

СООТНОШЕНИЯ ДУАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОТЕКАНИЯ: ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*В. Е. Архинчев**, *Б. А. Гармаев*

*Бурятский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук
670047, Улан-Удэ, Россия*

Поступила в редакцию 26 сентября 2000 г.

Исследована задача нелинейного протекания тока в гетерофазной среде, состоящей из случайной смеси линейной и нелинейной фаз. Выведено соотношение дуальности для критических индексов, описывающих эффективный отклик неоднородной системы. Вычислен критический индекс на пороге протекания (при равных концентрациях фаз). Проведено численное моделирование задачи нелинейного протекания при степенях нелинейной фазы $k = 3, 5, 7$ и установлено существование соотношения дуальности для критических индексов в широком интервале концентраций фаз.

PACS: 72.20.Ht, 72.80.Ng

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача нахождения эффективной проводимости макроскопически неоднородных двухфазных сред в линейном омическом приближении наиболее исследована в двумерном случае. Было показано, что при равных концентрациях фаз эффективная проводимость случайно-неоднородных двухфазных сред равна среднему геометрическому проводимостей фаз:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (1)$$

а при произвольных концентрациях фаз имеет место соотношение дуальности

$$\sigma_e(\varepsilon)\sigma_e(-\varepsilon) = \sigma_1\sigma_2. \quad (2)$$

Эти результаты были получены в работах [1, 2] и, как было показано в [2], являются следствием симметрии двумерных уравнений для постоянного тока относительно линейных преобразований поворота.

Однако в критической области вблизи перехода металл–диэлектрик из-за аномально больших флуктуаций полей и токов существенными становятся нелинейные эффекты. Необходимость учета нелинейных эффектов в критической области показана в работах [3–5], где было обнаружено аномальное поведение критических полей (токов) как функция близости к порогу протекания. Кроме того, из высших

корреляторов полей (токов) можно получить дополнительную информацию о микроструктуре гетерогенных сред [6].

В приближении слабой нелинейности задача сводится к учету кубического члена в разложении тока по полю:

$$\mathbf{j} = \sigma_e \mathbf{e} + \chi e^2 \mathbf{e}. \quad (3)$$

Нелинейные эффекты становятся существенными, когда оба слагаемых станут величинами одного порядка [7–9]. Коэффициент эффективной нелинейности χ определяется из выражения для диссипации энергии и равен

$$\chi_e = \frac{\langle \chi e^4 \rangle}{E^4} = \frac{\chi_1 \langle e^4 \rangle_1 + \chi_2 \langle e^4 \rangle_2}{2E^4}. \quad (4)$$

Из этого выражения также следует, что причиной роста эффективной нелинейности структуры являются особенности корреляторов полей $\langle e^4 \rangle_1$ и $\langle e^4 \rangle_2$. Аномальный рост нелинейной проводимости означает, что система переходит в нелинейный режим протекания. Это происходит при критических полях

$$E_c = \sqrt{\sigma_e / \chi_e} \quad (5)$$

и критических токах

$$\mathbf{J}_c = \sigma_e \mathbf{E}_c. \quad (6)$$

Значительное количество работ посвящено изучению свойств коэффициента нелинейности как в критической области, так и вне ее [10, 11].

*E-mail: varkhin@bsc.buryatia.ru

В настоящей работе мы изучим задачу нелинейного протекания в следующей постановке. Пусть имеется случайная смесь двух фаз: линейной омической $j_1 = \sigma_1 e$ и нелинейной кубической $j_2 = \chi_2 e^3$. Нас будет интересовать эффективный отклик такой системы на пороге протекания,

$$J \propto E^\nu, \quad (7)$$

и значение индекса ν , описывающего нелинейный отклик системы.

Для решения этой задачи обобщим линейные преобразования поворота на нелинейный случай и применим эти обобщенные преобразования для определения нелинейного отклика. В результате будут получены соотношения дуальности для критических индексов задачи нелинейного протекания ν_+ и ν_- , описывающих отклик системы выше и ниже порога протекания:

$$\nu_+ \nu_- = k. \quad (8)$$

Здесь $k = 3, 5, 7, \dots$ — степень нелинейности фазы.

Во второй части статьи представлены результаты численного моделирования нелинейного протекания при различных значениях проводимостей фаз и в широком интервале концентраций. Путем численного моделирования установлено существование соотношения дуальности для критических индексов задачи нелинейного протекания (8) в случайно-неоднородных средах.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОВОРОТА И ОБОБЩЕНИЕ НА НЕЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ

Напомним коротко основные рассуждения, которые использовались для решения задачи об эффективных характеристиках случайно-неоднородной среды. Уравнения постоянного тока и закон Ома (линейная связь между током и полем),

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}, \quad (9)$$

в двумерном случае инвариантны относительно линейных преобразований поворота:

$$\mathbf{j} = b[\mathbf{n} \times \mathbf{e}'], \quad \mathbf{e} = d[\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{e}}']. \quad (10)$$

Здесь \mathbf{n} — единичная нормаль к плоскости, \mathbf{j}' , \mathbf{e}' — электрические ток и поле в новой штрихованной системе; b , d — постоянные коэффициенты. В штрихованной системе также будет иметь место закон Ома

$$\mathbf{j}' = \sigma' \mathbf{e}', \quad (11)$$

где $\sigma' = b/d\sigma$ — проводимость преобразованной среды. При соответствующем подборе коэффициентов,

$$b = \frac{1}{d} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (12)$$

получим систему, отличающуюся от исходной перестановкой фаз

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma}. \quad (13)$$

Такая система называется дуальной по отношению к исходной. Повторив те же рассуждения для усредненных величин, получим аналогичное соотношение и для эффективных характеристик двухфазной среды:

$$\sigma'_e(\varepsilon) \sigma_e(\varepsilon) = \sigma_1 \sigma_2. \quad (14)$$

Поскольку исходная и штрихованная системы отличаются друг от друга только перестановкой фаз, имеем

$$\sigma'_e(\varepsilon) = \sigma_e(-\varepsilon). \quad (15)$$

Следовательно, эффективная проводимость двумерной случайно-неоднородной двухфазной среды удовлетворяет соотношению дуальности (2). Отсюда эффективная проводимость на пороге протекания ($\varepsilon = 0$) равна

$$\sigma_e(0) = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (16)$$

Это соотношение дуальности оказывается полезным и при получении приближенных выражений для эффективной проводимости. Например, часто используемые выражения для эффективной проводимости двухфазных сред при малой концентрации включений легко получаются из этого соотношения. Оно также позволяет найти проводимость системы во всем интервале концентраций, если известна зависимость σ_e выше порога протекания или ниже. Кроме того, соотношение дуальности позволяет установить и общий вид эффективной проводимости (структурную зависимость):

$$\sigma_e(\varepsilon) = \chi(\varepsilon) + \sqrt{\chi(\varepsilon)^2 + \sigma_1 \sigma_2}. \quad (17)$$

Здесь $2\chi(\varepsilon) = \sigma_e(\varepsilon) - \sigma_e(-\varepsilon)$ — нечетная часть эффективной проводимости относительно переменной ε . Она описывается функциональным уравнением:

$$\chi\left(\varepsilon, \frac{1}{h}\right) = h\chi(\varepsilon, h), \quad (18)$$

где $h = \sigma_2/\sigma_1$ — отношение проводимостей фаз.

Отметим, что формула (16) справедлива как для случайно-неоднородных сред с изотропной структурой, так и для двоякопериодических сред [12, 13]. Недавно эта формула была заново получена для сред с шахматной структурой иным способом [14].

Ниже преобразования поворота будут обобщены на нелинейный случай. Вначале для определенности рассмотрим кубическую нелинейность. Будем искать обобщенные нелинейные преобразования в виде

$$\mathbf{j} = b[\mathbf{n} \times \mathbf{e}']e'^2, \quad \mathbf{e} = d[\mathbf{n} \times \mathbf{j}']. \quad (19)$$

Нетрудно убедиться, что эти преобразования переводят линейную фазу с проводимостью σ в нелинейную: $j' = \chi'e'^3$. Здесь коэффициент χ' равен

$$\chi'_1 = \frac{b}{d\sigma_1}. \quad (20)$$

Теперь проверим, что эти же преобразования переводят нелинейную фазу в линейную. При этом проводимость преобразованной линейной фазы равна

$$\sigma'_2 = \frac{b^{1/3}}{d\chi_2^{1/3}}. \quad (21)$$

Таким образом, предложенные обобщенные нелинейные преобразования позволяют устанавливать взаимно однозначное соответствие (изоморфизм) между нелинейными и линейными фазами. Усредняя преобразования (19) по случайному расположению фаз, получим для усредненных характеристик исходной и штрихованной систем следующие соотношения:

$$J = \langle j \rangle = AE'^3, \quad E = \langle e \rangle = BJ', \quad (22)$$

A и B — постоянные коэффициенты. Далее предположим, что средние токи в исходной и преобразованной системах зависят от поля нелинейным степенным образом:

$$J \propto E^{\nu_+}, \quad J' \propto E'^{\nu_-}. \quad (23)$$

Из формул (22) и (23) легко установить соотношение между критическими индексами, описывающими отклик системы выше и ниже порога протекания:

$$\nu_+\nu_- = 3. \quad (24)$$

Полученное соотношение (24) имеет простой смысл. Вдали от порога протекания, когда возможно протекание только по линейной фазе, эффективный отклик будет линейным — индекс $\nu_+ = 1$. При этом эффективный отклик дуальной (отличающейся от исходной перестановкой фаз) штрихованной системы вдали от порога протекания с образованием бесконечного кластера из нелинейной фазы будет нелинейным. Индекс нелинейности равен индексу нелинейной фазы: $\nu_- = 3$.

На пороге протекания (при равных концентрациях фаз), когда для протекания тока необходимо задействовать обе фазы, и при условии макроскопической эквивалентности исходной и штрихованной систем из соотношения (24) следует точное выражение для индекса нелинейности на пороге протекания. Он зависит от исходной нелинейности корневым образом:

$$\nu_0 = \sqrt{3}. \quad (25)$$

Условие макроскопической эквивалентности исходной и штрихованной систем является важным для получения результата (25), поэтому обсудим это подробнее. В общем случае, как следует из (19), штрихованная система оказывается микроскопически не эквивалентной исходной, поскольку локальное поле оказывается непотенциальным:

$$\text{div } \mathbf{j} = b\mathbf{n}[\mathbf{e}'^2 \text{rot } \mathbf{e}' - \mathbf{e}' \cdot \nabla(\mathbf{e}'^2)] = 0. \quad (26)$$

Таким образом, чтобы получить потенциальность преобразованного локального электрического поля, надо наложить дополнительное условие аксиальной симметрии для случайно-неоднородных сред. В этом случае локальные двумерные поля будут направлены по радиусу и, естественно, условие потенциальности полей будет выполнено. (В качестве примера можно рассмотреть цилиндрический конденсатор, заполненный случайной смесью линейной и нелинейной фаз, и изучать эффективный отклик такой системы.)

В общем случае степенной нелинейности надо использовать обобщенные преобразования:

$$\mathbf{j} = [\mathbf{n} \times \mathbf{e}'^k], \quad \mathbf{e} = [\mathbf{n} \times \mathbf{j}']. \quad (27)$$

Тогда, повторяя вышеизложенные рассуждения, получим соотношение (8) для критических индексов вида (24) при произвольной степенной нелинейности

$$\nu_+\nu_- = k. \quad (28)$$

На пороге протекания и при макроскопической эквивалентности исходной и штрихованной систем индекс нелинейного отклика для общего случая степенной нелинейности равен

$$\nu_0 = \sqrt{k}. \quad (29)$$

Отметим, что, строго говоря, полученные соотношения (24) и (28) справедливы только для ограниченного класса систем с аксиальной симметрией. Ниже мы проверим применимость полученного соотношения дуальности вне рамок этих ограничений путем численного моделирования и тем самым расширим область использования полученных результатов.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Опишем кратко алгоритм моделирования. В качестве исходной модели рассматривалась квадратная решетка проводящих связей. Значения проводимостей связей выбирались случайным образом: с вероятностью p связь обладает проводимостью σ_1 и с вероятностью $1 - p$ — проводимостью σ_2 . (В пределе $\sigma_2 \rightarrow 0$ эта задача переходит в известную задачу связей теории протекания [15, 16].) Далее вычислялись значения токов I и потенциалов U в такой среде. Распределения токов и потенциалов в проводящей среде описываются законами Кирхгофа:

$$\sum_i J_i = 0, \quad \sum_i J_i R_i + \sum U_i = 0. \quad (30)$$

С помощью программы моделирования изучалось протекание тока по диагонали: из левого верхнего угла в правый нижний. В исходной точке задавался ток, затем в зависимости от соотношения проводимостей фаз ток делился на части. Величина тока, пришедшая в следующий узел, также делилась и т. д. Операция повторялась до тех пор, пока хорошо проводящие пути не начинали сходиться к противоположному узлу (стоку) и, соответственно, токи начинали складываться. Распределение потенциалов в узлах решетки находится из второго закона Кирхгофа с учетом величины тока и проводимости связей, т. е. с учетом падения потенциала на каждой связи.

Эффективная проводимость определяется как коэффициент пропорциональности между средним током и полем:

$$\sigma_e = \langle J \rangle / \langle E \rangle.$$

В качестве проверки корректной работы программы была вычислена эффективная проводимость двухфазной среды на пороге протекания. Результаты моделирования с хорошей степенью точности совпадают с точным решением задачи.

При нелинейном протекании в нашей постановке задачи одна фаза является линейной омической, а другая — нелинейной: $j = \chi e^k$, $k = 3, 5, 7, 9$. Как описано выше, вначале генерировалась случайная среда, состоящая из смеси линейной и нелинейной фаз, затем вычислялся ток в системе и находилось падение потенциала по линейной или нелинейной формуле в зависимости от свойств проводящих фаз. Далее проводилось усреднение по большому числу конфигураций (порядка 1000), чтобы найти эффективные характеристики системы. Результаты моделирования представлены графически. На рис. 1 приведены значения критических индексов выше и ниже

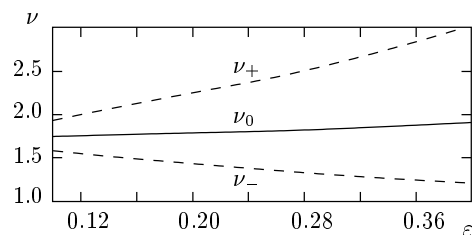


Рис. 1. Зависимость критических индексов от концентрации фазы с кубической нелинейностью ($k = 3$)

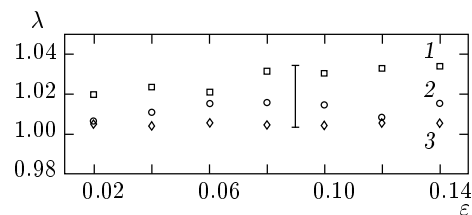


Рис. 2. Значение параметра $\lambda = \nu_+ \nu_- / \nu_0^2$ вблизи порога протекания при различных степенях нелинейности k : 1 — $k = 3$, 2 — $k = 5$, 3 — $k = 7$

порога протекания и их произведения (значение на пороге протекания) для случая кубической нелинейности, аналогичные результаты получаются и для других степеней нелинейности. На рис. 2 представлены значения произведения критических индексов при различных степенях нелинейности и вблизи порога протекания. Видно хорошее согласие результатов численного моделирования и развитой выше теории, основанной на нелинейных преобразованиях поворота.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсудим полученные результаты. Проведено обобщение линейных преобразований на случай нелинейных сред. С помощью обобщенных нелинейных преобразований установлено взаимно однозначное соответствие (изоморфизм) между линейными омическими и нелинейными фазами. Для случайной смеси линейной и нелинейной (с произвольной степенной нелинейностью) фаз при произвольных концентрациях фаз получено соотношение для критических индексов, описывающих эффективный отклик изучаемой системы выше и ниже порога протекания, — соотношение (28). В линейном приближении задача о протекании тока сводится к определению эффективной про-

водимости неоднородной среды. Соответственно, соотношение между индексами (28) переходит в известное соотношение дуальности для эффективной проводимости случайно-неоднородных сред. На пороге протекания, а также когда исходная и штрихованная системы макроскопически эквивалентны, из этого соотношения в линейном приближении следует точное выражение для эффективной проводимости на пороге протекания — корневая зависимость от проводимостей фаз. В нашем случае получается точное выражение для критического индекса нелинейности на пороге протекания. Он зависит от исходной нелинейности также корневым способом — формула (29).

Кроме того, можно убедиться в том, что хотя локальное поле в штрихованной системе после преобразований (19) непотенциально, усредненное электрическое поле будет потенциально. Для этого усредним уравнение (26) по пространству. Второй член в сумме после усреднения по пространству будет обращаться в нуль как проекция двумерного вектора в плоскости на направление электрического поля. Поэтому усредненное электрическое поле оказывается потенциальным. Следовательно, на пороге протекания исходная и штрихованная системы оказываются макроскопически эквивалентными, поэтому можно найти эффективный отклик системы на внешнее электрическое поле к определенной степени нелинейности на пороге протекания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-02-17355).

Один из авторов (В. Е. А.) выражает благодарность за обсуждение результатов Э. Г. Батыеву, Э. М. Баскину, А. О. Говорову, С. К. Саввиных, А. В. Чаплику, М. В. Энтину, а также Ю. Н. Овчинникову за отписки работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. V. Keller, J. Math. Phys. **5**, 548 (1964).
2. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110, 641 (1970).
3. D. Stroud and P. M. Hui, Phys. Rev. B **37**, 8719 (1988).
4. D. J. Bergman, Phys. Rev. B **39**, 4598 (1988).
5. А. М. Дыхне, В. В. Зосимов, С. А. Рыбак, ДАН **345**, 467 (1995).
6. А. А. Снарский, Письма в ЖТФ **21**, 3 (1995).
7. Y. Gefen, W. H. Shin, R. B. Laibowitz, and J. M. Viggano, Phys. Rev. Lett. **57**, 3097 (1986).
8. R. K. Chakrabarty, K. Bardan, and A. Basu, Phys. Rev. B **44**, 6773 (1991).
9. M. A. Dubson, Y. C. Hui, M. B. Weisman, and J. C. Garland, Phys. Rev. B **39**, 6807 (1989).
10. А. М. Сатанин, В. В. Скузоваткин, С. В. Хорьков, Письма в ЖЭТФ **65**, 521 (1997).
11. А. М. Сатанин, А. А. Снарский, К. В. Слипченко, И. В. Безсуднов, ЖТФ **68**(5), 132 (1998).
12. Ю. П. Емец, *Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой*, Наукова думка, Киев (1986).
13. Ю. П. Емец, ЖЭТФ **96**, 701 (1989).
14. Ю. Н. Овчинников, А. М. Дюгаев, ЖЭТФ **117**, 162 (2000).
15. B. I. Shklovskii and A. L. Efros, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).
16. D. Stauffer, Phys. Rep. **54**, 1 (1979).