

# ВЕКТОРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В КУБИЧЕСКИХ ФОТОРЕФРАКТИВНЫХ КРИСТАЛЛАХ

*Б. И. Стурман*<sup>\*</sup>, *Е. В. Подвилов*, *В. П. Каменев*

*Международный институт нелинейных исследований, Сибирское отделение  
630090, Новосибирск, Россия*

*Е. Нипполайнен*<sup>\*\*</sup>, *А. А. Камшилин*<sup>\*\*\*</sup>

*Department of Physics of the University  
P.O. Box 111, Joensuu, Finland*

Поступила в редакцию 11 января 2000 г.

Предложена аналитическая теория вырожденного по поляризации взаимодействия световых волн в кубических фоторефрактивных кристаллах групп  $23$  и  $\bar{4}3m$ . Теория основана на систематическом использовании свойств пространственной симметрии и аппарата  $\sigma$ -матриц. Она дает унифицированное описание поляризационных и ориентационных свойств взаимодействия, включая в себя АС- и ДС-методы усиления нелинейного отклика, влияние оптической активности, эластооптического эффекта и пространственной неоднородности. Даны приложения теории к исследованию фоторефрактивных кристаллов  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  и  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  и получено хорошее согласие с экспериментом.

PACS: 42.65.-k, 42.70.-a, 72.40.+w

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие световых волн за счет фоторефрактивной нелинейности было предметом многих теоретических и экспериментальных исследований [1–3]. Обычно наиболее сильное фоторефрактивное взаимодействие имеет место в сегнетоэлектрических кристаллах ( $\text{LiNbO}_3$ ,  $\text{BaTiO}_3$ ,  $\text{SBN}$  и др.), которые существенно анизотропны. Соответственно, волновые поверхности для двух оптических собственных мод (часто обыкновенной и необыкновенной волн) хорошо разделены в  $\mathbf{k}$ -пространстве. Это позволяет описывать нелинейное взаимодействие в сегнетоэлектриках уравнениями для скалярных амплитуд и говорить о скалярном взаимодействии волн.

Ситуация кардинально меняется в изотропных фоторефрактивных средах, из которых в первую очередь следует отметить кубические кристал-

лы семейства силленитов,  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ ,  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  и  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ , а также полупроводниковые кубические кристаллы, такие как  $\text{GaAs}$  и  $\text{CdTe}$ . В этих средах расстояние между волновыми поверхностями (даже в присутствии внешнего электрического поля) значительно меньше, чем в сегнетоэлектриках, и введение скалярных амплитуд волн часто не имеет физического смысла. Вместо скалярного взаимодействия волн необходимо рассматривать векторное взаимодействие, в котором изменения энергии и поляризации волн неразделимы.

Начально проблема описания векторного взаимодействия казалась малоактуальной из-за слабости фоторефрактивной нелинейности кубических кристаллов. Исследования, однако, показали [2–5], что эта нелинейность может быть значительно усилена с помощью знакопеременного электрического поля (АС-метод) или небольших частотных расстройек между волнами в присутствии постоянного поля (ДС-метод). В настоящее время коэффициенты усиления в кубических фоторефрактивных кристаллах достигают значений порядка  $10^2 \text{ см}^{-1}$ , что не уступает типичным для сегнетоэлектриков величинам.

<sup>\*</sup>E-mail: sturman@iae.nsk.su

<sup>\*\*</sup>E. Nippolainen.

<sup>\*\*\*</sup>E-mail: kamshilin@ns.joensuu.fi

Усиленная фоторефрактивная нелинейность кубических кристаллов уже проявила себя в ряде ярких оптических эффектов: фазовое сопряжение, оптическая генерация, формирование поверхностных световых волн, нелинейное рассеяние и др. [6–9].

Важным достоинством кубических кристаллов является быстрота их фоторефрактивного отклика [2, 3]. Время реакции при непрерывном освещении обычно не превышает  $10^{-2}$  с, что по крайней мере на два порядка меньше, чем в сегнетоэлектриках. Быстрота фоторефрактивного отклика в сочетании с возможностями его усиления делают кубические кристаллы привлекательными для многих приложений.

Благодаря многолетним исследованиям стали понятными основные элементы, которые должны быть включены в теорию векторного взаимодействия в кубических кристаллах. Помимо отмеченного усиления нелинейного отклика, эти элементы следующие.

1) Так называемые эластооптические вклады в нелинейные изменения оптической проницаемости должны быть учтены наряду с традиционными для фоторефракции электрооптическими вкладами [10–14].

2) Влияние оптической активности для кристаллов группы  $\bar{4}3m$  (силленитов).

3) Разнообразные оптические конфигурации, различающиеся ориентацией внешнего электрического поля и волновых векторов относительно кристаллографических осей.

4) Свобода выбора входных поляризаций световых пучков.

Несмотря на ясность в отношении отдельных аспектов описания векторного взаимодействия, его последовательная теория отсутствует. Ряд моделей, игнорирующих поляризационную степень свободы [15, 16] или апеллирующих к нелинейно-тонким кристаллам [17–19], не удовлетворяют потребности эксперимента. Это же справедливо в отношении численного моделирования [7, 20–22]. Наличие многих варьируемых параметров (разных по физическому смыслу) не оставляет шанса перебрать актуальные варианты и получить сколько-нибудь полное представление о свойствах взаимодействия. Кроме того, численные методы обычно невосприимчивы к наличию малых параметров теории.

Настоящая работа является попыткой объединить указанные выше фрагменты в последовательную аналитическую теорию векторного взаимодействия и применить ее к наиболее актуальным АС- и ДС-методам усиления фоторефрактивного отклика. Полученные ниже соотношения отличаются ком-

пактностью и высокой степенью общности. Это достигнуто использованием свойств пространственной симметрии, применением аппарата  $\sigma$ -матриц и минимизацией числа независимых параметров. Уравнения теории удобны для введения различных приближений и рассмотрения частных случаев.

Структура работы следующая. В разд. 2 мы вводим основные соотношения для оптической проницаемости кубических кристаллов, включающие линейные и нелинейные члены. Здесь же выведены уравнения для векторных амплитуд световых волн (описывающие их распространение и дифракцию на светоиндуцированной решетке пространственного заряда) и рассмотрены их простейшие свойства. Полученные уравнения содержат минимум параметров совместимых со свойствами симметрии. Далее мы специфицируем введенные параметры для двух базисных оптических конфигураций, указываем эквивалентные конфигурации и рассматриваем важные частные случаи. Приведенная информация достаточна для описания всех актуальных конфигураций.

В разд. 3 мы выводим соотношения для фоторефрактивного нелинейного отклика применительно к АС- и ДС-методам усиления. Эти соотношения выражают амплитуду поля пространственного заряда через световые амплитуды и замыкают систему нелинейных уравнений для волн. Здесь же обсуждается область применимости материальных соотношений и физический смысл входящих в них параметров.

Раздел 4 посвящен анализу взаимодействия двух световых волн в кубических фоторефрактивных кристаллах. Вначале, чтобы предельно упростить нелинейную систему, мы переходим (по аналогии с квантовой механикой) к представлению взаимодействия. Затем мы рассматриваем АС-усиление слабой волны в присутствии сильной, используя приближение заданной накачки, которое далеко не тривиально в векторном случае. Далее мы анализируем особенности пространственного усиления для ДС-случая, которые связаны с сильным влиянием линейного поглощения.

В разд. 5 даны примеры приложений теории к исследованию угловых и поляризационных свойств пространственного усиления в кристаллах семейства силленитов. Здесь же приведены оригинальные экспериментальные результаты для кристаллов  $\text{Vt}_{12}\text{TiO}_{20}$  и литературные данные, демонстрирующие согласие между наблюдениями и теорией.

Обсуждению полученных результатов и выводам посвящен разд. 6.

## 2. БАЗИСНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть две световые волны с волновыми векторами  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  распространяются в кубическом фоторефрактивном кристалле вблизи оси  $z$  лабораторной системы координат. Световое электрическое поле  $\mathcal{E}$  представим в виде

$$\mathcal{E} = (\mathbf{A}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\Omega t} + \mathbf{A}_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}) e^{-i\omega t} + \text{с.с.}, \quad (1)$$

где  $\Omega$  — малая ( $\lesssim 10^2 \text{ с}^{-1}$ ) частотная расстройка. Интенсивность света промодулирована с пространственной частотой  $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  (вектор решетки). Диффузия фотовозбужденных носителей заряда и их дрейф в приложенном поле  $\mathbf{E}_0$  формируют решетку поля пространственного заряда  $\mathbf{E}_{sc}(\mathbf{r})$  с периодом  $\Lambda = 2\pi/K$ . Поле  $\mathbf{E}_{sc}$  параллельно  $\mathbf{K}$ , а его величина определяется контрастом интерференционной картины  $m = 2(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2^*) / (|\mathbf{A}_1|^2 + |\mathbf{A}_2|^2)$ . В линейном по  $m$  приближении имеем

$$\mathbf{E}_{sc} = n E_{\mathbf{K}} e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \Omega t)} + \text{с.с.}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{K}/K$  — единичный вектор решетки, а  $E_{\mathbf{K}} \propto m$  — ее амплитуда. Поле  $\mathbf{E}_{sc}(\mathbf{r})$  модулирует тензор оптической проницаемости  $\hat{\epsilon}$  и приводит тем самым к нелинейным оптическим эффектам.

В кубических кристаллах групп  $23$  и  $\bar{4}3m$  проницаемость  $\hat{\epsilon}$  для волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$  может быть представлена в виде [23, 24]

$$\epsilon_{ij} = n_0^2 (1 + i\alpha k^{-1}) \delta_{ij} + 2i\rho n_0^2 k^{-2} \delta_{ijl} k_l + \delta\epsilon_{ij}(\mathbf{E}_0) + \delta\epsilon_{ij}(\mathbf{E}_{sc}), \quad (3)$$

где  $n_0$  — показатель преломления,  $\alpha$  — коэффициент поглощения,  $\rho$  — коэффициент оптической активности,  $\delta_{ijl}$  — антисимметричный изотропный тензор. Вклады  $\delta\epsilon_{ij}(\mathbf{E}_0)$  и  $\delta\epsilon_{ij}(\mathbf{E}_{sc})$  описывают изменения проницаемости, наводимые однородным полем  $\mathbf{E}_0$  и пространственно осциллирующим полем  $\mathbf{E}_{sc}$ . Вводя скалярные амплитуды полей,  $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{n}^0$ ,  $\mathbf{E}_{sc} = E_{sc} \mathbf{n}$ , эти вклады удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_{ij}(\mathbf{E}_0) &= -n_0^4 r_{41} E_0 H_{ij}^{(0)}, \\ \delta\epsilon_{ij}(\mathbf{E}_{sc}) &= -n_0^4 r_{41} E_{sc} H_{ij}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $r_{41}$  — независимая компонента электрооптического тензора  $r_{ijl}$ . Элементы безразмерной действительной симметричной матрицы  $H_{ij}^{(0)} = r_{ijl} n_l^0 / r_{41}$  зависят от направления единичного вектора  $\mathbf{n}^0$ . Их можно найти, используя тот факт [23, 24], что в кристаллографической системе координат  $r_{ijl} = r_{41} |\delta_{ijl}|$ .

Элементы безразмерной действительной матрицы  $\hat{H}$  зависят от ориентации единичного вектора решетки  $\mathbf{n}$ . Если учесть лишь очевидный электрооптический вклад в  $\delta\hat{\epsilon}(\mathbf{E}_{sc})$ , то  $\hat{H}(\mathbf{n}) = \hat{H}^{(0)}(\mathbf{n})$ . Влияние эластооптического эффекта делает зависимость  $\hat{H}(\mathbf{n})$  более сложной [11, 12, 14]. В некоторых случаях (см. ниже) эластооптический вклад в  $\hat{H}$  сопоставим с электрооптическим.

Ниже мы ограничимся обычным параксиальным приближением, считая малыми углы между  $\mathbf{k}_{1,2}$  и осью  $z$ . Соответственно, амплитуды волн  $\mathbf{A}_{1,2}$  и векторы  $\mathbf{n}^0, \mathbf{n}$  имеют лишь  $x, y$ -компоненты. Из уравнений Максвелла и выражений (1)–(4) нетрудно получить укороченные уравнения для  $\mathbf{A}_{1,2}$ , описывающие дифракцию волн 1, 2 на полевой решетке:

$$\begin{aligned} (\partial_z + 0.5\alpha - i\hat{G}) \mathbf{A}_1 &= i E_{\mathbf{K}} \hat{V} \mathbf{A}_2, \\ (\partial_z + 0.5\alpha - i\hat{G}) \mathbf{A}_2 &= i E_{\mathbf{K}}^* \hat{V} \mathbf{A}_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Эрмитова  $2 \times 2$ -матрица  $\hat{G}$  описывает линейные оптические свойства среды, а вещественная симметричная  $2 \times 2$ -матрица взаимодействия  $\hat{V}$  отвечает за связь световых волн. Матричные элементы  $G_{ij}$  и  $V_{ij}$  задаются соотношениями

$$\begin{aligned} G_{ij} &= s E_0 H_{ij}^{(0)} + i\rho \delta_{ijz}, \quad V_{ij} = s H_{ij}, \\ s &= -\pi n_0^3 r_{41} / \lambda, \end{aligned} \quad (6)$$

в которых выделены размерные коэффициенты  $\rho$  и  $s E_0$ . Индексы  $i, j$  пробегает значения  $x$  и  $y$ , а  $\lambda$  есть длина волны света. Согласно (5), дифракция приводит лишь к перераспределению энергии волн 1 и 2, их суммарная интенсивность  $I_0$  пропорциональна  $\exp(-\alpha z)$ .

Формулировка теории и операции с двумерными векторами и матрицами сильно упрощаются при использовании аппарата матриц Паули ( $\sigma$ -матриц), широко используемого в квантовой механике [25, 26] и оптике. Три эрмитовы  $\sigma$ -матрицы,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\sigma}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\sigma}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

рассматриваются как компоненты векторной матрицы  $\hat{\sigma}$ . При этом  $\sigma$ -матрицы обладают рядом замечательных свойств [25, 26], позволяющих сводить громоздкие вычисления с двумерными векторами к простым алгебраическим операциям.

Матрицы  $\hat{G}$  и  $\hat{V}$  линейно выражаются через  $\hat{\sigma}$  и единичную матрицу  $\hat{1}$ :

$$\hat{G} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\sigma}, \quad \hat{V} = \nu_0 \hat{1} + \boldsymbol{\nu} \cdot \hat{\sigma}. \quad (8)$$

Скаляр  $\nu_0$  и трехмерные векторы  $\boldsymbol{\kappa}$  и  $\boldsymbol{\nu}$  (все действительны) задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \nu_0 &= 0.5s(H_{xx} + H_{yy}), & \nu_1 &= sH_{xy}, & \nu_2 &= 0, \\ \nu_3 &= 0.5s(H_{xx} - H_{yy}), & \kappa_1 &= sE_0H_{xy}^{(0)}, & & (9) \\ \kappa_2 &= -\rho, & \kappa_3 &= 0.5sE_0(H_{xx}^{(0)} - H_{yy}^{(0)}). \end{aligned}$$

Соответственно, система (5) приобретает канонический вид:

$$\begin{aligned} (\partial_z + 0.5\alpha - i\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\mathbf{A}_1 &= iE_{\mathbf{K}}(\nu_0\hat{1} + \boldsymbol{\nu} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\mathbf{A}_2, \\ (\partial_z + 0.5\alpha - i\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\mathbf{A}_2 &= iE_{\mathbf{K}}^*(\nu_0\hat{1} + \boldsymbol{\nu} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\mathbf{A}_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Вектор  $\boldsymbol{\kappa}$  характеризует линейные оптические свойства среды. Компоненты  $\kappa_{1,3}$  описывают анизотропию, наведенную внешним полем, а компонента  $\kappa_2$  — оптическую активность. Величины  $\nu_0$  и  $\boldsymbol{\nu}$  определяют нелинейную связь волн. Присутствие скаляра  $\nu_0$  означает, что матрица взаимодействия  $\hat{V}$  имеет изотропную часть, не затрагивающую поляризационные свойства волн. Матрица  $\boldsymbol{\nu} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$  отвечает анизотропной части взаимодействия. Если  $\nu \equiv |\boldsymbol{\nu}| \ll \nu_0$ , то описание нелинейного взаимодействия сильно упрощается.

Строго говоря, матрица  $\hat{G}$  имеет (как и  $\hat{V}$ ) изотропную часть. Эта часть приводит лишь к тривиальному набегу фаз, одинаковому для волн 1 и 2, она опущена в (10).

Подчеркнем различие между векторами  $\mathbf{A}_{1,2}$  (с  $x$ -,  $y$ -компонентами) и векторами, действующими в конфигурационном трехмерном пространстве, такими как  $\boldsymbol{\kappa}$  и  $\boldsymbol{\nu}$ . Компоненты последних отмечаются индексами 1, 2, 3.

Используем вначале уравнения (10) для нахождения необходимой информации о собственных оптических модах в отсутствие взаимодействия, т. е. при  $E_{\mathbf{K}} = 0$ . Полагая  $\mathbf{A}_{1,2} \propto \exp(-0.5\alpha z + i\delta k z)$ , приходим к задаче на собственные значения для поправки  $\delta k$  к длине волнового вектора:

$$(\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\mathbf{A}^{\pm} = \delta k \mathbf{A}^{\pm}. \quad (11)$$

Эрмитов оператор  $\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$  имеет два действительных собственных значения,  $\delta k_{\pm} = \pm \kappa$ , т. е. расстояние между волновыми поверхностями есть  $2\kappa$ . Оно определяется оптической активностью и наведенным двупреломлением. Единичные векторы поляризации  $\mathbf{e}^{\pm} = \mathbf{A}^{\pm}/|\mathbf{A}^{\pm}|$ , отвечающие собственным значениям  $\delta k_{\pm}$ , задаются соотношением

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa \pm \kappa_3} \\ \pm \frac{\kappa_1 + i\kappa_2}{\sqrt{\kappa \pm \kappa_3}} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Естественно, что они ортогональны,  $\mathbf{e}_{+}^* \cdot \mathbf{e}_{-} = 0$ . В общем случае собственные моды поляризованы эллиптически. Ориентация главных осей эллипса поляризации зависит от выбора оптической конфигурации (см. ниже), а его эксцентриситет — от соотношения между  $|sE_0|$  и  $|\rho|$ . Если  $|E_0| \ll |\rho/s|$ , то поляризация близка к круговой, в обратном пределе она почти линейна. Из табл. 1 следует, что для  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  значение  $|\rho/s| \approx 2.8$  кВ/см. Это существенно меньше типичных для эксперимента полей. Иными словами, оптическая активность  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  легко подавляется внешним полем. Наоборот, в экспериментах с  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  поле  $E_0$  редко превышает значение  $|\rho/s| \approx 14$  кВ/см.

Если входная амплитуда  $\mathbf{A}(0)$  действительна, т. е. падающая волна линейно поляризована, то  $\mathbf{A}(-E_0, z) = \mathbf{A}^*(E_0, z)$ . Это означает, что изменение знака  $E_0$  приводит к изменению направления вращения поляризации в каждой точке кристалла.

Введенное нами  $\sigma$ -представление легко позволяет получить общее решение задачи о брэгговской векторной дифракции на решетке постоянной амплитуды. Запись такой решетки может осуществляться невзаимодействующими волнами. Представляя в (10) амплитуду решетки в виде  $E_{\mathbf{K}} = |E_{\mathbf{K}}|e^{i\phi_0}$ , находим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1,2}(z) &= e^{-\alpha z/2} \times \\ &\times \left[ \hat{T}_{+}(z)\mathbf{A}_{1,2}(0) + e^{\pm i\phi_0} \hat{T}_{-}(z)\mathbf{A}_{2,1}(0) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\mathbf{A}_{1,2}(0)$  — входные значения амплитуд,  $\hat{T}_{\pm}(z) = (e^{i\hat{g}z} \pm e^{i\hat{g}^*z})/2$ , а  $\hat{g}_{\pm} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \pm |E_{\mathbf{K}}|(\nu_0\hat{1} + \boldsymbol{\nu} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})$ . Входящие функции  $\sigma$ -матриц легко сводятся к линейным [25, 26].

Общее решение (13) включает в себя большое количество информации об эффективности дифракции и ее поляризационных свойствах. Оно допускает обобщение на случай частично поляризованного света. Ранние попытки решить задачу о векторной дифракции ограничивались сильно упрощенными аналитическими моделями [27, 28] и численными вычислениями [29, 30]. Прямые расчеты приводят здесь к чрезвычайно громоздким частным выражениям [31].

В эксперименте ось  $z$  совпадает, как правило, с одной из осей симметрии кристалла. Если это главная ось, например [001], то матрицы  $\hat{H}^{(0)}$  и  $\hat{H}$  обращаются в нуль. Такая геометрия удобна для невозмущающей записи решеток.

Оптические конфигурации, важные для взаимодействия волн, сводятся к базисной конфигурации,

Таблица 1. Оптические параметры кристаллов  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  и  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$

Параметры	$\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ ( $\lambda = 514$ нм)	$\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ ( $\lambda = 633$ нм)
$n_0$	2.6	2.58
$\rho$	38.6 град/мм $\approx 6.74$ см $^{-1}$	6.5 град/мм $\approx 1.13$ см $^{-1}$
$r_{41}$	$4.51 \cdot 10^{-12}$ м/В	$4.74 \cdot 10^{-12}$ м/В
$ \rho/s $	14 кВ/см	2.8 кВ/см

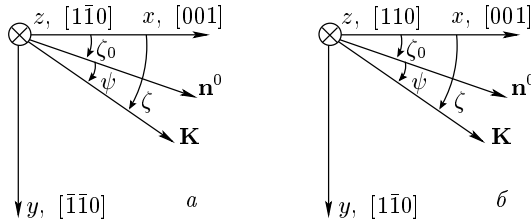


Рис. 1. Две базисные оптические конфигурации

изображенной на рис. 1а. Ось  $z$  совпадает здесь с  $[1\bar{1}0]$ , а оси  $x$  и  $y$  выбраны в направлениях  $[001]$  и  $[\bar{1}\bar{1}0]$ . Углы  $\zeta$  и  $\zeta_0$ , характеризующие ориентацию  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{E}_0$  в плоскости  $xy$ , отсчитываются от  $[001]$ . Параметр  $\psi = \zeta - \zeta_0$  удобен при сравнении с экспериментом (см. разд. 5). Для рассматриваемой базисной конфигурации

$$\hat{H}^{(0)}(\zeta_0) = \begin{pmatrix} 0 & \sin \zeta_0 \\ \sin \zeta_0 & \cos \zeta_0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Соответственно, для компонент  $\kappa_{1,3}$  получаем из (9)

$$\kappa_1 = sE_0 \sin \zeta_0, \quad \kappa_3 = -0.5sE_0 \cos \zeta_0. \quad (15)$$

Если пренебречь эластооптическим вкладом, то  $\hat{H} = \hat{H}^{(0)}(\zeta)$ . В этом приближении

$$\nu_0 = 0.5s \cos \zeta, \quad \nu_1 = s \sin \zeta, \quad \nu_3 = -0.5s \cos \zeta. \quad (16)$$

В работах [11, 13] элементы матрицы  $\hat{H}$  измерялись и рассчитывались для кристаллов  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  и  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  с учетом эластооптических вкладов. На рис. 2 дана квинтэссенция полученных результатов для  $\nu_{0,1,3}(\zeta)$ . Видно, что во многих случаях пренебрежение эластооптическими вкладами оправдано.

Конфигурация, показанная на рис. 1б, сходна с представленной на рис. 1а. Однако эти конфигурации не эквивалентны. Переход между ними должен сопровождаться изменением знака электрооптического коэффициента  $r_{41}$ .

Таблица 2. Триплеты базисных векторов  $x, y, z$ , эквивалентные  $[001], [\bar{1}\bar{1}0], [1\bar{1}0]$  (а) и  $[001], [1\bar{1}0], [110]$  (б)

а			б		
$x$	$y$	$z$	$x$	$y$	$z$
$[001]$	$[\bar{1}\bar{1}0]$	$[1\bar{1}0]$	$[001]$	$[1\bar{1}0]$	$[110]$
$[001]$	$[110]$	$[\bar{1}\bar{1}0]$	$[001]$	$[\bar{1}10]$	$[\bar{1}\bar{1}0]$
$[00\bar{1}]$	$[\bar{1}10]$	$[110]$	$[00\bar{1}]$	$[110]$	$[1\bar{1}0]$
$[00\bar{1}]$	$[1\bar{1}0]$	$[\bar{1}\bar{1}0]$	$[00\bar{1}]$	$[\bar{1}\bar{1}0]$	$[\bar{1}10]$
$[100]$	$[0\bar{1}\bar{1}]$	$[01\bar{1}]$	$[100]$	$[01\bar{1}]$	$[011]$
$[100]$	$[011]$	$[0\bar{1}\bar{1}]$	$[100]$	$[0\bar{1}\bar{1}]$	$[0\bar{1}\bar{1}]$
$[\bar{1}00]$	$[0\bar{1}1]$	$[011]$	$[\bar{1}00]$	$[011]$	$[01\bar{1}]$
$[\bar{1}00]$	$[01\bar{1}]$	$[0\bar{1}\bar{1}]$	$[\bar{1}00]$	$[0\bar{1}\bar{1}]$	$[0\bar{1}\bar{1}]$
$[010]$	$[\bar{1}0\bar{1}]$	$[\bar{1}01]$	$[010]$	$[\bar{1}01]$	$[101]$
$[010]$	$[101]$	$[10\bar{1}]$	$[010]$	$[10\bar{1}]$	$[\bar{1}0\bar{1}]$
$[0\bar{1}0]$	$[10\bar{1}]$	$[101]$	$[0\bar{1}0]$	$[101]$	$[\bar{1}01]$
$[0\bar{1}0]$	$[\bar{1}01]$	$[\bar{1}0\bar{1}]$	$[0\bar{1}0]$	$[\bar{1}0\bar{1}]$	$[10\bar{1}]$

Двенадцать преобразований симметрии, не затрагивающих электрооптические свойства кристаллов, содержат помимо тождественного преобразования вращения на  $180^\circ$  вокруг главных осей, вращения на  $\pm 120^\circ$  вокруг главных диагоналей и их комбинации [25]. Таблица 2а задает 12 эквивалентных конфигураций, первая из которых отвечает рис. 1а. Аналогично, табл. 2б задает 12 эквивалентных конфигураций, первая из которых изображена на рис. 1б.

Из свойств симметрии вытекают также следующие общие соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(0)}(\zeta_0) &= -\hat{H}^{(0)}(\zeta_0 + \pi), \\ \hat{H}(\zeta) &= -\hat{H}(\zeta + \pi), \quad H_{xx}(\zeta) = H_{xx}(-\zeta), \\ H_{yy}(\zeta) &= H_{yy}(-\zeta), \quad H_{xy}(\zeta) = -H_{xy}(-\zeta). \end{aligned} \quad (17)$$

Иными словами, при инверсии  $\mathbf{E}_0$  (или  $\mathbf{K}$ ) матрица  $\hat{H}^{(0)}$  (или  $\hat{H}$ ) меняет знак. При отражении в плоско-

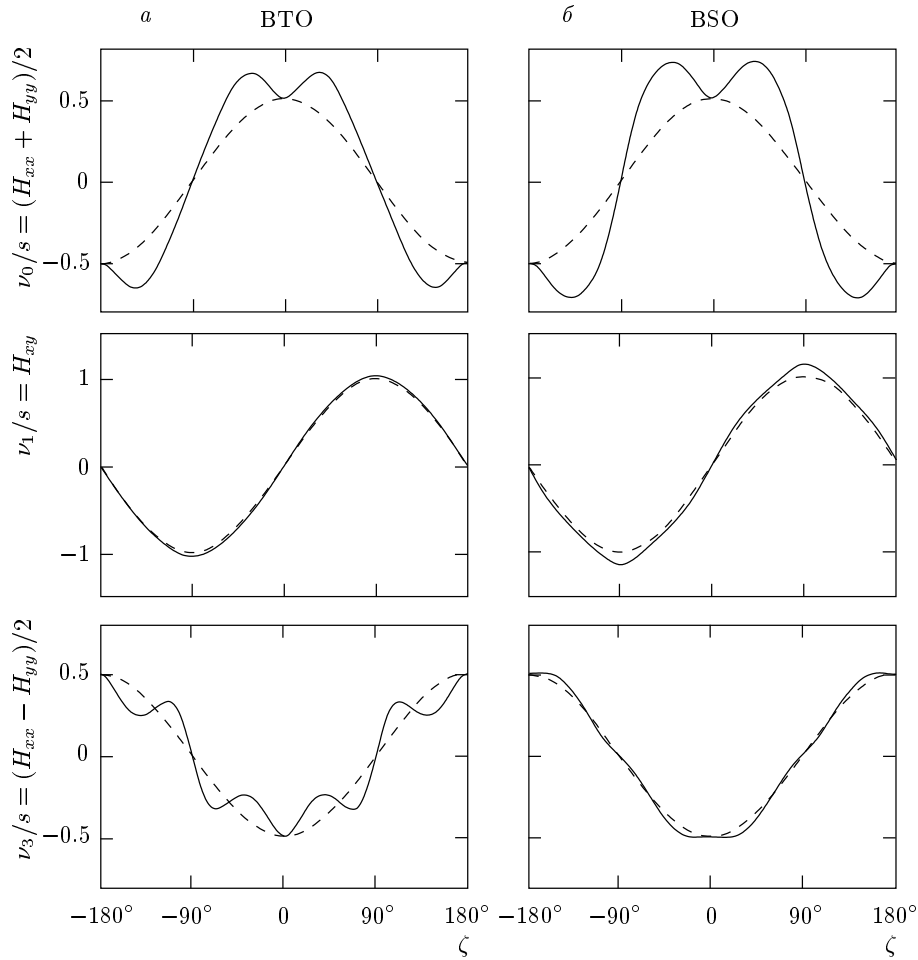


Рис. 2. Зависимости  $\nu_{0,1,3}(\zeta)$  для кристаллов  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  и  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ , отвечающие рис. 1

сти  $xz$  недиагональные матричные элементы меняют знак, а диагональные не изменяются.

Для эксперимента особенно важны три оптические конфигурации [2, 11, 29], отвечающие различным значениям угла  $\zeta_0$  на рис. 1а.

- 1) Продольная конфигурация  $\mathbf{E}_0 \parallel [001]$ , т.е.  $\sin \zeta_0 = 0$ .
- 2) Поперечная конфигурация  $\mathbf{E}_0 \perp [001]$ , т.е.  $\cos \zeta_0 = 0$ .
- 3) Диагональная конфигурация  $\mathbf{E}_0 \parallel [\bar{1}\bar{1}1]$ , т.е.  $\text{tg } \zeta_0 = \sqrt{2}$ .

Для продольной и поперечной конфигураций эластооптические вклады в  $\nu_{0,3}$  отсутствуют при  $\zeta = \zeta_0$  ( $\mathbf{K} \parallel \mathbf{E}_0$ ), вклад же в  $\nu_1$  здесь мало существен (см. рис. 2). Диагональной конфигурации отвечает наибольшее значение параметра  $\nu_0(\zeta_0)$ , характеризующего изотропное взаимодействие. Эластооптический вклад в  $\nu_0$  здесь существен.

### 3. НЕЛИНЕЙНЫЙ ФОТОРЕФРАКТИВНЫЙ ОТКЛИК

Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений для световых волн, необходимо дополнить (10) соотношениями, выражающими амплитуду решетки  $E_{\mathbf{K}}$  через контраст световой картины  $m = 2(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2^*) / (|\mathbf{A}_1|^2 + |\mathbf{A}_2|^2)$ . Основой для получения искоемых соотношений служит обычно простейшая полупроводниковая модель, описывающая фотовозбуждение носителей заряда с глубоких центров, их миграцию и рекомбинацию [1–3]. Эта модель оправдана для силленитов (где фотовозбужденными носителями являются электроны) и полезна для многих полупроводников. В линейном приближении по  $m$  она приводит к следующему уравнению для  $E_{\mathbf{K}}$ :

$$\frac{\partial E_{\mathbf{K}}}{\partial t} + \left( \omega_0 \frac{E_q + E_D - i\tilde{E}_0}{E_M + E_D - i\tilde{E}_0} - i\Omega \right) E_{\mathbf{K}} = -\frac{m\omega_0}{2} \frac{E_q(\tilde{E}_0 + iE_D)}{E_M + E_D - i\tilde{E}_0}. \quad (18)$$

Здесь  $\tilde{E}_0 = E_0 \cos \psi = E_0(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})$  — тянущее поле, а  $E_{D,M,q}$  — характеристические поля, заданные соотношениями

$$E_D = \frac{KT}{e}, \quad E_M = \frac{1}{K\mu\tau}, \quad E_q = \frac{4\pi e N_t}{\varepsilon K}, \quad (19)$$

в которых  $e$  — элементарный заряд,  $T$  — температура,  $\varepsilon$  — статическая диэлектрическая проницаемость,  $N_t$  — эффективная концентрация центров,  $\mu\tau$  — произведение подвижности фотоэлектронов на время их жизни. Поля  $E_D$ ,  $E_M$  и  $E_q$  характеризуют процессы электронной диффузии, дрейфа и насыщения ловушек. Частота  $\omega_0 = \alpha I_0 / \hbar \omega N_t$  характеризует скорость фотовозбуждения, она пропорциональна числу квантов  $\alpha I_0 / \hbar \omega$ , поглощаемых в единицу времени в единице объема.

Важной особенностью быстрых фоторефрактивных кристаллов, к каковым относятся силлениты и большинство полупроводников, является наличие низкочастотной ветви слабозатухающих волн пространственного заряда (ВПЗ) [32, 33]. Именно эта особенность делает возможным усиление фоторефрактивного отклика. Достаточным условием существования ВПЗ являются неравенства  $E_q \gg E_0 \gg E_{D,M}$ , а необходимым ограничением на материальные параметры — неравенство  $\pi e N_t \mu \tau \varepsilon^{-1} \gg 1$ , см. [33]. Если эти неравенства выполнены, то первое слагаемое в круглых скобках в левой части (18) заменяется комбинацией  $i\omega_{\mathbf{K}} + \gamma_{\mathbf{K}}$ , в которой

$$\omega_{\mathbf{K}} = \omega_0 \frac{E_q}{\tilde{E}_0}, \quad \gamma_{\mathbf{K}} = \omega_0 \left( 1 + \frac{E_q E_M + E_q E_D}{E_0^2 \cos^2 \psi} \right) \quad (20)$$

— частота и затухание волны пространственного заряда с волновым вектором  $\mathbf{K}$ . Заметим, что отношение  $Q = |\omega_{\mathbf{K}}|/\gamma_{\mathbf{K}}$  есть добротность ВПЗ. Этот зависящий от  $|\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_0|$  и не зависящий от  $I_0$  параметр существенно больше единицы в рамках нашей теории. Большие значения добротности необходимы для объяснения параметрического возбуждения ВПЗ в кристаллах силленитов [33, 34].

В табл. 3 приведены типичные значения материальных параметров для  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  и  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ , а так-

**Таблица 3.** Материальные параметры кристаллов  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  и  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  и характеристические поля для  $\Lambda = 20$  мкм

Параметры	$\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$	$\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$
$N_t$ , см <sup>-3</sup>	$2 \cdot 10^{16}$	$10^{16}$
$\mu\tau$ , см <sup>2</sup> /В	$2 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$
$\varepsilon$	47	56
$E_q$ , кВ/см	250	105
$E_M$ , кВ/см	1.5	0.6
$E_D$ , кВ/см	0.08	0.08
$\pi e N_t \mu \tau / \varepsilon$	38.5	40.4

же оценки комбинации  $\pi e N_t \mu \tau \varepsilon^{-1}$  и характеристических полей. Ясно, что в достаточно широкой области значений периода решетки  $\Lambda$  сделанные выше приближения вполне оправданы. В этой области и разворачиваются наиболее важные явления, связанные с усилением нелинейного отклика.

Дальнейшее рассмотрение особенностей фоторефрактивного отклика целесообразно проводить отдельно для DC- и AC-случаев.

### 3.1. DC-метод усиления

Считая, что поле  $E_0$  не зависит от времени, мы получаем из (18)

$$E_{\mathbf{K}} \approx \frac{\omega_{\mathbf{K}} |\tilde{E}_0|}{\Omega - \omega_{\mathbf{K}} + i\gamma_{\mathbf{K}}} \frac{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2^*}{|\mathbf{A}_1|^2 + |\mathbf{A}_2|^2}. \quad (21)$$

Зависимость амплитуды решетки от расстройки  $\Omega$  имеет резонансный характер. В области резонанса,  $|\Omega - \omega_{\mathbf{K}}| \lesssim \gamma_{\mathbf{K}}$ , имеем

$$E_{\mathbf{K}} \approx -iQ |\tilde{E}_0| (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2^*). \quad (22)$$

Для удобства мы перешли к безразмерным амплитудам световых волн:  $\mathbf{a}_{1,2} = \mathbf{A}_{1,2} / \sqrt{|\mathbf{A}_1|^2 + |\mathbf{A}_2|^2}$ . Линейное поглощение не приводит к их затуханию,  $|\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 = 1$ .

Наличие большого фактора  $Q$  в (22) и есть суть DC-усиления. Присутствие мнимой единицы означает здесь, что отклик — градиентного типа, т.е. решетка  $E_{sc}(\mathbf{r})$  сдвинута на  $1/4$  периода относительно интерференционной световой картины.

Напомним, что  $\omega_{\mathbf{K}}, \gamma_{\mathbf{K}} \propto I_0$ , а интенсивность  $I_0$  убывает как  $e^{-\alpha z}$  из-за линейного поглощения. Поэтому условие резонансного возбуждения  $|\Omega - \omega_{\mathbf{K}}(z)| \lesssim \gamma_{\mathbf{K}}$  выполняется в слое толщиной  $\delta z \approx 2/\alpha Q$ . С уменьшением  $\Omega$  от  $\omega_{\mathbf{K}}(0)$  до

$\omega_{\mathbf{K}}(l) = \omega_{\mathbf{K}}(0) \exp(-\alpha l)$  резонансный слой смещается от входной ( $z = 0$ ) до выходной ( $z = l$ ) грани. Если толщина кристалла  $l$  значительно превышает  $\delta z$ , взаимодействие волн в большей его части становится неэффективным. Полагая  $Q \approx 6$ ,  $\alpha \approx 1 \text{ см}^{-1}$ , мы получаем оценку  $\delta z \approx 0.3 \text{ см}^{-1}$ .

В общем случае соотношение (21) полезно переписать в виде

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{K}} &\approx -iQR|\tilde{E}_0|(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2^*), \\ R &= [1 + iQ(1 - \delta \exp(\alpha z))]^{-1}, \end{aligned} \quad (23)$$

выделив резонансный фактор  $R(z)$  и введя безразмерную расстройку  $\delta = \Omega/\omega_{\mathbf{K}}(0)$ .

Отметим наконец, что линейное приближение по контрасту справедливо при  $|m| \lesssim Q^{-1} \ll 1$ . При больших значениях  $|m|$  необходимо учитывать высшие пространственные гармоники поля:  $E_{2\mathbf{K}}$ ,  $E_{3\mathbf{K}}$ , ... Ограничения на длину  $l$  и контраст  $m$  являются платой за ДС-усиление фоторефрактивного отклика.

### 3.2. АС-метод усиления

В этом случае  $\Omega = 0$ , а поле  $E_0$  быстро осциллирует по  $t$ . Период осцилляций  $T_0$  считается меньшим  $2\pi/\omega_{\mathbf{K}} \approx 10^{-2}-10^{-1}$  с, но большим времени жизни носителя  $\tau \lesssim 10^{-7}$  с. Это гарантирует малость высокочастотной компоненты  $E_{\mathbf{K}}(t)$  по сравнению с постоянной компонентой. Мы ограничимся случаем периодической смены знака  $E_0(t)$  при постоянной амплитуде  $|E_0|$ , что отвечает наибольшей эффективности АС-метода [3, 35].

Выполняя усреднение по высокочастотным осцилляциям в (18) и используя неравенства  $E_q \gg |E_0| \gg E_{D,M}$ , нетрудно найти

$$E_{\mathbf{K}} \approx -i|\tilde{E}_0|Q \langle \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2^* \rangle. \quad (24)$$

Усреднение  $\langle \dots \rangle$  сводится к взятию полусуммы двух слагаемых, одно из которых вычислено при значении поля  $|E_0|$ , а другое при  $-|E_0|$ .

Фактор усиления отклика  $Q$  здесь такой же, как для ДС-метода. АС-метод (в отличие от ДС) мало чувствителен к ослаблению  $I_0$  за счет поглощения, однако применимость выражения (24) ограничена еще меньшими значениями контраста:  $|m| \lesssim Q^{-2} \ll 1$ . В противном случае необходимо учитывать параметрическую генерацию ВПЗ [33, 36].

Используя (10), можно сделать еще один шаг в упрощении соотношения (24). Допустим (обычно это отвечает эксперименту), что входные пучки 1 и 2 линейно поляризованы. Тогда нелинейная эволюция

амплитуд  $\mathbf{a}_{1,2}(z)$  совместима с линейным свойством  $\mathbf{a}_{1,2}(E_0) = \mathbf{a}_{1,2}^*(-E_0)$ , отмеченным в разд. 2. Отсюда следует, что  $\langle \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2^* \rangle = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2^*$ , т. е. соотношение (24) для АС-отклика сводится к (22).

## 4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ВОЛН

Подставляя соотношение (23) для нелинейного отклика в (10), приходим к замкнутой системе уравнений для  $\mathbf{a}_{1,2} = \mathbf{A}_{1,2}/\sqrt{|\mathbf{A}_1|^2 + |\mathbf{A}_2|^2}$  для ДС-случая. Аналогично, комбинируя (24) и (10), получаем замкнутые уравнения для АС-случая. Достоинством используемого нами  $\sigma$ -представления является возможность упростить нелинейные уравнения, избавившись от членов, описывающих линейное пространство.

Перейдем от амплитуд  $\mathbf{a}_{1,2}$  к новым безразмерным амплитудам  $\mathbf{b}_{1,2}$ ,

$$\mathbf{a}_{1,2} = e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\sigma})z} \mathbf{b}_{1,2}, \quad (25)$$

что аналогично переходу к представлению взаимодействия в квантовой механике [25]. Тогда применительно к ДС-случаю система уравнений, описывающая взаимодействие волн 1 и 2, принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{b}_1}{dz} &= RQ|\tilde{E}_0|(\mathbf{b}_2^* \cdot \mathbf{b}_1)(\nu_0 \hat{1} + \mathbf{q} \cdot \hat{\sigma})\mathbf{b}_2, \\ \frac{d\mathbf{b}_2}{dz} &= -R^*Q|\tilde{E}_0|(\mathbf{b}_1^* \cdot \mathbf{b}_2)(\nu_0 \hat{1} + \mathbf{q} \cdot \hat{\sigma})\mathbf{b}_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Фактор  $R = R(z)$  задан соотношением (23), а выражение для действительного вектора  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \frac{\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\kappa})}{\kappa^2} + \left[ \boldsymbol{\nu} - \frac{\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\kappa})}{\kappa^2} \right] \cos(2\kappa z) + \\ &\quad + \frac{[\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\nu}]}{\kappa} \sin(2\kappa z). \end{aligned} \quad (27)$$

Изотропная часть взаимодействия, характеризующаяся параметром  $\nu_0$ , не изменилась при переходе к представлению взаимодействия. Анизотропная же часть, пропорциональная  $\mathbf{q}$ , приобрела осциллирующую часть из-за интерференции собственных мод.

Уравнения для АС-случая аналогичны по структуре. Они получаются из (26) заменой  $R(\mathbf{b}_2^* \cdot \mathbf{b}_1) \rightarrow \langle \mathbf{b}_2^* \cdot \mathbf{b}_1 \rangle$ . Иными словами, АС-уравнения не содержат резонансного фактора  $R(z)$ , но включают в себя усреднение по периоду  $T_0$ .

### 4.1. Приближение заданной накачки

Условие применимости соотношений (23) и (24) для нелинейного отклика,  $|m| \ll 1$ , может быть вы-



полнено либо за счет большого различия в интенсивностях волн 1 и 2, либо за счет почти строгой ортогональности их поляризаций. Первый, наиболее важный, случай отвечает пространственному усилению слабого светового пучка в присутствии сильного, т. е. приближению заданной накачки. Он исследуется ниже.

#### 4.1.1. АС-усиление

Считая для определенности, что  $|\mathbf{a}_1|/|\mathbf{a}_2| \equiv \equiv |\mathbf{b}_1|/|\mathbf{b}_2| \ll 1$ , мы можем пренебречь изменением амплитуды  $\mathbf{b}_2$  в уравнении (26) для  $\mathbf{b}_1$ , т. е. положить там  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2(0) \equiv \mathbf{a}_2(0) \approx \mathbf{e}_p$ , где  $\mathbf{e}_p$  — единичный вектор поляризации волны накачки (волны 2) на входе в кристалл. Для амплитуды слабой волны 1 получим

$$\frac{d\mathbf{b}_1}{dz} = Q|\tilde{E}_0|\langle \mathbf{e}_p^* \cdot \mathbf{b}_1 \rangle (\nu_0 \hat{\mathbf{l}} + \mathbf{q} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{e}_p. \quad (28)$$

Умножая это уравнение скалярно на  $\mathbf{e}_p^*$  и выполняя усреднение по времени, имеем

$$\frac{d\langle \mathbf{e}_p^* \cdot \mathbf{b}_1 \rangle}{dz} = Q|\tilde{E}_0|(\nu_0 + \langle \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\xi}_p \rangle) \langle \mathbf{e}_p^* \cdot \mathbf{b}_1 \rangle, \quad (29)$$

где  $\xi_{pj} = (\mathbf{e}_p^* \hat{\sigma}_j \mathbf{e}_p)$  — компоненты вектора Стокса  $\boldsymbol{\xi}_p = (\xi_{p1}, \xi_{p2}, \xi_{p3})$  падающей волны накачки [37]. Для полностью поляризованного света этот вектор имеет единичную длину; его компоненты  $\xi_{p1,3}$  характеризуют степень линейной поляризации, а компонента  $\xi_{p2}$  — степень круговой поляризации. При усреднении вектора  $\mathbf{q}$  следует учитывать, что  $\kappa_{1,3}(E_0) = -\kappa_{1,3}(-E_0)$ , а  $\kappa_2 = -\rho$  не зависит от  $E_0$ , см. (9), (15). Поэтому  $\langle q_{1,3}(z) \rangle = q_{1,3}(z)$ ,  $\langle q_2 \rangle = 0$  и  $\langle \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\xi}_p \rangle = q_1 \xi_{p1} + q_3 \xi_{p3}$ . Отсюда и из (29) следует вывод: при линейной поляризации накачки ( $\xi_{p2} = 0$ ) компонента  $\mathbf{e}_p^* \cdot \mathbf{b}_1$  не испытывает скачков при переключении поля. Этот случай наиболее важен для эксперимента.

Интегрируя уравнение (29), получаем

$$\langle \mathbf{e}_p^* \cdot \mathbf{b}_1(z) \rangle = \mathbf{e}_p^* \cdot \mathbf{b}_1(0) \times \times \exp [Gz + C_1 \sin(2\kappa z) + C_2 \sin^2(\kappa z)], \quad (30)$$

где инкремент  $G$ , являющийся основной характеристикой пространственного усиления, и коэффициенты  $C_{1,2}$  заданы соотношениями

$$\begin{aligned} G &= Q|\tilde{E}_0| \left[ \nu_0 + \frac{(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\kappa})}{\kappa^2} (\kappa_1 \xi_{p1} + \kappa_3 \xi_{p3}) \right], \\ C_1 &= \frac{Q|\tilde{E}_0|}{2\kappa^3} [\kappa^2 (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\xi}_p) - (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\kappa})(\kappa_1 \xi_{p1} + \kappa_3 \xi_{p3})], \\ C_2 &= \frac{Q|\tilde{E}_0|\rho}{\kappa^2} [\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\xi}_p]_2. \end{aligned} \quad (31)$$

При  $G \gg 1$  степень усиления очень высока. Отметим важные свойства инкремента.

1) Выражение (31) для  $G$  состоит из изотропной ( $\propto \nu_0$ ) и анизотропной частей. Изотропная часть не зависит от поляризации накачки, в то время как величина и знак анизотропного вклада поляризационно зависимы. При циркулярной поляризации ( $\xi_{p1,3} = 0$ ,  $\xi_{p2} = \pm 1$ ) анизотропный вклад обращается в нуль.

2) Замена  $\mathbf{K} \rightarrow -\mathbf{K}$  приводит к изменению знака инкремента, т. е.  $G(\zeta) = -G(\zeta \pm \pi)$ . Эта особенность следует из (9), (14), (17).

3) Инкремент не зависит от знака  $E_0$  и  $\mathbf{n}^0$ . Это следует из определения вектора  $\boldsymbol{\kappa}$ .

Соотношение (31) позволяет максимизировать  $G$  по поляризации накачки. Максимум отвечает линейной поляризации, такой что  $\xi_{p1,3} = = \kappa_{1,3} \text{sign}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\kappa}) / \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_3^2}$ . Это условие легко переписать в терминах угла наклона плоскости поляризации. Оптимизированное по поляризации значение инкремента есть

$$G = Q|\tilde{E}_0| \left( \nu_0 + \frac{|\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\kappa}| \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_3^2}}{\kappa_1^2 + \kappa_3^2 + \rho^2} \right). \quad (32)$$

Отсюда прямо видно, что оптическая активность отрицательно влияет на усиление. Правая часть (32) может быть максимизирована далее как функция  $|\mathbf{K}|$  (т. е. угла  $\theta = \lambda|\mathbf{K}|/2\pi$  между световыми пучками) и углов  $\zeta, \zeta_0$ , задающих ориентацию  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{E}_0$ . Такая оптимизация важна для практических целей. Ее конкретные примеры даны в разд. 5. Здесь же мы отметим, что абсолютный максимум функции  $G(\zeta, \zeta_0)$  достигается при  $\psi \equiv \zeta - \zeta_0 = 0$ , т. е. при  $\mathbf{K} \parallel \mathbf{E}_0$ . При фиксированном значении  $\zeta_0$  максимум  $G(\zeta)$  отвечает в общем случае  $\zeta \neq \zeta_0$ .

Коснемся характеристик пространственного усиления, не связанных со свойствами инкремента  $G$ . Дополнительные вклады в показателе экспоненты в (30) существенны главным образом при  $|C_{1,2}| \gg 1$ . Во многих же случаях (см. также разд. 5)  $|C_{1,2}| \lesssim 1$ . Вычисление компоненты вектора  $\mathbf{b}_1$ , ортогональной  $\mathbf{e}_p$ , необходимое для полного описания поляризационных свойств усиливаемой волны 1, также

может быть проведено на основе уравнения (28). Основная черта пространственной зависимости этой компоненты — опять же экспоненциальный рост при увеличении инкремента  $\Gamma$ . Входная поляризация слабого пучка входит лишь в предэкспоненциальный множитель в (31). Ее оптимум достигается при  $\mathbf{A}_1(0) \parallel \mathbf{A}_2(0) \propto \mathbf{e}_p$ .

#### 4.1.2. DC-усиление

Считая, что  $|\mathbf{b}_1| \ll |\mathbf{b}_2|$ , имеем из (26)

$$\frac{d\mathbf{b}_1}{dz} = RQ|\tilde{E}_0|(\mathbf{e}_p^* \cdot \mathbf{b}_1)(\nu_0\hat{1} + \mathbf{q} \cdot \hat{\sigma})\mathbf{e}_p, \quad (33)$$

где резонансный фактор  $R(z)$  задан соотношением (23). Этот фактор и определяет специфику DC-усиления.

Для того чтобы продемонстрировать отличительные свойства DC-усиления, опустим в (27) пространственно осциллирующую часть  $\mathbf{q}$ , т. е. положим  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 = \text{const}$ . Такая упрощенная модель способна дать огрубленное количественное описание взаимодействия, см. также разд. 5. В ее рамках имеем  $\ln(|\mathbf{a}_1(l)|/|\mathbf{a}_1(0)|) \approx \Gamma l \Phi$ , где  $\Gamma = Q|\tilde{E}_0|(\nu_0 + \mathbf{q}_0 \cdot \hat{\xi}_p)$  — инкремент пространственного усиления (не отличающийся от рассмотренного выше при линейной поляризации накачки), а

$$\Phi = \frac{1}{l} \int_0^l [1 + Q^{-2}(1 - \delta e^{\alpha z})^2]^{-1} dz \quad (34)$$

— фактор проигрыша в скорости экспоненциального усиления по сравнению с AC-случаем. Если  $\alpha = 0$ , то пиковое значение  $\Phi(\delta)$ , равное единице, достигается при  $\delta = 1$ .

Сплошными кривыми на рис. 3 показаны зависимости  $\Phi(\delta)$  для  $\alpha = 0.75 \text{ см}^{-1}$ ,  $Q = 6$  и нескольких значений толщины  $l$ . Штрихпунктир отвечает идеальному случаю  $\alpha = 0$ . Видно, что уменьшение пикового значения, сдвиг резонанса в сторону малых расстройек и его разрушение становятся существенными уже для весьма тонких кристаллов. При увеличении  $\alpha$  отмеченные черты усиливаются. Учет поглощения приводит к насыщению усиления с ростом  $l$ . Чем больше  $\alpha$ , тем раньше проявляется это насыщение.

### 5. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ

Наиболее простыми и важными приложениями являются расчеты угловых и поляризационных зависимостей величины пространственного усиления

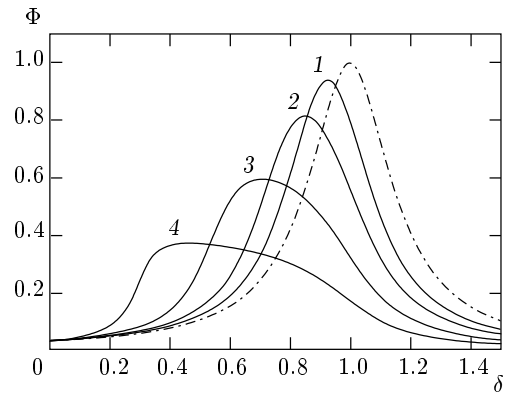


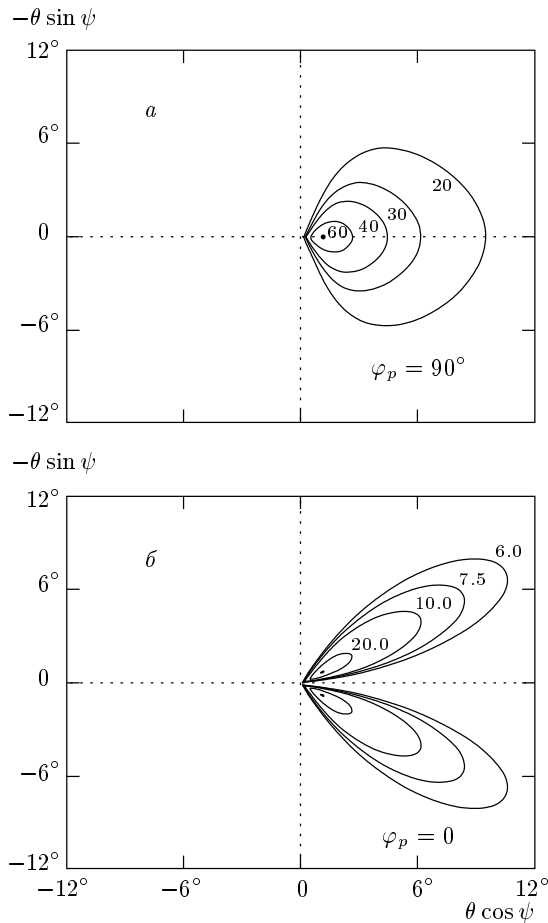
Рис. 3. Зависимости  $\Phi(\delta)$  для  $\alpha = 0.75 \text{ см}^{-1}$  и  $Q = 6$ . Кривые 1, 2, 3 и 4 отвечают  $l = 0.2, 0.4, 0.8$  и  $1.6 \text{ см}$ . Штрихпунктирный контур построен для  $\alpha l = 0$

для основных оптических конфигураций в конкретных кристаллах, а также сравнение результатов этих расчетов с экспериментом. Ниже даны такие приложения теории к расчетам для кристаллов  $\text{Vi}_{12}\text{TiO}_{20}$  и  $\text{Vi}_{12}\text{SiO}_{20}$ .

#### 5.1. AC-усиление в кристаллах $\text{Vi}_{12}\text{TiO}_{20}$

Амплитуда AC-поля в экспериментах с этими кристаллами варьируется приблизительно от 10 до 50 кВ/см. Лазерные пучки, как правило, линейно поляризованы. Используя данные табл. 1 и полагая для оценки  $|E_0| = 30 \text{ кВ/см}$ , получим  $s|E_0| \approx 12 \text{ см}^{-1}$ . Это значит, что  $(\rho/\kappa)^2 \approx 10^{-2} \ll 1$ , т. е. оптическая активность сильно подавлена внешним полем. Такая ситуация благоприятна для усиления. Полагая добротность  $Q = 6$ , получим из (31) оценку  $\Gamma \approx sQ|E_0| \approx 70 \text{ см}^{-1}$ . Столь высокие значения инкремента означают возможность гигантского усиления слабых волн уже в миллиметровых кристаллах.

В условиях сильного пространственного усиления наличие двух падающих световых пучков не является необходимым для исследования двухволнового взаимодействия. Представим себе, что лишь одна волна накачки падает нормально на кристалл. Тогда очень слабые рассеянные затравочные волны имеют возможность усиливаться из-за связи с накачкой, приводя к появлению светоиндуцированного рассеяния [1–3]. Измерения угловых характеристик этого рассеяния дают прямую информацию о зависимости степени пространственного усиления от направления распространения слабых волн. Посмотрим, как эта концепция работает в конкретных случаях.



**Рис. 4.** Линии уровня инкремента  $\Gamma(\theta_{||}, \theta_{\perp}) = \text{const}$  для продольной геометрии в случаях вертикальной по отношению к  $\mathbf{E}_0$  (а) и горизонтальной (б) поляризации накачки. Поле  $|E_0| = 30$  кВ/см, остальные параметры  $\text{Vi}_{12}\text{TiO}_{20}$  взяты из табл. 1, 3

**5.1.1. Продольная конфигурация,  $\mathbf{E}_0 \parallel [001]$**

Здесь в соответствии с результатами разд. 2 и рис. 1а,  $\zeta_0 = 0$ ,  $\psi = \zeta$ ,  $\kappa_1 = 0$ . Обозначая через  $\varphi_p$  угол между  $\mathbf{e}_p$  и горизонтальной осью  $[001] \parallel \mathbf{E}_0$ , для ненулевых компонент вектора Стокса волны накачки имеем  $\xi_{p1} = \sin 2\varphi_p$ ,  $\xi_{p3} = \cos 2\varphi_p$ . Используя (9), (31), получаем для инкремента

$$\Gamma = s|E_0 \cos \psi|Q(H_{xx} \cos^2 \varphi_p + H_{yy} \sin^2 \varphi_p). \quad (35)$$

Как следует из (20), добротность  $Q$  зависит от  $|E_0|$ ,  $K$  и угла  $\psi$  между  $\mathbf{K}$  и осью  $z$ . Оптимальная поляризация здесь вертикальная,  $\varphi_p = 90^\circ$ .

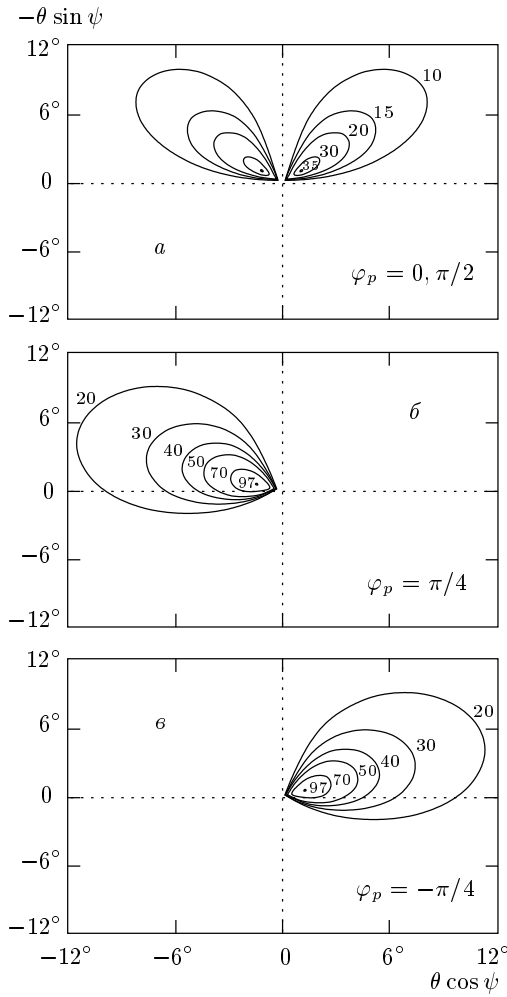
На рис. 4 показаны распределения инкремента  $\Gamma(\theta_{||}, \theta_{\perp})$  в области его положительных значений для углов поляризации  $\varphi_p = \pi/2$  и  $0$ . Компоненты  $\theta_{||} = \theta \cos \psi$  и  $\theta_{\perp} = \theta \sin \psi$  ( $\theta = \lambda|\mathbf{K}|/2\pi$  – полярный

**Рис. 5.** Угловые распределения светоиндуцированного рассеяния в продольной конфигурации для  $\text{Vi}_{12}\text{TiO}_{20}$  при  $\varphi_p = \pi/2$  (а) и  $0$  (б). Экспериментальные параметры:  $\lambda = 632.8$  нм,  $I_0 = 0.8$  Вт/см<sup>2</sup>,  $|E_0| = 20$  кВ/см и  $l \approx 2$  см

угол рассеяния) характеризуют горизонтальные и вертикальные угловые отклонения вышедшей слабой волны. Эти параметры удобны для сравнения с экспериментом. Поведение инкремента в области отрицательных значений следует из свойства симметрии  $\Gamma(\mathbf{K}) = -\Gamma(-\mathbf{K})$ .

Мы видим, что эффективное усиление происходит в области малых углов  $\theta$ , что обусловлено зависимостью  $Q(|E_0|, K)$ . Рост  $|E_0|$  приводит к уменьшению характерных значений  $\theta$ . При  $\varphi_p = 90^\circ$  (рис. 4а) эластооптические вклады в  $\Gamma$  малосущественны. Максимальное значение инкремента  $\Gamma_{max} \approx 75 \text{ см}^{-1}$  отвечает азимутальному углу  $\psi = 0$ . При  $\varphi_p = 0$  (рис. 4б) ненулевые значения инкремента обязаны эластооптическому эффекту, в его отсутствие  $\Gamma(\theta_{||}, \theta_{\perp}) = 0$ . Угловая зависимость характеризуется здесь двумя довольно узкими лепестками, а значение  $\Gamma_{max}$  намного меньше, чем в случае  $\varphi_p = 90^\circ$ . Отметим, что в соотношении (30) параметры  $C_{1,2} = 0$  при  $\varphi_p = 0$  и  $\pi/2$ .

На рис. 5 приведены угловые распределения интенсивности наведенного рассеяния для  $\varphi_p = 0$  и



**Рис. 6.** Линии уровня инкремента для поперечной геометрии при  $\varphi_p = 0$  (а),  $\pi/4$  (б) и  $-\pi/4$  (в). Значения параметров такие же, как для рис. 5

$\pi/2$ , полученные экспериментально в продольной оптической конфигурации. В соответствии с теорией мы имеем однолепестковое распределение в случае  $\varphi_p = 90^\circ$  и двухлепестковую структуру в случае  $\varphi_p = 0$ . Ориентация лепестков также отвечает теоретическим предсказаниям. При горизонтальной поляризации накачки интенсивность рассеяния, как и ожидалось, намного меньше, чем при вертикальной.

### 5.1.2. Поперечная конфигурация, $E_0 \perp [001]$

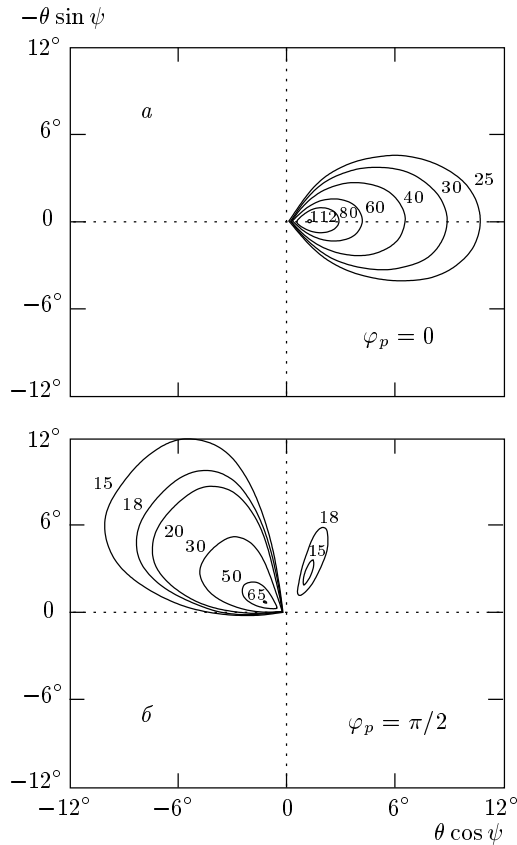
В этом случае мы выберем  $\zeta_0 = \pi/2$ ; тогда  $\zeta = \psi + \pi/2$  и, соответственно,  $\kappa_1 = sE_0$ ,  $\kappa_3 = 0$ . Угол поляризации накачки, отсчитанный от направления приложенного поля, обозначим снова через  $\varphi_p$ . Ис-

**Рис. 7.** Светоиндуцированное рассеяние в поперечной геометрии для  $|E_0| \approx 20$  кВ/см и  $l \approx 2$  см при  $\varphi_p = 0$  (а),  $\pi/2$  (б),  $\pi/4$  (в) и  $-\pi/4$  (г)

пользуя (9), (31), получаем

$$\Gamma = s|E_0 \cos \psi|Q (\nu_0 - \nu_1 \sin 2\varphi_p). \quad (36)$$

Зависимости  $\nu_{0,1}(\zeta)$ , учитывающие и не учитывающие эластооптические вклады, приведены в разд. 2. На рис. 6 показаны распределения  $\Gamma(\theta_x, \theta_y)$  для углов поляризации  $\varphi_p = 0, \pi/4$  и  $-\pi/4$ . Значения  $\varphi_p = 0$  и  $\pi/2$  здесь эквивалентны. В случае



**Рис. 8.** Линии уровня инкремента для диагональной геометрии при  $\varphi_p = 0$  (а) и  $\pi/2$  (б). Значения остальных параметров такие же, как для рис. 5

$\varphi_p = 0, \pi/2$  имеем два симметричных лепестка в верхних квадрантах. При  $\varphi_p = \pm\pi/4$  имеем одиночные лепестки центрированные при  $\psi \approx (-90 \mp 64)^\circ$ . Максимальное значение  $\Gamma \approx 100 \text{ см}^{-1}$  инкремента для поперечной конфигурации больше, чем для продольной. Эластооптические вклады не сказываются сильно на приведенных распределениях инкремента. Параметр  $C_1$  здесь равен нулю.

Картины рассеяния в поперечной конфигурации, полученные при  $\varphi_p = 0, \pi/2, \pi/4$  и  $-\pi/4$ , показаны на рис. 7. В соответствии с теорией они практически одинаковы для  $\varphi_p = 0$  и  $\pi/2$ . Угловые распределения рассеяния хорошо коррелируют с соответствующими распределениями инкремента.

### 5.1.3. Диагональная конфигурация, $E_0 \parallel [\bar{1}\bar{1}1]$

Здесь в соответствии с формулами разд. 2 мы должны положить  $\zeta = \psi + \zeta_0$ ,  $\zeta_0 = \arctg \sqrt{2} \approx 54.7^\circ$ ,  $\kappa_1 = \sqrt{2}sE_0/\sqrt{3}$ ,  $\kappa_3 = -sE_0/2\sqrt{3}$ . Угол поляриза-

**Рис. 9.** Светоиндуцированное рассеяние в диагональной геометрии для  $|E_0| \approx 20 \text{ кВ/см}$  и  $l \approx 0.8 \text{ см}$  при  $\varphi_p = 0$  (а) и  $\pi/2$  (б)

ции  $\varphi_p$  отсчитываем от оси  $[\bar{1}\bar{1}1]$  параллельной  $E_0$ . В итоге получаем из (31)

$$\Gamma = \frac{1}{3}|E_0 \cos \psi|Q \left[ 3\nu_0 + \left( 2\sqrt{2}\nu_1 - \nu_3 \right) \cos 2\varphi_p \right]. \quad (37)$$

На рис. 8а показаны линии уровня инкремента для горизонтальной поляризации накачки,  $\varphi_p = 0$ . Этот случай отвечает максимально возможному усилению,  $\Gamma_{max} \approx 110 \text{ см}^{-1}$ . Единственный лепесток вытянут вдоль  $[\bar{1}\bar{1}1]$ . Эластооптические вклады заметно увеличивают  $\Gamma$ , хотя и не сказываются сильно на форме пространственного распределения. Зависимость  $\Gamma(\theta_{\parallel}, \theta_{\perp})$  для  $\varphi_p = \pi/2$  показана на рис. 8б. Здесь имеется основной лепесток, вытянутый под углом  $\psi \approx 120^\circ$ , и дополнительный слабый лепесток. Эластооптические вклады слегка увеличивают максимальное значение инкремента и смещают основной лепесток к горизонтали.

Соответствующие экспериментальные данные представлены на рис. 9. Они также находятся в хорошем качественном согласии с теоретическими предсказаниями. Хорошо видно, что пятна наведенного рассеяния отделены от нуля. Эта особенность связана с высоким качеством использованного образца.

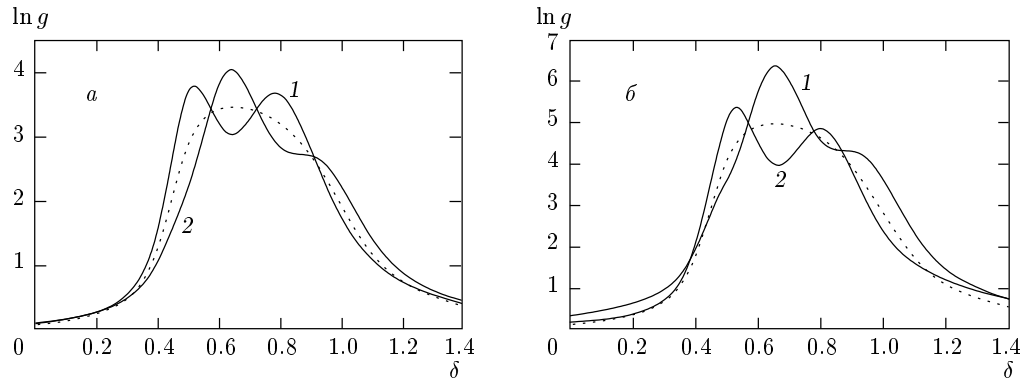


Рис. 10. Зависимости  $\ln g(\delta)$  для продольной (а) и диагональной (б) оптических конфигураций. Параметры  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  взяты из табл. 1 и 3,  $E_0 = 6$  кВ/см,  $\alpha = 1$  см $^{-1}$  и  $l = 0.8$  см. Сплошные кривые 1 и 2 отвечают поляризациям  $\mathbf{a}_{1,2} \parallel \mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{a}_{1,2} \perp \mathbf{E}_0$ . Пунктирные кривые построены для изотропной модели

### 5.2. DC-усиление в кристаллах $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$

Оптическая активность в кристаллах  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  примерно в шесть раз выше, чем в  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ , а прикладываемые поля обычно не превышают 10 кВ/см. В этих условиях вращение плоскости поляризации стремится усреднить анизотропную часть взаимодействия внутри резонансного слоя кристалла. Оптическая активность и неоднородность (связанная с поглощением света) способны сильно ослабить пространственное усиление и привести к сложным частотным и угловым зависимостям. Основные вопросы, которые мы исследуем ниже, это а) насколько эффективна рассмотренная в разд. 4 упрощенная модель эффекта и б) каковы оптимальные условия для DC-усиления?

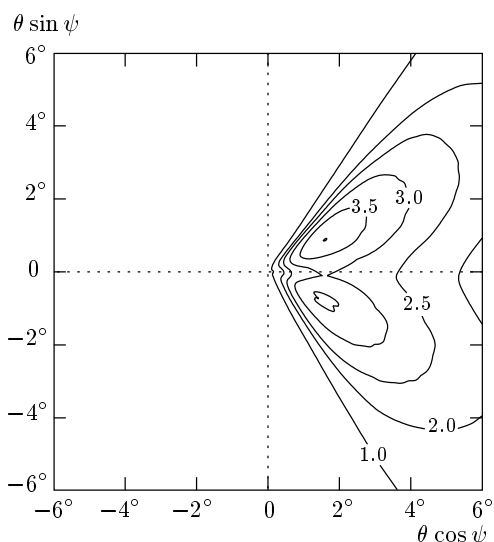
На рис. 10 показаны зависимости фактора усиления слабой волны,  $g = |\mathbf{a}_1(l)|^2/|\mathbf{a}_1(0)|^2$ , от расстройки  $\delta = \Omega/\omega_{\mathbf{K}}(0)$  для продольной и диагональной геометрий. Сплошные кривые 1 и 2 получены численным интегрированием уравнения (33) для  $\mathbf{a}_{1,2}(0) \parallel \mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{a}_{1,2}(0) \perp \mathbf{E}_0$ . Пунктирные кривые отвечают изотропной модели, в которой вектор  $\mathbf{q}(z)$  равен нулю; они не зависят от выбора поляризации. Мы видим, что сплошные кривые показывают осцилляции усиления, связанные с влиянием оптической активности. Такие осцилляции известны из DC-экспериментов с кристаллами  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  [38]. Детали осцилляторного поведения существенно зависят от используемой поляризации. Численные значения усиления больше для диагональной конфигурации, что связано с большим значением изотропной компоненты  $\nu_0$ .

Мы видим, что простая изотропная модель дает

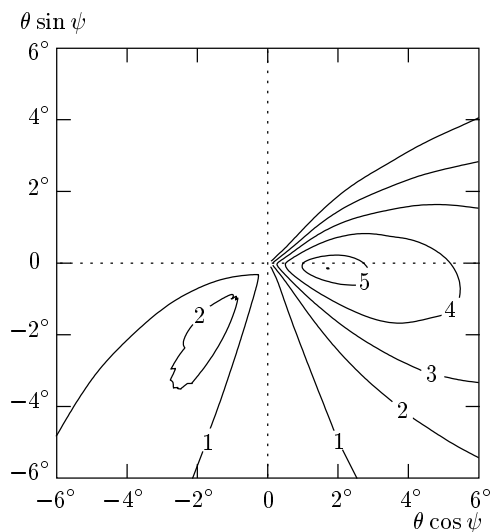
хотя и огрубленное, но в то же время разумное описание эффекта. Физические соображения о подавлении анизотропного вклада во взаимодействие имеют здесь немалую эвристическую ценность. С уменьшением коэффициента поглощения  $\alpha$  и с увеличением  $\rho$  точность изотропной модели возрастает.

Рассмотрим теперь влияние оптической активности и пространственной неоднородности на угловые характеристики усиления. На рис. 11 показано распределение  $\ln g(\theta_{\parallel}, \theta_{\perp})$  для продольной геометрии,  $\mathbf{a}_{1,2}(0) \parallel \mathbf{E}_0$ ,  $l = 4$  мм и пикового для изотропной модели значения  $\Omega$ . Распределение характеризуется двумя максимумами при  $\psi \approx \pm 30^\circ$ . Они отвечают максимумам в зависимости  $\nu_0(\zeta)$  на рис. 2 и обусловлены эластооптическим эффектом. Максимумы распределения  $g(\theta_{\parallel}, \theta_{\perp})$  несколько различны по величине и форме. Изменение входной поляризации сказывается лишь на деталях расщепленных максимумов. Начиная с  $l \approx 4$  мм увеличение толщины кристалла дает лишь слабый рост  $\ln g_{max}(l)$ . Отметим, что продемонстрированное угловое расщепление максимума известно из численных расчетов и экспериментов с кристаллами  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  [39, 40].

Распределение  $\ln g(\theta_{\parallel}, \theta_{\perp})$  для диагональной конфигурации,  $l = 8$  мм, и  $\mathbf{a}_{1,2}(0) \parallel \mathbf{E}_0$  показано на рис. 12. Оно мало отличается от случая  $\mathbf{a}_{1,2}(0) \perp \mathbf{E}_0$ , что указывает на применимость изотропной модели. Главный максимум, расположенный при  $\psi \approx -5^\circ$ , отвечает правому максимуму  $\nu_0(\zeta)$  на рис. 2, в то время как второстепенный максимум ( $\psi \approx -130^\circ$ ) отвечает левому максимуму  $\nu_0(\zeta)$ . Различия в величинах максимумов на рис. 12 связано с различными значениями фактора  $Q(|E_0 \cos \psi|)$ . Рост  $\ln g$  как функции  $l$  сильно замедлен начиная с  $l \approx 4-5$  мм.



**Рис. 11.** Линии уровня  $\ln g(\theta_{\parallel}, \theta_{\perp}) = \text{const}$  для продольной геометрии,  $\alpha = 1.5 \text{ см}^{-1}$ ,  $E_0 = 6 \text{ кВ/см}$ ,  $l = 0.4 \text{ см}$  и  $\mathbf{a}_{1,2} \parallel \mathbf{E}_0$ . Значения материальных параметров отвечают табл. 3



**Рис. 12.** Линии уровня  $\ln g(\theta_{\parallel}, \theta_{\perp}) = \text{const}$  для диагональной конфигурации,  $\mathbf{a}_{1,2} \parallel \mathbf{E}_0$  и  $l = 0.8 \text{ см}$ . Значения остальных параметров такие же, как и для рис. 11

Отметим, наконец, что изотропная модель не может быть приложена к поперечной конфигурации, где  $\nu_0 = 0$ , см. рис. 2. Подавление пространственного усиления неоднородностью и оптической активностью выражено здесь наиболее сильно.

### 6. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Суммируем вначале отличительные свойства и достоинства предложенной теории.

Ее основные соотношения обладают высокой степенью общности. Они покрывают все актуальные оптические конфигурации, включают в себя оптическую активность, наведенное двупреломление, а также накопленные результаты по влиянию эластооптического эффекта. Теория включает также АС- и ДС-механизмы усиления фоторефрактивного нелинейного отклика.

Несмотря на свою общность, уравнения теории весьма компактны и информативны. Такой компромисс достигается благодаря использованию свойств пространственной симметрии, аппарата  $\sigma$ -матриц и введению удобных феноменологических параметров.

Различные по природе факторы не смешиваются в теоретических соотношениях. Такая блоковая структура позволяет инкорпорировать в теорию данные, извлекаемые из эксперимента. Примером может служить использование фактора добротности  $Q$ , который задает степень усиления нелинейного отклика и в то же время определяет наблюдаемые свойства субгармоник в кристаллах семейства силленитов [33, 34].

Соотношения теории удобны для использования разнообразных приближений и упрощенных моделей: приближение заданной накачки, слабой и сильной оптической активности, изотропная модель и др. Они помогают развивать качественные представления о свойствах векторного взаимодействия.

Систематическое рассмотрение частных случаев выходит за рамки этой работы. Зачастую мы могли лишь указать на возможность описания тех или иных эффектов. Тем не менее мы продемонстрировали способность теории предсказывать и объяснять многие свойства усиления в кристаллах  $\text{Vi}_{12}\text{TiO}_{20}$  и  $\text{Vi}_{12}\text{SiO}_{20}$ .

Практически важным является вывод теории о возможности подавления внешним полем отрицательного влияния оптической активности на пространственное усиление в кристаллах  $\text{Vi}_{12}\text{TiO}_{20}$ . Устранение этого влияния способно приводить к увеличению инкремента  $\Gamma$  и упрощению его ориентационных и поляризационных свойств. Сказанное относится как к АС-, так и к ДС-методу усиления.

Укажем на ряд возможностей для обобщения и использования полученных результатов.

1) Четырехволновые схемы, основанные на векторном взаимодействии и включающие в себя оптическую генерацию и фазовое сопряжение [41, 42], являются важным объектом для анализа.

2) Как показано недавно в [43], необычные оптические критические явления развиваются вблизи порога параметрической генерации ВПЗ в кристаллах семейства силленитов. Исследование этих явлений требует применения векторной теории.

3) Описание и интерпретация поляризационных свойств пространственного усиления в конкретных кристаллах заслуживают серьезного внимания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-02-17121).

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. Günter and J.-P. Huignard (eds.), *Photorefractive Materials and Their Applications, Vols. 61, 62 of Topics in Applied Physics*, Springer-Verlag, Berlin (1988, 1989).
2. М. П. Петров, С. И. Степанов, А. В. Хоменко, *Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике*, Наука, Санкт-Петербург (1992).
3. L. Solymar, D. J. Webb, and A. Grunnet-Jepsen, *The Physics and Applications of Photorefractive Materials*, Clarendon Press, Oxford (1996).
4. P. Refregier, L. Solymar, H. Rajbenbach et al., *J. Appl. Phys.* **58**, 45 (1985).
5. S. I. Stepanov and M. P. Petrov, *Opt. Commun.* **53**, 292 (1985).
6. E. Raita, A. A. Kamshilin, V. V. Prokofiev et al., *Appl. Phys. Lett.* **70**, 1641 (1997).
7. A. A. Kamshilin, E. Raita, and A. V. Khomenko, *J. Opt. Soc. Amer. B* **13**, 2536 (1996).
8. E. Shamonina, K. H. Ringhofer, B. I. Sturman et al., *Opt. Lett.* **23**, 1435 (1998).
9. A. A. Kamshilin, E. Raita, and T. Jaaskelainen, *Opt. Rev.* **3**, 443 (1996).
10. А. А. Изванов, А. Е. Мандель, Д. Н. Хатьков и др., *Автометрия* **2**, 80 (1986).
11. С. И. Степанов, С. М. Шандаров, Н. Д. Хатьков, *ФТТ* **29**, 1754 (1987).
12. G. Pauliat, P. Mathey, and G. Roosen, *J. Opt. Soc. Amer. B* **8**, 1942 (1991).
13. S. M. Shandarov, A. Emelyanov, O. Kobozev et al., *SPIE Proc.* **2801**, 221 (1996).
14. M. Zgonik, K. Nakagawa, and P. Günter, *J. Opt. Soc. Amer. B* **12**, 1416 (1995).
15. J. P. Herriau, D. Rojas, J. P. Huignard et al., *Ferroelectrics* **75**, 271 (1987).
16. S. F. Lyuksyutov, B. Buchhave, and M. V. Vasnetsov, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 67 (1997).
17. N. V. Kukhtarev, G. E. Dovgalenko, and V. N. Starkov, *Appl. Phys. A* **33**, 227 (1984).
18. E. Shamonina, G. Cedilnik, M. Mann et al., *Appl. Phys. B* **64**, 49 (1997).
19. E. Shamonina, V. P. Kamenov, K. H. Ringhofer et al., *J. Opt. Soc. Amer. B* **15**, 2552 (1998).
20. V. V. Shepelevich, N. N. Egorov, and V. Shepelevich, *J. Opt. Soc. Amer. B* **8**, 1394 (1994).
21. H. C. Pedersen and P. M. Johansen, *J. Opt. Soc. Amer. B* **12**, 592 (1995).
22. H. Tuovinen, A. A. Kamshilin, and J. Jaaskelainen, *J. Opt. Soc. Amer. B* **14**, 3383 (1997).
23. Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская, *Основы кристаллофизики*, Наука, Москва (1979).
24. Дж. Най, *Физические свойства кристаллов*, Мир, Москва (1969).
25. Л. Д. Ландау Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1996).
26. В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган, *Задачи по квантовой механике*, Наука, Москва (1981).
27. A. G. Apostolidis, S. Mallik, D. Rouéde et al., *Opt. Commun.* **56**, 73 (1985).
28. S. Mallik, D. Rouéde, and A. G. Apostolidis, *J. Opt. Soc. Amer. B* **4**, 1247 (1987).
29. A. Marrakchi, R. V. Johnson, and A. R. Tanguay, *J. Opt. Soc. Amer. B* **3**, 321 (1986).
30. V. V. Shepelevich, S. M. Shandarov, and A. E. Mandel, *Ferroelectrics* **110**, 235 (1990).
31. J. R. Goff, *J. Opt. Soc. Amer. B* **12**, 99 (1995).
32. Р. А. Сурис, Б. И. Фукс, *ФТП* **9**, 1717 (1975).
33. B. I. Sturman, M. Mann, J. Otten et al., *J. Opt. Soc. Amer. B* **10**, 1919 (1993).



34. B. I. Sturman, T. E. McClelland, D. J. Webb et al., J. Opt. Soc. Amer. B **12**, 1621 (1995).
35. C. S. K. Walsh, A. K. Powell, and T. J. Hall, J. Opt. Soc. Amer. B **7**, 288 (1990).
36. P. M. Johansen, H. C. Pedersen, E. V. Podivilov et al., J. Opt. Soc. Amer. B **16**, 103 (1999).
37. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973).
38. D. J. Webb and L. Solymar, Opt. Commun. **83**, 287 (1991).
39. H. C. Ellin and L. Solymar, Opt. Commun. **130**, 85 (1996).
40. H. C. Pedersen, P. E. Andersen, and P. M. Johansen, Opt. Lett. **24**, 2475 (1995).
41. M. Cronin-Golomb, B. Fisher, J. O. White et al., IEEE J. Quantum Electron. **20**, 12 (1984).
42. С. Г. Одулов, М. С. Соскин, А. И. Хижняк, *Лазеры на динамических решетках*, Наука, Москва (1990).
43. E. V. Podivilov, B. I. Sturman, H. C. Pedersen et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 1867 (2000).