

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Л. Н. Пятницкий*

*Институт высоких температур Российской академии наук
127412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 сентября 2000 г.

На основе линейной теории распространения сферического волнового слоя рассмотрены принципы моделирования турбулентного процесса и критерии его подобия. Приведен механизм турбулентности в плоском канале, ограниченном двумя стенками, и трубе квадратного сечения. На примере этого канала показано влияние свойств волнового слоя на пульсации скорости, а также характеристик последовательности возмущений на структуру пульсаций. Модель применена для описания структуры плазменного канала, создаваемого бесселевым пучком лазерного излучения. Для моделирования использован язык системы Mathematica-4.

PACS: 47.27.Ak, 47.27.Eq

1. ВВЕДЕНИЕ

Турбулентное течение наблюдается, когда критерий Рейнольдса Re превосходит некоторое критическое значение. Формально этот критерий подобия получается из уравнений движения жидкости. Его физический смысл легко выяснить на простом примере ламинарного течения вязкой жидкости вдоль оси x в плоском канале высотой $z = d$, образованном двумя параллельными стенками, одна из которых совпадает с плоскостью xy .

Поток импульса жидкости в середине канала имеет плотность $Q = \rho U_0^2$, где U_0 — скорость, ρ — плотность жидкости. Сила трения создает поток импульса в направлении оси z и формирует распределение скорости $U = U_0[1 - (2z/d - 1)^2]$. Плотность q этого потока определяется xz -компонентой вязкого тензора напряжений и у стенки равна

$$q = \sigma'_{xz} = \eta \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right|,$$

где η — коэффициент вязкости. Отсюда $q = 4\eta U_0/d$. Составляя теперь отношение Q/q , получим с точностью до численного множителя привычное выражение для критерия Рейнольдса:

$$\frac{Q}{q} = \frac{\rho U_0 d}{\eta} = Re.$$

*E-mail: piat@sci.lebedev.ru

Перенос импульса всегда связан с переносом энергии, поэтому здесь под величинами Q и q можно понимать соответствующие потоки энергии, а скорость U_0 заменить ее эффективным значением. Эти замены ничего кроме численного множителя не меняют в окончательном результате.

Таким образом, критерий Рейнольдса характеризует долю потока импульса (или энергии), теряемую жидкостью на трение, точнее, ее обратную величину. Однако извлечь конкретный механизм из этой характеристики не представляется возможным. Действительно, при установившемся течении гидродинамические параметры как в приведенных оценках, так и при решении гидродинамических уравнений являются интегральными величинами и не зависят от времени. Пульсации, наоборот, оказываются явными функциями времени независимо от режима течения, и по отношению к ним установившееся состояние означает только динамическое равновесие. В то же время не вызывает сомнений, что именно поток импульса q поддерживает пульсации параметров при турбулентном течении. На основе примерно таких соображений в работе [1] была высказана идея о необходимости энергетической оценки динамики пульсаций, поведение которых не обязательно должно описываться уравнениями, относящимися к самому течению. В работе [2] было показано, что турбулентность можно интерпретировать на основе линейного распространения возмущений, и был

предложен механизм динамики пульсаций параметров при турбулентном течении. Вкратце механизм сводится к следующему.

1. Торможение жидкости вызывает на границе течения локальное повышение плотности (или давления), которое можно представить в виде последовательности слабых возмущений характерного масштаба a , спорадически возникающих у стенки и распространяющихся по потоку во всех направлениях со скоростью звука c . На расстоянии $r \gg a$ возмущение независимо от его первоначальной формы приобретает вид шарового слоя толщиной $2a$.

2. При $a \ll d$ (d — поперечный размер канала) в пределах этого слоя, $(r - a)/c < t < (r + a)/c$, гидродинамические параметры пульсируют в соответствии с распределением $P(r)$ плотности ρ в первичном возмущении. Например, пульсации скорости можно представить выражением типа

$$u = \frac{cP}{2\rho} \frac{r - ct}{ct}.$$

Пульсации в слое затухают с расстоянием $r = ct$, но сохраняют форму и свойства функции P первичного возмущения, которая, вообще говоря, может зависеть от времени t . Тогда линейный размер возмущения определяется большей из величин a или ct .

3. Совокупность прямых и отраженных от стенок канала волновых слоев образует пространственно-временную структуру пульсаций гидродинамических параметров, которая формируется на основе линейной суперпозиции волн.

Данный подход к проблеме турбулентности применим не только к сжимаемой жидкости, но и к таким средам, как, например, низкотемпературная плазма, где существуют акустические волны. Его можно также обобщить на случай волн конечной амплитуды. Но вначале естественно исследовать модель турбулентности и установить ее основные закономерности в линейном приближении, тем более, что и в этих условиях возникают пульсации параметров среды, которые имеют широкий спектр пространственных и временных частот, а их амплитуда, фаза и направление оказываются нерегулярными. Эта нерегулярность обычно трактуется как стохастичность пульсаций. В действительности турбулентность — вполне детерминированное явление. В нем пульсации можно выразить через функции, достаточно простые, но зависящие от многих параметров, например от взаимного расположения исходных возмущений. Поэтому совокупность пульсаций подобна абстрактным автоматам, и ее описание относится к кибернетическим задачам, которые обычно

решаются методами имитационного моделирования. Эти методы предполагают возможность вычисления фактических значений функций процесса, хотя, как во всякой кибернетической задаче, наряду с детерминированными функциями допускают добавление к описанию процесса в качестве аргумента отдельных стохастических элементов.

Новая постановка задачи требует соответствующих средств для ее решения. Необходимыми возможностями располагает интерактивный язык системного моделирования Mathematica-4, приспособленный для фактического описания параметров, функций и связей произвольных систем. В нем последовательность операций решения задачи записывается в виде привычных формул, не содержится сокращений и аббревиатур и, как правило, не требуется особых комментариев. Кроме того, язык имеет дополнительные процедуры обслуживания машинного эксперимента, позволяя легко управлять графическим представлением данных, включая анимацию. Наиболее важные фрагменты модели будут обсуждаться по ходу изложения материала.

В работе рассматриваются: механизм зарождения пульсаций скорости и вихрей, условия подождения турбулентности, а также принципы построения модели явления на примерах ограниченного двумя стенками плоского канала и трубы квадратного сечения. Исследуется влияние характеристик отдельных возмущений и их последовательности на свойства и структуру пульсаций гидродинамических параметров. Дается описание модели экспериментально наблюдаемой структуры плазменного канала, создаваемого бесселевым пучком лазерного излучения.

2. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА СВОЙСТВА ТУРБУЛЕНТНОСТИ, И УСЛОВИЯ ПОДОБИЯ

Итак, обусловленный вязкостью перенос импульса (и энергии) реализуется путем распространения сферических волн возмущения. Их суперпозиция определяет свойства пульсаций гидродинамических параметров в канале. Амплитуда волны при распространении убывает пропорционально a/r . Ослабление вызвано, главным образом, увеличением объема сферического слоя, а диссипация энергии на этой стадии не играет существенной роли. По мере распространения и отражения от стенок слой все больше заполняет объем канала, что приводит к сокращению масштаба пространственной структуры пульсаций. И когда размер структуры становится

сравнимым с длиной свободного пробега молекул, энергия возмущений параметров просто переходит в область мелкомасштабных пульсаций, многократно увеличивая роль диссипации энергии. Таким образом, известный постулат Колмогорова о передаче энергии мелкомасштабной турбулентности получает естественное объяснение.

На границе течения процессы взаимодействия и суперпозиция волн носят более сложный характер, и на их особенностях остановимся подробнее. Как известно, на стенке z -компонента пульсаций скорости исчезает, $u_z = 0$, а пульсации плотности и давления, соответственно, возрастают. В дополнение к этому, как легко убедиться, у стенки результатом взаимодействия падающей и отраженной волн является рост амплитуды пульсаций в два раза при одновременном двукратном уменьшении их частоты. В направлении оси z указанные эффекты проявляются в зоне толщиной a . Вдоль стенки эта зона имеет вид кольца, движущегося со скоростью $c/\sin\theta$ (θ — полярный угол). Интенсивность процессов в нем можно оценить исходя из постоянства площади его волнового фронта, $2\pi da$, а z -компонента пульсаций плотности пропорциональна $\cos^2\theta$.

У стенки кроме падающей и отраженной сферических волн во взаимодействии участвует еще третья, боковая, волна с коническим волновым фронтом. Фронт имеет вид поверхности прямого усеченного конуса. Основанием конуса служит окружность в месте пересечения преломленной волны с плоскостью стенки, а малая окружность образована линией, вдоль которой коническая поверхность касается волны отраженной. Угол χ_w при основании конуса задан соотношением $\sin\chi_w = c/c_w$, где c_w — скорость звука в стенке, и фронт движется под углом в несколько градусов к стенке. Амплитуда волны невелика, порядка ρ/ρ_w (ρ_w — плотность сетки), и очень быстро затухает (как r^{-2}). Но, как ясно из конфигурации отражения, она формируется периферийной частью падающей волны, центральная часть которой в пределах углов $\theta < \theta_s = \pi/2 - \chi_w$ в ее формировании не участвует. Непосредственно вблизи стенки это создает локальную неоднородность масштаба $\chi_w d$.

Другой фактор, влияющий на развитие и свойства турбулентности связан с движением жидкости и образованием вихрей. Рассмотрим это влияние, используя обозначения и условия приведенного во Введении примера и выражение для скорости волны $\mathbf{V} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$, в котором $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $\omega(\mathbf{k})$ — закон дисперсии. Для волн в покоящейся жидкости применимо простое дисперсионное соот-

ношение $\omega = ck$. Движение жидкости можно учесть добавлением к нему соответствующего слагаемого, после чего оно примет вид:

$$\omega = ck + \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}. \quad (1)$$

Оценим конфигурацию волны, используя понятие «звуковой луч» из геометрической акустики. Он представляет собой линию, единичный вектор касательной $\mathbf{s}$ к которой в точке $\mathbf{r}$ совпадает с направлением распространения волны (и пульсаций параметров) в этой точке. Изменение этого направления зависит от кривизны луча, которая определяется уравнением [3]:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dl} = \frac{1}{c}[\text{rot } \mathbf{U} \times \mathbf{s}], \quad (2)$$

где dl — элемент проходимого лучом пути. Когда жидкость неподвижна, $\mathbf{U} = 0$, скорость волны, в соответствии с (1), равна $\mathbf{V} = c\mathbf{k}/k$, т.е. лучи из центра возмущения распространяются со скоростью звука по прямым линиям $\mathbf{s} = \mathbf{r}/r$, и картина сохраняет полную сферическую симметрию. Если жидкость движется, но $\mathbf{U}$ не зависит от координат, то вектор $\mathbf{s}$ — величина постоянная, и для скорости волны получаем: $\mathbf{V} = c\mathbf{k}/k + \mathbf{U}$. Тогда в движущейся системе координат картина распространения лучей полностью идентична предыдущему случаю, а для неподвижного наблюдателя сама волна сносится потоком целиком, не меняя формы, и только плотность энергии пульсаций в волне зависит от направления луча (эффект Доплера).

Перейдем к случаю, когда скорость жидкости в сечении канала профилирована. Положим, что течение направлено вдоль оси x и скорость зависит только от одной переменной, $U(z)$, и нарастает с удалением от стенки, так что при $z = 0$ имеем $U = 0$, $dU/dz > 0$. Из уравнения (2) сразу видно, что в поле $U(z)$ луч искривляется и кривизна увеличивается с ростом градиента скорости. Максимальную кривизну следует ожидать у стенки, в области наибольших значений градиента. Но интерес представляет не столько кривизна, сколько суммарный угол поворота луча, который можно оценить с помощью уравнения (2). Выражая компоненты вектора $\mathbf{s}$ через направляющие углы θ и φ , вводя угол $\chi = \pi/2 - \theta$ и обозначая первоначальные ориентации лучей индексом «0», для компоненты s_z после интегрирования (2) получим ($U \ll c$):

$$\sin^2\chi \approx \sin^2\chi_0 - \frac{2U(z^*)}{c} \cos\chi_0 \cos\varphi_0. \quad (3)$$

Согласно этой формуле, для азимутальных углов $|\varphi_0| > \pi/2$ наклон χ луча увеличивается, в то время

как при $|\varphi_0| < \pi/2$ он уменьшается. Иными словами, в поле градиента луч разворачивается в направлении по часовой стрелке: двигаясь против течения, он удаляется от стенки, а двигаясь по течению, приближается к ней. Тогда найдется такой достаточно малый угол наклона χ_0 , для которого луч, вышедший из точки $z = 0$, удалится от стенки на расстояние не более z^* , образуя завихрение. Таким образом, в поле $U(z)$ направление пульсаций меняется и возникают вихри, за условие существования которых примем равенство $\chi = 0$. С учетом (3) оно дает

$$\sin^2 \chi_0 \approx \frac{2U(z^*)}{c} \cos \chi_0 \cos \varphi_0. \quad (4)$$

Это соотношение определяет значение z^* для угла χ_0 при заданном профиле скорости $U(z)$. Заметим, что основным параметром, от которого зависит вихреобразование, является число Маха U/c . Как ясно из (2) и (4), в области образования вихря градиент и, соответственно, скорость должны быть достаточно велики. В случае же медленно нарастающей функции $U(z)$ на расстоянии $z \sim d$ вихрь может вовсе не сформироваться, как и при $U = \text{const}$.

В качестве примера рассмотрим степенную зависимость скорости в канале от отношения z/h , где h — полувысота, так что $z/h < 1$. Представим эту зависимость и условие (4) в виде

$$U(z) = \frac{U_0}{c} \left(\frac{z}{h} \right)^{1/m}, \quad \frac{z^*}{h} = \left(\frac{c}{2U_0} \frac{\sin^2 \chi_0}{\cos \varphi_0} \right)^m. \quad (5)$$

Область наибольшей крутизны профиля скорости примыкает к стенке. Поскольку обычно m не выходит за пределы интервала 2–10, скорость достигает половины максимального значения уже при $z/h \sim 0.2$ –0.02. Как следует из формул (5), в этой области, при $m < 10$ и $U_0/c < 0.2$, для углов $\chi_0 < 20$ –30° величина z^*/h лежит в пределах 0.01–0.2, т. е. формулы (5) дают также возможность оценить глубину a зоны зарождения вихрей. Конфигурация этой зоны вдоль стенки имеет вид кольца, аналогичного описанному выше, с той, однако, разницей, что интенсивность процессов в данном случае зависит еще от азимутального направления φ_0 .

Значительные градиенты скорости означают присутствие в этой зоне градиентов и других гидродинамических параметров. Их уровень определяется динамическим равновесием между процессами торможения и эмиссии волн из области торможения. Первые увеличивают градиенты, вторые выравнивают параметры. На этом фоне взаимодействие звуковых волн вблизи стенки, зависимость эффектов этого взаимодействия от

профиля градиента, угла падения и других отмеченных факторов обуславливают появление локальных нестационарных неоднородностей параметров вдоль поверхности стенки. Получая энергию от жидкости при ее торможении, эти неоднородности служат источниками новых возмущений. Их воспроизведение замыкает цикл процесса поддержания динамического равновесия пульсаций. Процесс этот детерминирован и определяется числом Маха, геометрией канала и свойствами жидкости. В то же время, как и суперпозиция волн в основном течении, он является многопараметрическим и развивается в широкой полосе частот. Поэтому картина зарождения возмущений выглядит нерегулярной, похожей на хаотическую как в пространстве, так и во времени (при наблюдении в фиксированной точке). Отметим, что формирование пристеночных возмущений начинается еще в период становления течения, когда по жидкости распространяются, отражаясь от стенок, близкие к сферическим волны стартового импульса, приводящего жидкость в движение, т. е. возмущения и неоднородность параметров у стенок возникают с самого начала.

Таким образом, профиль параметров в сечении канала и структура пульсаций связаны между собой переносом импульса, механизм которого реализуется через эмиссию звуковых волн. Естественно ожидать, что играет роль реальное значение потока импульса q , в котором учтены потери при распространении возмущений. Среди этих потерь поглощение энергии волны жидкостью, как отмечалось выше, не оказывает большого влияния на формирование пульсаций. Однако при отражении от стенки потери могут быть значительными, поскольку часть энергии уходит с преломленной и боковой волнами, а также передается стенке в виде тепла. Другая часть, возможно, даже более существенная, теряется при возникновении вихрей.

Коэффициент отражения, вообще говоря, является функцией угла падения. Но поток импульса q относится к усредненным параметрам течения, и интегрально потери при каждом отражении можно оценивать постоянным коэффициентом α . Тогда при n отражениях реальный поток импульса q уменьшится в $(1 - \alpha)^n$ раз и кризис течения наступит при более высоких значениях числа Рейнольдса Re_{cr} . Наоборот, шероховатость стенок интенсифицирует поток q , и турбулентность наступит при меньших числах Re_{cr} , т. е. при меньшей скорости. Так как в зависимости от конкретных условий параметры α и n меняются в широких пределах [2], потери при отражении не остаются постоянными, и при

оценке режима течения этот фактор следует учитывать.

Явная зависимость пульсаций от времени требуется для описания турбулентности введения дополнительного критерия. При формировании структуры возмущений и возникновении вихрей существенным является процесс распространения волн. Как для всякого движения, в этом случае важны масштаб перемещения Δ и соответствующий ему интервал времени τ . Обычно такие процессы характеризуются [3] безразмерным критерием Струхала $S = U\tau/\Delta$. В данном случае, однако, речь идет о распространении звука, и справедливо равенство $\Delta/t = c$. Поэтому $S = U/c = M$, и число Струхала можно заменить числом Маха, от которого, как было показано, как раз и зависят процессы структуризации и вихреобразования в канале. Следовательно, подобие при анализе турбулентности необходимо устанавливать с помощью двух безразмерных критериев, Рейнольдса и Маха:

$$\text{Re}^* = \frac{\text{Re}}{(1 - \alpha)^n} = \frac{\rho U_0 d}{\nu(1 - \alpha)^n}, \quad M = \frac{U_0}{c}, \quad (6)$$

где ν — кинематическая вязкость.

Проведенное выше рассмотрение основано на линейной теории распространения волновых пакетов сферической формы. Сопоставление процессов, сопровождающих их распространение в узкой зоне на границе течения и в основной его части, в ядре потока, обнаруживает важные различия в характере взаимодействия и результатах суперпозиции. Эти особенности дают основание для выделения узкой зоны у стенки шириной a в особую область — пограничный слой. Вне этого слоя градиент скорости невелик и функция $U(z)$ растет медленно. Тогда в первом приближении этим изменением можно пренебречь, и при оценке суперпозиции волн в ядре потока использовать упрощающее задачу условие $U = \text{const}$, где постоянная может равняться нулю.

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ И СТРУКТУРА ВОЗМУЩЕНИЙ В КАНАЛЕ

Структура возмущений в канале зависит от формы ограничивающей поверхности. В типичных простых вариантах каналом можно считать пространство над плоскостью (случай плоской пластинки), плоский зазор, образованный двумя параллельными стенками, и внутреннюю полость трубы. Структура возмущений, создаваемых исходящими с поверхности стенки сферическими волнами, очевидна, и ее

определение тривиально. Несколько сложнее обстоит дело с каналами, в которых на структуру влияют отраженные волны. Вначале остановимся на канале в форме зазора высотой d между двумя параллельными стенками.

Плоскость xy совместим с нижней стенкой, а ось z направим к верхней. За масштаб, определяющий процессы в канале, естественно принять высоту канала d . Тогда положение точки в канале будет выражаться в условных единицах длины, соответствующих безразмерным координатам, для которых используем прежние обозначения x, y, z . Для хронологии процесса используем безразмерную единицу времени τ , за которое волна проходит расстояние d со скоростью c , так что $\tau = ct/d$. Возмущение с безразмерным радиусом a , возникшее в некоторый момент времени в произвольной точке на стенках канала, охарактеризуем параметрами p_τ и $p_r = \{p_x, p_y, p_z\}$, которые для серии возмущений будут представлять собой последовательности. Параметр p_τ может быть как положительным, так и отрицательным, параметр p_z принимает значения 0 (на нижней стенке) или 1 (на верхней стенке).

При распространении волны из точки p_r в полупространстве, не ограниченном верхней стенкой, $z > 0$, положение волнового фронта в системе координат, связанной с точкой p_r , определим радиусом-вектором $\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)$, и $|\mathbf{r}| = \tau$. Каждый акт отражения волнового фронта будет его деформировать. В результате фронт приобретет более сложную конфигурацию. При $\tau + p_\tau > 0$ его координаты x, y, z определяются соотношениями

$$\begin{aligned} x &= (\tau + p_\tau) \sin \theta \cos \varphi + p_x, \\ y &= (\tau + p_\tau) \sin \theta \sin \varphi + p_y, \\ z &= \left((\tau + p_\tau) \cos \theta - 2\text{IP} \left[\frac{n+1}{2} \right] \right) \times \\ &\quad \times (-1)^{n+p_z} + p_z. \end{aligned} \quad (7a)$$

При $\tau + p_\tau \leq 0$, естественно,

$$x = p_x, \quad y = p_y, \quad z = p_z. \quad (7b)$$

Здесь через IP (Integer Part) обозначена операция выделения целой части числа, заключенного в квадратные скобки, и через n — число отражений волны от стенки (целое положительное число):

$$n = \text{IP} [(\tau + p_\tau) \cos \theta]. \quad (8)$$

Найдем теперь поверхность фронта волны, своего рода моментальный снимок конфигурации фронта, которую он принимает через время τ после

возникновения. Заметим, что на языке системы Mathematica-4 не только по существу, но и по форме записи процедура решения задачи просто воспроизводит математическое решение задачи. Вначале описываются исходные данные (p_τ, p_x, p_y, p_z) , задается момент времени τ , для которого рассчитываются форма волнового фронта и размеры исследуемой области (dx, dy, dz) . Далее по формулам (7) и (8) находятся три координаты фронта на заданный момент τ , и затем определяются условия графического построения поверхности фронта. (Здесь обычно указываются диапазоны изменения переменных, угол наблюдения, тонирование участков поверхности, оформление координатных осей и другие параметры.)

Для определенности будем считать, что исходная точка находится на нижней стенке, а ее координаты и область исследования имеют следующие значения:

$$\tau = 6, \quad p_\tau = 0, \quad p_x = 1.2, \quad p_y = 6.3, \quad p_z = 0, \\ dx = 8, \quad dy = 8, \quad dz = 1.$$

Расчет поверхности ведется по углу φ в пределах от 0 до 2π , а по θ — от 0 до $\pi/2$. Пределы для переменных x, y, z соответствуют выбранному объему, но при построении графика масштаб z увеличен в полтора раза для удобства визуального восприятия.

Конфигурация этого волнового фронта представлена на рис. 1а. Она имеет вид гофрированной поверхности с переменным расстоянием между линиями изгибов и с меняющейся ориентацией нормали к поверхности складок. Таким образом, распространение только одной волны создает в канале структуру, в которой не сразу угадывается простая закономерность ее происхождения. Рисунок 1б показывает, как выглядит пространство плоского слоя при одновременном распространении восьми волн, исходные параметры которых варьируются в следующих пределах:

$$p_\tau \in [0, 3.1], \quad p_x \in [0.2, 15.9], \\ p_y \in [0.1, 9.9], \quad p_z = \{0, 1\}.$$

Для того чтобы были видны внутренние детали структуры, на графике изображен не весь исследуемый участок канала, а вырезанная из него полоса (прямоугольный параллелепипед) шириной $x \in (4.8, 5.0)$ при прежних значениях пределов остальных координат ($y = 8$ и $z = 1$). Комбинация волн дает наглядное представление о механизме образования структуры возмущений в результате распространения звуковых волн в ограниченном пространстве. По картине их взаимодействия уже можно судить о характере структуры возмущений.

Слой, ограниченный двумя параллельными стенками, является наиболее удобным для применения модели. Действительно, в таком канале возмущение параметров в точке наблюдения можно представить как последовательное прохождение сферических волн через эту точку и ее мнимые изображения, являющиеся ее зеркальными отражениями в стенках. Более того, положение мнимой точки определяется только одной координатой, которая при каждом отражении меняется на двойную высоту слоя $2d$ (в безразмерных координатах она меняется на 2).

Это простое полезное правило легко распространить на случай канала, границы которого имеют вид трубы с плоскими гранями. Для такого канала схема расчета остается прежней, но из-за отражения волны от нескольких стенок возрастает число мнимых точек, которые необходимо учесть. Например, в трубе квадратного сечения их число при каждом цикле отражений увеличивается втрое, причем положение мнимой точки определяется уже не одной, а двумя координатами, которые меняются с периодом $2d$ (здесь d — сторона квадрата). Остановимся на этом механизме подробнее и найдем конфигурацию волны в момент времени τ .

Конфигурация волны не связана с местом ее зарождения в направлении оси x трубы, и зависит только от координат вдоль осей y и z . На гранях, параллельных оси y (горизонтальные стенки, $z = 0$ или 1), эти координаты обозначим через p_{yy} и p_{yz} , а на гранях, параллельных оси z (вертикальные стенки, $y = 0$ или 1), — через p_{zz} и p_{zy} . Значения p_{yy} и p_{zz} меняются в пределах от 0 до 1, тогда как p_{yz} и p_{zy} могут быть только дискретными, 0 или 1.

Определим теперь число отражений волны, движущейся от одной из граней. Будем различать случаи распространения волны в направлении от горизонтальных ($z = 0$ или $z = 1$) и от вертикальных ($y = 0$ или $y = 1$) граней. Каждое направление предполагает отражения от трех других граней. При распространении от горизонтальной грани $z = 0$ (или $z = 1$) число отражений от стенок $y = 0$, $y = 1$, $z = 1$ (или $z = 0$) обозначим соответственно через n_{y0} , n_{y1} , n_{yz} . Для направления движения волны от вертикальных граней эти обозначения можно записать в виде n_{z0} , n_{z1} , n_{zy} . По аналогии с формулой (8) для плоского слоя число отражений волны от разных граней трубы можно представить соотношениями (9), в которых, как и прежде, τ — текущее время (в безразмерных единицах), параметры $p_{\tau y}$ и $p_{\tau z}$ учитывают задержку или, наоборот, опережение возникновения волны относительно момента $\tau = 0$

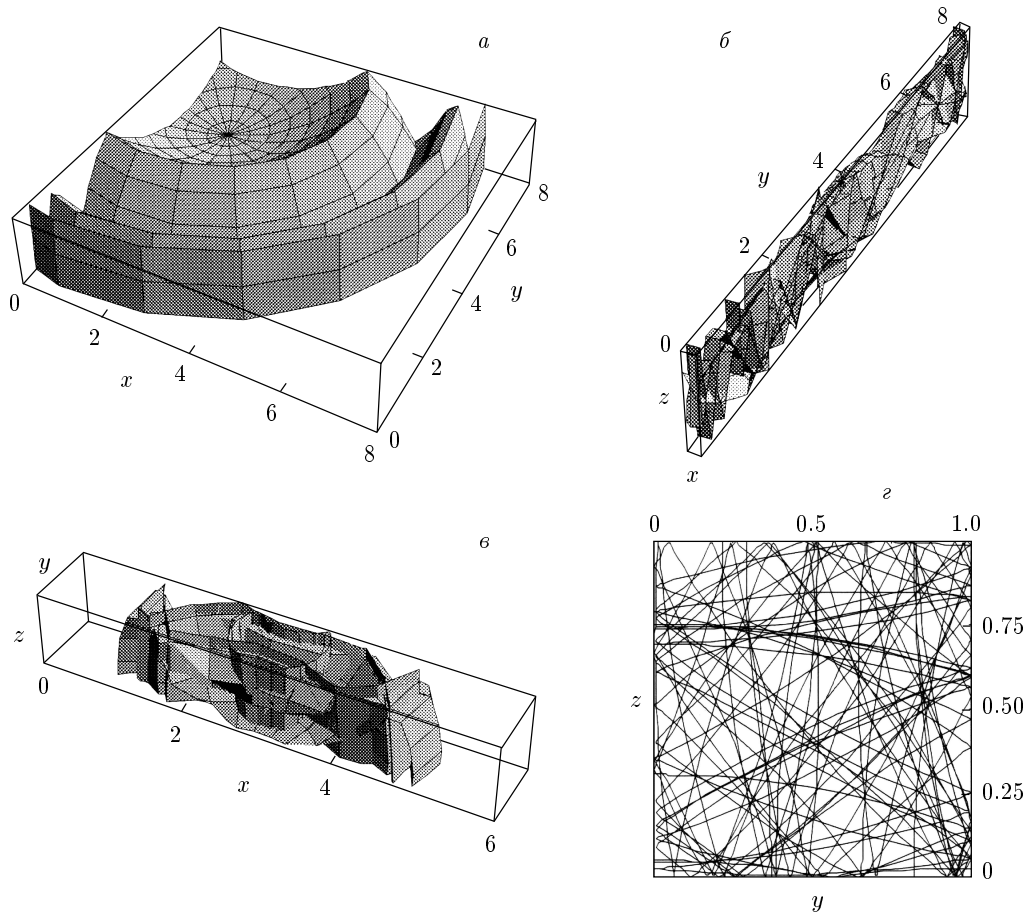


Рис. 1. Структура возмущений в ограниченном пространстве: а — конфигурация волны в плоском слое; б — конфигурация восьми волн в слое; в — конфигурация волны в трубе; г — конфигурация восьми волн в трубе

соответственно для горизонтальных и вертикальных граней, θ — полярный угол, $\theta \in [0, \pi]$.

Для горизонтальной грани, $z = 0$ или $z = 1$:

$$\begin{aligned} n_{y0} &= \text{IP}[(\tau + p_{\tau y}) \sin(\theta - \pi/2) + p_{yy} - 1], \\ n_{y1} &= \text{IP}[(\tau + p_{\tau y}) \sin(\theta - \pi/2) + p_{yy}], \\ n_{yz} &= \text{IP}[(\tau + p_{\tau y}) \cos(\theta - \pi/2) + p_{yz}], \end{aligned} \quad (9a)$$

для вертикальной грани, $y = 0$ или $y = 1$:

$$\begin{aligned} n_{z0} &= \text{IP}[(\tau + p_{\tau z}) \cos \theta + p_{zz} - 1], \\ n_{z1} &= \text{IP}[(\tau + p_{\tau z}) \cos \theta + p_{zz}], \\ n_{zy} &= \text{IP}[(\tau + p_{\tau z}) \sin \theta + p_{zy}]. \end{aligned} \quad (9b)$$

В результате вместо каждой из координат, y и z , которые в формулах (7) использовались для описания положения волны, отраженной от противоположной стенки плоского канала, появятся три координаты, соответствующие трем волнам, отраженным от трех разных граней полости трубы. В соответствии с принятым способом обозначения отраженных волн, вместо y введем координаты $y_0, y_1,$

zy , а вместо z — координаты z_0, z_1, yz . Соотношения, определяющие их значения, во многом аналогичны (7), поэтому для сокращения выкладок будем рассматривать волны в одном сечении трубы, полагая $\varphi = \pi/2$:

$$\begin{aligned} y_0 &= ((\tau + p_{\tau y}) \sin(\theta - \pi/2) + p_{yy} - 2\text{IP}[n_{y0}/2]) (-1)^{n_{y0}}, \\ y_1 &= ((\tau + p_{\tau y}) \sin(\theta - \pi/2) + p_{yy} - 2\text{IP}[(n_{y1} + 1)/2]) (-1)^{n_{y1}}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} zy &= ((\tau + p_{\tau z}) \sin \theta + p_{zy} - 2\text{IP}[(n_{zy} + 1)/2]) (-1)^{n_{zy}}, \\ z_0 &= ((\tau + p_{\tau z}) \cos \theta + p_{zz} - 2\text{IP}[n_{z0}/2]) (-1)^{n_{z0}}, \\ z_1 &= ((\tau + p_{\tau z}) \cos \theta + p_{zz} - 2\text{IP}[(n_{z1} + 1)/2]) (-1)^{n_{z1}}, \\ yz &= ((\tau + p_{\tau y}) \cos(\theta - \pi/2) + p_{yz} - 2\text{IP}[(n_{yz} + 1)/2]) (-1)^{n_{yz}}. \end{aligned} \quad (11)$$

При построении конфигурации волны положение точки на ее фронте определяется координатами $y_0 - yz$, $zy - z_1$ при $\theta < \pi/2$ и координатами $y_1 - yz$, $zy - z_0$ при $\theta \geq \pi/2$.

На рис. 16 показана конфигурация волны при ее распространении в трубе квадратного сечения 1×1 . Положение волны зафиксировано через $\tau = 2$ после ее возникновения на нижней стенке в точке $\{p_x, p_y, p_z\} = \{2, 0.6, 0\}$. Нельзя не заметить, что структура возмущений стала нерегулярной в результате всего двух неполных циклов отражений только одной волны. Очевидно, что в трубе турбулентность развивается заметно интенсивнее, что видно из рис. 12, где этот процесс показан на примере распространения восьми волн (как для плоского слоя на рис. 16). Так как в этом случае различить детали конфигурации по ее изображению в трехмерном пространстве не представляется возможным, на рис. 12 представлен ее след в сечении трубы ($x = 4$) в момент времени $\tau = 3$. Распределение начальных возмущений по поверхности стенок и во времени задано законом случая.

Как в плоском канале, так и в трубе состояние структуры возмущений на поздних стадиях на первый взгляд кажется полностью хаотическим, а образующиеся при этом структурные ячейки имеют сложное распределение по размерам и по форме, так что вся картина производит впечатление турбулентности в канале. Исходя из этих примеров и учитывая колебания параметров в каждом отдельном волновом слое, можно понять, как формируются пульсации и какова их структура. Естественную интерпретацию получает также явление перемежаемости, которое обычно объясняется неустойчивостью пограничного слоя.

Как отмечалось, анализ процессов удобнее вести для плоского слоя, поскольку он позволяет показать все существенные особенности явления и возможности концепции, не прибегая к громоздким математическим выражениям при описании геометрии волны, отраженной от сложной поверхности, что сильно увеличило бы объем статьи. Но и в этом случае, прежде чем переходить к анализу пульсаций, следует рассмотреть вопрос о месте и последовательности возникновения серии из k возмущений. Фактически мы уже сталкивались с этим вопросом. Так, при $k = 1$ исходные параметры возмущений выбирались просто из соображений наглядности, тогда как при $k = 8$ они задавались законом случайных чисел.

Применение этого закона в данной задаче имеет свои особенности. Выборка случайных значений параметра предполагает равномерное распределение

вероятности на заданном интервале. Общим свойством всякого генератора случайных чисел является изменение внутреннего состояния при каждом обращении к нему. Поэтому при повторных обращениях генератор будет возвращать разные числа. К чему это приведет, понятно из выражений (7) и (8). Допустим, при первом обращении генератор установил случайное значение какого-то параметра, скажем p_τ . Если при следующих запросах это значение будет меняться, то координаты волны окажутся случайными, и никакого последовательного распространения волны описать не удастся. Чтобы обойти эту ситуацию, внутреннее состояние генератора необходимо восстанавливать при каждом обращении в течение всего времени наблюдения за данной волной. Однако для других волн необходимо установить другие случайные значения, которые также должны воспроизводиться за время их жизни. Эти требования относятся и к случайным значениям параметров p_x , p_y , p_z .

Рассмотрим эту задачу на примере системы Mathematica-4. Пусть параметр p_τ меняется в интервале $d\tau = \tau_2 - \tau_1$. Установим генератор в состояние $\text{SeedRandom}[s]$, где s — целое число, равное текущему времени дня (в долях секунды). Тогда операция

$$p_\tau = \text{Table}[(\tau_2 - \tau_1)\text{Random}[], \{k\}]$$

создаст в интервале $\tau_2 - \tau_1$ последовательность p_{τ_k} из k постоянных, случайно выбранных чисел, которые будут воспроизводиться при каждом запросе значения p_{τ_k} . Тем же способом определятся случайные значения начальных координат всех k волн, возникающих соответственно в пределах $dx = x_2 - x_1$, $dy = y_2 - y_1$ и $dz = \{0, 1\}$.

Случайность места и времени зарождения возмущений является лишь одним из вариантов распределений p_τ и p_r . Возмущения могут возникать в некотором наборе фиксированных точек, связанных, например, с микровыступами на поверхности стенок. При такой их природе допустимы как периодический, точнее квазипериодический, ход процесса во времени, так и случайный. Наконец, заметим, что заданные размер канала и скорость волны создают условия, при которых отражение волн в определенном спектральном интервале становится предпочтительным. Но, как было показано, отражения приводят в действие механизм образования возмущений, положение которых от особенностей стенки не зависит. В этом случае возмущения будут возникать почти периодически. В экспериментах, по-видимому, реализуются разные сценарии. И каждый из них по-своему должен влиять на структуру пульсаций

параметров, прежде всего на их спектры. В то же время любая закономерность возникновения возмущений может быть представлена соответствующими выражениями для параметров p_τ и p_r , как в варианте случайных последовательностей. Тогда сравнение экспериментальных и модельных спектров позволит установить эту последовательность, а с ней и механизм процесса, действующий в конкретном эксперименте. Мы еще вернемся к этому вопросу, а пока исследуем пульсации скорости при распространении в канале одной волны, а затем структуру пульсаций для серии волн.

4. ПУЛЬСАЦИИ СКОРОСТИ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЯ

Определим зависимость скорости от времени в произвольной точке $\{x, y, z\}$ канала. Напомним, что она отлична от нуля только внутри слоя толщиной $2a$, поэтому пульсации в точке $\{x, y, z\}$ появятся лишь в момент прихода в нее переднего фронта волны и прекратятся с уходом из нее заднего фронта слоя. Но через заданную точку в канале проходит как прямая волна, так и все отраженные. Поэтому скорость в ней будет пульсировать в течение всего времени наблюдения, и при ее вычислении необходимо учитывать все волны. О свойствах этих пульсаций будем судить по спектрам, которые можно построить, используя преобразование Фурье зависимости скорости от времени.

Пусть радиус-вектор $\mathbf{r}_n(\xi, \eta, \zeta)$ волнового фронта в свободном пространстве, $|z| \geq 0$, соединяет центр волны p_x, p_y, p_z с мнимой точкой, соответствующей n отражениям. В ней пульсации скорости наблюдались бы при условии $|r_n - \tau| < a$, где r_n — расстояние до этой точки, а τ — текущий радиус сферической волны в свободном полупространстве. Профиль скорости в слое, $u(r_n - \tau)$, формируется распределением $P(r)$ плотности в начальном возмущении радиусом a , сохраняя форму при распространении, тогда как амплитуда убывает как с течением времени, так и при каждом отражении волны от стенки.

Представим распределение $P(r)$ в виде произведения константы P на какую-нибудь функцию, например косинус, с аргументом $(r_n - \tau)/a$. Для скорости u в точке $\mathbf{r}_n$ пространства имеем

$$u = \begin{cases} 0, & |r_n - \tau| > a, \\ B(1 - \alpha)^{n(\tau)} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{r_n - \tau}{a}\right) \frac{r_n - \tau}{\tau}, & |r_n - \tau| < a. \end{cases} \quad (12)$$

Коэффициент $B = cP/2\rho$ без нарушения общности можно положить равным единице. Выразим компоненты ξ, η, ζ радиуса-вектора $\mathbf{r}_n$ через координаты точки наблюдения x, y, z в связанной с ней системе отсчета. Примем во внимание, что на две из этих компонент, ξ и η , номер отражения не влияет и они остаются постоянными для любых n , тогда как третья компонента, ζ , зависит как от n , так и от того, на какой стенке возникает волна. Устанавливая такую зависимость, воспользуемся тем, что в моменты прохождения отраженных волн через точку наблюдения этой точке соответствуют сопряженные, или мнимые точки. Применяя указанную выше закономерность их расположения, найдем связь между координатами в двух системах отсчета. Место наблюдения $\{x, y, z\}$ известно. Поскольку это реальная точка, можно сразу написать равенства $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$. Первая мнимая точка есть зеркальное отражение места наблюдения в плоскости стенки, и для нее $\xi = x, \eta = y, \zeta = 2 - z$. Каждая следующая мнимая точка смещается на расстояние $\delta\zeta = 2$ (безразмерные единицы). Тогда из (7) получим

$$\begin{aligned} \xi &= x - p_x, & \eta &= y - p_y, \\ \xi_n &= 2\text{IP} \left[\frac{n+1}{2} \right] (-1)^{p_z} + (z - p_z)(-1)^n, & (13) \\ r_n &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta_n^2}, \end{aligned}$$

где n определено выражением (8).

Формулы (12) и (13) позволяют моделировать распределение и свойства возмущений в плоском канале. Рассмотрим это моделирование подробнее, включая последовательность операций для определения пульсаций скорости u и спектра этих пульсаций при распространении в канале одной волны. В соответствии с принятым порядком вначале необходимо указать значения параметров, которые задают условия протекания процесса, исходные данные. Так, для размера исходного возмущения используем значение $a = 0.1$ — часть расстояния между стенками, потери на отражение оценим как $\alpha = 0.1$, а для точки наблюдения выберем координаты $\{x, y, z\} = \{0.3, 0.5, 0.7\}$.

Поскольку для одной волны разброс начала и места зарождения не имеет смысла, распределения на-

чальных параметров p_τ , p_r и пределы их изменений $d\tau = \tau_2 - \tau_1$, $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ можно исключить из рассмотрения. Вместо этого исходное возмущение поместим на верхней стенке в точку с нулевыми значениями всех остальных параметров. При описании пульсаций важно задать также максимальное число отражений n_{max} волны от стенок и время T , в течение которого анализируется процесс. Учтем 10 отражений. Соответственно, продолжительность наблюдения за процессом ограничим величиной $T = 10$. Тогда исходные условия будут иметь вид

$$a = 0.1, \quad \alpha = 0.1, \quad \{x, y, z\} = \{0.3, 0.5, 0.7\},$$

$$\{p_\tau, p_x, p_y, p_z\} = \{0, 0, 0, 1\}, \quad n_{max} = 10, \quad T = 10.$$

Прежде всего с помощью формул (13) находятся координаты $\{\xi_n, \eta_n, \zeta_n\}$ мнимых точек в полупространстве, а также расстояния $\mathbf{r}_n$ до этих точек для выбранного места наблюдения $\{x, y, z\}$ и номера n отражения волны. Далее, в соответствии с формулами (12) вычисляются пульсации скорости $u(\tau, n)$ при каждом прохождении волновым слоем точки наблюдения $\{x, y, z\}$, находящейся внутри канала. Одновременно эти пульсации суммируются, образуя единую зависимость скорости от времени в точке наблюдения в виде кусочно-гладкой функции $u(\tau)$.

В заключение выполняются технические, но важные процедуры. Здесь функция $u(\tau)$ представляется в виде таблицы, затем с ее помощью строятся графики для пульсаций скорости и спектра этих пульсаций. Процедура расчета спектра (преобразования Фурье) предполагает разбиение времени наблюдения T на отрезки (разрешаемые элементы), число N которых определяет спектральное разрешение и диапазон частот ν спектра. Значения T и N как раз устанавливаются в таблице. В рассматриваемом случае распространения одной волны при $T = 10$ вполне достаточно положить $N = 500$. Тогда число интервалов N , время τ (в безразмерных единицах) и безразмерная частота ν (в пульсациях на единицу времени) будут связаны следующими соотношениями: $N = 50\tau$, $N = 10\nu + 1$. Зависимости $u(\tau)$, точнее $u(N)$, и амплитуды спектра пульсаций $A(\nu)$, или $A(N)$, приведены на рис. 2. На примере одного возмущения выясним, какие параметры и как влияют на спектр пульсаций в канале. Очевидно, что из исходных параметров $\{p_\tau, p_r\}$ задержка старта волны, p_τ , на вид спектра не влияет, тогда как удаление источника от места наблюдения, p_r , должно деформировать пульсации скорости и спектр, что связано со свойствами функции r^{-1} и изменением угла отражения. Скорость u в волновом слое пропорциональна

τ^{-1} , поэтому от времени наблюдения T (или числа отражений n_{max}) зависит минимальная амплитуда пульсаций и, следовательно, высокочастотная часть спектра, требующая соответствующего числа решаемых элементов N . Вообще говоря, чем шире спектральная полоса, тем точнее модель описывает реальный процесс, но на некотором уровне точность становится избыточной. В рассматриваемом примере при $a = \alpha = 0.1$ и $T = 10$ за время наблюдения амплитуда пульсаций уменьшается примерно в 300 раз. Для наших целей пульсациями меньшей амплитуды можно пренебречь.

Менее очевидны роли размера исходного возмущения, a , распределения параметров в источнике, P , и коэффициента потерь при отражении волны от стенки, α . Некоторые предварительные сведения об их влиянии может дать представление функции (12) в интегральной форме преобразования Фурье. Не детализируя процедуру включения функции (12) в известные выражения, заметим, что при интегрировании два сомножителя этой функции дали бы соотношение типа интегрального синуса si . В низкочастотном диапазоне спектра он равен $\pi/2$, но с ростом частоты si аппроксимируется выражением типа $\cos \psi / \psi$, а частота ν заменяется в нашем случае произведением $a\nu$, т. е. спектр в той или иной степени будет промодулирован, и полоса частот должна расти с уменьшением a . Согласно (12), свои коррективы в форму спектра вносит вид функции распределения P скорости в волновом слое, а также коэффициент потерь α , обуславливающий скачок скорости пульсаций при отражении волны от стенки. Для оценки этого влияния воспользуемся формулами (12) и (13), приведенным выше перечнем исходных параметров и будем последовательно, по одному, варьировать значения параметров a , P и α , сохраняя остальные такими, как они указаны в перечне. Результаты расчетов приведены на рис. 3, где вариации параметра $a \rightarrow \{0.2, 0.1\}$ представлены соответственно спектрами 1 и 2. В качестве распределения P (см. (12)) использовались функции $P_3 = 1 - |r_n - \tau|/a$ и $P_4 = 1 - [(r_n - \tau)/a]^4$ — спектры 3 и 4. Коэффициентам потерь $\alpha \rightarrow \{0.1; 0.5\}$ соответствуют спектры 5 и 6. Вертикальные линии при $10\nu + 1 = 200$ изображают добавленные к скорости u синусоиды, амплитуда g и частота ν которых дают представление о характеристиках пульсаций в абсолютном выражении.

Из графиков 1 и 2 на рис. 3 следует, что частота максимума первой гармоники определяется шириной сферического волнового слоя и равна $1/2a$. Обращает на себя внимание также единообразие модуляции всех спектров. Оценки показывают, что, начи-

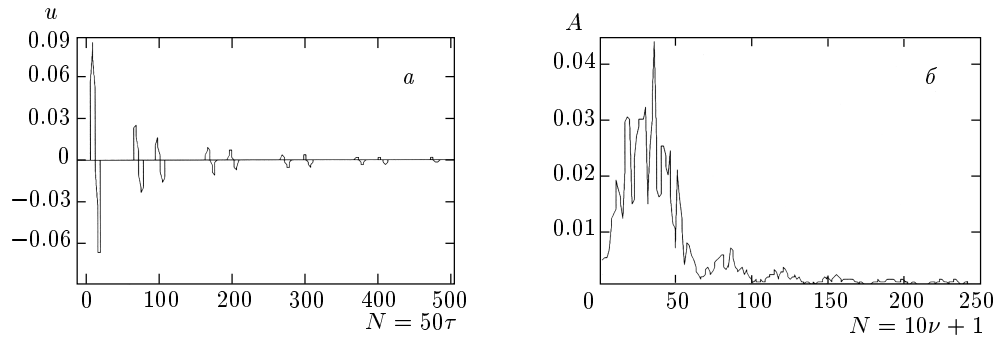


Рис. 2. Пульсации скорости (а) и их спектры (б) в слое при распространении одной волны: $a = 0.1$, $\alpha = 0.1$, $n = 10$, $\{x, y, z\} = \{0.3, 0.5, 0.7\}$, $\{p_\tau, p_x, p_y, p_z\} = \{0, 0, 0, 1\}$

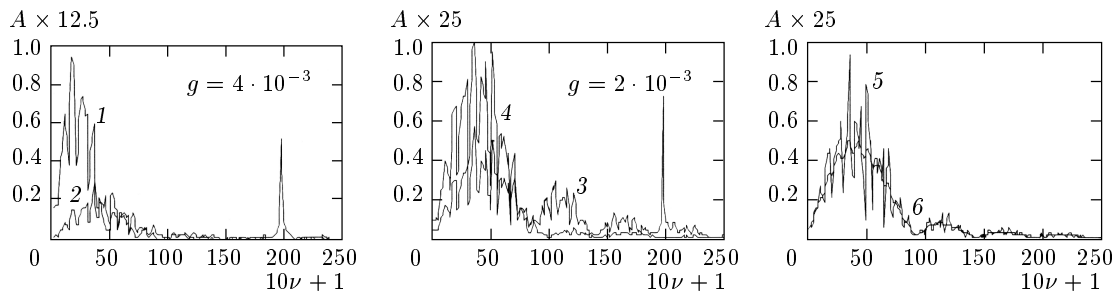


Рис. 3. Спектры пульсаций в точке $\{x, y, z\} = \{0.3, 0.5, 0.7\}$ при вариации параметров возмущения: кривые 1, 2 — $a = \{0.2, 0.1\}$; 3, 4 — $P = \{1 - |r_n - \tau|/a\}$; $1 - (|r_n - \tau|/a)^4$; 5, 6 — $\alpha = \{0.1, 0.5\}$

ная со второй гармонике, частота модуляции остается величиной постоянной для данного a , и при вариации a в пределах 0.01–0.2 ее отношение к основной частоте и произведение $a\nu_m$, где ν_m — частота гармонике m , практически не меняются. Отсюда следует, что вся спектральная полоса обратно пропорциональна размеру первичного возмущения, что, собственно, и демонстрируют кривые 1 и 2 на рис. 3. При этом плотность спектра уменьшается, и из сопоставления амплитуд видно, как велико это уменьшение.

Функция P тоже оказывает влияние на спектр пульсаций. Из сопоставления кривых 2, 3 и 4 (рис. 3), где соответственно

$$P \propto \cos \frac{\pi}{2} \frac{|r_n - \tau|}{a}, \quad P \propto 1 - \frac{|r_n - \tau|}{a}$$

и

$$P \propto 1 - \left(\frac{|r_n - \tau|}{a} \right)^4,$$

вытекает, что это влияние аналогично спектру самой функции P , и чем ближе распределение P к прямоугольному импульсу, тем сильнее развиты гармоники более высокого порядка. Таким образом, при

оценке влияния вида функции P на спектр пульсаций можно просто ориентироваться на свойства фурье-образа этой функции.

Роль коэффициента потерь понятна из сравнения кривых 5 и 6 (рис. 3), где значения α равны 0.1 и 0.5. При относительно низком уровне потерь в спектре 5 наблюдаются частые колебания вдоль всей спектральной кривой. С увеличением потерь эти колебания выравниваются и спектр 6 становится более плавным, следуя усредненным амплитудам спектра 5.

Мы рассмотрели влияние разных факторов на спектральные свойства пульсаций скорости, когда одно возмущение в виде сферического волнового слоя распространялось по каналу, образованному двумя параллельными стенками. Ширина волнового слоя равнялась диаметру исходного возмущения. Амплитудно-частотная характеристика, или спектр пульсаций, зависела от положения точки зарождения волны относительно точки наблюдения, но не от момента ее возникновения.

Исходя из этих результатов, можно ожидать, что последовательность волн, рожденных в одном и том

же месте, даст одинаковый спектр независимо от характера этой последовательности. Полоса частот спектра будет зависеть от количества учитываемых отражений, но при заданном их числе определится толщиной волнового слоя. Спектр должен содержать гармоники, полуширина и период расположения которых определяются той же толщиной волнового слоя, а декремент затухания, число гармоник — формой распределения параметров в исходном возмущении. Увеличение коэффициента потерь при отражении волн от стенки должно уменьшать амплитуду высокочастотной модуляции каждой гармоники спектра, сглаживая спектральную характеристику.

5. СТРУКТУРА ПУЛЬСАЦИЙ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Зная свойства пульсаций при распространении в канале одной волны (или волн, исходящих из одной точки), можно перейти к моделированию турбулентности для произвольной последовательности возмущений, т.е. при определении зависимости пульсаций скорости в точке наблюдения необходимо учесть вклад возмущений, исходящих из разных мест (на стенках) и в разные моменты времени. Реальное значение имеют варианты начальных условий, когда серия возмущений возникает в случайных или фиксированных точках p_r , а моменты времени p_τ могут быть как случайными, так и периодически, а также квазипериодическими. В экспериментах по изучению турбулентности обычно регистрируют пульсации скорости в фиксированной точке канала или получают мгновенную фотографию распределения возмущений в его сечении. Поэтому при распространении в канале последовательности возмущений необходимо кроме спектра в точке, зависящего от частоты пульсаций в единицу времени, ν , моделировать структуру пульсаций, т.е. их спектр по высоте z и вдоль канала, например по оси x , с пространственной частотой ν , выраженной в пульсациях на единицу длины. При этом возникает вопрос о том, насколько процесс является установившимся.

Рассмотрим вначале пульсации скорости во времени и для определенности выберем минимальные объем канала и время, соответствующие динамическому равновесию состояния структуры в точке наблюдения. Ранее было принято, что время жизни возмущения $\tau = 10$. Область вокруг точки наблюдения, или исследуемый объем, целесообразно огра-

ничить размерами, эквивалентными этому временному интервалу. Для $\tau = 10$ размеры этого объема составят $\{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\} = \{0 - 20, 0 - 20, 0 - 1\}$ с центром в точке $x = y = 10$. С позиции рассматриваемой модели определение времени t установления структуры аналогично задаче о нахождении уровня воды в сосуде при постоянном в среднем ее поступлении и при скорости истечения, зависящей от высоты этого уровня. Соответственно, баланс между рождением и затуханием волн определится выражением, содержащим $\exp(-t/\tau)$, и можно положить $t = 3\tau$, для которого число волн, одновременно находящихся в канале, будет отличаться от равновесного не более чем на 5%. Тогда наблюдение за процессом следует начать не ранее момента 3τ . Продолжительность наблюдения $\tau_2 - \tau_1$ зависит от цели задачи и технических возможностей. Если за весь период T ($T > \tau$) развития процесса возникает k возмущений, то в канале в среднем постоянно будет находиться $kn\tau/T$ отраженных волн. Обратная величина указывает на разрешение β процесса во времени или пространстве.

Зависимость пульсаций скорости от времени в поле действия многих волн находится тем же способом, что и в случае многих отражений одной волны. Кусочно-гладкая функция $u(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, \tau_1, \tau_2, p_x, p_y, p_z, p_\tau, x, y, z, n)$ суммируется в точке наблюдения $\{x, y, z\}$ по всем k возмущениям для последовательности моментов времени τ , за период их возникновения T , начиная с момента времени t . В рассматриваемых здесь примерах для возмущений принято значение $k = 100$. Точка наблюдения задана координатами $\{x, y, z\} = \{10, 10, 0.7\}$, исследуемый период — интервалом $\{t, T\} = (30, 50)$, т.е. спектр строится только для последних 20 единиц времени.

Способы задания координат для серии из k возмущений частично обсуждались выше. В системе Mathematica-4 их распределение по закону случая описывается функцией $T\text{Random}[], \{k\}$ с генератором случайных чисел, установленным в состояние s . Для упорядоченного расположения возмущений можно использовать функцию вида $(T/k)(\text{Range}[k] - 1/2)$, где T/k — период, а оператор $\text{Range}[k]$ генерирует натуральный ряд чисел. Добавление к ней случайного элемента, меняющегося в пределах одного периода, дает квазипериодическую функцию, которая составляется из двух предыдущих: $(T/k)(\text{Range}[k] - \text{Random}[], k)$. Таким же образом можно задать любой другой закон распределения координат и времени возникновения возмущений. При определении пульсаций скорости пол-

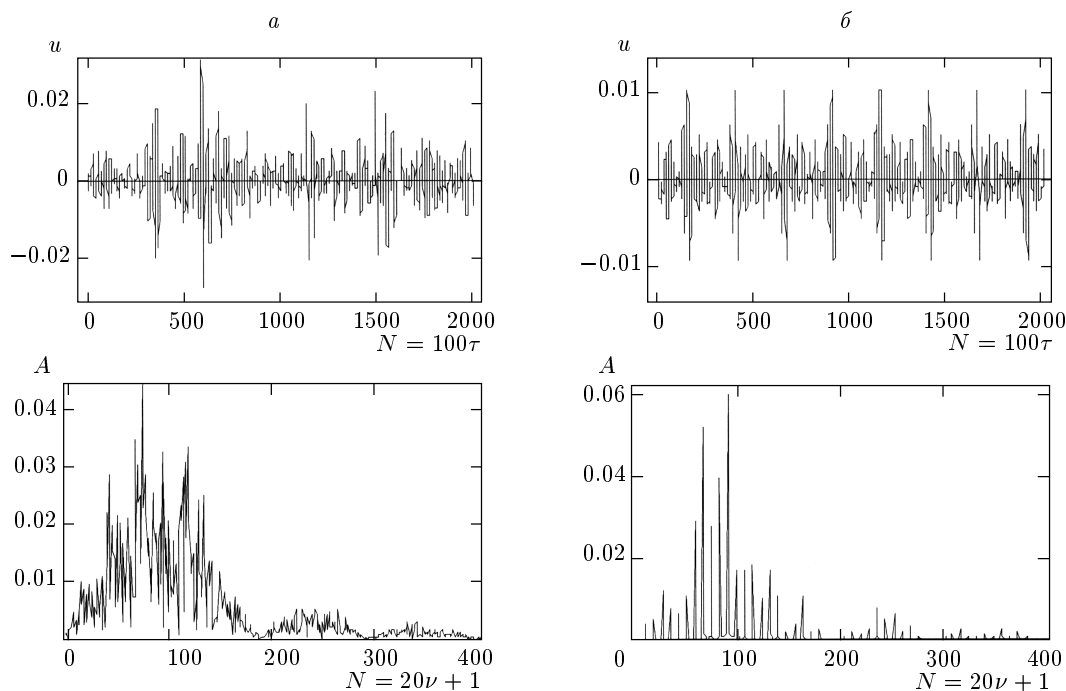


Рис. 4. Пульсации скорости и их спектры в точке $x = y = 10$, $z = 0.7$ на интервале $\tau \in [30, 60]$: a — p_τ , p_τ — случайные функции; $б$ — p_τ — пять фиксированных точек, p_τ — функция с периодом $T/20$

ное время наблюдения за процессом разбивалось на $N = 2000$ интервалов, что соответствовало спектральному разрешению $\beta = 0.01$. На рис. 4 приведены пульсации и спектры для случайной и полностью упорядоченной последовательностей p_τ и p_τ . На верхних графиках изображены зависимости скорости u от времени τ , на нижних — спектры A пульсаций скорости в виде функции частоты ν , выраженной числом N интервалов β . Графики на рис. 4а соответствуют случайному распределению всех начальных параметров возмущений. Рисунок 4б представляет противоположный вариант, в котором последовательность волн полностью упорядочена, и возмущения в пяти равномерно расположенных точках возникают периодически, с периодом $0.05T$. Заметим, что пульсации скорости $u(\tau)$, как и спектр $A(\nu)$, зависят от положения $\{x, y, z\}$ точки наблюдения. В первом варианте на них влияет также и реализация случайных распределений $\{p_\tau, p_x, p_y, p_z\}$. Но все же при случайном распределении возмущений общий вид и особенности пульсаций сохраняются, напоминая случай одной волны. Это дает право распространять выводы, полученные при анализе одной реализации, на весь класс случайного распределения. Иное дело — внесение порядка, что сразу видно по верхним графикам рис. 4б, где упорядоче-

ние зарождения возмущений приводит к явно периодическому характеру пульсаций. Посмотрим, как эта тенденция проявляется в спектрах.

Спектры исследовались в полосе частот $\nu = 50$ (пульсаций в условную единицу времени, равную времени пересечения волной канала), что определяется выбранным разрешением β с учетом правил преобразования Фурье. Спектр представляет собой набор гармоник, амплитуда которых весьма быстро убывает, поэтому на рис. 4 приведены только части спектров, ограниченные частотой $\nu \approx 20$. Общий вид спектров рис. 4 напоминает спектральное распределение пульсаций, создаваемых одной волной, $k = 1$. Как и для одной волны, максимум огибающей первой гармоники расположен на частоте $1/2a$, форма и затухание других гармоник определяются свойствами исходного возмущения, распределение параметров в котором представлено в данном случае гармонической функцией $P \propto \cos((r - \tau)/a)$. Исходя из схожести спектров при $k = 1$ и $k \gg 1$, можно было бы ожидать, что число k влияет больше на функцию $u(\tau)$ и плотность спектра $A(\nu)$, чем на вид спектрального распределения пульсаций. Но участие в процессе серии волн приводит к перераспределению плотности спектра. В частности, меняются полуширина гармоники и ее модуляция. Един-

ственным источником всех этих изменений могут быть только пространственно-временные характеристики распределения возмущений в начальной последовательности, в том числе и количество возмущений k .

Оценим основные параметры этой последовательности для условий, соответствующих вышеуказанным параметрам. В среднем за единицу времени возникают два возмущения, и на каждое из них приходится по 8 единиц площади поверхности обеих стенок, т. е. средняя частота зарождения возмущений составляет 2 возмущения на единицу времени, а пространственная частота — 0.125 возмущений на единицу площади, или в пересчете на длину r (расстояние до точки наблюдения) — 3.5 возмущений на единицу длины. Основная гармоника имеет полуширину $\delta\nu = 5.5$. При случайном распределении возмущений в последовательности (рис. 4а) в спектре можно выделить несколько полос, включающих острые максимумы. Первый такой максимум расположен на частоте $\nu = 2$, что совпадает со средней частотой зарождения возмущений. Но наибольшую амплитуду имеет максимум на частоте $\nu = 3.5$, совпадающей со средней пространственной частотой распределения возмущений (3.5). Заметим, что количественное соответствие временной и пространственной частот возможно в силу принятых масштабов для безразмерных времени τ и длины r .

При внесении в последовательность зарождения волн частичного (пространственного) порядка полуширина гармоник сужается и заметно возрастает контраст отдельных максимумов, соответствующих различным частотам и их комбинациям. Этот эффект усиливается при полной упорядоченности серии возмущений и по пространству, и во времени. Эффект периодичности, при которой процесс помимо частот в пространстве и в среднем по времени характеризуется еще фиксированной частотой возникновения группы из пяти возмущений ($\nu = 0.4$), демонстрирует спектр на рис. 4б. Он состоит только из изолированных максимумов. Всего в составе основной гармоник насчитывается 23 максимума, и средний по всем максимумам частотный сдвиг равен 0.4, что равно частоте возникновения группы возмущений. Эти результаты можно рассматривать как подтверждение предположений о прямой зависимости характера модуляции временного спектра от закономерностей зарождения возмущений. Они могут быть полезны для предварительной оценки ожидаемых результатов при моделировании турбулентности, а также при экспресс-анализе процесса.

Похожим закономерностям должны отвечать и

пространственные спектры пульсаций. Обращаясь к этим спектрам, используем те же условия, что были приняты для анализа пульсаций во времени. Вклад волны в структуру пульсаций будем учитывать в течение принятого значения времени жизни $\tau = 10$. За это время она проходит расстояние $r = 10$, отражаясь от стенок не более десяти раз. Чтобы исследовать пространственную структуру в установившемся режиме и одновременно сократить число вариантов задачи, размеры рабочего объема установим в соответствии с соотношениями

$$\{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\} = \{0 - 20, 0 - 20, 0 - 1\}.$$

Количество возмущений k для этого объема примем равным $k = 100$. Для указанных условий установившийся режим наступает, начиная с момента времени $\tau = T = 50$. Зависимость скорости пульсаций от координат в каком-либо направлении определим, используя методику получения временных спектров пульсаций в точке наблюдения.

Согласно этой методике, для получения спектра пульсаций во времени фиксируется точка наблюдения $\{x, y, z\}$ и в моменты времени $\tau \in [t, T]$ вычисляется и затем суммируется для всех k возмущений кусочно-гладкая функция

$$u(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, \tau_1, \tau_2, p_x, p_y, p_z, p_\tau, x, y, z, n).$$

Для получения пространственного спектра в заданном направлении, напротив, фиксируется момент времени T , а кусочно-гладкая функция

$$u(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, T, p_x, p_y, p_z, p_\tau, r, n)$$

вычисляется и затем суммируется по всем k волнам в точках $\mathbf{r} \in [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ исследуемого отрезка в заданном направлении. Однако между разными направлениями существует некоторая разница. Рассмотрим процедуру получения спектра в поперечном и продольном направлениях выбранного объема канала, т. е. параллельно оси z и оси x . Первое направление можно определить координатами x и y , например $x = y = 10$, что соответствует середине объема, и варьировать значение параметра z в интервале $z \in [0, 1]$ с шагом 0.01. Точно так же линию, параллельную оси x , можно задать координатами y и z . Но в отличие от линии параллельной z , пределы изменения которой автоматически заданы стенками канала, для оси x такое естественное ограничение отсутствует.

В этом случае выбор граничных условий должен обеспечить, во-первых, формирование установившейся структуры и, во-вторых, прежнюю удельную

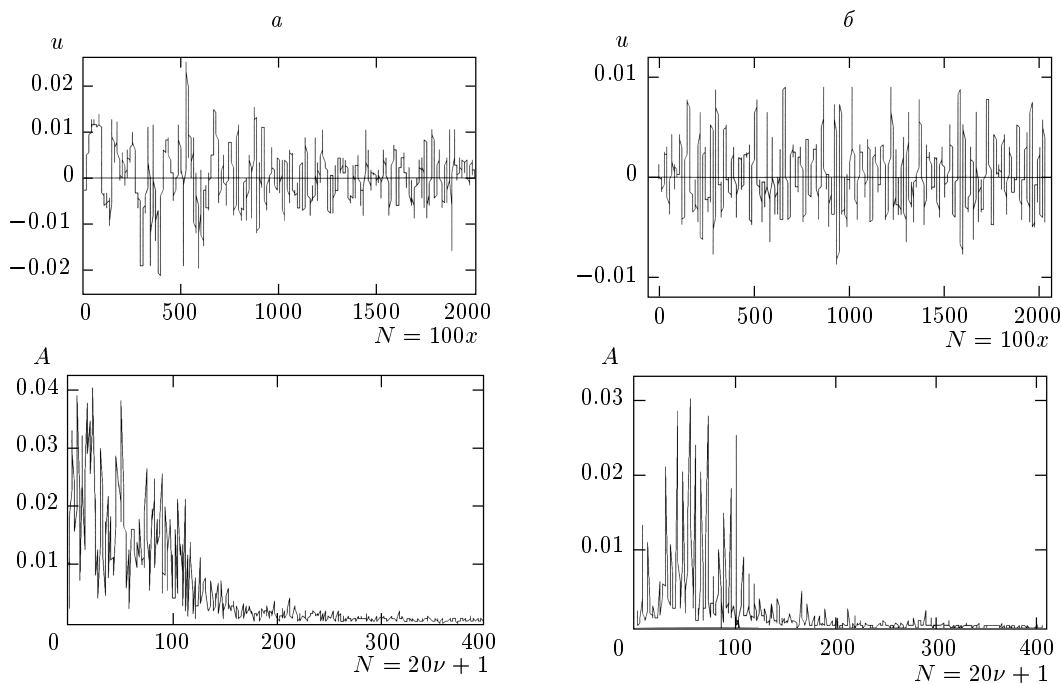


Рис. 5. Параметры пульсаций на интервале $x \in [10, 30]$ ($y = 10, z = 0.7$) в момент времени $T = 50$: a — p_r, p_τ — случайные функции; $б$ — p_r — пять фиксированных точек, p_τ — функция с периодом $T/20$

плотность возмущений на всем исследуемом участке. Естественным способом это требование можно выполнить, увеличивая протяженность области зарождения возмущений с каждой стороны вдоль x на расстояние, соответствующее времени жизни волны. Удлиняя исследуемый объем, необходимо также привести в соответствие число исходных возмущений. В случае $\tau = r = 10$ такое согласование дает $k = 200$ и $\{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\} = \{0-40, 0-20, 0-1\}$. Структуры пульсаций скорости в направлении оси x при $y = 10$ и $z = 0.7$ приведены на рис. 5 для момента времени $T = 50$. Здесь переменный параметр пробегает интервал $x \in [10, 30]$ с шагом 0.01. Верхние графики рис. 5 представляют пульсации скорости для указанных выше (рис. 4) двух типов последовательностей исходных возмущений, на нижних приведены их спектры как функции $N = 20\nu + 1$, где ν — пространственная частота вдоль x . Спектры ограничены частотой $\nu \approx 20$.

Как показывает сопоставление рис. 4 и 5, пространственные характеристики пульсаций в направлении оси x во многом похожи на свойства спектров во времени. Комментарии к спектрам пульсаций во времени (рис. 4) в основном относятся и к пространственным спектрам рис. 5. В частности, упорядочение последовательности первичных возмущений уве-

личивает контраст спектральных линий. Различие касается только низкочастотной (длинноволновой) области, где плотность пространственных спектров значительно превосходит плотность спектров во времени. Это различие вполне объяснимо.

Действительно, характерное время изменения скорости в точке наблюдения связано прежде всего с толщиной $2a$ сферического волнового слоя, так что при $a = 0.1$ частота $\nu = 5$. В этом случае плотность спектра в других диапазонах частот зависит от длины когерентности цуга пульсаций, сформированного в результате суперпозиции первичных волн. Очевидно, что возможность образования цуга, длина которого заметно превышает $2a$, тем меньше, чем больше эта длина. Именно это и наблюдается на рис. 4, где плотность спектра в области низких частот убывает практически до нуля. С другой стороны, при пересечении волной отрезка, на котором исследуется пространственный спектр, длина когерентности автоматически возрастает при увеличении радиуса сферического волнового слоя в процессе его распространения. В таком случае плотность низкочастотной части спектра зависит от количества волн, имеющих соответствующие параметры и место возникновения. Как видно из рис. 5, спектр в этой области отнюдь не равен нулю.

В этом отношении показательным является пространственный спектр в направлении оси z . В нем, как и во временном спектре, отсутствует низкочастотная составляющая, но это происходит из-за ограниченности длины исследуемого отрезка. В то же время в области других частот спектральное распределение по оси z практически совпадает с огибающей пространственного спектра в направлении оси x . Расчеты показывают, что описанные свойства спектров проявляются при всех видах последовательностей исходных возмущений. Заметим еще, что плотность низкочастотной части спектра зависит также от ширины $2a$ сферического волнового слоя. При расширении слоя плотность спектра в области низких частот возрастает, поскольку когерентная длина увеличивается не только в самом слое, но и в цуге пульсаций при суперпозиции волн. В пространственных спектрах этот процесс ускоряется также в результате увеличения объема когерентности.

Приведенные выше результаты показывают, что концепция турбулентности, основанная на суперпозиции акустических волн, позволяет рассчитать временные и пространственные характеристики турбулентного процесса, если заданы граничные и начальные условия. Так как в предлагаемой модели не вводятся никакие дополнительные ограничения, она может иметь достаточно широкое применение. Так, ее можно использовать для описания структуры возмущений низкотемпературной плазмы, где существуют акустические (ионно-звуковые) волны.

6. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ С ДАННЫМИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для сопоставления разработанной модели турбулентности с экспериментальными данными и в качестве примера ее применения обратимся к результатам изучения плазменных каналов, создаваемых бесселевым пучком лазерного излучения. Поскольку методика и результаты эксперимента относятся к новому направлению исследований, дадим некоторые пояснения, необходимые для понимания дальнейшего изложения.

Бесселевы пучки [4] формируются коническими фокусирующими линзами, аксиконами, которые преобразуют плоский фронт волны в конический с углом γ при основании конуса. На фокальном отрезке аксикона, $L \approx R/\gamma$ ($2R$ — диаметр падающей волны), волновой пучок дифракционно скомпенсирован, поперечное распределение поля в нем посто-

янно и описывается функцией Бесселя нулевого порядка $J_0(kr \sin \gamma)$, где $k = 2\pi/\lambda$ и λ — длина волны излучения. Нули функции Бесселя делят весь пучок на цилиндрические части. Их радиусы определены равенствами: $kr_i \sin \gamma = 2.40, 5.52, 8.65, 11.79$. При интенсивности пучка, превышающей порог пробоя, на длине фокального отрезка образуется плазменный канал. В канале температура плазмы достигает 50 эВ, плотность электронов — $5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, скорость $(ZkT_e/m_i)^{1/2}$ ионного звука — $3.5 \cdot 10^6 \text{ см/с}$.

Две интерферограммы канала даны на рис. 6а. Они получены в совместных исследованиях Института высоких температур РАН и Мэрилендского университета (США) на установке [5] в лаборатории Г. М. Миллберга при участии Л. Я. Марголина и автора статьи. Эксперименты проводились при следующих условиях. Аксикон с углом при основании 30° ($\gamma = 18^\circ$) преобразовывал греющее излучение ($\lambda = 1.06 \text{ мкм}$, $E = 0.6 \text{ Дж}$, $\tau = 100 \text{ пс}$, $D = 1 \text{ см}$) в бесселев пучок с диаметром центральной части $2r_b \approx 2.6 \text{ мкм}$ длиной примерно 1.5 см. Состояние плазменного канала на длине 512 мкм оценивалось по интерферограммам, увеличенное изображение которых регистрировалось камерой ССД в свете зондирующего лазерного излучения (0.53 мкм, 70 пс). Цифрами на изображениях интерферограмм отмечены номера пикселей ССД-камеры, каждый размером 1.6 мкм. Интерферограммы на рис. 6а получены для закиси азота при давлениях 200 (верхний кадр) и 500 Торр (нижний кадр) через 250 пс после старта греющего импульса. Эта среда выбрана в связи с малым потенциалом ионизации и низким порогом оптического пробоя, благодаря чему удалось сформировать устойчивый плазменный канал. На фоне интерференционных полос равного наклона видны контуры плазменных каналов, диаметры которых составляют соответственно 57.3 и 41.0 мкм.

Отклонение интерференционной полосы от своего первоначального направления, или сдвиг полосы, указывает на разность оптических длин при распространении луча по невозмущенному газу и по плазменному каналу, что позволяет использовать смещение полос для оценки структуры возмущений в канале. Как видно из интерферограмм, общий вид смещения полос в канале зависит от давления. При 200 Торр интерференционные полосы приобретают вид мениска, но при этом их последовательность остается регулярной. С ростом давления эта регулярность постепенно нарушается, и при 500 Торр она практически исчезает. При дальнейшем небольшом увеличении давления или задержки след полосы теряется, и измерить ее сдвиг невозможно. Поэто-

Рис. 6. Моделирование пульсаций параметров в плазменном канале по линии x , $r_0 = 0.5$: a — интерферограммы при давлениях 200 Торр (верхняя) и 500 Торр (нижняя); b — эксперимент: сдвиг полос и спектр; $c-d$ — расчет пульсаций при $a = 0.063$ (c), 0.145 (c), 0.227 (d)

му для сопоставления возмущений в канале с расчетными данными о пульсациях была использована интерферограмма, зарегистрированная при 500 Торр с задержкой 250 пс.

Выбранная методика эксперимента, обусловленная высокими требованиями к пространственно-временному разрешению, предоставляет возможность для определения пространственных характеристик

пульсаций только в осевом направлении, вдоль оси x . Действительно, временные характеристики потребовали бы большого числа интерферограмм, а для радиального распределения, аналогичного функции $u(z)$, необходима значительно большая плотность интерференционных полос. В то же время в поле зрения интерферометра в продольном направлении, вдоль оси x , попадает 56 полос. Сдвиг δ интерфе-

ренционных полос в общем не превышает порядка интерференции h (расстояние между полосами). Принимая их за разрешаемые элементы, мы получаем упомянутую возможность для построения зависимости сдвига полос от продольной координаты, $\delta(x)$, аналогичной распределению пульсаций скорости $u(x)$. Интерферограмма позволяет найти распределение смещений $\delta(x)$ вдоль линий, параллельных оси, но расположенных на различных расстояниях от нее (аналог высоты канала).

В качестве примера на рис. 6б приведены результаты измерений сдвига полос на уровне половины радиуса, $r/R = 1/2$. Верхний график представляет зависимость $\delta(N)$, где N означает номер интерференционной полосы, равный x/h , а нижний — соответствующий ей пространственный спектр. Здесь плотность спектра выражена в относительных единицах (как отношение к ее максимуму), а частота ν — в пульсациях на одну интерференционную полосу, т. е. на расстояние h между полосами. Сравнивая эти результаты с графиками на рис. 5, заметим, что структура возмущений в плазменном канале (со скидкой на ограниченное разрешение) имеет общие черты со структурами пульсаций в плоском канале для упорядоченных или частично упорядоченных последовательностей начальных возмущений. Но более детальное сопоставление требует уточнения модели. Поэтому рассмотрим процесс формирования канала более подробно.

Источником энергии при формировании канала, очевидно, является поле бесселева пучка. Как известно [4], это поле имеет структуру. Ее свойства в радиальном направлении связаны с формой функции Бесселя, а в продольном направлении она складывается под влиянием нелинейных процессов и образует цепочку максимумов, разделенных расстоянием $l = 2\lambda/\sin^2 \gamma$ [4], в нашем случае $l \approx 21$ мкм. Предположим пока, что пробой газа происходит в объеме такого максимума и что его можно рассматривать как микровзрыв, а формирование канала описывать на основе задачи о серии точечных взрывов. На начальной стадии распространение волны можно считать автомодельным. Однако нас интересуют поздние стадии, где из-за противодействия условия автомодельности нарушаются и волна приближается к акустической. Прямой расчет распространения волны связан с погрешностями, обусловленными неточными данными о процессе энерговысвобождения при пробое газа [6].

Чтобы проверить это предположение, воспользуемся решением задачи о точечном взрыве с противодействием [7], в которой появляются характерные

масштабы длины и времени. В частности, в качестве масштаба длины обычно берется радиус сферы $R = (\varepsilon/p)^{1/3}$, где ε — энергия микровзрыва, а p — начальное давление газа. Сравнивая два процесса (рис. 6а), зарегистрированных в идентичных условиях в одно и то же время (исключается один лишний параметр) и различающихся только начальным давлением, найдем отношение их диаметров. Оно равно 1.40, что практически совпадает с величиной 1.38, вычисленной для масштаба длины R . Таким образом, это предположение подтверждается. Но остается вопрос о месте и объеме микровзрыва. Проблема заключается в том, что экспериментально эти данные получить практически невозможно. Оказывается, однако, что с помощью разработанной модели этот вопрос решается.

Сформулируем задачу. Микроочаги пробоя выполняют роль первичных возмущений. В радиальном направлении они могут возникать внутри основной части бесселева пучка или в пределах нескольких его колец, размеры которых в масштабе радиуса канала (41.0 мкм при 500 Торр) имеют значения $a = 0.063, 0.145, 0.227$ и т. д. В направлении вдоль канала их число не должно превосходить числа дифракционных максимумов, которое на длине 512 мкм составляет 24–25, но может быть и меньше. Задача сводится к определению этих параметров. Для ее решения прежде всего приведем модель в соответствие с условиями эксперимента. Заметим, что параметры модели, принятые при построении графиков на рис. 5, соответствовали установившемуся режиму процесса и описывали локальные пульсации скорости в плоском канале с возмущениями, расположенными на его стенках. В эксперименте процесс имеет ряд отличий.

На начальной стадии расширения канала, когда первые возмущения только формируют радиальные размеры цилиндра, отраженные волны можно не принимать во внимание и характеризовать состояние структуры параметром $T = 1$. Тогда в силу симметрии распространения возмущений их геометрию можно описать двумя координатами — продольной x и радиальной r . Далее, структуру пульсаций в модели следует анализировать на том же отрезке, что в эксперименте: $x \in [0, 25R]$, где R — радиус канала. Выражая координату x (для удобства сопоставления с результатами измерений) через расстояние h между интерференционными полосами, получим для протяженности этого отрезка $\{x_1, x_2\} = \{0, 55\}$.

Как известно, смещение интерференционных полос дает картину распределения возмущений, которая усредняется вдоль хорды цилиндрического ка-

нала, а возмущения возникают на его оси. Пусть усреднение происходит на расстоянии, равном половине радиуса канала, т. е. прицельное расстояние $r_0 = R/2$. Тогда путь y вдоль половины хорды с координатами $x = (x_2 - x_1)/2$, $z = R/2$ меняется в пределах от 0 до $r_0 \operatorname{tg} \varphi$, где φ — азимутальный угол. Суммирование по длине y хорды должно включать все возмущения, которые возникают в точках p_x на участке $\{x_1, x_2\}$ в моменты p_τ времени действия греющего импульса длительностью τ_0 .

Рассмотренные свойства бесселева пучка и плазменного канала позволяют найти параметры модели. Вариант этих параметров для описания пульсаций в плазменном канале имеет вид

$$a = 0.063, \quad T = 1, \quad k = 25, \quad \tau_0 = 0.4,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 56, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = r_0 \operatorname{tg}(\pi/3),$$

$$r_0 = 0.5, \quad m = 11, \quad \beta = 1,$$

$$Q = 1, \quad q = 0, \quad \theta = 0.$$

Помимо ранее оговоренных условий в этом перечне указаны: длина исследуемой части канала $\{x_1, x_2\}$ и число возмущений k с учетом краевых эффектов ($T = 1$), разрешаемый элемент β , вид функции $P(r/a)$, число элементов суммирования m вдоль хорды, распределение возмущений по длине, p_x , смещение Q целой последовательности возмущений (в пределах полосы), диапазон q случайных отклонений координат при частичном нарушении периодичности последовательности p_x , распределение возмущений во времени, p_τ , а также возможная задержка пробоя, θ . В эксперименте пульсации, выраженные в долях порядка интерференции h , строятся как функции номера интерференционной полосы (с разрешением $\beta = 1$, одна полоса). В расчетах используются безразмерные величины в масштабе радиуса канала R . Для сопоставления модельных и измеренных данных был введен коэффициент μ , а все графики даны как отношение величин к их максимальным значениям.

Результаты применения модели к исходным возмущениям с размерами $a = 0.063, 0.145, 0.227$ (отвечающими центральной части функции Бесселя, ее первому и второму кольцам) приведены на рис. 6в–д. Графики на рис. 6в представляют структуру пульсаций для параметров, соответствующих приведенному выше варианту. Здесь размер возмущений ограничен центральной частью бесселева пучка, $a = 0.063$, приняты периодическое по оси x расположение возмущений и случайный закон их зарождения в пределах длительности греющего импульса, $\tau_0 = 0.4$, и выбрана функция $P(r/a) = 1$.

Волновой фронт бесселева пучка пробегает исследуемый участок канала примерно за $\tau = 0.01$ (менее 2 пс), поэтому задержка θ на данном этапе не учитывалась. Модельные зависимости на рис. 6г построены для случая $a = 0.145$, когда диаметр начальных возмущений ограничен вторым нулем функции Бесселя. Здесь по-прежнему предполагалось, что возмущения размещены вдоль оси x периодически, а во времени — по закону случая согласно ранее описанной процедуре. Для следующего кольца функции Бесселя, где $a = 0.227$, модельные графики (в тех же предположениях) изображены на рис. 6д.

Сравнение рис. 6в и 6д (центральная часть, $a = 0.063$, и второе кольцо, $a = 0.227$, функции Бесселя) с данными эксперимента (рис. 6б) говорит о несоответствии выбранных параметров модели условиям развития плазменного канала. Значительно лучшее согласие демонстрируют графики на рис. 6г для первого кольца, $a = 0.145$. Характеристики процесса, обеспечивающие наибольшее соответствие расчетных и экспериментальных зависимостей, определялись методом перебора параметров модели. Для $a = 0.145$ варьировались число возмущений k , распределение p_x (включая смещение Q всей последовательности и диапазон разброса q), длительность периода зарождения τ_0 и вид функции $P(r/a)$.

Результаты расчетов показали, что точнее всего структура возмущений в канале описывается при следующих значениях варьируемых параметров: $k = 25$, $\tau_0 = 0.2$, $Q = 0.17$, $q = 0$, $P(r/a) = 1$. Согласно этим данным, возмущения возникают в пределах второго кольца функции Бесселя с радиусом 3 мкм, в течение времени, ограниченного интервалом $\tau = 0.2$, или примерно 50 пс. Они расположены регулярно с периодом 21 мкм, и разброс не превышает нескольких процентов.

Таким образом, сравнение модельных расчетов с данными измерений свидетельствует о правильном отражении моделью процессов, наблюдаемых в эксперименте, и подтверждает ее работоспособность. В то же время, применение модели позволило определить особенности образования плазменного канала в поле бесселева пучка, которые экспериментально измерить не представлялось возможным.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитые представления о природе турбулентности позволили сформулировать принципы моделирования турбулентного процесса, применимые для любой стадии его развития и разных начальных и

граничных условий. Созданы модели для плоского канала, ограниченного двумя стенками, и для трубы квадратного сечения, которые описывают распределение пульсаций гидродинамических параметров, а также пространственно-временные спектры Фурье этих пульсаций.

Плоский канал имеет простые граничные условия. Действительно, для него возмущение параметров в точке наблюдения можно представить как прохождение сферической поверхности через эту точку и ее зеркальные изображения в стенках канала. Сдвиг такой мнимой точки определяется только одной ее координатой, и при каждом отражении она меняется на двойную высоту канала, $2d$. Это простое правило легко распространить на трубу с плоскими гранями. Но при этом число мнимых точек, которое необходимо учесть, возрастет. Так, в трубе квадратного сечения число мнимых точек при каждом цикле отражений утроится, и их положение определится двумя координатами с периодом $2d$ (здесь d — сторона квадрата) в каждом направлении. На примере установившегося режима турбулентности в плоском канале показаны все существенные особенности явления и в то же время возможности предлагаемой концепции. Определены параметры, влияющие на структуру пульсаций и связанные с ними эффекты.

Проведено сравнение модельных расчетов с данными измерений структуры пульсаций параметров в плазменном канале, сформированном бесселевым пучком лазерного излучения. Сравнение свидетельствует о правильном отражении моделью процессов, наблюдаемых в эксперименте, и подтверждает ее работоспособность. Модель позволила не только описать механизм формирования и структуру возмущений в канале, но и сделать ряд выводов об особенностях взаимодействия бесселева пучка с веществом, которые другими методами определить пока не представляется возможным. Так, например, были найдены размер очагов пробоя газа в поле бесселева пуч-

ка, их расположение вдоль оси канала и период времени возникновения, который оказался короче длительности греющего импульса. Подчеркнем, что речь в данном случае идет о физических явлениях, развивающихся на микронных расстояниях и пикосекундных временах, для которых измерения представляют известные сложности.

Полученные в работе результаты показывают, что концепция турбулентности, основанная на суперпозиции акустических волн, позволяет рассчитать временные и пространственные характеристики турбулентного процесса, если заданы граничные и начальные условия. Так как в предлагаемой модели не вводятся никакие дополнительные ограничения, она может иметь достаточно широкое применение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Lorentz, *Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen und über den Einfluß dieser Bewegungen bei der Strömung durch Röhren*, Abh. Theor. Physik, Teubner, Leipzig (1907), s. 43.
2. Л. Н. Пятницкий, ЖЭТФ **113**, 191 (1998).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988), с. 125.
4. Н. Е. Андреев, Ю. А. Аристов, Л. Я. Полонский, Л. Н. Пятницкий, ЖЭТФ **100**, 1756 (1991); Н. Е. Андреев, Л. Я. Марголин, И. В. Плешанов, Л. Н. Пятницкий, ЖЭТФ **105**, 1232 (1994).
5. T. R. Clark and H. M. Milchberg, Phys. Rev. E **57**, 3417 (1998); J. Fan, T. R. Clark, and H. M. Milchberg, Appl. Phys. Lett. **73**, 3064 (1998).
6. Х. Хора, *Физика лазерной плазмы* Энергоатомиздат, Москва (1986).
7. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Физматгиз, Москва (1963).