерентные процессы, в том числе процессы вынужденного излучения, — оператором $\hat{\mathcal{P}}_{12}^{\rho}$. Процессы вынужденного излучения некогерентны, так как, изменяя состояние атомов, сбивают фазу волновой функции атом + поле и не интерферируют с когерентными процессами рассеяния [27]. Стандартный показатель преломления, как это показано ниже, возникает в результате некоторой комбинации $\hat{\mathcal{P}}_r$ и $\hat{\mathcal{P}}_{12}^{\rho}$.

Ниже в соответствии с формулой (27), справедливой при условии $n\lambda^3 \gamma_r / \gamma < 1$, где n — полная концентрация рассеивателей, $\lambda = 2\pi/k$, $\gamma_r(\gamma)$ — радиационная (полная) ширина энергетических уровней возбужденных атомов, приведены развернутые формулы для $\hat{\mathcal{P}}_r$ и $\hat{\mathcal{P}}_{12}^{\rho}$ в энергетическом представлении

$$f(E) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iEt} f(t) dt.$$

Имеем [13]

$$\begin{aligned} \hat{P}_r(E) &= \sum_{\mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}_1 \lambda_1} A_r(E - \hat{H}_{ph}) \hat{a}_{\mathbf{k}_2 \lambda_2}^+ + \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}_{\mathbf{k}_1 \lambda_1}^+ C_r(E - \hat{H}_{ph}) \hat{a}_{\mathbf{k}_2 \lambda_2} \right], \\ A_r^{\mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2}(E) &= \sum_{m \mu \mathbf{p}} \frac{P_{m\mu}^{\lambda_1}(\mathbf{k}_1) P_{m\mu}^{\lambda_2*}(\mathbf{k}_2)}{2\sqrt{k_1 k_2}} \times \\ &\quad \times \frac{n_m(\mathbf{p}) \delta_L(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)}{E + \omega_{m\mu} + (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{p} / 2M + i\gamma/2}, \\ C_r^{\mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2}(E) &= \sum_{m \mu \mathbf{p}} \frac{P_{m\mu}^{\lambda_1*}(\mathbf{k}_1) P_{m\mu}^{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)}{2\sqrt{k_1 k_2}} \times \\ &\quad \times \frac{n_\mu(\mathbf{p}) \delta_L(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{E - \omega_{m\mu} - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{p} / 2M + i\gamma/2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь $n_\mu(n_\mu)$ — концентрации возбужденных (невозбужденных) атомов на зеемановских подуровнях, $\gamma = \gamma_m + \gamma_\mu$, $\gamma_{m,\mu}$ — столкновительные ширины соответствующих энергетических уровней. Для плоскопараллельного рассеивающего слоя толщины L с осью симметрии z [13]

$$\begin{aligned} \delta_L(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= \delta(k_{1x}, k_{2x}) \delta(k_{1y}, k_{2y}) \theta_L(k_{1z} - k_{2z}), \\ \theta_L(q) &= \int_0^L e^{-iqz} \frac{dz}{L_z} = \frac{1 - e^{-iqL}}{iqL_z}. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} \hat{P}_{12}^\rho(E) &= \\ &= \sum_{\mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}_1 \lambda_1}^+ \int A_{12}(E - E') \langle \rho_{12}^0(E') \rangle \frac{dE'}{2\pi} \hat{a}_{\mathbf{k}_2 \lambda_2} + \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}_{\mathbf{k}_1 \lambda_1} \int C_{12}(E - E') \langle \rho_{12}^0(E') \rangle \frac{dE'}{2\pi} \hat{a}_{\mathbf{k}_2 \lambda_2}^+ \right], \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} A_{12}^{\mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2}(E) &= -2\pi \sum_{m \mu \mathbf{p}} \frac{P_{m\mu}^{\lambda_1*}(\mathbf{k}_1) P_{m\mu}^{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)}{2\sqrt{k_1 k_2}} n_m(\mathbf{p}) \times \\ &\quad \times \delta_\gamma \left(E - \omega_{m\mu} - \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)}{M} \right) \delta_L(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \\ C_{12}^{\mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2}(E) &= -2\pi \sum_{m \mu \mathbf{p}} \frac{P_{m\mu}^{\lambda_1}(\mathbf{k}_1) P_{m\mu}^{\lambda_2*}(\mathbf{k}_2)}{2\sqrt{k_1 k_2}} n_\mu(\mathbf{p}) \times \\ &\quad \times \delta_\gamma \left(E + \omega_{m\mu} + \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)}{M} \right) \delta_L(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1), \\ \delta_\gamma(E) &= \frac{i}{2\pi} \left[\left(E + i\frac{\gamma}{2} \right)^{-1} - \left(E - i\frac{\gamma}{2} \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

3.5. Когерентный канал рассеяния

Пусть рассеиваемый поток фотонов находится в исходном фоковском состоянии $(\mathbf{k}_0, \lambda_0)$:

$$\langle \rho_{12}^0(E) \rangle = 2\pi\delta(E - \hat{H}_{ph}) |N_0\rangle \langle N_0|.$$

Будем интересоваться плотностью фотонов, прошедших через плоскопараллельный рассеивающий слой толщины L . Оператор плотности фотонов примем в виде

$$\begin{aligned} \hat{n}^{\lambda_1 \lambda_2}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{V} \times \\ &\quad \times \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_1 \lambda_1}^+ \exp[-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}] \hat{a}_{\mathbf{k}_2 \lambda_2}. \end{aligned}$$

В согласии с (30) в низшем порядке по концентрации рассеивающих частиц имеем

$$\langle \rho_{12} \rangle^{(c)} = \langle \rho_{12}^0 \rangle + \langle \Delta_r^0 \rangle \hat{P}_r \langle \rho_{12}^0 \rangle + \langle \rho_{12}^0 \rangle \hat{P}_a \langle \Delta_a^0 \rangle. \quad (33)$$

Рассмотрим вклад в $\langle \hat{n}^{\lambda_0 \lambda_0}(\mathbf{r}) \rangle$ второго слагаемого из (33). В согласии с (31) находим

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}^{\lambda_0 \lambda_0}(\mathbf{r}) \rangle^{(c)} &= \frac{1}{V} \int \text{Sp}_{ph} \langle \Delta_r^0 \rangle \times \\ &\quad \times \sum_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_0 \lambda_0}^+ \exp[-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}] \hat{a}_{\mathbf{k}_2 \lambda_0} \times \\ &\quad \times [\hat{a}_{\mathbf{k}_0 \lambda_0} A_r^{\mathbf{k}_0 \lambda_0 \mathbf{k}_2 \lambda_0} \hat{a}_{\mathbf{k}_2 \lambda_0}^+ + \hat{a}_{\mathbf{k}_2 \lambda_0}^+ C_r^{\mathbf{k}_2 \lambda_0 \mathbf{k}_0 \lambda_0} \hat{a}_{\mathbf{k}_0 \lambda_0}] \times \\ &\quad \times \langle \rho_{12}^0 \rangle \frac{dE}{2\pi}. \end{aligned} \quad (34)$$

Обращаем внимание на тот факт, что выписанный отдельно в поляризационном операторе член с $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_0$ из-за малости статистического веса при $L_z \rightarrow \infty$ дает нулевой вклад в результат расчета. Следовательно, при суммировании по \mathbf{k}_2 в (34) никакую из мод не следует выделять специально. Техника дальнейших расчетов изложена в работах [13, 14]. В результате, согласно (33), имеем

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}^{\lambda_0 \lambda_0}(\mathbf{r}) \rangle_{z \rightarrow \infty}^{(c)} &= \frac{N_0}{V} \times \\ &\quad \times \left[1 - 2\pi L \sum_{m \mu \mathbf{p}} \left| \frac{P_{m\mu}^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)}{\sqrt{2k_0}} \right|^2 (n_\mu(\mathbf{p}) + n_m(\mathbf{p})) \times \right. \\ &\quad \left. \times \delta_\gamma \left(k_0 - \omega_{m\mu} - \frac{\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{p}}{M} \right) \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Приведем схему расчетов $\langle \hat{n}^{\lambda \lambda}(\mathbf{r}) \rangle^{(c)}$ для поляризации прошедшего света, перпендикулярной поляризации падающего потока излучения ($\lambda \neq \lambda_0$). Согласно (30), диагональному элементу этой величины отвечает выражение

$$\langle \rho_{12} \rangle^{(c)} = \Delta_r^0 \hat{P}_r \langle \rho_{12}^0 \rangle \hat{P}_a \langle \Delta_a^0 \rangle.$$

В итоге

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}^{\lambda\lambda}(\mathbf{r}) \rangle_{z \rightarrow \infty}^{(c)} &= \\ &= \frac{N_0}{V} L^2 \left| \sum_{m\mu\mathbf{p}} \frac{P_{m\mu}^{\lambda*}(\mathbf{k}_0) P_{m\mu}^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)}{2k_0} \frac{(n_\mu(\mathbf{p}) - n_m(\mathbf{p})) (k_0 - \omega_{m\mu} - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{p}/M) - i\gamma (n_\mu(\mathbf{p}) + n_m(\mathbf{p}))/2}{|k_0 - \omega_{m\mu} - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{p}/M|^2 + \gamma^2/4} \right|^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Обсуждение этого результата будет проведено ниже. Сейчас лишь констатируем, что при условии $|k_0 - \omega_{m\mu} - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{p}/M| > \gamma$ слагаемые в (36) зависят от разности $n_\mu - n_m$. В то же время при $|k_0 - \omega_{m\mu} - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{p}/M| < \gamma$ они зависят от суммы $n_\mu + n_m$.

3.6. Некогерентный канал рассеяния

Прежде всего заметим, что вклад некогерентного канала в диагональный элемент $\langle n^{\lambda\lambda}(\mathbf{r}) \rangle$ при любом λ положительно определен. Этот факт следует из предварительного анализа проблемы в разд. 2, а для уравнений (30) он независимо был доказан в работе [13]. Таким образом, формулы (35), (36), определяемые когерентным каналом рассеяния, дают оценку снизу для искомым величин. Но поскольку при $\lambda = \lambda_0$ учитывающий роль среды член в (35) входит с отрицательным знаком, положительно определенное слагаемое из некогерентного канала может его скомпенсировать. По этой причине здесь вклад некогерентного канала представляет особый интерес.

Согласно формулам (30) и (32), вычислим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \langle n^{\lambda_0\lambda_0}(\mathbf{r}) \rangle_{z \rightarrow \infty}^{(n)} &= \int \text{Sp}_{ph} \sum_{\mathbf{k}_1} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}^+ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}_1\lambda_0} \times \\ &\times \exp[i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}] \langle \Delta_r^0 \rangle \hat{\alpha}_{\mathbf{k}_1\lambda_0}^+ \times \\ &\times \int A_{12}^{\mathbf{k}_1\lambda_0\mathbf{k}_0\lambda_0} \langle \rho_{12}^0 \rangle \frac{dE'}{2\pi} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \langle \Delta_a^0 \rangle \frac{dE}{2\pi V} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (37)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Несмотря на то что некогерентный канал отвечает за вклад вынужденных процессов, в итоговую интенсивность излучения слагаемое с $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_0$ в операторе \hat{P}_{12}^ρ вклада не дает из-за малости его статистического веса. Формально это слагаемое содержит множитель L_z^{-1} и исчезает при $V \rightarrow \infty$. Подобная форма расчетов процессов вынужденного излучения типична для сред конечных размеров. По этой же причине из расчетов выпало слагаемое с C_{12} , содержащееся в \hat{P}_{12}^ρ .

Последующие преобразования формулы (37) в пренебрежении спонтанным излучением приводят к почти очевидному результату:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}^{\lambda_0\lambda_0}(\mathbf{r}) \rangle^{(n)} &= 4\pi L \frac{N_0}{V} \times \\ &\times \sum_{m\mu\mathbf{p}} \left| \frac{P_{m\mu}^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)}{\sqrt{2k_0}} \right|^2 n_m(\mathbf{p}) \delta_\gamma \left(k_0 - \omega_{m\mu} - \frac{\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{p}}{M} \right). \end{aligned}$$

Сумма этого выражения с формулой (35) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}^{\lambda_0\lambda_0}(\mathbf{r}) \rangle^{(c)} + \langle \hat{n}^{\lambda_0\lambda_0}(\mathbf{r}) \rangle^{(n)} &= \\ &= \frac{N_0}{V} [1 - 2k_0 L \text{Im} \kappa^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)], \end{aligned} \quad (38)$$

где при $V \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \kappa^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0) &= 1 - \frac{1}{k_0} \sum_{m\mu} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left| \frac{P_{m\mu}^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)}{\sqrt{2k_0}} \right|^2 \times \\ &\times \frac{n_\mu(\mathbf{p}) - n_m(\mathbf{p})}{k_0 - \omega_{m\mu} - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{p}/M + i\gamma/2}, \end{aligned}$$

причем $\kappa^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0)$ представляет собой не что иное как диагональный элемент стандартного показателя преломления среды, который может быть получен из теории, изложенной в [15]. Этот показатель преломления, как и поляризуемость среды, зависит от разности $n_\mu - n_m$, концентрации атомов на нижнем и верхнем уровнях атомного перехода. При $n_m \rightarrow n_\mu$, согласно (38), среда становится менее активной.

Другой вывод следует из формулы (36). Интенсивность прошедшего через среду света с изменением направления линейной поляризации на 2π определяется при резонансе какой-либо из зеемановских частот $k = \omega_{m\mu}$ суммой $n_\mu + n_m$ и при $n_m \rightarrow n_\mu$ не убывает. Учет вклада некогерентного канала в силу его положительной определенности не может изменить этого обстоятельства.

Мы приходим к выводу о том, что эта интенсивность при наличии в среде возбужденных атомов

не может быть описана посредством показателя преломления среды. Для ее описания нужна другая характеристика среды, зависящая, в частности, от суммы $n_\mu + n_m$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты работы и, в частности, формулы (36) и (38) получены в квазирезонансном приближении для двухуровневых рассеивателей. При этом считается, что взаимодействие возбужденного атома с излучением влечет за собой рассеяние света или же вынужденное излучение. Поглощение при этом исключается. Следовательно, при наличии в среде рассеивателей с эквидистантным энергетическим спектром итоговые формулы заметно изменятся.

Указанная выше недостаточность описания оптических свойств возбужденных диспергирующих сред с помощью полуклассической теории излучения обусловлена неучетом корреляторов фотон–фотон. Возникшая новая характеристика среды, зависящая от суммы $n_\mu + n_m$, как и показатель преломления среды, зависит от постоянной Планка лишь через силу осциллятора. Это обстоятельство представляется вполне естественным, если учесть принципиально квантовый двухуровневый объект рассеяния. Заметим, что и факт зависимости показателя преломления от разности $n_\mu - n_m$ — тоже следствие квантовой теории. При рассеянии света на классических осцилляторах такая разность получена быть не может.

В настоящей работе не учитывалась явно роль некогерентного канала при формировании интенсивности света, рассеянного с изменением поляризации на $\pi/2$. Отмечена лишь его положительная определенность и необходимость выхода за рамки теории возмущений. По аналогии с исследованиями, проведенными в работе [14], можно ожидать, что учет этого канала вследствие изменения числа квантов в системе повлечет за собой доступный наблюдению эффект частотного уширения рассеянного света, определяемый коэффициентом поглощения фотонов средой.

Для проверки предложенной теории могут оказаться полезными эксперименты по изучению эффекта Ханле в продольном магнитном поле. Имеются в виду работы [10, 11], в которых рассеивателем служил электрический разряд в атмосфере инертных газов. В такого рода экспериментах следует ожидать наличие заметной доли рассеивателей, находящихся в возбужденном состоянии. Представля-

ет интерес серия экспериментов, отличающихся разрядным током, так как зависимости интенсивностей прошедшего света с разными λ от n_μ и n_m качественно различны. Если же осуществить дополнительный контроль (например, при разряде в He) за рассеянной в сторону интенсивностью спектральных линий, связанных с переходами $^3S \leftrightarrow ^3P$ и $^3P \leftrightarrow ^3D$, то появится возможность контролировать относительную заселенность нижнего n_μ и верхнего n_m энергетических уровней, переход между которыми ответствен за эффект Ханле.

Такого рода эксперимент позволил бы не только уточнить закономерности, присущие эффекту Ханле при рассеянии вперед, но и обратил бы внимание на общую специфику построения квантовой электродинамики в возбужденных диспергирующих средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Corney, B. P. Kibble, and G. Series, Proc. Roy. Soc. A **293**, 70 (1966).
2. S. Giraud-Cotton, V. P. Kaftandjian, and L. Klein, Phys. Rev. A **32**, 2211 (1985).
3. B. Lobodziński and W. Gawlik, Phys. Scr. T **70**, 138 (1997).
4. B. W. Holmes and J. A. P. Griffith, J. Phys. B **28**, 2829 (1995).
5. W. Gawlik, J. Kawalski, R. Neumann, and F. Trager, Phys. Lett. A **48**, 283 (1974).
6. B. Ståhlberg, P. Jungner, T. Fellman, and Å. Lindberg, Appl. Phys. B **50**, 547 (1990).
7. X. Chen, V. L. Telegli, and A. Weis, Opt. Comm. **74**, 301 (1990).
8. L. M. Barkov, D. A. Melik-Pashaev, and M. S. Zolotarev, Opt. Comm. **70**, 467 (1989).
9. G. Stansel, Phys. Lett. A **47**, 283 (1974).
10. Н. Г. Лукомский, В. А. Полищук, М. П. Чайка, Опт. и спектр. **58**, 474 (1985).
11. Н. Г. Лукомский, В. А. Полищук, М. П. Чайка, Е. Н. Амплиева, Опт. и спектр. **83**, 420 (1997).
12. М. П. Чайка, *Интерференция вырожденных атомных состояний*, Изд-во ЛГУ, Ленинград (1975).
13. Б. А. Векленко, ЖЭТФ **96**, 457 (1989).
14. Б. А. Векленко, Р. Б. Гусаров, Ю. Б. Шеркунов, ЖЭТФ **113**, 521 (1998).

15. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Гостехиздат, Москва (1962).
16. V. Koganmann, *Ann. Phys. (NY)* **39**, 72 (1962).
17. Б. А. Векленко, Г. Б. Ткачук, *Опт. и спектр.* **38**, 1132 (1975).
18. И. Б. Левинсон, *ЖЭТФ* **75**, 234 (1978).
19. Н. R. Zaidi, *Can. J. Phys.* **59**, 737, 750 (1981).
20. А. А. Пантелеев, В. А. Росляков, А. Н. Старостин, М. Д. Таран, *ЖЭТФ* **97**, 1777 (1990).
21. S. Fujita, *Physika* **28**, 281 (1962).
22. И. Пригожин, *Неравновесная статистическая механика*, Мир, Москва (1964).
23. M. O. Scally and W. E. Lamb, *Phys. Rev.* **159**, 208 (1967).
24. Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ* **47**, 1515 (1964).
25. Дж. Клаудер, Э. Судоршан, *Основы квантовой оптики*, Мир, Москва (1970).
26. А. С. Давыдов, *Квантовая механика*, Физматгиз, Москва (1963).
27. Б. А. Векленко, *Изв. вузов. Физика*, вып. 6, 132 (1987).