

ТРАНСПОРТНОЕ СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ И ЭФФЕКТ ААРОНОВА—БОМА НА ТОРОИДАЛЬНОМ СОЛЕНОИДЕ

*В. В. Любошиц, В. Л. Любошиц**

*Объединенный институт ядерных исследований
141980, Дубна, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 30 марта 2000 г.

Исследуется квантовомеханический эффект Ааронова—Бома при дифракции заряженных частиц на тороидальном соленоиде, внутри которого сосредоточено магнитное поле. Интегральное и дифференциальное сечения упругого рассеяния зависят от магнитного потока внутри соленоида даже при наличии кольцеобразного «черного» экрана, не пропускающего заряженные частицы в область локализации магнитного поля. В эйкональном приближении и в рамках унитарной модели рассеяния с резким скачком парциальных амплитуд получены соотношения, описывающие транспортное сечение упругого рассеяния заряженных частиц на тороидальном соленоиде. Транспортное сечение рассеяния пропорционально средней передаче продольного импульса рассеянной частице и может быть выражено через оператор силы. Показано, что при отсутствии экрана транспортное сечение рассеяния на тороидальном соленоиде действительно определяется только той частью падающего пучка, которая пересекает внутреннюю область тороидального соленоида, где напряженность магнитного поля, а следовательно, и сила Лоренца не равны нулю. В то же время транспортное сечение рассеяния заряженных частиц на тороидальном соленоиде, закрытом кольцеобразным «черным» экраном, не зависит от магнитного потока внутри соленоида и совпадает с транспортным сечением дифракции на самом экране. При этом вклад от рассеяния на отверстии в экране, зависящий от магнитного потока, полностью компенсируется вкладом интерференции амплитуд рассеяния на отверстии и на «черном» экране.

PACS: 03.65.Bz, 03.80.+r, 61.14.-x

1. ВВЕДЕНИЕ

Около 40 лет тому назад Ааронов и Бом [1–3] показали, что магнитное поле, полностью экранированное от проникновения заряженных частиц, влияет на интерференцию двух когерентных пучков этих частиц, охватывающих магнитный поток. Первые работы по эффекту Ааронова—Бома имели определенный методический недостаток, связанный с тем, что в качестве источника магнитного поля рассматривался бесконечный цилиндрический соленоид. Указанный в статьях [4, 5] и более поздней работе [6] переход от бесконечного соленоида к конечному тороидальному соленоиду, топологически разделяющему пространство на область, в которой сосредоточено магнитное поле, и область, в которой оно отсутствует, позволил снять ряд теоретических неоднозначностей и перевести эффект Ааронова—Бома

в разряд реальных квантовомеханических явлений, доступных экспериментальной проверке. Изящные эксперименты Тономуры и др. [7–10] по исследованию дифракции электронов на экранированных тороидальных соленоидах убедительно подтвердили казавшееся загадочным и не имеющее классического аналога «нелокальное» воздействие магнитного поля на заряженные частицы через вектор-потенциал.

Согласно [4, 5], если один из когерентных пучков заряженных частиц проходит через «дыру» соленоида, свернутого в тор, а другой направлен вне этой дыры, то при пропускании тока через замкнутый соленоид между интерферирующими пучками возникает дополнительная разность фаз

$$\alpha = \frac{e\Phi}{\hbar c}, \quad (1)$$

где e — электрический заряд частицы, Φ — магнитный поток, заключенный внутри тороида (вне его

*E-mail: lyubosh@sunhe.jinr.ru

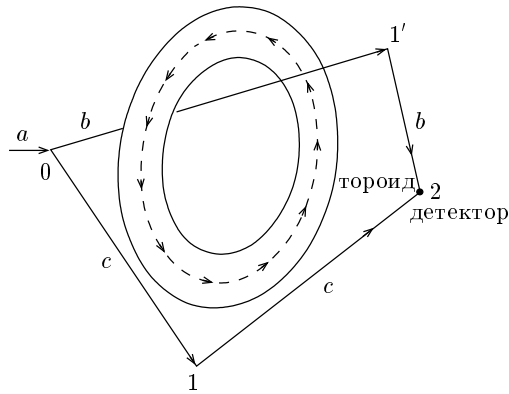


Рис. 1. Схема интерференционного эксперимента. Пучок частиц a с зарядом e расщепляется в точке 0 на два когерентных пучка b и c ; пучок b проходит через «дыру» тороидального соленоида с магнитным потоком Φ (траектория $0 \rightarrow 1' \rightarrow 2$), а пучок c огибает тороид с внешней стороны (траектория $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$). Оба пучка пересекаются и интерферируют в точке 2. Разность фаз составляет $\delta = 2\pi(L_c - L_b)/\lambda + e\Phi/\hbar c$, где L_c — длина пути $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$, L_b — длина пути $0 \rightarrow 1' \rightarrow 2$, λ — дебройлевская длина волны заряженной частицы. Знак магнитного потока зависит от направления магнитного поля \mathbf{B} в соленоиде; в конфигурации, показанной на рисунке, величина $\Phi > 0$

магнитное поле равно нулю [4]) и совпадающий с циркуляцией вектора-потенциала

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}$$

вдоль траекторий, охватывающих магнитный поток (см. рис. 1). На основе соотношения (1) в работах [4, 5] в рамках калибровочно-инвариантного эйконоального приближения было вычислено эффективное сечение фраунгоферовской дифракции заряженных частиц на тороидальном соленоиде, закрытом «черным», полностью поглощающим экраном Σ_1 с отверстием Σ_2 , целиком находящимся внутри проекции «дыры» соленоида на плоскость экрана. При этом предполагалось, что поперечные размеры падающего волнового пакета велики по сравнению с размерами экрана и соленоида. Оказалось, что в этих условиях амплитуда упругого рассеяния имеет структуру

$$f(\mathbf{q}) = f_{\Sigma_1}(\mathbf{q}) - f_{\Sigma_2}(\mathbf{q}) \exp\left(i\frac{e\Phi}{\hbar c}\right), \quad (2)$$

где $f_{\Sigma_1}(\mathbf{q})$ и $f_{\Sigma_2}(\mathbf{q})$ — амплитуды дифракции на сплошных, полностью поглощающих экранах, имеющих соответственно формы Σ_1 и Σ_2 и площади S_1 и

S_2 , $\hbar\mathbf{q}$ — изменение импульса при рассеянии. Согласно оптической теореме, интегральное (полное) сечение упругого рассеяния на тороидальном соленоиде с плоским кольцеобразным экраном, ориентированным перпендикулярно начальному импульсу $\hbar\mathbf{k}$, составляет [4, 5]

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0) - \Delta S = 4S_2 \sin^2\left(\frac{e\Phi}{2\hbar c}\right) + \Delta S. \quad (3)$$

Здесь $k = |\mathbf{k}|$, $\Delta S = S_1 - S_2$ — интегральное сечение дифракции на «черном» кольцеобразном экране, совпадающее с сечением поглощения и равное площади экрана, S_2 — площадь отверстия в экране.

В случае очень тонкого соленоида с конечным магнитным потоком Φ и очень тонкого «черного» экрана имеем

$$\sigma_{el} = 4S \sin^2\left(\frac{e\Phi}{2\hbar c}\right), \quad (4)$$

где $S = S_1 \approx S_2$. Заметим, что такая же формула справедлива и при отсутствии экрана, закрывающего тонкий соленоид [4, 5]. Впоследствии аналогичные результаты были также получены в работах [11, 12].

Ясно, что при наличии «черного» экрана волновая функция заряженных частиц внутри области, где напряженность магнитного поля отлична от нуля, стремится к нулю. С точки зрения классических представлений зависимость эффективного сечения рассеяния заряженной частицы от магнитного поля кажется в этих условиях удивительной. Таким образом, эффект Ааронова—Бома является чисто квантовым явлением, связанным с волновыми свойствами микрочастиц.

Вместе с тем в рамках квантовой теории рассеяния существует физическая величина, пропорциональная силе, действующей на рассеивающуюся частицу, и выражающаяся через среднее значение оператора силы по состоянию рассеяния. Это — так называемое транспортное сечение рассеяния [13–15]. Зависимость транспортного сечения от магнитного потока при недостижимости магнитного поля заряженными частицами была бы совершенно невероятной и противоречила бы закону сохранения импульса. В настоящей работе показано, что транспортное сечение упругого рассеяния на тороидальном соленоиде, закрытом кольцеобразным, полностью поглощающим экраном, не зависит от магнитного потока внутри соленоида. На наш взгляд, этот факт окон-

чательно снимает «парадокс», который обычно связывают с эффектом Ааронова—Бома.

2. ПЕРЕДАЧА ИМПУЛЬСА И ТРАНСПОРТНОЕ СЕЧЕНИЕ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

Если рассеивающий центр облучается потоком частиц I , каждая из которых имеет импульс \mathbf{p} , то на рассеиватель действует сила \mathbf{F} , равная импульсу, передаваемому рассеивателю в единицу времени в процессах поглощения и упругого рассеяния. Эта сила описывается формулой [16]

$$\mathbf{F} = I \left[\mathbf{p}\sigma_{abs} + \int \sigma_{el}(\theta, \phi)(\mathbf{p} - \mathbf{p}')d\Omega \right], \quad (5)$$

где σ_{abs} — сечение поглощения, σ_{el} — сечение упругого рассеяния, \mathbf{p}' — импульс рассеянной частицы, θ и ϕ — полярный и азимутальный углы.

Продольная сила, действующая на рассеиватель, имеет вид

$$F^{(\parallel)} = \mathbf{F} \frac{\mathbf{p}}{p} = Ip(\sigma_{abs} + \sigma_{tr}), \quad (6)$$

где $p = |\mathbf{p}|$, σ_{tr} — транспортное сечение упругого рассеяния, которое определяется как [16–18]

$$\sigma_{tr} = \int \sigma_{el}(\theta, \phi)(1 - \cos\theta)d\Omega. \quad (7)$$

В случае азимутальной симметрии рассеивателю передается только продольный импульс, так что

$$\mathbf{F} = \mathbf{n}F^{(\parallel)},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$ — единичный вектор вдоль направления начального импульса. При этом

$$\sigma_{tr} = 2\pi \int_{-1}^1 |f(\theta)|^2 (1 - \cos\theta) d(\cos\theta), \quad (8)$$

где $f(\theta)$ — амплитуда упругого рассеяния.

Пусть в объеме V находятся N частиц с импульсом \mathbf{p} . Тогда интенсивность I можно представить в виде

$$I = \frac{N}{V} \frac{p}{m}, \quad (9)$$

где m — масса частицы. С учетом формулы (6) на рассеивающуюся частицу, локализованную в объеме V , должна действовать в соответствии с третьим законом механики сила

$$\mathbf{f} = -\frac{\mathbf{F}}{N} = -\frac{p^2}{mV} \mathbf{n}(\sigma_{tr} + \sigma_{abs}). \quad (10)$$

В дальнейшем нас будет интересовать вклад упругого рассеяния

$$\mathbf{f}_{el} = -\frac{p^2}{mV} \mathbf{n}\sigma_{tr}. \quad (11)$$

Согласно теореме Эренфеста [19], в рамках квантовой механики вектор \mathbf{f}_{el} должен рассматриваться как среднее значение оператора внешней силы, действующей на рассеивающуюся частицу; в рассматриваемом случае усреднение следует провести по стационарному состоянию в задаче о рассеянии, нормированному на макроскопический объем V . Таким образом,

$$\mathbf{f}_{el} = \frac{1}{V} \int \psi_{\mathbf{p}}^{(+)*} \hat{\mathbf{f}} \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} d^3r, \quad (12)$$

где $\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}$ — волновая функция непрерывного спектра, имеющая асимптотику в виде суперпозиции плоской волны и расходящейся сферической волны [18], $\hat{\mathbf{f}}$ — оператор силы. Сравнивая выражения (11) и (12), находим [14, 15]

$$\sigma_{tr} = -\frac{1}{2\mathcal{E}} \int \psi_{\mathbf{p}}^{(+)*} (\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}) \psi_{\mathbf{p}}^{(+)} d^3r. \quad (13)$$

Здесь \mathcal{E} — кинетическая энергия частицы. Соотношение (13) следует рассматривать как обобщение теоремы Эренфеста на состояния рассеяния. Впервые результат (13) (в несколько иной форме) был получен в статье Герджоя [13] на основе обобщенной оптической теоремы для изменения квантовомеханических величин в процессе рассеяния (см. также [20]).

Оператор силы $\hat{\mathbf{f}}$, действующей на частицу с зарядом e в произвольном внешнем электромагнитном поле, имеет вид [19]

$$\hat{\mathbf{f}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{2c} \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{H} - \frac{e}{2c} \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{v}}, \quad (14)$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля,

$$\hat{\mathbf{v}} = -\frac{i\hbar\nabla}{m} - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \quad (15)$$

— оператор скорости заряженной частицы, \mathbf{A} — вектор-потенциал. При отсутствии электрического поля (тороидальный соленоид) оператор $\hat{\mathbf{f}}$ соответствует просто силе Лоренца в магнитном поле. Формулы (12) и (13) показывают, что транспортное сечение упругого рассеяния электронов на неэкранированном тороидальном соленоиде отлично от нуля только за счет проникновения электронов внутрь тороида, в область локализации магнитного поля. В

случае тороида с «черным» кольцеобразным экраном электроны не достигают области, в которой сосредоточено магнитное поле, и транспортное сечение должно определяться только формой экрана и не зависеть от величины магнитного потока. Ниже показано, что эти выводы подтверждаются прямыми расчетами транспортного сечения в эйкональном приближении, а также в рамках унитарной модели рассеяния с резким скачком парциальных амплитуд на границах рассеивателя.

3. ТРАНСПОРТНОЕ СЕЧЕНИЕ ФРАУНГОФЕРОВСКОЙ ДИФРАКЦИИ

Если дебройлевская длина волны частицы мала по сравнению с геометрическими размерами мишени, то по аналогии с теорией дифракции Фраунгофера в волновой оптике [21] к описанию рассеяния на малые углы можно применить эйкональный подход. Общая эйкональная формула для амплитуды упругого рассеяния имеет структуру

$$f(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2\rho \eta(\rho) \exp(-i\mathbf{q} \cdot \rho), \quad (16)$$

где

$$\eta(\rho) = 1 - S(\rho), \quad |S(\rho)| \leq 1. \quad (17)$$

Здесь ρ — двумерный вектор, перпендикулярный начальному импульсу $\hbar\mathbf{k}$, $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ — изменение волнового вектора при рассеянии (при малых углах рассеяния $\mathbf{q} \perp \mathbf{k}$, $|\mathbf{q}| = k\theta$, где θ — угол рассеяния). При наличии магнитного поля комплексный параметр $S(\rho)$ приобретает дополнительный фазовый множитель [4, 5]:

$$S(\rho) = S^{(0)}(\rho) \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\rho, z) dz\right), \quad (18)$$

где e — электрический заряд частицы, A_z — проекция вектора-потенциала на направление начального импульса; интегрирование проводится по прямолинейной траектории частицы.

Будем считать, что в транспортное сечение упругого рассеяния так же, как и в полное сечение упругого рассеяния, основной вклад дают малые углы $\theta \ll 1$ ¹⁾. В области малых углов рассеяния элемент телесного угла

$$d\Omega \approx d^2q/k^2,$$

при этом

$$1 - \cos\theta \approx q^2/2k^2.$$

На основе определения (7) с учетом соотношения (16) для амплитуды рассеяния получаем в результате эйкональную формулу для транспортного сечения упругого рассеяния

$$\begin{aligned} \sigma_{tr} &= \frac{1}{2k^4} \int |f(\mathbf{q})|^2 \mathbf{q}^2 d^2\mathbf{q} = \\ &= \frac{1}{2k^2} \int \left| \frac{d\eta(\rho)}{d\rho} \right|^2 d^2\rho. \end{aligned} \quad (19)$$

В то же время для интегрального сечения упругого рассеяния и полного сечения взаимодействия эйкональные формулы имеют вид [18]

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \int d^2\rho |\eta(\rho)|^2, \\ \sigma_{tot} &= 2 \int d^2\rho \operatorname{Re} \eta(\rho). \end{aligned} \quad (20)$$

При фраунгоферовской дифракции на «черном» экране Σ , плоскость которого перпендикулярна начальному импульсу, парциальная амплитуда $\eta(\rho)$ равна единице в точках внутри экрана и равна нулю в точках вне его. При этом

$$\sigma_{el} = \sigma_{tot}/2 = S,$$

где S — площадь экрана. Подчеркнем, что если ширина пограничного слоя b мала по сравнению с линейными размерами экрана, полное сечение упругого рассеяния практически не зависит от структуры границы. Совершенно иная ситуация имеет место для транспортного сечения. Транспортное сечение дифракции полностью определяется характером границы экрана, вблизи которой меняется парциальная амплитуда $\eta(\rho)$ и которой реально передается импульс. Если «черный» экран имеет размытую границу с эффективной шириной

$$b \gg 1/k = \lambda/2\pi,$$

внутри которой $\eta(\rho) = 1$, а вне которой $\eta(\rho) = 0$, то, как ясно из соотношения (19),

$$\sigma_{tr} \sim \frac{L}{2bk^2}, \quad (21)$$

где L — периметр экрана.

¹⁾ Это неверно в случае дифракции на экране с резкой границей (см. [16]).

4. ТРАНСПОРТНОЕ СЕЧЕНИЕ УПРУГОГО РАССЕЙЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ НА ТОРОИДАЛЬНОМ СОЛЕНОИДЕ

4.1. Дифракция Фраунгофера на тороидальном соленоиде без экрана

Вычислим транспортное сечение упругого рассеяния заряженных частиц (электронов) на незранированном круговом тороидальном соленоиде, магнитное поле которого перпендикулярно начальному импульсу. Обозначим через R радиус «дыры» тороида, а через b — радиус витка соленоида (радиус «бублика»). Будем считать, что дебройлевская длина волны электрона мала по сравнению с линейными размерами соленоида, т. е.

$$R \gg 1/k, \quad b \gg 1/k;$$

при этом поперечные размеры падающего волнового пакета

$$\Delta \gg R, \quad \Delta \gg b.$$

В этих условиях основную роль играет рассеяние на малые углы и можно применить эйкональный подход [4, 5].

На рис. 2 изображена проекция кругового тороидального соленоида на плоскость, перпендикулярную магнитному полю и проходящую через начальный импульс электрона (ось z). Магнитный поток внутри соленоида, очевидно, равен

$$\Phi = \pi b^2 H, \quad (22)$$

где H — напряженность магнитного поля. Согласно соотношениям (17) и (18), парциальная амплитуда $\eta(\rho)$ в рассматриваемом случае имеет вид (ср. [4, 5])

$$\eta(\rho) = 1 - \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\rho, z) dz\right), \quad (23)$$

где $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$ — прицельный параметр.

Как известно, независимо от калибровки вектора-потенциала \mathbf{A} его циркуляция $\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}$ по произвольному контуру равна магнитному потоку, который пронизывает этот контур. Ввиду калибровочной инвариантности сечения рассеяния на любой конечный угол мы можем без потери общности переписать формулу (23) в виде

$$\eta(\rho) = 1 - \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \Phi(\rho)\right), \quad (24)$$

где Φ — магнитный поток через плоскость, ограниченную прямой с прицельным параметром ρ и по-

луокружностью бесконечного радиуса. В результате имеем

$$\begin{aligned} \eta(\rho) &= \eta_1 = 0, \quad \rho > R + 2b, \\ \eta(\rho) &= 1 - \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \Phi(x)\right), \quad R \leq \rho < R + 2b, \\ \eta(\rho) &= \eta_2 = 1 - \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \Phi\right), \quad \rho < R. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $e = -|e|$ — заряд электрона,

$$\Phi(x) = \Phi \left(1 - \frac{S(x)}{\pi b^2}\right), \quad 0 \leq x = (\rho - R) \leq 2b, \quad (26)$$

$S(x)$ — площадь заштрихованного на рис. 2 кругового сегмента высотой x , Φ — полный магнитный поток внутри тороидального соленоида, который определяется согласно (22); в конфигурации, изображенной на рис. 2, $\Phi > 0$.

При аксиальной симметрии задачи соотношение (19) для транспортного сечения принимает вид

$$\sigma_{tr} = \frac{\pi}{k^2} \int_0^{\infty} \left| \frac{d\eta(\rho)}{d\rho} \right|^2 \rho d\rho. \quad (27)$$

Подставляя в формулу (27) значения парциальных амплитуд (24), (25), находим

$$\sigma_{tr} = \frac{\pi}{k^2} \left(\frac{e}{\hbar c}\right)^2 \int_0^{2b} \left(\frac{d\Phi(x)}{dx}\right)^2 (R+x) dx. \quad (28)$$

Легко видеть, что

$$\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{\Phi}{\pi b^2} \frac{dS(x)}{dx} = -\frac{\Phi}{\pi b^2} l(x),$$

где

$$l(x) = 2\sqrt{b^2 - (b-x)^2} = 2\sqrt{2bx - x^2} \quad (29)$$

— длина хорды кругового сегмента высотой x . С учетом (29) элементарное интегрирование приводит к результату

$$\sigma_{tr} = \frac{16}{3\pi k^2} \left(\frac{e\Phi}{\hbar c}\right)^2 \left(\frac{R}{b} + 1\right). \quad (30)$$

В случае очень тонкого соленоида ($b \ll R$) формула для транспортного сечения принимает вид

$$\sigma_{tr} = \frac{16R}{3\pi k^2 b} \left(\frac{e\Phi}{\hbar c}\right)^2. \quad (31)$$

Следует подчеркнуть, что выражение (31) справедливо только при условии

$$R \gg b \gg 1/k = \lambda/2\pi.$$

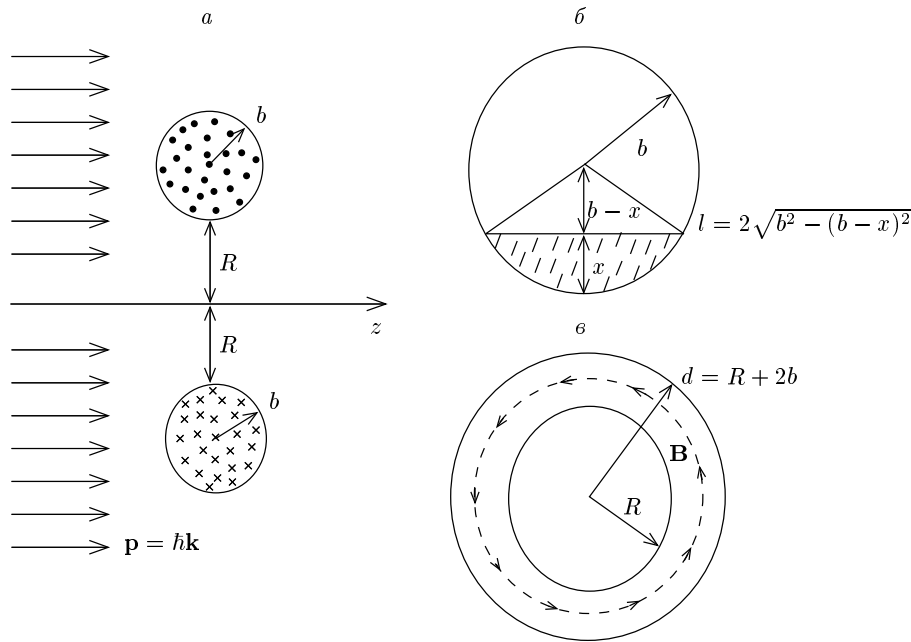


Рис. 2. Рассеяние электронов на тороидальном соленоиде. *a, б* — Разрез кругового тороидального соленоида в плоскости, проходящей через ось симметрии *z*; *R* — радиус «дыры» тороида, *b* — радиус витка, *x* — высота сегмента, отсекаемого прямыми, пересекающими область локализации магнитного поля и параллельными оси *z*. На тороидальный соленоид падает широкий пучок электронов с импульсом $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, параллельным оси симметрии тороида. Магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка: в верхнем витке оно «выходит» из этой плоскости, в нижнем витке — «входит» в нее. *в* — Разрез кругового тороидального соленоида в плоскости, перпендикулярной оси симметрии и проходящей через центр тороида

Ситуация, когда $b < 1/k$, будет рассмотрена ниже (разд. 4.3).

Мы видим, что транспортное сечение упругого рассеяния электронов на неэкранированном тороидальном соленоиде определяется той областью прицельных параметров ($R < \rho < R + 2b$), в которой траектории электронов пересекают магнитное поле внутри соленоида. Заметим, что с учетом (22) и (26) выражение (28) для транспортного сечения рассеяния можно переписать в виде

$$\sigma_{tr} = \pi \int_0^{2b} (R+x) \left(\frac{el(x)H}{pc} \right)^2 dx, \quad (32)$$

где $p = \hbar k$ — модуль импульса электрона, $l(x)$ — длина его пути в магнитном поле, которая определяется по формуле (29). Величина

$$\theta_0 = \frac{el(x)H}{pc} \quad (33)$$

имеет смысл классического угла отклонения заря-

женной частицы на прямолинейном пути $l(x)$ в результате действия силы Лоренца

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}],$$

перпендикулярной импульсу \mathbf{p} и магнитному полю \mathbf{H} ($\theta_0 = Fl(x)/pv$). Таким образом, соотношения (28), (30) и (31) имеют классический характер.

Ранее в работе [17] было показано, что в эйкональном приближении транспортное сечение рассеяния на центрально-симметричном потенциале описывается классической формулой

$$\sigma_{tr} = \pi \int_0^\infty \theta_0^2(\rho) \rho d\rho \approx 2\pi \int_0^\infty (1 - \cos \theta_0(\rho)) \rho d\rho$$

(хотя при этом для вычисления дифференциального и полного сечений упругого рассеяния классическая теория может быть неприменима!). Мы убедились в том, что этот результат справедлив и при наличии магнитного поля.

Подчеркнем, что в отличие от транспортного сечения полное сечение упругого рассеяния электронов на очень тонком тороидальном соленоиде

($b \ll R$) определяется в основном траекториями, не пересекающими область локализации магнитного поля (прицельные параметры $\rho < R$; на пути электронов отличен от нуля только вектор-потенциал!). С учетом соотношений (25) формулы (20) приводят к результату, полученному ранее в работах [4, 5]:

$$\sigma_{el} = \sigma_{tot} = |\eta_2|^2 \int d^2\rho = 4\pi R^2 \sin^2 \left(\frac{e\Phi}{2\hbar c} \right)$$

(см. также формулу (4) с $S_2 = \pi R^2$).

4.2. Дифракция Фраунгофера на тороидальном соленоиде с «черным» экраном

Как было показано в работах [4, 5], в случае тороидального соленоида произвольной формы, закрытого «черным» экраном с отверстием, которое проектируется на «дыру» тороида, дифракционная картина зависит от магнитного потока Φ , хотя заряженные частицы не проникают внутрь соленоида, т. е. в область, в которой сосредоточено магнитное поле; при этом зависимость сечения упругого рассеяния от магнитного поля определяется размерами и формой отверстия. Полное сечение упругого рассеяния на экранированном тороидальном соленоиде дается формулой (3) (см. соотношение (14) статьи [5]).

Найдем теперь транспортное сечение упругого рассеяния электронов на таком соленоиде, пользуясь соотношением (19). Согласно формулам (17) и (18), парциальные амплитуды $\eta(\rho)$ в рассматриваемом случае имеют вид

$$\eta(\rho) = 1 - S^{(0)}(\rho) \exp \left(i \frac{e}{\hbar c} \Phi(\rho) \right), \quad (34)$$

где, как и в формуле (24), $\Phi(\rho)$ — магнитный поток, охватываемый замкнутым контуром, составленным из прямолинейной траектории с прицельным параметром ρ и полуокружности с радиусом, стремящимся к бесконечности; прицельный параметр здесь является двумерным вектором, перпендикулярным начальному импульсу электрона $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Легко видеть, что если прицельные параметры отвечают прямолинейным траекториям, проходящим вне экрана с внешней стороны, то

$$S^{(0)}(\rho) = 1, \quad \Phi(\rho) = 0, \quad \eta(\rho) = \eta_1 = 0.$$

Если прицельные параметры соответствуют прямолинейным траекториям, проходящим через отверстие в экране, то

$$S^{(0)}(\rho) = 1, \quad \Phi(\rho) = \Phi, \quad \eta(\rho) = \eta_2,$$

где η_2 дается третьей формулой (25). Так как значения η_1 и η_2 постоянны, то, согласно формуле (19), транспортное сечение упругого рассеяния электронов (и любых заряженных частиц) на экранированном соленоиде определяется только теми траекториями, которые пересекают кольцеобразный экран. Поскольку по условию задачи электроны не проникают внутрь расположенного за экраном тороидального соленоида, тем траекториям, которые при отсутствии экрана прошли бы через область, в которой сосредоточено магнитное поле, соответствуют значения

$$S^{(0)}(\rho) = 0, \quad \eta(\rho) = 1.$$

Для траекторий, пересекающих экран в окрестности его внутренней границы,

$$\eta(\rho) = 1 - S^{(0)}(\rho) \exp \left(i \frac{e\Phi}{\hbar c} \right), \quad (35)$$

а для траекторий, пересекающих экран в окрестности его внешней границы,

$$\eta(\rho) = 1 - S^{(0)}(\rho), \quad (36)$$

причем внутри экрана $S^{(0)}(\rho) = 0$, а вблизи его границ $1 > |S^{(0)}(\rho)| > 0$.

Мы видим, что величина

$$\left| \frac{d\eta(\rho)}{d\rho} \right|^2 = \left| \frac{dS^{(0)}(\rho)}{d\rho} \right|^2, \quad (37)$$

входящая в формулу (19) для транспортного сечения, не зависит от магнитного потока внутри соленоида. Таким образом, транспортное сечение упругого рассеяния электронов на тороидальном соленоиде, закрытом непроницаемым кольцеобразным экраном, в отличие от полного сечения рассеяния, не зависит от магнитного поля и совпадает с транспортным сечением дифракции на самом экране. Величина транспортного сечения, как уже говорилось в разд. 3, зависит от структуры переходного слоя и пропорциональна суммарной длине внешней и внутренней границ кольца (см. оценку (21)).

Заметим, что с учетом соотношения (2) для амплитуды рассеяния транспортное сечение упругого рассеяния заряженных частиц на тороидальном соленоиде, закрытом экраном Σ_1 с отверстием Σ_2 , представляет собой просто сумму транспортных сечений упругого рассеяния на сплошных экранах Σ_1 и Σ_2 . Действительно, при вычислении транспортного сечения рассеяния на основе эйкональной формулы (19) с амплитудой (2) вклад интерференции амплитуд $f_{\Sigma_1}(\mathbf{q})$ и $f_{\Sigma_2}(\mathbf{q})$, имеющих дифракционную структуру (16), исчезает, поскольку по условию

задачи производные $d\eta_1/d\rho$ и $d\eta_2/d\rho$ отличны от нуля только вблизи границ соответствующих областей Σ_1 и Σ_2 , т. е. в неперекрывающихся интервалах прицельных параметров. В итоге исчезает и зависимость от магнитного потока в соленоиде.

4.3. Унитарная модель дифракции на тороидальном соленоиде

Выше мы считали, что область малых углов $\theta \ll 1$ дает основной вклад не только в полное сечение упругого рассеяния, но и в транспортное сечение. Это верно, если дебройлевская длина волны $\lambda = 2\pi/k$ мала по сравнению как с размерами мишени L , так и с шириной переходного слоя b , в котором меняются парциальные амплитуды. В случае очень резкой границы мишени, когда $L \gg \lambda > b$, результаты для полного сечения упругого рассеяния, полученные с помощью эйконального подхода, остаются в силе, но при вычислении транспортного сечения существенную роль играет уже область углов $\theta \sim 1$, в которой эйкональное приближение неприменимо.

Чтобы учесть вклад больших углов рассеяния, рассмотрим, следуя работе [16], модель дифракции электронов на бесконечно тонком тороидальном соленоиде с магнитным потоком Φ , которая полностью воспроизводит результаты эйконального подхода для дифференциального сечения рассеяния в области малых углов и для полного сечения рассеяния и вместе с тем строго удовлетворяет условию унитарности S-матрицы. В рамках такой модели амплитуда упругого рассеяния электронов на неэкранированном круговом тороиде с радиусом «дыры» $R \gg 1/k$ и магнитным полем в плоскости, перпендикулярной начальному импульсу, имеет вид

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \left[1 - \exp\left(i\frac{e\Phi}{\hbar c}\right) \right] \times \sum_{l=0}^n (2l+1)P_l(\cos\theta), \quad (38)$$

где $P_l(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, n — целая часть величины $kR \gg 1$. Легко видеть, что амплитуда (38) удовлетворяет оптической теореме:

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0) = 2\pi \int_{-1}^1 |f(\theta)|^2 d(\cos\theta) = \\ &= 2\frac{\pi}{k^2} (n+1)^2 \left[1 - \cos\left(\frac{e\Phi}{\hbar c}\right) \right], \quad (39) \end{aligned}$$

т. е.

$$\sigma_{el} \approx 4\pi R^2 \sin^2(e\Phi/2\hbar c)$$

(см. соотношение (4)).

При вычислении транспортного сечения удобно воспользоваться известным соотношением для полиномов Лежандра [22] и представить амплитуду рассеяния (38) в виде

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} (n+1) \frac{P_n(\cos\theta) - P_{n+1}(\cos\theta)}{1 - \cos\theta} \times \left[1 - \exp\left(i\frac{e\Phi}{\hbar c}\right) \right]. \quad (40)$$

С учетом ортонормированности полиномов Лежандра находим [16]

$$\begin{aligned} \sigma_{tr} &= 2\pi \int_{-1}^1 |f(\theta)|^2 (1 - \cos\theta) d(\cos\theta) = \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (n+1) \sin^2\left(\frac{e\Phi}{2\hbar c}\right) \approx \frac{4\pi R}{k} \sin^2\left(\frac{e\Phi}{2\hbar c}\right). \quad (41) \end{aligned}$$

Выражение (41) существенно отличается от результата (31) для соленоида с конечной толщиной $b \ll R$, $b \gg 1/k$.

Пусть теперь тороидальный соленоид закрыт «черным», полностью поглощающим электроны экраном, имеющим форму кругового кольца с внешним радиусом a и внутренним радиусом d ($a > R$, $d < R$). Будем, как и прежде, считать, что плоскость экрана перпендикулярна начальному импульсу электронов $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$; при этом

$$ka \gg 1, \quad kd \gg 1.$$

В рамках обсуждаемой унитарной модели амплитуда упругого рассеяния электронов на экранированном тороидальном соленоиде записывается в виде (ср. с формулой (2))

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^n (2l+1)P_l(\cos\theta) - \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^m (2l+1)P_l(\cos\theta) \exp\left(i\frac{e\Phi}{\hbar c}\right), \quad (42)$$

или

$$f(\theta) = f_{scr}(\theta) + \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^m P_l(\cos\theta) \times \left[1 - \exp\left(i\frac{e\Phi}{\hbar c}\right) \right], \quad (43)$$

где

$$f_{scr}(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=m+1}^n (2l+1)P_l(\cos\theta)$$

— амплитуда дифракции на «черном» кольце [16]. Здесь n и m — целые части соответственно параметров ka и kd , причем $n \gg 1$, $m \gg 1$.

С учетом (42), (43) находим проинтегрированное по углам сечение упругого рассеяния:

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \frac{\pi}{k^2}(n+1)^2 + \frac{\pi}{k^2}(m+1)^2 - \\ &- \frac{2\pi}{k^2}(m+1)^2 \cos\left(\frac{e\Phi}{\hbar c}\right) = \\ &= 4\pi d^2 \sin^2\left(\frac{e\Phi}{2\hbar c}\right) + \pi(a^2 - d^2). \end{aligned} \quad (44)$$

Подчеркнем, что выражение (44) полностью согласуется с формулой (3), полученной в работах [4,5] в рамках эйконального подхода (в данном случае $S_2 = \pi d^2$, $\Delta S = \pi(a^2 - d^2)^2$).

Определим теперь транспортное сечение упругого рассеяния электронов на экранированном тороидальном соленоиде. Амплитуду упругого рассеяния (42) можно представить в виде, аналогичном (40):

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{i}{2k} \frac{P_n(\cos\theta) - P_{n+1}(\cos\theta)}{1 - \cos\theta} - \\ &- \frac{i}{2k} \exp\left(i\frac{e\Phi}{\hbar c}\right) \frac{P_m(\cos\theta) - P_{m+1}(\cos\theta)}{1 - \cos\theta}, \end{aligned} \quad (45)$$

где $n > m$, $(n - m) \gg 1$. Комбинируя в формуле для транспортного сечения

$$\sigma_{tr} = 2\pi \int_{-1}^1 |f(\theta)|^2 (1 - \cos\theta) d(\cos\theta)$$

эквивалентные выражения (42) и (45) для амплитуды $f(\theta)$, убеждаемся в том, что вследствие ортогональности полиномов Лежандра разного порядка интерференционный член, содержащий магнитный поток, после интегрирования по углам рассеяния исчезает. При этом

$$\sigma_{tr} = \frac{\pi(n+1)}{k^2} + \frac{\pi(m+1)}{k^2} = \frac{\pi}{k}(a+d). \quad (46)$$

Это выражение, очевидно, совпадает с транспортным сечением дифракции на «черном» кольце; действительно, амплитуда упругого рассеяния на таком кольце описывается формулами (42), (43) или (45) при значении $\Phi = 0$.

²⁾ Амплитуда (42) удовлетворяет условию унитарности

$$\frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(0) = 2\pi a^2 - 2\pi d^2 \cos\left(\frac{e\Phi}{\hbar c}\right) = \sigma_{el} + \Delta S,$$

где σ_{el} определяется согласно (44), $\Delta S = \pi(a^2 - d^2)$ — сечение поглощения на «черном» кольце.

Таким образом, в обсуждаемой унитарной модели дифракции с резкими скачками парциальных амплитуд так же, как и в рамках эйконального подхода, транспортное сечение упругого рассеяния заряженных частиц на тороидальном соленоиде, защищенном от их проникновения полностью поглощающим экраном, не зависит от магнитного поля внутри соленоида. Вклад в транспортное сечение от дифракции на отверстиях в экране компенсируется вкладом в транспортное сечение интерференции амплитуд упругого рассеяния на отверстиях и самом экране (см. формулу (43)).

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Изложенные выше результаты являются, на наш взгляд, принципиально важными для понимания эффекта Ааронова—Бома и имеют общий характер. В соответствии с теоремой Эренфеста для состояний рассеяния (см. соотношение (13)) зависимость транспортного сечения рассеяния от магнитного поля внутри соленоида может быть обусловлена только прямым силовым воздействием магнитного поля на заряженные частицы, и конкретные расчеты подтверждают этот вывод. При рассеянии заряженных частиц на экранированном тороидальном соленоиде падающий пучок разделяется кольцеобразным экраном на две когерентные части, огибающие магнитный поток в соленоиде, интерференция между которыми приводит к зависимости дифференциального и интегрального сечений упругого рассеяния от магнитного поля внутри соленоида. Это — чисто квантовый эффект, связанный с волновыми свойствами микрочастиц. Но в транспортном сечении упругого рассеяния на экранированном соленоиде, пропорциональном, как и в классической теории, средней передаче продольного импульса рассеянной частице, зависимость от магнитного потока полностью исчезает. В то же время при отсутствии экрана транспортное сечение рассеяния заряженных частиц на соленоиде связано только с той частью пучка, которая проходит через область локализации магнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
2. Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **123**, 1511 (1961).

3. Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **130**, 1625 (1963).
4. В. Л. Любошиц, Я. А. Смородинский, Препринт ОИЯИ Р2-11189, Дубна (1978).
5. В. Л. Любошиц, Я. А. Смородинский, *ЖЭТФ* **75**, 40 (1978).
6. H. J. Lipkin, *Phys. Rev. D* **23**, 1466 (1981).
7. A. Tonomura, T. Matsuda, R. Suzuki et al., *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1443 (1982).
8. A. Tonomura, N. Osahabe, T. Matsuda et al., *Phys. Rev. Lett.* **56**, 792 (1986).
9. N. Osahabe, T. Matsuda, T. Kawasaki et al., *Phys. Rev. A* **34**, 815 (1986).
10. M. Peshkin and A. Tonomura, *The Aharonov–Bohm effect*, Springer, Berlin (1989).
11. G. N. Afanasjev, *J. Phys. A* **21**, 2095 (1988).
12. G. N. Afanasjev and V. M. Shilov, *J. Phys. A* **22**, 5195 (1989).
13. E. Gerjuoy, *J. Math. Phys.* **6**, 993 (1965).
14. R. A. Brown, *Phys. Lett. A* **115**, 78 (1986).
15. R. A. Brown, *J. Phys. A* **20**, 3309 (1987).
16. В. Л. Любошиц, *ЯФ* **55**, 1996 (1992).
17. М. И. Дьяконов, А. В. Хаецкий, *ЖЭТФ* **99**, 1066 (1991).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989), §§ 126, 131, 152.
19. Д. И. Блохинцев, *Основы квантовой механики*, Высшая школа, Москва (1961), §§ 32, 56.
20. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971), гл. II, § 4.
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988), § 61.
22. И. С. Рыжик, И. М. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, ГИФМЛ, Москва (1963), с. 1040.