

# СКЛЕИВАНИЕ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ВИХРЕЙ ЧЕРЕНКОВСКИ-ЗАХВАЧЕННЫМИ ВОЛНАМИ СВИХАРТА

*А. С. Малишевский\*, В. П. Силин, С. А. Урюпин*

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
117924, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 1 ноября 1999 г.

Для бездиссипативных джозефсоновских переходов в рамках аналитической модели Обри—Волкова сформулирована теория движущихся с постоянной скоростью джозефсоновских вихрей-мультикинков. Предсказано явление черенковского захвата волн Свихарта движущимися вихрями. Дано описание структуры вихрей, обусловленной захваченными ими волнами. Предсказано явление дискретности собственных скоростей движущихся вихрей, обусловленное структурой захваченных вихрями свихартовских волн. Выдвинута концепция склеивания элементарных джозефсоновских вихрей свихартовскими волнами в мультивихревые когерентно сфазированные структуры.

PACS: 74.50.+r, 74.60.Ge

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к изучению движущихся джозефсоновских вихрей, несущих  $n > 1$  квантов магнитного потока, называемых  $2\pi n$ -кинками, в длинных джозефсоновских переходах возник сравнительно давно [1]. Для дискретных джозефсоновских переходов важные теоретические результаты были получены в работе [2]. Определенный прогресс в описании длинных джозефсоновских переходов был получен в теории, учитывающей сильные поверхностные потери, обусловленные нормальными электронами [3]. Однако в [3], во-первых, не учитывался случай весьма низких температур, когда нормальные электроны сверхпроводника отсутствуют, а во-вторых, не были обнаружены явления, которые предсказываются нашей работой (см. ниже). Надо сказать, что для длинных джозефсоновских переходов без диссипации аналитическое описание движущихся с постоянной скоростью джозефсоновских вихрей ( $4\pi$ -кинков) было дано в работах [4–6], основанных на нелокальной джозефсоновской электродинамике, применявшейся к случаю весьма большой критической плотности джозефсоновского тока. Последнее явилось причиной того, что результаты [4–6] не привлекли большого внимания. Также в рамках нелокаль-

ной джозефсоновской электродинамики в работе [7] численно было установлено наличие движущегося  $4\pi$ -кинка. Важным шагом, сделанным в работе [7], было рассмотрение такого приближения нелокальной джозефсоновской электродинамики, которое отвечает слабой нелокальности, учитывающей в уравнении для разности фаз наряду со второй также и четвертую пространственную производную. Как показано в нашей работе, такое приближение пригодно для описания джозефсоновских вихрей в джозефсоновских переходах с небольшой критической плотностью тока. Однако работа [7] также не привлекла к себе внимания. Следующий шаг был сделан в работе [8], где в рамках нелокальной джозефсоновской электродинамики снова был рассмотрен  $4\pi$ -кинк. Здесь следует сказать, что численное рассмотрение в работах [7, 8] приводило к вполне определенной скорости движения  $4\pi$ -кинков, что отвечало аналитическим результатам работ [4–6]. В работе [8] аналогичное свойство установлено для впервые полученного численно  $6\pi$ -кинка, отвечающего джозефсоновскому вихрю, несущему три кванта магнитного потока. Очень важно отметить обнаружение в работе [8] наряду с  $4\pi$ -кинком с монотонной пространственной зависимостью также  $4\pi$ -кинка с немонотонной зависимостью. Мысль о существовании подобного  $6\pi$ -кинка высказана в [8]. Отметим, что немонотонный и монотонный  $4\pi$ -кинки оказались движущимися

\*E-mail: malish@sci.lebedev.ru

щимися с разными скоростями. Это в какой-то мере перекликается с результатами работы [2] для дискретной модели джозефсоновского перехода.

Накопившийся на сегодняшний день материал по теории движущихся джозефсоновских вихрей в длинных бездиссипативных джозефсоновских переходах ставит перед нами целый ряд вопросов. Среди них: 1) вопрос о возможности существования различных мультикинков, 2) вопрос о скоростях их движения, 3) вопрос о причинах наличия определенных скоростей такого движения. Уже на основании результатов работ [4–8] по нелокальной джозефсоновской электродинамике можно утверждать, что нелокальная джозефсоновская электродинамика в отличие от стандартной локальной джозефсоновской электродинамики в ряде случаев преуспела в отыскании мультикинков в длинных джозефсоновских переходах без диссипации. Далее следует подчеркнуть, что стандартная джозефсоновская электродинамика длинных джозефсоновских переходов не описывает имеющее решающее для понимания предсказанных ниже эффектов физическое явление черенковского взаимодействия джозефсоновских вихрей с волнами Свихарта, поскольку в стандартной джозефсоновской электродинамике скорость движения вихря всегда меньше фазовой скорости волн. Именно такие физические соображения являются обоснованием для использования в нашей статье нелокальной джозефсоновской электродинамики. Содержание нашей статьи свидетельствует об адекватности избранной нами физической модели нелокальной джозефсоновской электродинамики для описания предсказанных нами явлений. В настоящей работе представлены физические результаты, предсказывающие качественно новые свойства движущихся джозефсоновских вихрей. В рассмотрении используется модель Обри–Волкова [9–12] (см. также [13]), в которой вместо обычной синусной нелинейности для связи сверхпроводящего тока  $j$  с разностью фаз  $\varphi$  куперовских пар по разные стороны джозефсоновского перехода используется соотношение

$$j(\varphi) = j_c \{(\varphi/\pi) - 2I[(\varphi/2\pi) + 1/2]\}, \quad (1.1)$$

где  $j_c$  — критическая плотность тока,  $I[x]$  — целая часть числа  $x$ . Нелинейность (1.1) отвечает указанной в [14]. Предварительные результаты для  $4\pi$ - и  $6\pi$ -кинков в модели Обри–Волкова (1.1) опубликованы нами в [15, 16].

В обычной локальной джозефсоновской электро-

динамике для описания свободных одномерных вихрей используется уравнение

$$\frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \lambda_j^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \pi \frac{j(\varphi)}{j_c} = 0, \quad (1.2)$$

где часто в качестве функции  $j(\varphi)$  выбирается  $\pi^{-1} j_c \sin \varphi$ . Здесь и ниже, следуя модели Обри–Волкова, будем работать с выражением (1.1). В уравнении (1.2)

$$\omega_j = 4(|e|j_c d/\hbar \epsilon)^{1/2}, \quad (1.3)$$

$$\lambda_j = c(\hbar/\lambda|e|j_c)^{1/2}/4 \quad (1.4)$$

— соответственно джозефсоновская частота и длина, которые определены несколько иначе, чем это сделано в работе [11], что продиктовано возможностью наглядно записать вихревые решения в форме, подобной общепринятой. В формулах (1.3) и (1.4)  $2d$  — ширина несверхпроводящего слоя,  $\epsilon$  — его диэлектрическая постоянная,  $e$  — заряд электрона,  $c$  — скорость света,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $\lambda$  — лондонская глубина проникновения.

Модель Обри–Волкова предполагает не только использование соотношения (1.1), но также и применение преобразования Фурье при нахождении необходимых решений. Это, в частности, позволяет рассматривать разрывные функции  $\text{sign } x$  (знаковая функция),  $\theta(x)$  (функция Хевисайда) и  $I[x]$  как определенные в соответствии с преобразованием Фурье, когда значения функций на скачке даются полусуммой значений слева и справа от разрыва. Это уточнение делает применяемый нами ниже математический аппарат достаточно понятным.

Следует подчеркнуть то важнейшее преимущество модели Обри–Волкова по сравнению с обычной моделью синусной нелинейности, которое выражается в том, что модель Обри–Волкова позволяет при решении нелинейных задач нелокальной джозефсоновской электродинамики успешно и продуктивно пользоваться преобразованием Фурье, которое обычно обеспечивает успех решения линейных задач. В то же время проблематика отыскания нелинейных состояний решается с помощью аккуратной трактовки разрывных функций. Соответствующая простота модели Обри–Волкова является, с одной стороны, ее преимуществом, с другой, — ее недостатком. Именно использование соотношения (1.1) модели Обри–Волкова вместо других возможных нелинейностей (ср. [14]) в ряде случаев позволяет говорить лишь о качественном описании джозефсоновских вихрей. Это указывает, в частности, на

границы применимости модели Обри—Волкова. Укажем на одно известное качественное свойство модели Обри—Волкова. Именно, в нелокальной джозефсоновской электродинамике такая модель запрещает (см. ниже) существование свободно движущихся  $2\pi$ -кинков. Однако и этот недостаток можно считать достоинством, ибо он указывает путь совершенствования модели.

Для сравнения с получаемыми ниже результатами укажем, что решение уравнений (1.1) и (1.2), описывающее движущийся с постоянной скоростью  $v$  джозефсоновский вихрь, несущий элементарный поток (квант)  $\phi_0 \equiv \pi\hbar c/|e|$  магнитного поля ( $2\pi$ -кинк), имеет вид

$$\varphi_{2\pi}(z - vt) = \pi + \pi \left[ 1 - \exp\left(-\frac{|z - vt|}{\lambda_j \sqrt{1 - v^2/v_s^2}}\right) \right] \text{sign}(z - vt), \quad (1.5)$$

где  $v_s = \omega_j \lambda_j$  — скорость Свихарта. Этому решению отвечают следующие выражения для напряженности магнитного поля в несверхпроводящем слое джозефсоновского перехода (ср. [11]):

$$H_y(z - vt) = -\frac{\phi_0}{4\pi\lambda\lambda_j} \exp\left(-\frac{|z - vt|}{\lambda_j \sqrt{1 - v^2/v_s^2}}\right), \quad (1.6)$$

и энергии вихря

$$W = W_{2\pi}/\sqrt{1 - v^2/v_s^2}, \quad (1.7)$$

где  $W_{2\pi} \equiv \phi_0^2/32\pi\lambda\lambda_j$  — энергия покоящегося  $2\pi$ -кинка.

В настоящей работе изложен общий подход для теоретического исследования  $2\pi n$ -кинков (разд. 2). В разд. 3 формулируется общее положение о явлении черенковского захвата обобщенных волн Свихарта движущимися джозефсоновскими вихрями. Разделы 4, 5 посвящены структуре  $4\pi$ - и  $6\pi$ -кинков, несущих в себе захваченные волны, что определяет спектр собственных скоростей джозефсоновских вихрей. В разд. 6 рассмотрены ранее не обсуждавшиеся  $8\pi$ -кинки — джозефсоновские вихри, несущие четыре кванта магнитного потока.

Среди выводов нашей статьи помимо констатации факта установления новых вихревых решений джозефсоновской электродинамики следует подчеркнуть теоретическое предсказание явления черенковского захвата волн Свихарта джозефсоновскими вихрями, которое определяет спектр значений скоростей свободного движения вихрей и предсказание явления склеивания джозефсоновских вихрей захваченными волнами Свихарта.

## 2. БЕГУЩИЙ $2\pi n$ -КИНК

Будем рассматривать бегущие с постоянной скоростью  $v$  одномерные вихри, для которых  $\varphi(z, t) = \psi(z - vt) \equiv \psi(\zeta)$  и для которых в рамках нелокальной джозефсоновской электродинамики имеет место следующее уравнение:

$$F(\psi) + \frac{v^2}{\omega_j^2} \frac{d^2\psi(\zeta)}{d\zeta^2} = \frac{l}{\pi} \frac{d}{d\zeta} \times \times \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' K_0\left(\frac{|\zeta - \zeta'|}{\lambda}\right) \frac{d\psi(\zeta')}{d\zeta'}. \quad (2.1)$$

Здесь  $K_0(x)$  — функция Макдональда,  $l \equiv \lambda_j^2/\lambda$ ,  $F(\psi)$  отвечает формуле (1.1):

$$F(\psi) = \psi - 2\pi I[(\psi/2\pi) + 1/2]. \quad (2.2)$$

Бегущий  $2\pi n$ -кинк определяется граничными условиями на бесконечности:  $\psi(-\infty) = 0$ ,  $\psi(+\infty) = 2\pi n$  и следующим набором условий:

$$\psi(\xi_1) = \pi, \quad \psi(\xi_2) = 3\pi, \dots, \psi(\xi_n) = (2n - 1)\pi. \quad (2.3)$$

Последний набор формул и (1.4) позволяют записать:

$$I[(\psi/2\pi) + 1/2] = \sum_{n'=1}^n \theta(\zeta - \xi_{n'}). \quad (2.4)$$

Благодаря (2.4) уравнение (2.1) оказывается линейным. Поэтому его решение может быть получено преобразованием Фурье. Используя фурье-образ функции Хевисайда  $\theta(\zeta - \xi_{n'})$ :

$$\pi\delta(k) - i \exp(-ik\xi_{n'}) \text{V.P.}(1/k), \quad (2.5)$$

где  $\text{V.P.}(1/k)$  обозначает главное значение Коши, для описывающего движущийся  $2\pi n$ -кинк решения уравнения (2.1) имеем

$$\psi(\zeta) = \sum_{n'=1}^n \psi_{2\pi}(\zeta - \xi_{n'}), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2\pi}(\zeta) = & \pi + \\ & + \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} dk k^{-1} \sin(k\zeta) \left[ 1 + K(k) - \frac{k^2 v^2}{\omega_j^2} \right]^{-1} + \\ & + \pi \int_{-\infty}^{\infty} dk \cos(k\zeta) \delta \left[ 1 + K(k) - \frac{k^2 v^2}{\omega_j^2} \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$K(k) = \frac{lk^2}{\sqrt{1 + k^2\lambda^2}} \equiv \frac{\lambda_j^2 k^2}{\lambda \sqrt{1 + k^2\lambda^2}}. \quad (2.8)$$

Обращение в нуль аргумента  $\delta$ -функции в (2.7) отвечает условию черенковского взаимодействия (резонанса) движущегося с постоянной скоростью  $v$  вихря и обобщенной волны Свихарта со спектром  $\omega(k)$ :

$$\omega^2(k) \equiv \omega_j^2 [1 + K(k)] = k^2 v^2. \quad (2.9)$$

Формулу (2.7) можно переписать в ином, удобном для последующего использования виде:

$$\psi_{2\pi}(\zeta) = \pi + \pi [1 - f(\zeta)] \times \text{sign } \zeta + 2\pi C \cos(k_0 \zeta) \theta(-\zeta), \quad (2.10)$$

$$C = \frac{2}{\lambda_j^2 k_0^2} \frac{(1 + \lambda^2 k_0^2)^{3/2}}{2(v/v_s)^2 (1 + \lambda^2 k_0^2)^{3/2} - 2 - \lambda^2 k_0^2}, \quad (2.11)$$

$$f(\zeta) = \frac{2}{\lambda_j^2 k_1^2} \frac{(1 - \lambda^2 k_1^2)^{3/2} \exp(-k_1 |\zeta|)}{2 - \lambda^2 k_1^2 - 2(v/v_s)^2 (1 - \lambda^2 k_1^2)^{3/2}} + \frac{2\lambda^2}{\pi \lambda_j^2} \int_1^\infty dr r \sqrt{r^2 - 1} \times \frac{\exp(-r|\zeta|/\lambda)}{r^4 + (r^2 - 1) [(\lambda/\lambda_j)^2 + (vr/v_s)^2]^2}. \quad (2.12)$$

Здесь  $k_1 = k_1(v)$  — модуль чисто мнимого корня уравнения (2.9), описывающий монотонные зависимости  $2\pi n$ -кинков, а  $k_0 = k_0(v)$  — модуль действительного корня уравнения (2.9), отвечающий обобщенным волнам Свихарта, резонансно (черенковски) взаимодействующим с движущимся вихрем.

В настоящей статье речь будет идти о джозефсоновских переходах со сравнительно небольшой джозефсоновской критической плотностью тока, когда

$$\lambda \ll \lambda_j. \quad (2.13)$$

Это позволяет нам пренебрегать вторым слагаемым формулы (2.12), о чем ниже упоминать не будем.

Формула (2.6) согласно (2.9)–(2.12) удовлетворяет граничным условиям на бесконечности. Ниже мы покажем, что удовлетворение условиям (2.3) определяет величины  $\xi_{n'}$ , скорость  $v$  движения мультикинка, а поэтому и волновой вектор  $k_0(v)$  обобщенных волн Свихарта, захваченных вихрем.

В заключение этого раздела остановимся на тех общих соотношениях, которые определяют магнитное поле и энергию вихря в длинном джозефсоновском переходе.

Следуя общим положениям нелокальной электродинамики джозефсоновских переходов [4], в пределе  $\lambda \gg 2d$  направленное вдоль оси  $y$  магнитное поле,

созданное распределением разности фаз  $\psi(\zeta)$ , можно представить в виде

$$H(x, z - vt) = H(x, \zeta) = -\frac{\phi_0}{4\pi^2 \lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \times K_0 \left( \frac{\sqrt{(\zeta - \zeta')^2 + (x \mp d)^2}}{\lambda} \right) \frac{d\psi(\zeta')}{d\zeta'}. \quad (2.14)$$

Здесь  $|x \mp d|$  — расстояние от  $\pm d$  — координат границ туннельного перехода — до  $x$  — координаты точки наблюдения в сверхпроводнике.

В том случае, когда плотность тока через переход связана с разностью фаз соотношением (1.1), для полной энергии состояния, описываемого решением  $\psi(\zeta)$  уравнения (2.1), имеем

$$W = \frac{\phi_0^2}{64\pi^3 \lambda \lambda_j^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \times \left\{ \left[ \psi(\zeta) - 2\pi I \left[ \frac{\psi(\zeta)}{2\pi} + \frac{1}{2} \right] \right]^2 + \frac{v^2}{\omega_j^2} \left( \frac{d\psi}{d\zeta} \right)^2 \right\} + \frac{\phi_0^2}{64\pi^4 \lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \times K_0 \left( \frac{|\zeta - \zeta'|}{\lambda} \right) \frac{d\psi(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\psi(\zeta')}{d\zeta'}, \quad (2.15)$$

где первое слагаемое — энергия тока Джозефсона, отнесенная к единице длины оси  $y$ , а второе и третье слагаемые — энергии электромагнитных полей в туннельном переходе и сверхпроводниках [4].

### 3. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ СОГЛАСОВАНИЯ И ЯВЛЕНИЕ ЧЕРЕНКОВСКОГО ЗАХВАТА ВОЛН ВИХРЯМИ

На примере нескольких низших кинков рассмотрим теперь, к каким следствиям приведут условия (2.3). Прежде всего остановимся на простейшем  $2\pi$ -кинке, для которого согласно [11] имеет место следующее решение

$$\varphi_{2\pi}(z) = \pi + 2 \int_0^\infty dk k^{-1} [1 + K(k)]^{-1} \sin(kz), \quad (3.1)$$

описывающее покоящийся  $2\pi$ -кинк. В случае движущегося вихря,  $2\pi$ -кинка, согласно выражениям (2.6) и (2.10) имеем

$$\psi(\xi_1) = \pi + \pi C \neq \pi \quad (3.2)$$

всегда, когда  $C \neq 0$ , что имеет место при  $v \neq 0$ . Это означает, что в модели Обри—Волкова черенковское взаимодействие  $2\pi$ -кинка с волнами Свихарта, приводящее к  $C \neq 0$ , запрещает свободное движение  $2\pi$ -кинка. Такой вывод присущ именно модели Обри—Волкова. Для более высоких мультикинковых модель Обри—Волкова приводит к более интересным выводам. В дальнейшем с помощью выбора начала отсчета примем  $\xi_1 = -\xi_n$ .

Обратимся теперь к рассмотрению  $4\pi$ -кинка. Тогда, полагая  $\xi_1 = -\zeta_0$ ,  $\xi_2 = \zeta_0$ , из условий (2.3) получаем

$$f(2\zeta_0) = C, \tag{3.3}$$

$$\cos(k_0\zeta_0) = 0. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) имеет дискретный набор решений

$$k_0\zeta_0 = k_0(v)\zeta_0 = \pi(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.5}$$

Исключая  $\zeta_0$  из (3.3), с помощью (3.5) получаем одно уравнение для скорости  $v$  движения  $4\pi$ -кинка, определяющее дискретный набор собственных скоростей вихря. Соотношение (3.4) позволяет для  $4\pi$ -кинка в следующем виде записать решение (2.6)

$$\psi_{4\pi}(\zeta) = \psi_{2\pi,m}(\zeta + \zeta_0) + \psi_{2\pi,m}(\zeta - \zeta_0) + \psi_w(\zeta, \zeta_0), \tag{3.6}$$

где

$$\psi_{2\pi,m}(\zeta) \equiv \pi + \pi [1 - f(\zeta)] \text{sign } \zeta \tag{3.7}$$

отвечает монотонной зависимости, а

$$\psi_w(\zeta, \zeta_s) = 2\pi C \cos [k_0(v) (|\zeta| - \zeta_s)] \times \\ \times [\theta(-\zeta + \zeta_s) - \theta(-\zeta - \zeta_s)] \text{sign } \zeta \tag{3.8}$$

описывает осцилляционную зависимость, отвечающую захваченным вихрем волнам Свихарта, локализованным внутри вихря на интервале  $\Xi_s = [-\zeta_s, \zeta_s]$ . На границах области захвата производная функции (3.8) равна нулю, что отвечает равенству нулю потока энергии свихартовских волн. Обозначая  $\lambda_0(v) = 2\pi/k_0(v)$  длину волны Свихарта, в соответствии с (3.5) можно утверждать, что размер области захвата волн  $4\pi$ -кинком дается соотношением  $2\zeta_0(n) = \lambda_0(n)(n + 1/2)$ . Соответствующие детальные формулы даны в четвертом разделе.

Подобные общие уравнения согласования возникают и для  $6\pi$ -кинка. Полагая  $\xi_1 = -\zeta_0$ ,  $\xi_2 = 0$ ,  $\xi_3 = \zeta_0$ , из условий (2.3) получаем

$$\cos [k_0(v)\zeta_0] = -1/2, \tag{3.9}$$

$$f(\zeta_0) + f(2\zeta_0) = C. \tag{3.10}$$

Эти уравнения согласования определяют дискретный «квантованный» спектр собственных скоростей  $6\pi$ -кинков  $v(n)$ , волновых векторов  $k_0(n)$  захваченных  $6\pi$ -кинком обобщенных волн Свихарта и размеров областей захвата  $2\zeta_0(n) = \lambda_0(n) [n + 1/2 + (-1)^n/6]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Соответственно решение (2.6) уравнения (2.1) может быть представлено в виде

$$\psi_{6\pi}(\zeta) = \psi_{2\pi,m}(\zeta + \zeta_0) + \psi_{2\pi,m}(\zeta) + \\ + \psi_{2\pi,m}(\zeta - \zeta_0) + \psi_w(\zeta, \zeta_0). \tag{3.11}$$

Последнее слагаемое этой формулы в соответствии с формулой (3.8) описывает поле волн Свихарта, захваченных  $6\pi$ -кинком. Детальное описание «квантованных» свойств  $6\pi$ -кинка изложено в пятом разделе.

Наконец, остановимся на описании  $8\pi$ -кинков. Обозначим  $\xi_1 = -\zeta_2$ ,  $\xi_2 = -\zeta_1$ ,  $\xi_3 = \zeta_1$ ,  $\xi_4 = \zeta_2$ . Тогда условия (2.3) дают следующие общие соотношения согласования для  $8\pi$ -кинков:

$$\cos [k_0(v)\zeta_1] + \cos [k_0(v)\zeta_2] = 0, \tag{3.12}$$

$$f(\zeta_2 - \zeta_1) + f(\zeta_1 + \zeta_2) + f(2\zeta_2) = C, \tag{3.13}$$

$$f(2\zeta_1) + 2f(\zeta_1 + \zeta_2) + f(2\zeta_2) = \\ = 4C \cos^2 [k_0(v)(\zeta_2 - \zeta_1)/2], \tag{3.14}$$

которые определяют дискретный («квантованный») спектр собственных скоростей  $8\pi$ -кинков  $v(n)$ , длины волн  $\lambda_0(n) = 2\pi/k_0(n)$  захваченных свихартовских волн, а также характерные размеры областей захвата  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ . Соответственно условию согласования (3.12) и формуле (2.6) для решения уравнения (2.1) теперь имеем

$$\psi_{8\pi}(\zeta) = \psi_{2\pi,m}(\zeta + \zeta_2) + \psi_{2\pi,m}(\zeta + \zeta_1) + \\ + \psi_{2\pi,m}(\zeta - \zeta_1) + \psi_{2\pi,m}(\zeta - \zeta_2) + \\ + \psi_w(\zeta, \zeta_1) + \psi_w(\zeta, \zeta_2). \tag{3.15}$$

В отличие от  $4\pi$ - и  $6\pi$ -кинков теперь возникло два осциллирующих слагаемых, описывающих захваченные  $8\pi$ -кинком обобщенные волны Свихарта, локализованные соответственно в областях  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$ , причем область  $\Xi_1$  расположена внутри области  $\Xi_2$ . Последнее указывает на возможность реализации интерференционных явлений. Согласно уравнению (3.12) на сумме интервалов  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$  укладывается  $(2n + 1)$  длин свихартовских волн:

$$2n+1 = (2\zeta_1+2\zeta_2) [k_0(v)/2\pi], \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.16}$$

Второе целое число  $p$  определим, имея в виду интерференционную картину в области  $\Xi_1$ , связанную с перекрыванием областей захваченных свихартовских волн. Примем

$$p + \delta p = 2\zeta_1 [k_0(v)/\pi] = 2\zeta_1 [2/\lambda_0(v)], \quad (3.17)$$

где  $\delta p$  изменяется в диапазоне  $0 < \delta p < 1$ . Соответственно этому  $p$  равно числу целых длин полуволн  $\lambda_0(v)/2$ , укладывающихся во внутренней области захвата  $\Xi_1$ . С учетом соотношений (3.16) и (3.17) полное поле захваченных свихартовских волн в области  $\Xi_1$  дается выражением

$$4\pi C \sin[\pi(p + \delta p)/2] \sin[k_0(v)\zeta]. \quad (3.18)$$

Это простое выражение описывает результат интерференции двух движущихся вместе с  $8\pi$ -кинком цугов захваченных свихартовских волн. При четных  $p$  и близких к нулю  $\delta p$  либо при нечетных  $p$  и близких к единице  $\delta p$  поля интерферирующих волн Свихарта находятся почти в противофазе и (3.18) по абсолютной величине много меньше  $4\pi C$ . Напротив, при четных  $p$  и  $\delta p$ , близких к единице, либо при нечетных  $p$  и  $\delta p$ , близких к нулю, интерферирующие волны почти синфазны и амплитуда (3.18) близка к  $4\pi C$ . Детальное описание  $8\pi$ -кинков дано в шестом разделе.

Результаты этого раздела показывают, что в общем случае бегущего  $2\pi n$ -кинка разность фаз  $\psi(\zeta)$  (2.6) состоит из следующей суммы  $n$  монотонных функций вида (3.7) и  $s(n) = [2n - 1 + (-1)^n]/4$  осциллирующих функций вида (3.8), описывающих черенковски-захваченные движущимся вихрем обобщенные волны Свихарта:

$$\psi(\zeta) = \phi_m(\zeta) + \phi_w(\zeta), \quad (3.19)$$

где

$$\phi_m(\zeta) \equiv \sum_{n'=1}^n \{\pi + \pi [1 - f(\zeta - \xi_{n'})] \text{sign}(\zeta - \xi_{n'})\} \quad (3.20)$$

представляет собой сумму вкладов составляющих вихревую структуру отдельных вихрей, а

$$\phi_w(\zeta) \equiv \sum_{s=1}^{s(n)} \psi_w(\zeta, \zeta_s) \quad (3.21)$$

отвечает захваченной вихревой структурой совокупности волн Свихарта.

#### 4. СКЛЕИВАНИЕ $4\pi$ -КИНКОВ

Переходя к детальному изложению результатов теории квантованного движения  $4\pi$ -кинков, начнем

изложение со случая скорости кинков близкой к свихартовской:

$$\gamma^2 \equiv 1 - (v/v_s)^2 \ll 1. \quad (4.1)$$

Имея в виду условие (2.13), для корней уравнения (2.9) получаем следующие выражения:

$$k_0 = \frac{1}{\lambda} \left[ \gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + \frac{2\lambda^2}{\lambda_j^2}} \right]^{1/2}, \quad (4.2)$$

$$k_1 = \frac{1}{\lambda} \left[ -\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + \frac{2\lambda^2}{\lambda_j^2}} \right]^{1/2}.$$

Обозначая  $\delta \equiv k_1/k_0$ , запишем следующие соотношения:

$$k_0 = \sqrt{\sqrt{2}/\delta \lambda \lambda_j}, \quad k_1 = \sqrt{\sqrt{2}\delta/\lambda \lambda_j}, \quad (4.3)$$

$$\frac{v^2}{v_s^2} = 1 - \frac{1 - \delta^2}{\sqrt{2}\delta} \frac{\lambda}{\lambda_j}. \quad (4.4)$$

В соответствии с (2.11) и (2.12) имеем также

$$C = \delta^2/(1 + \delta^2), \quad (4.5)$$

$$f(\zeta) = (1 + \delta^2)^{-1} \exp\left(-\sqrt{\sqrt{2}\delta/\lambda \lambda_j} |\zeta|\right). \quad (4.6)$$

Эти соотношения и условия согласования  $4\pi$ -кинков (3.3) и (3.5) дают следующее уравнение для определения параметра  $\delta = \delta(n)$ :

$$\delta(n) = \exp[-\pi(n + 1/2)\delta(n)]. \quad (4.7)$$

Помимо формул (4.3) и (4.4), определяющих дискретный набор волновых чисел и скоростей  $4\pi$ -кинка, параметр  $\delta(n)$  также определяет дискретные размеры области захвата волн Свихарта

$$2\zeta_0(n) = \frac{2\pi}{k_0} \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{1/4}} \sqrt{\lambda \lambda_j \delta(n) (2n + 1)}. \quad (4.8)$$

Поэтому решение уравнения (4.7) в случае (4.1) описывает все свойства  $4\pi$ -кинков. Для малых номеров  $n$  вихревых мод из (4.7) имеем  $\delta(0) = 0.474$ ,  $\delta(1) = 0.274$ ,  $\delta(2) = 0.203$ ,  $\delta(3) = 0.164$ . Для высоких мод, когда  $n \gg 1$ , из (4.7) следует

$$\delta(n) \approx \pi^{-1} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1} \ln \left[ \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \right] \ll 1. \quad (4.9)$$

В соответствии с формулой (4.4) максимальное значение собственной скорости движения  $4\pi$ -кинка равно

$$v_{max} = [1 - 0.58(\lambda/\lambda_j)] v_s, \quad (4.10)$$

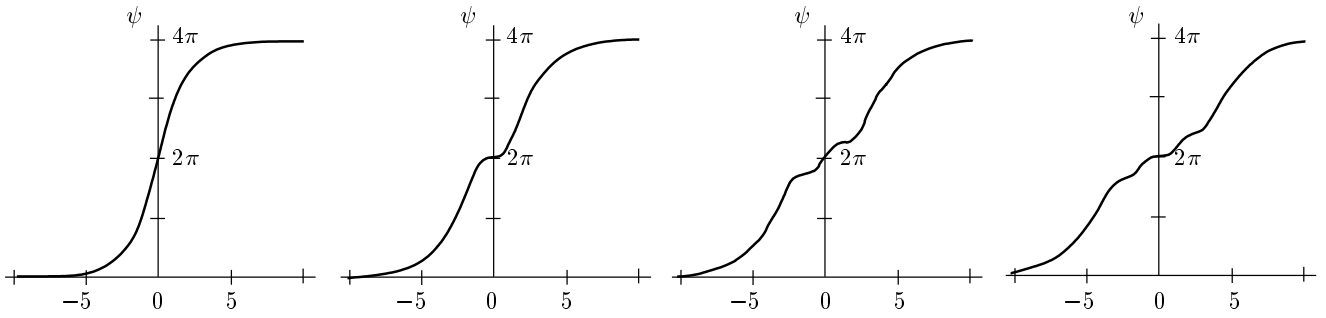


Рис. 1. Разность фаз  $\psi$  быстрого  $4\pi$ -кинка как функция безразмерной координаты  $2^{1/4}\zeta/\sqrt{\lambda\lambda_j}$ . Графики (слева направо) соответствуют  $n = 0, 1, 2, 3$

что отвечает нулевой моде  $n = 0$ . Для высоких мод,  $n \gg 1$ , имеем

$$v(n) = \left\{ 1 - \frac{\pi}{2^{5/2}} \frac{2n+1}{\ln[(2n+1)\pi/2]} \frac{\lambda}{\lambda_j} \right\} v_s. \quad (4.11)$$

Очевидно, что условие (4.1) накладывает ограничение сверху на номера высоких мод, отвечающее малости второго слагаемого в фигурной скобке (4.11) по сравнению с единицей. На рисунке 1 приведены пространственные зависимости  $\psi_{4\pi}(\zeta)$  для первых четырех  $4\pi$ -кинков. С ростом номера  $n$  моды вихря растет ширина области немонотонной пространственной зависимости кинка, обусловленной черенковски-захваченной волной Свихарта. В то же время уменьшается глубина модуляции. С учетом изложенного формула (3.6) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \psi_{4\pi}(\zeta) = & 2\pi + \pi \operatorname{sign}[\zeta + \zeta_0(n)] \{1 - f(\zeta + \zeta_0(n), n)\} + \\ & + \pi \operatorname{sign}[\zeta - \zeta_0(n)] \{1 - f(\zeta - \zeta_0(n), n)\} + \\ & + (-1)^n 2\pi \delta^2(n) [1 + \delta^2(n)]^{-1} \sin \left[ \frac{2^{1/4}\zeta}{\sqrt{\delta(n)\lambda\lambda_j}} \right] \times \\ & \times [\theta(\zeta + \zeta_0(n)) - \theta(\zeta - \zeta_0(n))], \end{aligned} \quad (4.12)$$

где в соответствии с (4.1), (4.4) и (4.6)

$$\begin{aligned} f(\zeta, n) = & [1 + \delta^2(n)]^{-1} \times \\ & \times \exp \left\{ -|\zeta| / \left( \lambda_j \sqrt{\frac{\gamma^2(n)}{2} + \left[ \frac{\gamma^4(n)}{4} + \frac{\lambda^2}{2\lambda_j^2} \right]^{1/2}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

В работе [15] в формуле (36) приближенно опущен первый множитель последнего выражения, чему соответствует приближение (4.9).

Совершенно аналогично  $2\pi$ -кинкам модели синус-Гордона [17] пространственный размер наших

вихрей оказывается много меньшим джозефсоновской длины:

$$\lambda_j \sqrt{\frac{\gamma^2(n)}{2} + \left[ \frac{\gamma^4(n)}{4} + \frac{\lambda^2}{2\lambda_j^2} \right]^{1/2}} \ll \lambda_j. \quad (4.14)$$

Это сходство оказывается буквальным для достаточно высоких мод, когда  $\lambda/\lambda_j \ll \gamma^2(n) \ll 1$  и когда левая часть неравенства (4.14) приближенно принимает обычный для джозефсоновской электродинамики вид

$$\lambda_j \gamma(n) = \lambda_j \sqrt{1 - v^2(n)/v_s^2} \equiv \tilde{\lambda}_j$$

лоренц-сокращенной джозефсоновской длины. При этом размер области черенковского захвата волн превышает  $\tilde{\lambda}_j$  в  $\ln(\pi^2 n^2) \gg 1$  раз.

Обратимся теперь к асимптотическому пределу малых скоростей,

$$v \ll v_s, \quad (4.15)$$

который реализуется для весьма высоких вихревых мод. Тогда из уравнения (2.9) получаем

$$k_0 = \lambda^{-1}(v_s/v)^2 \gg \lambda^{-1}, \quad k_1 = \lambda_j^{-1}, \quad (4.16)$$

а для выражений (2.11) и (2.12) имеем

$$C = 2(\lambda/\lambda_j)^2(v/v_s)^2, \quad (4.17)$$

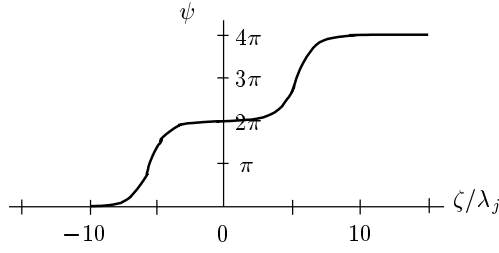
$$f(\zeta) = \exp(-|\zeta|/\lambda_j). \quad (4.18)$$

В результате на основании условий согласования (3.3) и (3.5) получаем следующие выражения для размера области черенковского захвата волны Свихарта:

$$2\zeta_0(n) = \lambda_j A(n) \equiv \lambda_j \ln \frac{\pi n \lambda_j}{\lambda} \gg \lambda_j, \quad (4.19)$$

для квантованной скорости движения  $4\pi$ -кинка:

$$v(n) = v_s \sqrt{\lambda_j/\lambda} \sqrt{A(n)/2\pi n} \ll v_s, \quad (4.20)$$



**Рис. 2.** Склеивание медленного 4π-кинка из двух 2π-кинок;  $\lambda_j/\lambda = 10$ ,  $n = 1600$ . Скорость вихря  $v \simeq 0.1v_s$ , расстояние между 2π-кинками  $2\zeta_0 \simeq 10.8\lambda_j$

и для волнового вектора захваченной волны:

$$k_0(n) = 2\pi n/\lambda_j A(n) \gg \lambda^{-1}. \quad (4.21)$$

Соответственно этим формулам

$$\begin{aligned} \psi_{4\pi}(\zeta) &= \varphi_{2\pi}(\zeta + \zeta_0(n)) + \varphi_{2\pi}(\zeta - \zeta_0(n)) + \\ &+ (-1)^n \frac{4\lambda A(n)}{(2n+1)\lambda_j} \sin\left(\frac{2\pi n\zeta}{\lambda_j A(n)}\right) \times \\ &\times [\theta(\zeta + \zeta_0(n)) - \theta(\zeta - \zeta_0(n))], \end{aligned} \quad (4.22)$$

где функция  $\varphi_{2\pi}$  определена выражением (1.5) при  $v = 0$ . Характерный масштаб пространственного изменения медленного 4π-кинка отвечает обычной джозефсоновской длине. Масштаб осцилляций, отвечающий захваченной волне Свихарта, мал по сравнению с лондоновской длиной. Также весьма мала амплитуда захваченной волны. Однако только ее наличие разрешает существование полученного нами счетного множества движущихся 4π-кинок с точкой сгущения при  $v(n) \rightarrow 0$ . В формуле (4.22) функции  $\varphi_{2\pi}$  описывают 2π-кинки, разнесенные на расстояние  $2\zeta_0(n) \gg \lambda_j$ . При этом малые по амплитуде черенковские осцилляции, описываемые последним слагаемым в (4.22), склеивают эти 2π-кинки в единый движущийся 4π-кинок. Явление склеивания иллюстрирует рис. 2.

Заметим, что разность фаз (4.12), отвечающую быстрому 4π-кинку, тоже можно представить в виде суммы двух монотонных 2π-кинок:

$$\pi + \pi \text{sign}(\zeta \pm \zeta_0(n)) \{1 - f(\zeta \pm \zeta_0(n), n)\}, \quad (4.23)$$

которые объединены в один 4π-кинок черенковски-захваченными волнами Свихарта, поле которых описывается последним слагаемым в (4.12). В этом случае говорить о склеивании 2π-кинок имеет смысл при  $n \gg 1$ , когда амплитуда склеивающих волн Свихарта относительно мала.

Используя соотношения (4.3)–(4.5) и (4.8), из (П.1), (П.4) и (П.5) находим магнитное поле быстрого 4π-кинка, движущегося со скоростью близкой к скорости Свихарта,

$$\begin{aligned} H_{4\pi}(x, \zeta) &= -\frac{\phi_0}{2^{7/4}\lambda\sqrt{\lambda\lambda_j}} \frac{\sqrt{\delta}}{1+\delta^2} \exp\left(-\frac{|x \mp d|}{\lambda}\right) \times \\ &\times \left\{ \exp\left(-2^{1/4}\sqrt{\delta}\frac{|\zeta-\zeta_0|}{\sqrt{\lambda\lambda_j}}\right) + \exp\left(-2^{1/4}\sqrt{\delta}\frac{|\zeta+\zeta_0|}{\sqrt{\lambda\lambda_j}}\right) + \right. \\ &\left. + 2\delta(-1)^n [\theta(\zeta+\zeta_0) - \theta(\zeta-\zeta_0)] \cos\left(\frac{2^{1/4}|\zeta|}{\sqrt{\delta\lambda\lambda_j}}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Согласно (4.24) магнитное поле быстрого 4π-кинка сосредоточено около плоскости джозефсоновского перехода на расстояниях порядка лондоновской длины. Вдоль оси распространения вихря область локализации магнитного поля существенно шире. При этом монотонная составляющая поля локализована на участках  $\pm\zeta_0 - 1/k_0\delta < \zeta < \pm\zeta_0 + 1/k_0\delta$ , где  $\zeta_0 = 2^{-1/4}\sqrt{\delta\lambda\lambda_j}\pi(n+1/2)$ . На интервале  $-\zeta_0 < \zeta < \zeta_0$  магнитное поле осциллирует с периодом  $2\pi/k_0 = 2^{3/4}\pi\sqrt{\delta\lambda\lambda_j}$ , а амплитуда осцилляций в  $2\delta$  раз меньше максимального значения монотонной составляющей. Отметим также, что с увеличением номера моды максимум магнитного поля убывает  $\propto \sqrt{\delta} \approx [(\ln \pi n)/\pi n]^{1/2}$ .

В пределе  $v \ll v_s$ , с учетом соотношений (4.16), (4.17) и (4.20), для магнитного поля имеем

$$\begin{aligned} H_{4\pi}(x, \zeta) &= -\frac{\phi_0}{4\lambda\lambda_j} \exp\left(-\frac{|x \mp d|}{\lambda}\right) \times \\ &\times \left\{ \exp\left(-\frac{|\zeta - \zeta_0|}{\lambda_j}\right) + \exp\left(-\frac{|\zeta + \zeta_0|}{\lambda_j}\right) \right\} - \\ &- (-1)^n \left(\frac{\phi_0}{k_0\lambda\lambda_j^2}\right) \exp(-k_0|x \mp d|) \times \\ &\times [\theta(\zeta + \zeta_0) - \theta(\zeta - \zeta_0)] \cos(k_0|\zeta|), \end{aligned} \quad (4.25)$$

где  $k_0 = \lambda_j^{-1} [2\pi n / \ln(\pi n \lambda_j / \lambda)] \gg 1/\lambda$ . Достигающиеся при  $\zeta \approx \pm\zeta_0$  максимальные значения поля (4.25) меньше, чем для быстрых вихрей, и не зависят от номера моды. В отличие от (4.24) осциллирующая часть поля медленных вихрей прижата к плоскости джозефсоновского перехода на расстоянии  $\approx 1/k_0$ , которое много меньше  $\lambda$ . Величина амплитуды осцилляций в  $k_0\lambda_j/4 \gg 1$  раз меньше, чем максимальное значение монотонной составляющей.

Сравним магнитное поле (4.24) медленного 4π-кинка внутри перехода с полем обычного ( $\lambda \ll \lambda_j$ ) 2π-кинка (1.6) при  $v = 0$ . Выражение (4.24) показывает, что монотонная составляющая



магнитного поля  $4\pi$ -кинка представляет собой поле двух обычных  $2\pi$ -кинков, которые, согласно (4.19), разнесены на расстояние  $2\zeta_0$ , много большее масштаба  $\lambda_j$  пространственного изменения самих  $2\pi$ -кинков. При этом в области от  $\zeta = -\zeta_0$  до  $\zeta = \zeta_0$  магнитные поля  $2\pi$ -кинков «сшиты» осциллирующей с периодом  $2\pi/k_0 \ll 2\zeta_0$  функцией малой амплитуды, описывающей магнитное поле, создаваемое захваченными волнами Свихарта, которые склеивают два  $2\pi$ -кинка в единый  $4\pi$ -кинк.

Обсудим энергию  $4\pi$ -кинков. Из (П.7)–(П.9) получаем

$$W_m = 2(1-C)^2 k_1 \lambda_j [1 + (1 + 2k_1 \zeta_0) \times \exp(-2k_1 \zeta_0)] W_{2\pi}, \quad (4.26)$$

$$W_{mw} = 4C(1-C)(1 + v^2/v_s^2) k_1 \lambda_j W_{2\pi}, \quad (4.27)$$

$$W_w = 2C^2 \pi (2n + 1) (v/v_s)^2 k_0 \lambda_j W_{2\pi}, \quad (4.28)$$

где  $W_{2\pi}$  — энергия покоящегося  $2\pi$ -кинка при  $\lambda \ll \lambda_j$ , а  $C$  дается формулами (4.5) или (4.17). В частности, для основной моды с  $n = 0$  из (4.26)–(4.28) находим

$$W = 3.05 \sqrt{\lambda_j/\lambda} W_{2\pi},$$

$$W_m = 1.7 \sqrt{\lambda_j/\lambda} W_{2\pi}, \quad W_{mw} = 0.98 \sqrt{\lambda_j/\lambda} W_{2\pi},$$

$$W_w = 0.37 \sqrt{\lambda_j/\lambda} W_{2\pi}.$$

При  $n \gg 1$ , когда значение скорости вихря описывается выражением (4.11), энергия вихря в основном определяется величиной  $W_m$ :

$$\begin{aligned} W &\simeq W_m = 2 \left( \sqrt{2} \frac{\ln(\pi n)}{\pi n} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda}} W_{2\pi} = \\ &= 2W_{2\pi} / \sqrt{1 - \left( \frac{v}{v_s} \right)^2} \gg 2W_{2\pi}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

при этом для величины энергии склеивающих волн из (4.28) имеем

$$W_w \simeq \frac{2 \ln^3(\pi n)}{(\pi n)^2} 2W_{2\pi} / \sqrt{1 - \left( \frac{v}{v_s} \right)^2} \ll W_m. \quad (4.30)$$

Малость энергии  $W_w$  по сравнению с  $W_m$  отвечает утверждению о склеивании кинков волнами Свихарта. Еще меньшей оказывается энергия склеивания кинков:

$$\begin{aligned} W_{mw} &\simeq \left( \frac{2 \ln(\pi n)}{\pi n} \right)^2 2W_{2\pi} / \sqrt{1 - \left( \frac{v}{v_s} \right)^2} \ll \\ &\ll W_w \ll W_m. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Выражения (4.29)–(4.31) справедливы для вихрей со скоростями близкими к скорости Свихарта. Это означает, что большой номер моды  $n$  не может превышать значения  $(\sqrt{2} \lambda_j / \pi \lambda) \ln(\sqrt{2} \lambda_j / \lambda) \gg 1$ . Для мод с еще большими номерами, когда  $n$  удовлетворяет неравенству

$$n \gg \frac{\sqrt{2} \lambda_j}{\pi \lambda} \ln \left( \frac{\sqrt{2} \lambda_j}{\lambda} \right) \gg 1,$$

полная энергия вихря  $W$  также определяется суммой энергий составляющих его  $2\pi$ -кинков:

$$W \simeq W_m \simeq 2W_{2\pi}, \quad (4.32)$$

а энергии волн и склеивания по-прежнему оказываются малыми:

$$W_w \simeq \left[ 2\lambda \ln^2 \frac{\pi n \lambda_j}{\lambda} / (\pi n \lambda_j) \right] 2W_{2\pi} \ll W_m,$$

$$W_{mw} \simeq \left[ 2\lambda \ln \frac{\pi n \lambda_j}{\lambda} / (\pi n \lambda_j) \right] 2W_{2\pi} \ll W_w \ll W_m. \quad (4.33)$$

Формула (4.32) отвечает формуле (4.29) в пределе (4.15). Несмотря на малость энергий (4.33) по сравнению с (4.32) только наличие волн приводит к явлению склеивания, а следовательно, к существованию  $4\pi$ -кинка. То же самое относится и к соотношениям (4.29)–(4.31).

### 5. СКЛЕИВАНИЕ $6\pi$ -КИНКОВ

Используем имеющееся определенное сходство между  $6\pi$ -кинками и  $4\pi$ -кинками. Для  $6\pi$ -кинков, движущихся со скоростью, близкой к скорости Свихарта, имеют место соотношения (4.1)–(4.6). Новым является возникающее из уравнений согласования уравнение для параметра  $\delta(n)$ :

$$\begin{aligned} \delta^2(n) &= \exp \left\{ -\pi \delta(n) \left[ n + 0.5 + \frac{(-1)^n}{6} \right] \right\} + \\ &+ \exp \left\{ -2\pi \delta(n) \left[ n + 0.5 + \frac{(-1)^n}{6} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для квантованного размера области черенковского захвата волн имеем

$$2\zeta_0(n) = 2^{3/4} \pi [n + 0.5 + (-1)^n/6] \sqrt{\delta(n) \lambda \lambda_j}.$$

Для первых мод  $6\pi$ -кинка из (5.1) находим  $\delta(0) = 0.603$ ,  $\delta(1) = 0.434$ ,  $\delta(2) = 0.298$ ,  $\delta(3) = 0.262$ ,

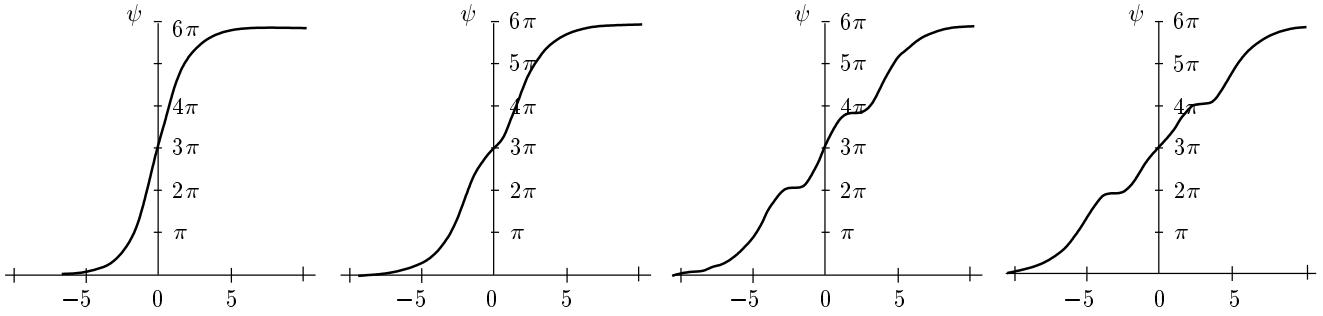


Рис. 3. Разность фаз  $\psi$  быстрого  $6\pi$ -кинка как функция безразмерной координаты  $2^{1/4}\zeta/\sqrt{\lambda\lambda_j}$ . Графики (слева направо) соответствуют  $n = 0, 1, 2, 3$

$\delta(4) = 0.213$ . Соответственно этому наибольшая скорость  $6\pi$ -кинка отвечает  $n = 0$  и равна

$$v_{max}(0) = \left[ 1 - 0.37 \frac{\lambda}{\lambda_j} \right] v_s, \quad (5.2)$$

что несколько превышает наибольшую скорость  $4\pi$ -кинка (4.10). Для  $n \gg 1$ , но при выполнении условия (4.1), имеем

$$\delta(n) = \frac{2}{\pi} \left[ n + 0.5 + \frac{(-1)^n}{6} \right]^{-1} \times \ln \left\{ \frac{\pi}{2} \left[ n + 0.5 + \frac{(-1)^n}{6} \right] \right\} \ll 1.$$

При этом явный вид решения уравнения (2.1) следующий:

$$\begin{aligned} \psi_{6\pi}(\zeta) = & 3\pi + \pi \text{sign} [\zeta + \zeta_0(n)] \times \\ & \times \{ 1 - f(\zeta + \zeta_0(n), n) \} + \pi \text{sign} \zeta \{ 1 - f(\zeta, n) \} + \\ & + \pi \text{sign} [\zeta - \zeta_0(n)] \{ 1 - f(\zeta - \zeta_0(n), n) \} + \\ & + [\theta(\zeta + \zeta_0(n)) - \theta(\zeta - \zeta_0(n))] \pi \delta^2(n) \times \\ & \times (1 + \delta^2(n))^{-1} \left\{ (-1)^n \sqrt{3} \sin \left[ 2^{1/4} \zeta / \sqrt{\delta(n) \lambda \lambda_j} \right] - \right. \\ & \left. - \cos \left[ 2^{1/4} \zeta / \sqrt{\delta(n) \lambda \lambda_j} \right] \text{sign} \zeta \right\}, \quad (5.3) \end{aligned}$$

где  $f(\zeta, n)$  дается формулой (4.13). Рисунок 3 иллюстрирует пространственную зависимость движущегося  $6\pi$ -кинка для первых четырех мод, для которых корни уравнения (5.1) находятся численно.

Медленным  $6\pi$ -кинкам со скоростями, удовлетворяющими условию (4.15), отвечают высокие моды вихрей, для которых

$$n \gg \frac{2^{3/2} \lambda_j}{\pi \lambda} \ln \frac{\sqrt{2} \lambda_j}{\lambda} \gg 1. \quad (5.4)$$

Для ширины области черенковского захвата волн, скорости медленного  $6\pi$ -кинка и волнового вектора

захваченной обобщенной волны Свихарта соответственно получаем

$$2\zeta_0(n) = 2\lambda_j \ln \frac{\pi n \lambda_j}{2\lambda} \gg 2\lambda_j, \quad (5.5)$$

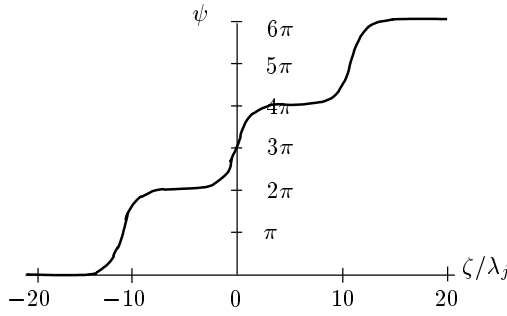
$$v(n) = v_s \sqrt{\frac{\lambda_j}{\pi n \lambda} \ln \frac{\pi n \lambda_j}{2\lambda}} \ll v_s, \quad (5.6)$$

$$k_0(n) = \frac{\pi n}{\lambda_j} \ln^{-1} \frac{\pi n \lambda_j}{2\lambda} \gg \frac{1}{\lambda}. \quad (5.7)$$

Явный вид решения уравнения (2.1) для медленных  $6\pi$ -кинков можно записать в следующей форме

$$\begin{aligned} \psi_{6\pi}(\zeta) = & \varphi_{2\pi}(\zeta + \zeta_0(n)) + \varphi_{2\pi}(\zeta) + \\ & + \varphi_{2\pi}(\zeta - \zeta_0(n)) + \frac{2\lambda}{n\lambda_j} \ln \frac{\pi n \lambda_j}{2\lambda} \times \\ & \times \left\{ (-1)^n \sqrt{3} \sin [k_0(n)\zeta] - \cos [k_0(n)\zeta] \text{sign} \zeta \right\} \times \\ & \times [\theta(\zeta + \zeta_0(n)) - \theta(\zeta - \zeta_0(n))], \quad (5.8) \end{aligned}$$

где  $\varphi_{2\pi}$  определена формулой (1.5) при  $v = 0$ . Последнее осциллирующее слагаемое формулы (5.8) является сравнительно весьма малым по величине. Однако описываемое этим слагаемым поле черенковски-захваченных свихартовских волн обеспечивает возможность существования движущегося  $6\pi$ -кинка. Как и в случае  $4\pi$ -кинка, квантованные дискретные состояния  $6\pi$ -кинков имеют точку сгущения при  $n \rightarrow \infty$ . Согласно этой формуле и формуле (5.5) при изменении  $\zeta$  слева направо сначала приблизительно на расстоянии  $\lambda_j$  вблизи  $\zeta = -\zeta_0$  происходит увеличение  $\psi_{6\pi}$  на  $2\pi$ . Затем на расстоянии, приблизительно равном  $\zeta_0$  и много большем джозефсоновской длины  $\lambda_j$ , разность фаз мало меняется. Далее около  $\zeta = 0$  снова приблизительно на расстоянии  $\lambda_j$  возникает увеличение  $\psi_{6\pi}$  на  $2\pi$ . Снова на расстоянии около  $\zeta_0$  формула (5.8) отвечает малому изменению  $\psi_{6\pi}$ . Наконец,



**Рис. 4.** Склеивание медленного  $6\pi$ -кинка из трех  $2\pi$ -кинков;  $\lambda_j/\lambda = 10$ ,  $n = 3200$ . Скорость вихря  $v \simeq 0.1v_s$ , расстояние между  $2\pi$ -кинками  $\zeta_0 \simeq 10.8\lambda_j$

вблизи  $\zeta = \zeta_0$  приблизительно на расстоянии  $\lambda_j$  имеет место последнее увеличение на  $2\pi$ . Рисунок 4 иллюстрирует описанную зависимость. На основании изложенного можно сделать интересное наблюдение, аналогичное сделанному в разд. 4 для  $4\pi$ -кинка, захватившего большое количество волн Свихарта. А именно,  $6\pi$ -кинк в случае медленного движения мультивихря отчетливо разнесен на три  $2\pi$ -кинка, синхронно движущихся с определенной скоростью (5.6). В то же время сравнительно небольшие по интенсивности волны Свихарта, захваченные  $6\pi$ -кинком и движущиеся вместе с ним, обеспечивают возможность его существования. Будучи захваченными вихрем, волны Свихарта склеивают три  $2\pi$ -кинка в один  $6\pi$ -кинк. Таким образом, снова о волнах Свихарта можно говорить как о своеобразном клее для джозефсоновских вихрей.

Рассмотрим магнитное поле и энергию  $6\pi$ -кинка. Для вихря, движущегося со скоростью, близкой к скорости Свихарта, из (П.1), (П.4), (П.5) и (5.3) имеем

$$\begin{aligned}
 H_{6\pi}(x, \zeta) = & -\frac{\phi_0}{2^{7/4}\lambda\sqrt{\lambda\lambda_j}} \frac{\sqrt{\delta}}{1+\delta^2} \exp\left(-\frac{|x \mp d|}{\lambda}\right) \times \\
 & \times \left\{ \exp\left(-2^{1/4}\sqrt{\delta}\frac{|\zeta - \zeta_0|}{\sqrt{\lambda\lambda_j}}\right) + \right. \\
 & + \exp\left(-2^{1/4}\sqrt{\delta}\frac{|\zeta|}{\sqrt{\lambda\lambda_j}}\right) + \exp\left(-2^{1/4}\sqrt{\delta}\frac{|\zeta + \zeta_0|}{\sqrt{\lambda\lambda_j}}\right) + \\
 & + 2\delta(-1)^n [\theta(\zeta + \zeta_0) - \theta(\zeta - \zeta_0)] \times \\
 & \left. \times \cos\left(\frac{2^{1/4}|\zeta|}{\sqrt{\delta\lambda\lambda_j}} - \frac{(-1)^n\pi}{6}\right) \right\}. \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

Как и в случае быстрого  $4\pi$ -кинка, поле (5.9) локализовано вблизи плоскости джозефсоновского пе-

рехода на масштабе порядка лондоновской длины, в то время как характерный масштаб изменения монотонной составляющей равен приблизительно  $2^{-1/4}\sqrt{\lambda\lambda_j/\delta} \gg \lambda$ . Поле черенковски-захваченных волн отлично от нуля на интервале  $\Xi_0$  и осциллирует с периодом  $2^{3/4}\pi\sqrt{\delta\lambda\lambda_j} \gg \lambda$ . С увеличением номера моды (т.е. с уменьшением скорости вихря) максимальное значение магнитного поля уменьшается.

В случае медленных  $6\pi$ -кинков, когда выполнено неравенство (5.4), из (П.1), (П.4), (П.5) и (5.7) получаем

$$\begin{aligned}
 H_{6\pi}(x, \zeta) = & -\frac{\phi_0}{4\lambda\lambda_j} \exp\left(-\frac{|x \mp d|}{\lambda}\right) \times \\
 & \times \left\{ \exp\left(-\frac{|\zeta - \zeta_0|}{\lambda_j}\right) + \exp\left(-\frac{|\zeta|}{\lambda_j}\right) + \right. \\
 & \left. + \exp\left(-\frac{|\zeta + \zeta_0|}{\lambda_j}\right) \right\} - \\
 & - (-1)^n \frac{\phi_0}{k_0\lambda\lambda_j^2} \exp(-k_0|x \mp d|) \times \\
 & \times [\theta(\zeta + \zeta_0) - \theta(\zeta - \zeta_0)] \cos\left(k_0|\zeta| - (-1)^n\frac{\pi}{6}\right), \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

где  $k_0 = (\pi n/\lambda_j) \ln^{-1}(\pi n\lambda_j/2\lambda) \gg 1/\lambda$ . Аналогично  $4\pi$ -кинку монотонная составляющая поля медленного  $6\pi$ -кинка проникает в сверхпроводники на лондоновскую длину, а вклад в магнитное поле, связанный с черенковски-захваченными волнами Свихарта локализован вблизи плоскости перехода на меньшем масштабе,  $1/k_0 \ll \lambda$ .

Выражение (5.10) демонстрирует сделанное после формулы (5.8) утверждение о склеивании вихрей. Действительно, монотонную часть поля (5.10) в переходе можно представить в виде суммы  $H_{2\pi}(\zeta + \zeta_0) + H_{2\pi}(\zeta) + H_{2\pi}(\zeta - \zeta_0)$ , где  $H_{2\pi}$  описывается выражением (1.6) при  $v = 0$ . Это означает, что поле  $6\pi$ -кинка можно представить в виде суперпозиции полей трех сравнительно далеко разнесенных  $2\pi$ -кинков. При этом небольшие по интенсивности захваченные волны Свихарта склеивают эти три поля в единое поле, отвечающее медленно движущемуся  $6\pi$ -кинку.

Продemonстрируем теперь влияние склеивания на энергию  $6\pi$ -кинка в пределе больших  $n$ , когда вихрь захватил большое количество длин волн. Как и в случае  $4\pi$ -кинка, в этом пределе энергия склеивания  $W_{mw}$  мала как по сравнению с  $W_m$ , так и по сравнению с энергией волн  $W_w$ . При  $n \gg 1$  из формулы (5.3) и определений (3.19)–(3.21), (П.7)–(П.9) находим

$$W_m \simeq 3k_1\lambda_j W_{2\pi} \simeq 3W_{2\pi}/\sqrt{1 - (v/v_s)^2},$$

$$W_w \simeq 4\pi n C^2 \left(\frac{v}{v_s}\right)^2 k_0 \lambda_j W_{2\pi} \simeq \left[\frac{8}{3} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^2 \times \right. \\ \left. \times \ln^3 \frac{\pi n}{2}\right] 3W_{2\pi} / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_s}\right)^2} \ll W_m.$$

Мы видим, что энергия вихря в основном определяется энергией трех  $2\pi$ -кинков (1.7) и, соответственно, энергия склеивающих волн  $W_w$  мала.

Для вихря со скоростью  $v \ll v_s$ , когда выполнено неравенство (5.4), имеем

$$W_m \simeq 3W_{2\pi}, \\ W_w \simeq \left[\frac{8}{3} \frac{2\lambda}{\pi n \lambda_j} \ln^2 \frac{\pi n \lambda_j}{2\lambda}\right] 3W_{2\pi} \ll W_m.$$

Последние выражения показывают, что с большой точностью энергия  $6\pi$ -кинка складывается из энергий трех  $2\pi$ -кинков. При этом энергия свихартовских волн, склеивающих эти  $2\pi$ -кинки, значительно меньше  $W_m$ , что отвечает представлению о склеивании джозефсоновских вихрей захваченными волнами.

Установленные здесь и в разд. 4 свойства не менее ярко проявляются в до сих пор никогда теоретически не обсуждавшемся случае джозефсоновских вихрей, отвечающих  $8\pi$ -кинкам, что будет рассмотрено в следующем разделе.

### 6. СКЛЕИВАНИЕ $8\pi$ -КИНКОВ

В третьем разделе было указано на более сложную структуру поля волн Свихарта, черенковски-захваченного  $8\pi$ -кинком, по сравнению со структурой поля захваченных волн в случае  $4\pi$ - и  $6\pi$ -кинков. Действительно, теперь помимо числа  $n$ , характеризующего число длин захваченных волн на сумме интервалов  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$  и отвечающего уравнению (3.16), существенную роль играет еще одно целое число  $p$ , определенное соотношением (3.17) и отвечающее явлению интерференции волн на интервале  $\Xi_1$ . Используя введенный в разд. 4 параметр  $\delta$ , который в случае  $8\pi$ -кинков является функцией чисел  $n$  и  $p$  ( $\delta(n, p)$ ), можно записать условия согласования (3.13) и (3.14) в виде

$$\exp[-k_0(\zeta_2 - \zeta_1)\delta] + \exp[-k_0(\zeta_1 + \zeta_2)\delta] + \\ + \exp[-2k_0\zeta_2\delta] = \delta^2, \\ \exp[-2k_0\zeta_1\delta] + 2 \exp[-k_0(\zeta_1 + \zeta_2)\delta] + \\ + \exp[-2k_0\zeta_2\delta] = 4\delta^2 \cos^2(k_0(\zeta_2 - \zeta_1)/2). \quad (6.1)$$

Введя обозначение  $a \equiv \pi(2n+1)\delta$ , с помощью (3.16) и (6.1) можем записать следующее уравнение для определения параметра  $\delta$ :

$$\frac{e^a(1+\delta^2)^2}{(1+e^a)(\delta^2 e^a - 1)} = 4\delta^2 \cos^2 \left[ \frac{1}{2\delta} \ln \left( \frac{\delta^2 e^a - 1}{1 + e^a} \right) \right]. \quad (6.2)$$

При этом для размеров интервалов  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$  имеем

$$2\zeta_1 = \sqrt{\frac{\lambda\lambda_j}{\delta\sqrt{2}}} \ln \left( \frac{\delta^2 e^a - 1}{e^{-a} + 1} \right), \\ 2\zeta_2 = \sqrt{\frac{\lambda\lambda_j}{\delta\sqrt{2}}} \ln \left( \frac{e^a + 1}{\delta^2 - e^{-a}} \right).$$

Как и в предыдущих двух разделах, для небольших значений  $n$ , отвечающих весьма малому отклонению собственной скорости  $8\pi$ -кинка от скорости Свихарта, уравнение (6.2) совместно с определением  $a$  решается численно. В таблице приведены полученные при этом значения для  $\delta(n, p)$ , а также для определенной согласно формуле (3.17) характеризующей интерференционную картину величины  $\delta p(n, p)$ . Согласно (4.4)  $\delta(n, p)$  определяет собственную скорость  $8\pi$ -кинка. Монотонно зависящий от аргумента  $\zeta$  и не испытывающий осцилляций  $8\pi$ -кинк отвечает  $n = p = 0$ . Такой  $8\pi$ -кинк имеет максимальную собственную скорость равномерного движения

$$v_{max} = v_s (1 - 0.29\lambda/\lambda_j),$$

превышающую максимальные скорости  $4\pi$ -кинка (4.10) и  $6\pi$ -кинка (5.2), а для областей черенковского захвата волн имеем

$$2\zeta_1(0, 0) = 0.91\sqrt{\lambda\lambda_j}, \quad 2\zeta_2(0, 0) = 3.42\sqrt{\lambda\lambda_j}.$$

При этом на отрезке  $2\zeta_1 + 2\zeta_2$  укладывается только одна длина волны  $\lambda(0, 0) = 2\pi/k_0(0, 0) = 4.33\sqrt{\lambda\lambda_j}$ . Эта длина волны превышает длины захваченных волн в  $8\pi$ -кинках с  $n > 0$ . На рисунке 5 приведены графики  $8\pi$ -кинков для наименьших чисел  $n = 0$  ( $p = 0$ ) и  $n = 1$  ( $p = 0, 1, 2$ ).

Обратимся теперь к случаю высоких мод вихрей

$$1 \ll n \ll \frac{2^{3/2}\lambda_j}{\pi\lambda} \ln \frac{\sqrt{2}\lambda_j}{\lambda},$$

когда в силу выполнения правого неравенства собственная скорость  $8\pi$ -кинка все еще слабо отличается от скорости Свихарта. Тогда уравнения (6.1) можно свести к следующим:

$$\exp[-k_0(v)(\zeta_2 - \zeta_1)\delta] = \delta^2, \\ \exp[-2k_0(v)\zeta_1\delta] = 4\delta^2 \cos^2[k_0(v)(\zeta_2 - \zeta_1)/2].$$

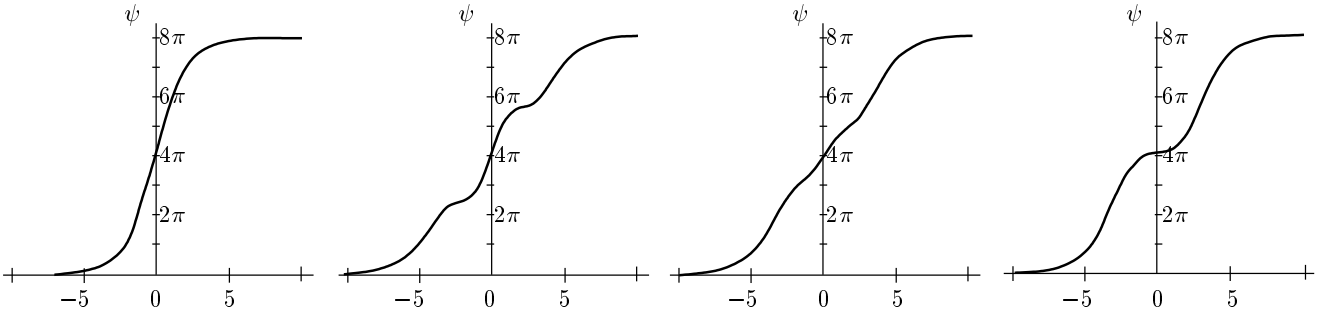


Рис. 5. Разность фаз  $\psi$  быстрого  $8\pi$ -кинка как функция безразмерной координаты  $2^{1/4}\zeta/\sqrt{\lambda\lambda_j}$ . Графики (слева направо) соответствуют  $n = 0, p = 0$ ;  $n = 1, p = 0$ ;  $n = 1, p = 1$ ;  $n = 1, p = 2$

Отсюда с помощью соотношений (3.16), (3.17) и (4.3) получаем

$$2\zeta_1 = 2^{-1/4}\pi\sqrt{\lambda\lambda_j\delta}(p + \delta p), \tag{6.3}$$

$$2\zeta_2 = 2^{-1/4}\pi\sqrt{\lambda\lambda_j\delta}(4n + 2 - p - \delta p), \tag{6.4}$$

$$\delta = 2A/\pi \tag{6.5}$$

и следующее уравнение для определения  $\delta p(n, p)$ :

$$\exp[-(2n + 1 - p - \delta p)A] = 2A/\pi, \tag{6.6}$$

где  $A \equiv (2n + 1 - 2p - 2\delta p)^{-1} \ln |2 \sin(\pi(p + \delta p)/2)|$ .

Частный случай такой интерференции захваченных волн на участке  $\Xi_1$ , когда амплитуда осциллирующей зависимости (3.18) оказывается много меньше  $4\pi C$ , отвечает решению уравнения (6.6) при

$$n + \frac{n}{2} \ln^{-1} \frac{\pi n}{2} < p < 2n - 3,$$

когда

$$\delta p = \frac{1 - (-1)^p}{2} + (-1)^p \pi^{-1} \times \exp \left\{ -N \left[ p - n - \frac{(-1)^p}{2} \right] \right\}, \tag{6.7}$$

где использовано обозначение

$$N = N(n, p) \equiv 4 [4n - 2p + 1 + (-1)^p]^{-1} \times \ln \left\{ \pi \left( n - \frac{p}{2} \right) + \frac{\pi}{4} [1 + (-1)^p] \right\}.$$

Формулы (4.3), (4.4), (6.3)–(6.5) и (6.7) позволяют для быстрых  $8\pi$ -кинок получить следующий дискретный спектр характеризующих их величин:

$$\frac{v(n, p)}{v_s} = 1 - 2^{-3/2} \pi N^{-1}(n, p) \frac{\lambda}{\lambda_j},$$

$$2\zeta_1(n, p) = 2^{-1/4} p \sqrt{\pi N \lambda \lambda_j},$$

$$2\zeta_2(n, p) = 2^{-1/4} (4n + 2 - p) \sqrt{\pi N \lambda \lambda_j},$$

$$\lambda_0(n, p) = \frac{2\pi}{k_0(n, p)} = 2^{3/4} \sqrt{\pi N \lambda \lambda_j}.$$

По мере увеличения числа  $p$  растет размер области  $\Xi_1$ , а размер области  $\Xi_2$  уменьшается. Иными словами, расширяется размер области такой интерференции захваченных волн, в которой они взаимно компенсируются. В то же время при данном  $n$  растет собственная скорость  $8\pi$ -кинка, которая слабо отличается от свихартовской.

Уравнение (6.6) имеет место в пределе больших значений  $n$  и не слишком больших значений  $p$ , когда в левых частях уравнений (6.1) приближенно можно оставить только первые слагаемые. Напротив, при  $p$  близких к  $2n$  размер внутренней области захвата  $2\zeta_1$  близок к  $2\zeta_2$  и приближение (6.6) уравнений (6.1) недостаточно точное. Поэтому для таких значений  $p$  найдем значения  $\delta(n, p)$  и  $\delta p(n, p)$  непосредственно из (6.1), а затем определим параметры, характеризующие  $8\pi$ -кинок. Так, при  $p = 2n$ ,  $\delta p \simeq 0$  и  $p = 2n - 1$ ,  $\delta p \simeq 1$  находим:  $\delta \simeq 0.474$ ,  $2\zeta_1 \simeq 3.64n\sqrt{\lambda\lambda_j}$ ,  $2\zeta_2 \simeq 3.64(n + 1)\sqrt{\lambda\lambda_j}$ ,  $v/v_s \simeq 1 - 0.58(\lambda/\lambda_j)$ ,  $\lambda_0 = 2\pi/k_0 \simeq 3.64\sqrt{\lambda\lambda_j}$ . Соответственно, при  $p = 2n - 2$ ,  $\delta p \simeq 0$  и  $p = 2n - 3$ ,  $\delta p \simeq 1$  находим  $\delta \simeq 0.274$ ,  $2\zeta_1 \simeq 2.77(n - 1)\sqrt{\lambda\lambda_j}$ ,  $2\zeta_2 \simeq 3.64(n + 2)\sqrt{\lambda\lambda_j}$ ,  $v/v_s \simeq 1 - 1.19(\lambda/\lambda_j)$ ,  $\lambda_0 = 2\pi/k_0 \simeq 2.77\sqrt{\lambda\lambda_j}$ .

При дальнейшем уменьшении  $p$  с большой точностью применимо асимптотическое уравнение (6.6). Например, уже при  $p = 2n - 4$  точность решения (6.7) этого уравнения составляет 3%.

Остановимся, наконец, на медленных  $8\pi$ -кинках, для номеров мод которых выполнено условие (5.4). Тогда имеют место соотношения (4.16)–(4.18), а

p	n							
	0		1		2		3	
	$\delta(n, p)$	$\delta p(n, p)$	$\delta(n, p)$	$\delta p(n, p)$	$\delta(n, p)$	$\delta p(n, p)$	$\delta(n, p)$	$\delta p(n, p)$
0	0.672	0.421	0.355	0.818				
1			0.439	0.735				
2			0.511	0.139	0.303	0.379	0.228	0.672
3					0.466	0.954	0.263	0.708
4					0.483	0.039	0.286	0.186
5							0.472	0.987
6							0.476	0.007

уравнения согласования (3.13) и (3.14) сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\lambda_j}\right) &= \frac{2\lambda}{k_0\lambda_j^2}, \\ \exp\left(-\frac{2\zeta_1}{\lambda_j}\right) &= \frac{8\lambda}{k_0\lambda_j^2} \cos^2\left[\frac{k_0(\zeta_2 - \zeta_1)}{2}\right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Учтя (3.17), согласно (6.8) можно представить характерные параметры вихря в следующем виде:

$$2\zeta_1 = \pi(p + \delta p)/k_0, \quad 2\zeta_2 = \pi(4n + 2 - p - \delta p)/k_0, \quad (6.9)$$

$$v = v_s/\sqrt{k_0\lambda} \ll v_s,$$

$$\lambda_0 = 2\pi/k_0 = 4\lambda_j A \ll \lambda. \quad (6.10)$$

При этом неизвестная  $\delta p(n, p)$  определяется уравнением

$$\exp\{-2(2n + 1 - p - \delta p)A\} = \frac{4\lambda A}{\pi\lambda_j}. \quad (6.11)$$

Наличие в правой части малого параметра ( $\lambda/\lambda_j$ ) и ее положительность сразу указывают на вытекающее из (6.10) и (6.11) неравенство  $2n + 1 - p - \delta p \gg 1$ . Отсюда в соответствии с формулами (6.9) сразу следует условие  $2\zeta_2 > 2\zeta_1$  малости размера внутренней области черенковского захвата волн по сравнению с размером внешней области  $\Xi_2$ .

Учитывая малость правой части (6.11), можно записать это уравнение в следующей приближенной форме:

$$2A \simeq \frac{\ln[\pi(2n - p)\lambda_j/2\lambda]}{2n - p} \equiv N_\Lambda(n, p). \quad (6.12)$$

Очевидно, что при  $p \ll n$  это уравнение решений не имеет. Для случая интерференции захваченных волн в области  $\Xi_1$  близкой к полной компенсации, имеем из (6.12):

$$\begin{aligned} \delta p(n, p) &= [1 - (-1)^p]/2 + (-1)^p \pi^{-1} \times \\ &\times \exp\{-(p - n)N_\Lambda(n, p)\}, \end{aligned}$$

и

$$n + n/\ln \frac{\pi n \lambda_j}{2\lambda} < p < 2n - \frac{2\lambda_j}{\pi\lambda} \ln \frac{\lambda_j}{\sqrt{2}\lambda}.$$

Интерференция приводит к двукратному усилению амплитуды колебаний, если

$$|\sin[\pi(p + \delta p)/2]| \simeq 1. \quad (6.13)$$

Соответствующее решение реализуется при  $1 \ll n - p \ll n$ , когда  $n - p \simeq n \ln 2/\ln[\pi n \lambda_j/2\lambda]$ . В соответствии с (6.13) при  $p$ -четных  $\delta p$  близко к единице, а при  $p$ -нечетных  $\delta p$  близко к нулю.

В условиях выполнения неравенства (5.4) уравнение (6.11), а значит, и система (6.8) асимптотически точны при  $p \ll 2n$ . Покажем, что уравнения согласования (3.13) и (3.14) не имеют решений при  $p \lesssim 2n$ , т. е. покажем, что при переходе от (3.13), (3.14) к (6.8) не произошло потери решений.

Действительно, положим  $p = 2n - p_1$  ( $p_1 \ll n$ ),  $x \equiv \pi/k_0\lambda_j = \pi\lambda(v/v_s)^2/\lambda_j \ll \pi\lambda/\lambda_j \ll 1$ . Тогда уравнение (3.13) примет вид

$$\begin{aligned} \exp[-(p_1 + 1 - \delta p)x] + \exp[-(2n + 1)x] + \\ + \exp[-(2n + 2 + p_1 - \delta p)x] = 2\lambda x/\pi\lambda_j. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет решения, удовлетворяющие условию  $x \ll \pi\lambda/\lambda_j$  только для достаточно

больших значений  $p_1$ :  $p_1 > (2\lambda_j/\pi\lambda) \ln(\lambda_j/\sqrt{2}\lambda)$ . Таким образом, точные уравнения согласования не допускают решений со значениями  $p$  близкими к  $2n$ . Решения с меньшими значениями  $p$  ( $p < 2n - (2\lambda_j/\pi\lambda) \ln(\lambda_j/\sqrt{2}\lambda)$ ), как легко проверить, можно описывать приближенным уравнением (6.8). Поэтому уравнение (6.8) пригодно для описания всех  $8\pi$ -кинков, движущихся со скоростями много меньшими свихартовской.

Для отчетливой демонстрации склеивания вихрей запишем формулу (3.15) в пределе  $v \ll v_s$ , когда имеют место формулы (4.16)–(4.18):

$$\begin{aligned} \psi_{8\pi}(\zeta) = & 4\pi + \pi [1 - \exp(-|\zeta + \zeta_2|/\lambda_j)] \operatorname{sign}(\zeta + \zeta_2) + \\ & + \pi [1 - \exp(-|\zeta + \zeta_1|/\lambda_j)] \operatorname{sign}(\zeta + \zeta_1) + \\ & + \pi [1 - \exp(-|\zeta - \zeta_2|/\lambda_j)] \operatorname{sign}(\zeta - \zeta_2) + \\ & + \pi [1 - \exp(-|\zeta - \zeta_1|/\lambda_j)] \operatorname{sign}(\zeta - \zeta_1) + \\ & + 4\pi(\lambda/\lambda_j)^2 (v/v_s)^2 \{ \cos[k_0(v)(|\zeta - \zeta_1|)] \times \\ & \times \operatorname{sign} \zeta [\theta(-\zeta + \zeta_1) - \theta(-\zeta - \zeta_1)] + \\ & + \cos[k_0(v)(|\zeta - \zeta_2|)] \times \\ & \times \operatorname{sign} \zeta [\theta(-\zeta + \zeta_2) - \theta(-\zeta - \zeta_2)] \}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Малость осциллирующего слагаемого, обусловленного захваченными волнами, здесь очевидна, т. е. очевидна малость поля волн, склеивающего отдельные  $2\pi$ -кинки. Для того чтобы лучше была видна разнесенность в пространстве  $2\pi$ -кинков, из которых склеен  $8\pi$ -кинк, перепишем формулу (6.10) с учетом соотношения (6.12):

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = 2\lambda_j \ln \left[ \frac{(2n-p)\pi\lambda_j}{2\lambda} \right] / (2n-p).$$

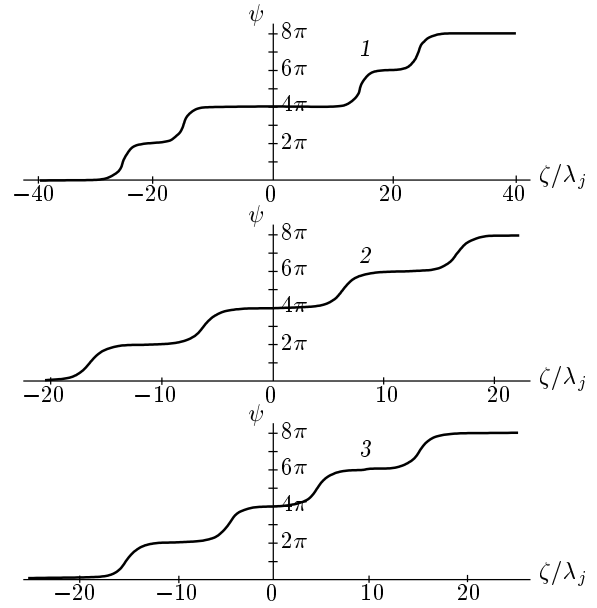
Это сразу позволяет записать:

$$2\zeta_1 \simeq p\lambda_j \frac{\ln[(2n-p)\pi\lambda_j/2\lambda]}{2n-p} \gg \lambda_j,$$

$$2\zeta_2 \simeq (4n-p)\lambda_j \frac{\ln[(2n-p)\pi\lambda_j/2\lambda]}{2n-p} \gg \lambda_j.$$

То, что внутренняя область черенковского захвата волн медленным вихрем велика по сравнению с размером  $\lambda_j$   $2\pi$ -кинка, должно быть очевидно благодаря отсутствию решений уравнения (6.12) при  $p \ll n$ . Иллюстрация сильно разнесенных в пространстве четырех  $2\pi$ -кинков, склеенных черенковски-захваченными волнами Свихарта в один джозефсоновский вихрь, состоящий из четырех сфазированных элементарных вихрей, приведена на рис. 6.

Продемонстрируем, как проявляются эффекты интерференции захваченных волн на участке  $\Xi_1$  и



**Рис. 6.** Типичное склеивание медленного  $8\pi$ -кинка;  $\lambda_j/\lambda = 10$ ,  $n = 2000$ ; кривая 1 соответствует  $p = 3000$ ,  $v \simeq 0.18v_s$ ; кривая 2 —  $p = 2200$ ,  $v \simeq 0.13v_s$ ; кривая 3 —  $p = 1886$ ,  $v \simeq 0.12v_s$ .

как проявляется явление склеивания на виде магнитного поля и энергии  $8\pi$ -кинков. Для вихря с  $v \approx v_s$  имеем

$$\begin{aligned} H_{8\pi}(x, \zeta) = & -\frac{\phi_0}{2^{7/4}\lambda\sqrt{\lambda\lambda_j}} \frac{\sqrt{\delta}}{1+\delta^2} \exp\left(-\frac{|x \mp d|}{\lambda}\right) \times \\ & \times \left\{ \exp(-k_1|\zeta + \zeta_2|) + \exp(-k_1|\zeta - \zeta_2|) + \right. \\ & + \exp(-k_1|\zeta + \zeta_1|) + \exp(-k_1|\zeta - \zeta_1|) + \\ & + 2\delta [\theta(\zeta + \zeta_2) - \theta(\zeta - \zeta_2) - \theta(\zeta + \zeta_1) + \theta(\zeta - \zeta_1)] \times \\ & \times \sin[k_0(\zeta_2 - |\zeta|)] + 4\delta [\theta(\zeta + \zeta_1) - \theta(\zeta - \zeta_1)] \times \\ & \times \sin\left[\frac{\pi}{2}(p + \delta p)\right] \cos(k_0\zeta) \left. \right\}, \end{aligned}$$

где  $k_0$  и  $k_1$  описываются выражениями (4.3). Как и в случае  $4\pi$ - и  $6\pi$ -кинков, магнитное поле быстрого  $8\pi$ -кинка проникает в сверхпроводники на расстояние порядка лондоновской длины, а характерное расстояние изменения монотонной составляющей составляет  $1/k_1 \gg \lambda$ . Поле черенковски-захваченных волн Свихарта осциллирует с периодом  $2\pi/k_0 \gg \lambda$ . При уменьшении скорости вихря уменьшается как максимальное значение монотонной составляющей поля, так и амплитуда поля, порожденного захваченными обобщенными волнами Свихарта.

Наиболее яркое отличие магнитного поля  $8\pi$ -кинка от поля  $4\pi$ - и  $6\pi$ -кинков связано с наличием двух перекрывающихся областей захвата волн

Свихарта,  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$ . Вследствие интерференции волн из разных областей захвата на участке от  $-\zeta_1$  до  $\zeta_1$  слагаемое с косинусом содержит дополнительный множитель  $2 \sin[(p + \delta p)\pi/2]$ . Появление такого множителя приводит к подавлению амплитуды осцилляций магнитного поля, если  $p$  — четное и  $\delta p \ll 1$ , либо если  $p$  — нечетное и  $1 - \delta p \ll 1$ .

Магнитное поле  $8\pi$ -кинка, движущегося со скоростью  $v \ll v_s$ , имеет вид

$$\begin{aligned}
 H_{8\pi}(x, \zeta) = & -\frac{\phi_0}{4\lambda\lambda_j} \left\{ \exp\left(-\frac{|x \mp d|}{\lambda}\right) \times \right. \\
 & \times \left[ \exp\left(-\frac{|\zeta + \zeta_2|}{\lambda_j}\right) + \exp\left(-\frac{|\zeta + \zeta_1|}{\lambda_j}\right) + \right. \\
 & \left. \left. + \exp\left(-\frac{|\zeta - \zeta_1|}{\lambda_j}\right) + \exp\left(-\frac{|\zeta - \zeta_2|}{\lambda_j}\right) \right] \right\} - \\
 & - \frac{\phi_0}{k_0\lambda\lambda_j^2} \exp(-k_0|x \mp d|) \times \\
 & \times \left\{ [\theta(\zeta + \zeta_2) + \theta(\zeta - \zeta_1) - \theta(\zeta + \zeta_1) - \theta(\zeta - \zeta_2)] \times \right. \\
 & \times \sin(k_0(\zeta_2 - |\zeta|)) + 2[(\zeta + \zeta_1) - \theta(\zeta - \zeta_1)] \times \\
 & \left. \times \sin\left(\frac{\pi}{2}(p + \delta p)\right) \cos(k_0\zeta) \right\}, \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

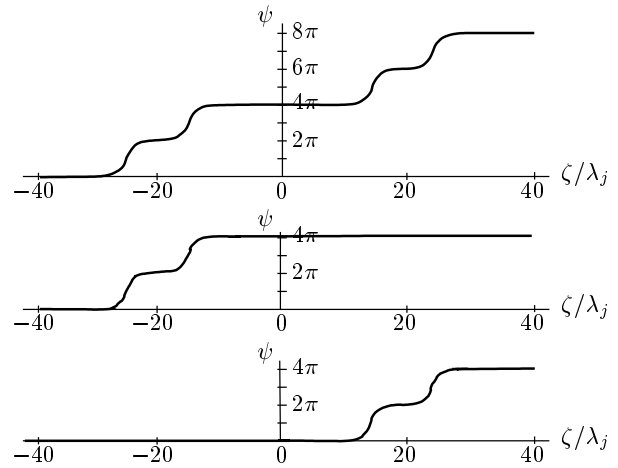
где  $k_0 = (v_s/v)^2/\lambda \gg 1/\lambda$ . Аналогично магнитным полям медленных  $4\pi$ - и  $6\pi$ -кинок осциллирующая часть магнитного поля прижата к плоскости перехода на малое расстояние,  $1/k_0 \ll \lambda$ .

Выражение (6.15) показывает, что в случае выполнения неравенств  $2\zeta_1 \gg \lambda_j$  и  $\zeta_2 - \zeta_1 \gg \lambda_j$  магнитное поле в переходе, созданное медленным  $8\pi$ -кинком, представляет собой сумму полей далеко разнесенных друг от друга  $2\pi$ -кинок, локализованных вблизи точек  $\zeta = -\zeta_2$ ,  $\zeta = -\zeta_1$ ,  $\zeta = \zeta_1$ ,  $\zeta = \zeta_2$  и склеенных в единое поле волнами Свихарта малой интенсивности. При этом только присутствие таких небольших по амплитуде волн Свихарта, интерферирующих на интервале  $\Xi_1$ , допускает наличие решения (6.14) — медленный  $8\pi$ -кинк.

Наконец, остановимся на проявлении склеивания вихрей на примере выражений для энергии  $8\pi$ -кинка, захватившего поле с большим количеством длин волн. Имея в виду неравенства  $W_{mw} \ll W_w \ll W_m$ , ограничимся описанием двух наибольших вкладов в энергию. Для вихря, движущегося со скоростью  $v \approx v_s$ , имеем

$$W_m \simeq 4k_1\lambda_j W_{2\pi} = \frac{4W_{2\pi}}{\sqrt{1 - (v/v_s)^2}},$$

$$\begin{aligned}
 W_w \simeq & 4\pi k_0 \lambda_j C^2 (v/v_s)^2 \times \\
 & \times [2n + 1 - (-1)^p (p + \delta p) \cos(\pi\delta p)] W_{2\pi} \ll W_m.
 \end{aligned}$$



**Рис. 7.** Склеивание  $8\pi$ -кинка из двух  $4\pi$ -кинок;  $\lambda_j/\lambda = 10$ . Скорости вихрей  $\simeq 0.18v_s$ . Для  $8\pi$ -кинка  $n = 2000$ ,  $p = 3000$ . Для  $4\pi$ -кинок  $n = 500$ . На участках  $[-\zeta_2, -\zeta_1]$  и  $[\zeta_1, \zeta_2]$  (для  $8\pi$ -кинка) и на отрезках, где присутствуют черенковские осцилляции (для  $4\pi$ -кинок), укладывается одинаковое количество длин волн — 500.5

Своеобразие последнего выражения по сравнению с волновыми вкладами в энергию  $4\pi$ - и  $6\pi$ -кинок состоит в появлении слагаемого, содержащего косинус и возникшего из-за интерференции захваченных волн. Мы видим, что энергия вихря в основном складывается из энергий (1.7) четырех  $2\pi$ -кинок, а энергия склеивающих волн мала.

Энергия  $8\pi$ -кинка в пределе  $v \ll v_s$  также в основном состоит из энергии четырех почти покоящихся  $2\pi$ -кинок:

$$W_{8\pi} \simeq 4W_{2\pi},$$

а энергия обеспечивающих их склеивание захваченных волн Свихарта, как и раньше, мала.

В заключение этого раздела остановимся на результатах, приведенных на рис. 7. Верхняя кривая на этом рисунке отвечает  $8\pi$ -кинку при  $n = 2000$ ,  $p = 3000$ , когда  $2\zeta_1 \simeq 29\lambda_j \gg \zeta_2 - \zeta_1 \simeq 9.66\lambda_j$  и  $v/v_s \simeq 0.18$ . Каждая из двух нижних кривых, отличающихся друг от друга лишь смещением вдоль оси  $\zeta$ , отвечает  $4\pi$ -кинку (естественно, склеенному из  $2\pi$ -кинок) при  $2\zeta_0 \simeq 9.66\lambda_j$  и  $v/v_s \simeq 0.18$ . Сравнение трех приведенных на рис. 7 кривых позволяет с очевидностью видеть смысл в утверждении о склеивании  $8\pi$ -кинка из двух  $4\pi$ -кинок, каждый из которых склеен из двух  $2\pi$ -кинок. Подчеркнем, что основанием для такого утверждения является только количественная возможность значительного раз-



несения в пространстве двух пар  $2\pi$ -кинков, образующих  $8\pi$ -кинк.

О значительном разнесении пар  $2\pi$ -кинков, образующих единый  $8\pi$ -кинк, можно говорить тогда, когда размер каждой пары  $(\zeta_2 - \zeta_1)$  мал по сравнению с расстоянием между парами  $(2\zeta_1)$ . В соответствии с (6.9) такая возможность реализуется при  $p \gg n$  и отвечает случаю сильного подавления черенковских осцилляций на отрезке  $\Xi_1$ . Так как каждая пара  $2\pi$ -кинков представляет собой  $4\pi$ -кинк, то о склеивании в пределе  $p \gg n$  можно говорить как о склеивании двух  $4\pi$ -кинков.

При уменьшении  $p$  амплитуда интерференционной картины в области  $\Xi_1$  увеличивается, а расстояние между парами  $2\pi$ -кинков уменьшается. Самому меньшему значению  $p$  (отвечающему выполнению условия (6.13)) соответствуют следующие значения размеров областей захвата:  $2\zeta_1 \simeq \lambda_j \ln(\pi n \lambda_j / 2\lambda)$ ,  $2\zeta_2 \simeq 3\lambda_j \ln(\pi n \lambda_j / 2\lambda)$ , т. е.  $2\zeta_1 \simeq \zeta_2 - \zeta_1 \gg \lambda_j$ . Это означает, что размер каждой пары  $2\pi$ -кинков и расстояние между этими парами близки. В этом случае естественно говорить о том, что  $8\pi$ -кинк склеен из четырех  $2\pi$ -кинков, отстоящих друг от друга примерно на одинаковые расстояния.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог всему изложенному выше, прежде всего следует подчеркнуть продуктивность использования модели Обри—Волкова, которая позволила в сравнительно простой аналитической форме сформулировать теорию джозефсоновских вихрей, несущих конечное (больше единицы) число элементарных магнитных потоков. Аналитическая теория нашей работы не только позволила сформулировать замкнутую теорию описания таких вихрей (мультикинков), но и установила новую роль черенковского взаимодействия джозефсоновских вихрей с волнами Свихарта. Показано, что движущиеся мультивихри представляют собой когерентные структуры, несущие в себе поле захваченных волн Свихарта. При этом частоты и волновой вектор таких волн связаны со скоростью движущихся вихрей условием черенковского резонанса (2.9). Таким образом, предсказано явление черенковского захвата волн Свихарта джозефсоновскими мультивихрями. С другой стороны, установленные свойства когерентности мультивихрей с захваченными ими волнами позволили предсказать явление дискретизации (нелинейного квантования) собственных скоростей свободно движущихся джозефсоновских

мультивихрей. Наконец, само существование мультивихрей связывается нами с явлением склеивания отдельных вихрей клеим захваченных волн Свихарта. Последнее предсказываемое нами явление особенно ярко просматривается для высоких мод рассмотренных нами когерентных структур, когда размер области склеивания значительно превышает размеры отдельных склеиваемых вихрей. Заметим в заключение, что предсказываемые нами явления могут иметь отношение не только к динамике джозефсоновских вихрей, но в ряде других случаев нелинейной динамики вихрей. Можно утверждать, что изложенная выше теория в определенной мере удовлетворяет тот запрос эксперимента, который был сформулирован еще в работе [1] 1981 года. Действительно, авторы этой работы свои экспериментальные результаты по микроволновому излучению из длинного джозефсоновского перехода уверенно посчитали согласованными с картиной флюксонов, когда согласно [1] стабильным стационарным состояниям отвечает коллективное движение когерентных мультифлюксонных групп. Такой же вывод сделан в работе [1] в связи с анализом приведенной в этой работе вольт-амперной характеристики (ВАХ). Помимо этого можно предположить, что теоретическое выявление в нашей работе дискретного спектра собственных скоростей джозефсоновских вихрей может найти своеобразное отражение в ВАХ длинного джозефсоновского перехода, несущего мультивихревые структуры. Теоретическое исследование ВАХ в модели Обри—Волкова составляет предмет специального исследования.

Работа выполнена при поддержке комплексного проекта «Исследования особенностей высокотемпературных и других сверхпроводников с высокими критическими параметрами» секции «Исследование природы и основных свойств сверхпроводников» Научного совета по сверхпроводимости подпрограммы «Актуальные направления в физике конденсированных сред» и при государственной поддержке ведущих научных школ. Мы признательны рецензенту за критические замечания, способствовавшие улучшению изложения материала статьи.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Выделим вклад захваченных волн в магнитном поле  $2\pi n$ -кинка и в выражении для энергии джозефсоновского перехода. При вычислении магнит-

ного поля (2.14) заметим, что входящие в выражения (3.7) и (3.8) разрывные функции  $\text{sign} \zeta$  и  $\theta(\zeta)$  можно не дифференцировать, так как возникающие при этом слагаемые взаимно сокращаются. Последнее свойство следует из факта отсутствия скачков разности фаз в точках согласования  $\xi_{n'}$  и обеспечивается тождеством  $1 = f(0) + C$ . С учетом этого замечания магнитное поле (2.14) принимает вид

$$H(x, \zeta) = \sum_{n'=1}^n H_m(x, \zeta - \xi_{n'}) + \sum_{s=1}^{s(n)} H_w(x, \zeta, \zeta_s), \quad (\text{П.1})$$

где использованы обозначения

$$H_m(x, \zeta) = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \times K_0 \left( \frac{\sqrt{(\zeta - \zeta')^2 + (x \mp d)^2}}{\lambda} \right) \frac{df(\zeta')}{d|\zeta'|}, \quad (\text{П.2})$$

$$H_w(x, \zeta, \zeta_s) = \frac{\phi_0 C k_0}{2\pi\lambda^2} \int_{-\zeta_s}^{\zeta_s} d\zeta' \times K_0 \left( \frac{\sqrt{(\zeta - \zeta')^2 + (x \mp d)^2}}{\lambda} \right) \times \sin [k_0 (|\zeta'| - \zeta_s)]. \quad (\text{П.3})$$

Последнее выражение описывает магнитное поле, порожденное запертыми на интервале  $\Xi_s = [-\zeta_s, \zeta_s]$  волнами Свихарта, которые испущены движущимся вихрем и захвачены им в процессе движения.

С целью упрощения выражения (П.2) отметим следующее. В обсуждаемых условиях  $\lambda \ll \lambda_j$  свободное движение мультикинков разрешено лишь со скоростями  $v < v_s$ . При этом характерный масштаб изменения функции  $f(\zeta)$  составляет  $\approx 1/k_1$  и всегда значительно превышает  $\lambda$  — размер эффективной области интегрирования по  $\zeta'$  в (П.2) (этот факт следует из простого анализа уравнения (2.9)). При  $k_1\lambda \ll 1$  из (П.2) находим

$$H_m(x, \zeta) = -\frac{\phi_0}{2k_1\lambda\lambda_j^2} \times \frac{\exp[-k_1|\zeta| - |x \mp d|/\lambda]}{2 - k_1^2\lambda^2 - 2(v/v_s)^2(1 - k_1^2\lambda^2)^{3/2}}. \quad (\text{П.4})$$

Далее, используя интегральное представление функции Макдональда

$$K_0 \left( \frac{\sqrt{\zeta^2 + x^2}}{\lambda} \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + \lambda^{-2}}} \times \exp [ik\zeta - |x|\sqrt{k^2 + \lambda^{-2}}]$$

и интегрируя по  $\zeta'$  и  $k$  в комплексной плоскости, из (П.3) получаем

$$H_w(x, \zeta, \zeta_s) = -\frac{\phi_0 C k_0}{4\lambda\sqrt{1 + k_0^2\lambda^2}} \times \exp \left( -|x \mp d| \sqrt{k_0^2 + \lambda^{-2}} \right) \times [\sin(k_0|\zeta - \zeta_s|) + \sin(k_0|\zeta + \zeta_s|) - 2 \cos(k_0\zeta_s) \sin(k_0|\zeta|)] - I(x, \zeta - \zeta_s) - I(x, \zeta + \zeta_s) + 2 \cos(k_0\zeta_s) I(x, \zeta), \quad (\text{П.5})$$

где функция  $I(x, \zeta)$  имеет вид

$$I(x, \zeta) = \frac{\phi_0 C k_0^2}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - 1}} \times \frac{\exp(-r|\zeta|/\lambda)}{r^2 + k_0^2\lambda^2} \cos \left( \frac{|x \mp d|}{\lambda} \sqrt{r^2 - 1} \right).$$

Вклад этого интеграла в магнитное поле (П.1) мал по сравнению с вкладом  $H_m$ , и далее мы им пренебрегаем. Соотношения (П.1), (П.4) и (П.5) составляют основу описания магнитного поля движущихся вихрей, которые захватили обобщенные волны Свихарта.

В заключение представим энергию вихревой структуры джозефсоновского перехода (2.15) в виде суммы

$$W = W_m + W_w + W_{mw} \quad (\text{П.6})$$

энергии отдельных вихрей  $W_m$ , энергии волн Свихарта  $W_w$  и  $W_{mw}$  — энергии взаимодействия вихрей с захваченными ими волнами Свихарта, склеивающими вихри в единую вихревую структуру мультикинков. Для этого используем следующие обозначения:

$$\phi'_m(\zeta) \equiv -\pi \sum_{n'=1}^n \frac{df(\zeta - \xi_{n'})}{d|\zeta - \xi_{n'}|},$$

$$\phi'_w(\zeta) \equiv -2\pi k_0 C \sum_{s=1}^{s(n)} \sin [k_0 (|\zeta| - \zeta_s)] \times [\theta(\zeta_s - \zeta) - \theta(-\zeta_s - \zeta)].$$

Кроме того, заметим, что из (2.4) и (3.19)–(3.21) следует, что

$$\psi(\zeta) - 2\pi I \left[ \frac{\psi(\zeta)}{2\pi} + \frac{1}{2} \right] = F_m(\zeta) + \phi_w(\zeta),$$

где использовано обозначение

$$F_m(\zeta) = -\pi \sum_{n'=1}^n f(\zeta - \xi_{n'}) \text{sign}(\zeta - \xi_{n'}).$$

Тогда для энергии совокупности отдельных вихрей можно записать следующее выражение:

$$W_m = \frac{\phi_0^2}{64\pi^3\lambda\lambda_j^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \left\{ \left( \frac{v}{\omega_j} \right)^2 [\phi'_m(\zeta)]^2 + F_m^2(\zeta) \right\} + \frac{\lambda_j^2}{\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' K_0 \left( \frac{|\zeta - \zeta'|}{\lambda} \right) \phi'_m(\zeta) \phi'_m(\zeta') \right\}. \quad (\text{П.7})$$

Соответственно для энергии захваченных волн Свихарта имеем:

$$W_w = \frac{\phi_0^2}{64\pi^3\lambda\lambda_j^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \left\{ \left( \frac{v}{\omega_j} \right)^2 [\phi'_w(\zeta)]^2 + \phi_w^2(\zeta) \right\} + \frac{\lambda_j^2}{\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' K_0 \left( \frac{|\zeta - \zeta'|}{\lambda} \right) \phi'_w(\zeta) \phi'_w(\zeta') \right\}. \quad (\text{П.8})$$

Наконец,

$$W_{mw} = \frac{\phi_0^2}{32\pi^3\lambda\lambda_j^2} \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \left\{ \left( \frac{v}{\omega_j} \right)^2 \phi'_m(\zeta) \phi'_w(\zeta) + F_m(\zeta) \phi_w(\zeta) \right\} + \frac{\lambda_j^2}{\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' K_0 \left( \frac{|\zeta - \zeta'|}{\lambda} \right) \phi'_m(\zeta) \phi'_w(\zeta') \right\} \quad (\text{П.9})$$

описывает взаимодействие совокупности отдельных вихрей вихревой структуры со склеивающими отдельные вихри захваченными волнами Свихарта.

## ЛИТЕРАТУРА

1. B. Dueholm, O. A. Levring, J. Mygind et al., Phys. Rev. Lett. **46**, 1299 (1981).
2. M. Peyrard and M. D. Kruskal, Physica D **14**, 88 (1984).
3. B. A. Malomed, Phys. Rev. B **47**, 1111 (1993).
4. Yu. M. Aliev and V. P. Silin, Phys. Lett. A **177**, 259 (1993).
5. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, ЖЭТФ **104**, 2526 (1993).
6. В. П. Силин, С. А. Урюпин, ЖЭТФ **108**, 2163 (1995).
7. G. L. Alfimov, V. M. Eleonsky, N. E. Kulagin et al., Chaos **3**, 405 (1993).
8. G. L. Alfimov, V. M. Eleonsky, and L. M. Lerman, Chaos **8**, 257 (1998).
9. S. Aubry and P. J. Le Daeron, Physica D **7**, 240 (1983).
10. S. Aubry, J. Phys. C **16**, 2497 (1983).
11. A. F. Volkov, Physica C **183**, 177 (1991).
12. A. F. Volkov, Physica C **192**, 306 (1992).
13. С. Н. Артеменко, С. В. Ремизов, Письма в ЖЭТФ **66**, 811 (1997).
14. К. К. Likharev, Rev. Mod. Phys. **51**, 101 (1979).
15. A. S. Malishevskii, V. P. Silin, and S. A. Uryupin, Phys. Lett. A **253**, 333 (1999).
16. А. С. Малишевский, В. П. Силин, С. А. Урюпин, Письма в ЖЭТФ **69**, 318 (1999).
17. А. Бароне, Дж. Патерно, *Эффект Джозефсона: физика и применения*, Мир, Москва (1984).