ЖЭТФ, 2000, том 117, вып. 3, стр. 634–643

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В. Г. Марихин*, А. Б. Шабат

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117940, Москва, Россия

М. Бойти**, Ф. Пемпинелли

Факультет физики Университета в Лечче, Италия

Поступила в редакцию 14 сентября 1999 г.

Изучаются автомодельные решения всего семейства одномерных интегрируемых динамических систем типа нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Это семейство приводится к одной из трех канонических форм, соответствующих цепочке Тода, цепочке Вольтерра, либо модели Ландау—Лифшица, которые редуцируются также к трем автомодельным системам, связанным преобразованиями Миуры с четвертым уравнением Пенлеве (PIV). Построено коммутационное представление для этого уравнения. Выявлена связь между полюсами рациональных решений уравнения PIV и стационарным распределением электрических зарядов в параболическом потенциале. Построено автомодельное решение для динамики спина. Найдено точное решение НУШ с переменной дисперсией (оптический солитон).

PACS: 02.30.Hq, 42.50.Rh

1. ВВЕДЕНИЕ

Автомодельные (самоподобные) решения полезны для исследования различных физических приложений интегрируемых систем. Это следует из того факта, что асимптотическая форма любого решения самоподобна. Так как рассматриваются интегрируемые системы, можно построить самоподобные решения, используя только их асимптотический вид. Это — своего рода одна из форм теста Пенлеве.

В этой работе мы установим связь между автомодельными решениями семейства нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) и четвертым уравнением Пенлеве.

Несмотря на многолетнюю историю (см., например, [1]), вопрос об автомодельных решениях далеко не закрыт. В частности, не исследован полностью вопрос о необходимом наборе параметров. Целью данной статьи является построение уравнений для самоподобных решений всего семейства НУШ, а также некоторых интересных частных решений.

Рассмотрим интегрируемые обобщения нелинейного уравнения Шредингера, записанные в виде лагранжевой вариационной задачи

$$\begin{aligned} &\delta \iint (L_0 + V(p,q,q_x))\, dx\, dt = 0, \\ &L_0 = iqp_t + p_x q_x. \end{aligned} \tag{1}$$

В основном нас интересует случай (ср. [2])

$$V = \varepsilon p^2 z^2 + \alpha p z^2 + \beta z^2 + \gamma p^2 z + \delta p^2, \quad z = q_x, \tag{2}$$

когда потенциал $V(p,q,q_x)$ не зависит от q. В этом случае соответствующая (1) пара уравнений для p, $z = q_x$,

$$ip_t = (V_z + p_x)_x, \quad iz_t = (V_p - z_x)_x, \tag{3}$$

обладает тремя законами сохранения нулевого порядка (ср. [3])

$$\rho_t + j_x = 0 \tag{4}$$

*E-mail: mvg@itp.ac.ru
**E-mail: Marco.Boiti@le.infn.it, Dipartimento di Fisica dell'Università and Sezione, Lecce, Italy.

с плотностями ρ равными p, z и pz, соответственно. Это свойство является характеристическим и выделяет системы (3) среди систем общего вида

$$\begin{aligned} iu_t - u_{xx} &= F(u, v, u_x, v_x), \\ iv_t + v_{xx} &= G(u, v, u_x, v_x). \end{aligned} \tag{5}$$

Работа построена следующим образом. В разд. 2 мы покажем, что любой лагранжиан вида (1) с помощью преобразований сдвига и растяжения можно привести к одной из канонических форм, связанных преобразованиями Миуры. Уравнения для автомодельных решений будут получены для каждой из этих форм.

В разд. 3 мы рассмотрим различные представления четвертого уравнения Пенлеве, в частности, коммутационное представление этого уравнения.

Установлено, что если поместить электрические заряды в точки комплексной плоскости, соответствующие положением полюсов любого рационального решения четвертого уравнения Пенлеве, причем величина зарядов должна быть равна вычету в этом полюсе, то такая конфигурация зарядов является равновесной в параболическом потенциале.

Показано, что автомодельные решения нелинейного уравнения Шредингера, соответствующие известному коллапсирующему решению (см., например, [4]), обладают $\mathbb{Z}_3$-симметрией так же, как и решения PIV.

Раздел 4 посвящен изучению модели Ландау—Лифшица. Построена параметризация вектора спина через решения вспомогательной спектральной задачи. Получено полиномиальное решение для спиновой динамики в автомодельном режиме.

Найдено частное самоподобное решение для НУШ с переменной дисперсией — оптический солитон.

2. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ И АВТОМОДЕЛЬНАЯ ПОДСТАНОВКА

Здесь мы приводим явный вид преобразования лагранжиана (1) к одной из канонических форм.

1. Модель Ландау—Лифшица $\epsilon \neq 0$. Лагранжиан (1) при помощи сдвигов

$$P = p - \frac{\alpha}{2\epsilon}, \quad Q = q - \frac{\gamma}{2\epsilon}x - \frac{\alpha\delta}{\epsilon}t, \quad X = x + \frac{\alpha\gamma}{\epsilon}t$$

приводится к виду

$$L = L_0 + \epsilon p^2 z^2 + \left(\delta - \frac{\gamma^2}{4\epsilon}\right) p^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4\epsilon}\right) z^2. \tag{6}$$

При помощи растяжений $p \to -p/\epsilon$ и $t \to -t/\epsilon$, переобозначая константы, получаем

$$L_1 = L_0 - p^2 z^2 + \nu_1^2 p^2 + \nu_2^2 q_x^2. \tag{7}$$

Особый интерес представляет изотропная модель Ландау—Лифшица ($\beta = 0$, $\delta = 0$), т.е.

$$L = L_0 - p^2 z^2. \tag{8}$$

2. Модель Вольтерра ($\epsilon = 0$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$). Лагранжиан (1) приводится к виду

$$L_2 = L_0 + p\, z^2 + p^2 z \tag{9}$$

при помощи сдвигов

$$\begin{aligned} &P = p - \frac{\beta}{\alpha}, \quad Q = q - \frac{\delta}{\gamma}x - \frac{\delta^2\alpha}{\gamma^2}t - \frac{2\beta\delta}{\alpha}t, \\ &X = x + 2\left(\frac{\alpha\delta}{\gamma} + \frac{\gamma\beta}{\alpha}\right)t \end{aligned} \tag{10}$$

и растяжений

$$p \to \frac{p}{\gamma}, \quad q \to \frac{q}{\alpha}.$$

3. Модель Тода ($\epsilon = 0$, $\alpha \neq 0$, $\gamma = 0$). Лагранжиан (1) приводится к виду

$$L_3 = L_0 + p\, z^2 + p^2 \tag{11}$$

при помощи последовательности преобразований

$$P = p - \frac{\beta}{\alpha}, \quad Q = q - 2\frac{\beta\delta}{\alpha}t \tag{12}$$

$$p \to \frac{p}{\delta}, \quad q \to \frac{q}{\alpha}. \tag{13}$$

Отметим, что $p \leftrightarrow q_x \iff \alpha \leftrightarrow \gamma$, $\beta \leftrightarrow \delta$. Другие случаи соответствуют линейной задаче.

Во избежание путаницы мы перепишем уравнения (3), соответствующие лагранжианам L_1, L_2 и L_3, в следующих обозначениях:

$$\begin{aligned} i\hat{p}_t &= \left[2(\nu_2^2 - \hat{p}^2)\hat{z} + \hat{p}_x\right]_x, \\ i\hat{z}_t &= \left[2(\nu_1^2 - \hat{z}^2)\hat{p} - \hat{z}_x\right]_x, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} ia_t &= \left[2ab + a^2 + 2\mu a + a_x\right]_x, \\ ib_t &= \left[2ab + b^2 + 2\mu b - b_x\right]_x, \end{aligned} \tag{15}$$

$$iz_t = (2p + z^2 - z_x)_x, \quad ip_t = (2zp + p_x)_x. \tag{16}$$

Связь между этими уравнениями задается следующими формулами:

$$p = a_x + ab, \quad z = a + b + \mu, \tag{17}$$

$$a = \frac{\hat{p}_x}{\nu_2 + \hat{p}} + (\hat{p} - \nu_2)(\nu_1 - \hat{z}),$$
$$b = -(\hat{p} + \nu_2)(\hat{z} + \nu_1). \tag{18}$$

В частности, формула (18) связывает решения уравнений (15) при $\mu = 2\nu_1\nu_2$ с решениями (14). Отметим еще, что правая часть ρ этих формул преобразования является плотностью закона сохранения нулевого порядка (4):

$$\rho = c_1 pz + c_2 p + c_3 z + c_4 + \partial_x \varphi(p, z),$$

вид которой не зависит от конкретного выбора уравнения (3).

Автомодельные решения системы уравнений (3) определяются простейшим выбором автомодельной подстановки:

$$p = k^m(t) P'(\xi), \quad z = k^n(t) Q'(\xi),$$
$$\xi = x k(t), \quad k' = 2k^3, \tag{19}$$

где штрихи обозначают дифференцирование по соответствующим аргументам. При этом на потенциал $V(p, z)$ накладывается условие обобщенной однородности

$$V(k^m p,\, k^n z) = k^{m+n+1} V(p, z), \tag{20}$$

позволяющее разделить переменные ξ и t в уравнениях (3). Для автомодельных решений (3) мы получаем, таким образом, определяющую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2i(m_1 P + c_1 + \xi P') - P'' = V_z(P', Q'),$$
$$2i(n_1 Q + c_2 + \xi Q') + Q'' = V_p(P', Q'), \tag{21}$$

где $m_1 = m - 1$, $n_1 = n - 1$ а c_1, c_2 — константы интегрирования. Выбор показателей m, n в (21) определяется условием (20). Эти определяющие уравнения допускают понижение порядка и обладают первым интегралом

$$2i\left[\xi P' Q' + (m + n - 1) R + c\right] =$$
$$= Q' P'' - P' Q'' + (z V_z + p V_p - V)(P', Q'), \tag{22}$$

где $R' = P' Q'$. Наличие этого интеграла связано с дополнительным законом сохранения (4) с плотностью $\rho = pz$, а в правой части (22) стоит соответствующий поток j.

В частности, для лагранжиана L_2 с $V = pz^2 + p^2 z$ условие (20) выполнено при $m = n = 1$ и определяющая система для автомодельных решений записывается в следующем виде:

$$2i\xi a + c_1 - a' = 2ab + a^2,$$
$$2i\xi b + c_2 + b' = 2ab + b^2, \tag{23}$$

где $a = P'$, $b = Q'$. Легко проверить, что исключение любой из искомых функций a или b приводит к четвертому уравнению Пенлеве PIV (ср. [5]):

$$y y_{\eta\eta} = \frac{1}{2} y_\eta^2 + \frac{3}{2} y^4 + 4\eta y^3 + 2(\eta^2 - \alpha) y^2 + \beta. \tag{24}$$

Действительно, если $y = y(\eta, \alpha, \beta)$ удовлетворяет уравнению (24), то a и b имеют следующий вид:

$$a = \kappa\, y\left(\kappa\xi,\, -1 + i\left(\frac{c_2}{2} - c_1\right),\, \frac{1}{2}c_2^2\right),$$
$$b = \kappa\, y\left(\kappa\xi,\, 1 + i\left(\frac{c_1}{2} - c_2\right),\, \frac{1}{2}c_1^2\right), \tag{25}$$
$$\kappa^2 = -i.$$

Очевидно, формулы преобразования (17), (18) и масштабные преобразования позволяют выразить, так или иначе, автомодельные решения всего класса уравнений (3), (2) в терминах решений (24). Менее очевидно, что любое интегрируемое обобщение НУШ приводится (см. [2]) к рассматриваемым лагранжевым уравнениям.

3. УРАВНЕНИЕ PIV И КУЛОНОВСКИЙ ГАЗ

Четвертый трансцендент Пенлеве тесно связан с двумя вспомогательными линейными задачами, которые можно представить в виде

$$\Psi_{xx} = U(x, \lambda)\Psi. \tag{26}$$

При этом потенциал $U(x, \lambda)$ — квадратичная или линейная функция спектрального параметра λ, соответственно.

В квадратичном случае спектральная задача (58) приводится к (26) и со следующей параметризацией $U(x, \lambda)$:

$$4U(x, \lambda) = (z - \lambda)^2 + 2z_x - 4p. \tag{27}$$

Покажем, что уравнения

$$\psi_{xx} + (z - \lambda)\psi_x + p\psi,$$
$$\lambda\psi_\lambda = (\lambda + x + z)\psi_x - p\psi \tag{28}$$

образуют лаксову пару для PIV. Действительно, подстановка

$$\psi_\lambda = A\psi_x + B\psi \;\Rightarrow\; \psi_{x\lambda} =$$
$$= [A_x + B + (\lambda - z)A]\psi_x + [B_x - pA]\psi$$

в уравнение

$$\psi_{xx\lambda} + (z - \lambda)\psi_{x\lambda} + p\psi_\lambda = \psi_x$$

приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} &-A_{xxx}+4UA_x+2U_xA=\lambda-z,\\ &2B_x=1+(zA-\lambda A-A_x)_x. \end{aligned} \tag{29}$$

Первое из этих уравнений в случае $\lambda A=\lambda+y(x)$ дает

$$\begin{aligned} &2yy_{xx}-y_x^2=3y^4-4xy^3+(x^2+2c_1)y^2+c_2,\\ &y=z+x, \end{aligned} \tag{30}$$

что с точностью до тривиальных растяжений y и x совпадает с уравнением (24) для PIV.

Отметим, что в рассматриваемом случае $\lambda A=\lambda+y(x)$ уравнения (29) можно переписать в виде

$$z_x=2p+z^2+zx+c_1,\quad (p_x+2pz+px)_x+p=0$$

и исключить из них z, а не p. Это дает

$$\begin{aligned} &Y_{xx}^2+4Y_x\left(Y_x^2+\widetilde{c}_1Y_x+\widetilde{c}_2\right)=(Y-xY_x)^2,\\ &Y_x=p, \end{aligned} \tag{31}$$

где $\widetilde{c}_1=c_1+1$.

По-видимому, формулы (61), (28) задают автомодельные решения (62).

Наряду с уравнениями (28), описывающими связанные с PIV изомонодромные деформации, важную роль в теории PIV играет линейное уравнение Шредингера

$$\psi_{xx}=(u(x)-\lambda)\psi, \tag{32}$$

соответствующее линейному по λ потенциалу $U(x,\lambda)$ в (26). Дискретным симметриям (24) соответствуют при этом преобразования Дарбу для уравнения Шредингера, а само уравнение PIV заменяется эквивалентной системой уравнений первого порядка [6]

$$\begin{aligned} g_1'&=g_1(g_3-g_2)+\alpha_1,\\ g_2'&=g_2(g_1-g_3)+\alpha_2,\\ g_3'&=g_3(g_2-g_1)+\alpha_3, \end{aligned} \tag{33}$$

с дополнительным первым интегралом

$$g_1+g_2+g_3=x\gamma,\quad \gamma=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3. \tag{34}$$

Учитывая первый интеграл, нетрудно проверить (Ср. (23)), что каждая из функций $g_j\equiv y$, $j=1,2,3$, удовлетворяет уравнению (24):

$$\begin{aligned} &2yy_{xx}-y_x^2=y^2(3y^2-4\gamma xy+\gamma^2x^2+2c_j)-\alpha_j^2,\\ &c_j=\alpha_{j+2}-\alpha_{j+1}. \end{aligned} \tag{35}$$

Выражая g_2 через g_1, получаем одно из преобразований Бэклунда для (24):

$$2\widetilde{y}=\frac{\alpha_1-y'}{y}-y+\gamma x.$$

Функция $\widetilde{y}$ удовлетворяет, в силу (35), уравнению (24), но с измененными параметрами α, β.

Одним из приложений (33) является красивая формула, уточняющая связь уравнений (30) и (31). Обозначим

$$Y=g_1g_2g_3+\alpha_1g_2-\alpha_2g_1\ \Rightarrow\ Y'=\gamma h,\quad h=g_1g_2.$$

Используя первый интеграл $x\gamma=g_1+g_2+g_3$ и формулы

$$\begin{aligned} \frac{h'}{h}&=g_2\left(\frac{\alpha_1}{h}-1\right)+g_1\left(\frac{\alpha_2}{h}+1\right),\\ \frac{Y}{h}-x\gamma&=g_2\left(\frac{\alpha_1}{h}-1\right)-g_1\left(\frac{\alpha_2}{h}+1\right),\\ \gamma h&=Y', \end{aligned}$$

можно выразить g_1, g_2 через Y и его производные. В результате получается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Y_{xx}^2=\gamma^2(Y-xY_x)^2+4\gamma^{-1}Y_x(\alpha_1-Y_x)(\alpha_2+Y_x). \tag{36}$$

Полезно заметить, что в пределе $\gamma\to 0$ функции $h_i=g_ig_{i+1}+\mu_{i+1}$, $i\in\mathbb{Z}_3$, удовлетворяют уравнению для эллиптических функций

$$\frac{1}{2}h''+\frac{\partial}{\partial h}(h-\mu_1)(h-\mu_2)(h-\mu_3)=0,$$

где $\alpha_n=\mu_n-\mu_{n+1}$. Очевидная связь этого уравнения с (36) используется в теории асимптотического интегрирования PIV.

Рассматриваемое представление (33) существенно упрощает построение известных семейств частных решений уравнения (24). В частности, каноническая редукция $g_3=\alpha_3=0$ понижения порядка системы (33) приводит к однопараметрическому семейству решений (24), выражающихся через функции Эрмита. Действительно, при $g_3\equiv 0$ находим $g_1=\gamma x-g_2$ и, таким образом, g_2 удовлетворяет уравнению Риккати

$$g_2'=\gamma xg_2-g_2^2+\alpha_2.$$

Подстановка $g_2(x)=\lambda y'(\lambda x)/y(\lambda x)$, $\lambda^2=\gamma/2$ приводит последнее уравнение к уравнению Эрмита

$$y''-2xy'-2\frac{\alpha_2}{\gamma}y=0. \tag{37}$$

Наконец, как легко проверить дифференцированием, преобразование

$$\begin{gathered}\hat{g}_1 = g_1, \quad \hat{g}_2 = g_2 - \frac{\alpha_1}{g_1}, \\ \hat{g}_3 = g_3 + \frac{\alpha_1}{g_1}; \quad \hat{\alpha}_1 = -\alpha_1, \\ \hat{\alpha}_2 = \alpha_2 + \alpha_1, \quad \hat{\alpha}_3 = \alpha_3 + \alpha_1\end{gathered} \tag{38}$$

переводит решение (33) снова в решение.

3.1. Рациональные решения

Хорошо известно [7], что уравнение (24) при специальных значениях параметров α, β обладает рациональными решениями. Известно [8], что для рациональных решений (33) имеют место соотношения

$$\begin{gathered}\alpha_j = \frac{\gamma}{3}\gamma_j, \quad \gamma_j \in \mathbb{Z}, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 3, \quad \gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv \gamma_3 \ (\mathrm{mod}\, 3).\end{gathered} \tag{39}$$

Формулы (39) означают, что $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ располагается либо в центре, либо в вершинах соответствующих треугольников. Последнему соответствует случай

$$\gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv \gamma_3 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 3),$$

в частности, при $\alpha_3 = 0$ мы находим (ср. (37)):

$$\boldsymbol{\alpha} = ((m+1)\gamma, -m\gamma, 0) \ \Rightarrow \ g_1 = \gamma x - (\log P_m)_x,$$

$$g_2 = (\log P_m)_x, \quad g_3 = 0,$$

где P_m — полином степени m, такой что

$$P_m'' = \gamma x P_m' - m\gamma P_m.$$

Существенно для дальнейшего иметь в виду единственность [8] рационального решения (33) при заданном $\boldsymbol{\alpha}$. В частности, из этой единственности и инвариантности (33) относительно инволюции $g_j(x) \mapsto -g_j(-x)$ следует, что рациональные решения отвечают нечетным функциям $g_j(x)$.

В случае общего положения, заменив g_j, $j \in \mathbb{Z}_3$, в (33) на Q_j, $j \in \mathbb{Z}_3$, по формулам

$$g_j = \frac{1}{3}\gamma x + \partial_x \log(Q_{j+1}/Q_{j-1}),$$

мы приходим к следующим уравнениям для полиномов Q_j :

$$\begin{gathered}(Q_j'' - xQ_j' + m_j Q_j)Q_{j+1} + \\ + (Q_{j+1}'' + xQ_{j+1}' - m_{j+1}Q_{j+1})Q_j = \\ = 2Q_j'Q_{j+1}', \quad \gamma = 3.\end{gathered} \tag{40}$$

Здесь нормировка $\gamma = 3$ не ограничивает по существу общности, а m_j обозначают степени полиномов Q_j. В силу периодического замыкания Q_j, $j \in \mathbb{Z}_3$, из (40) следует, что

$$\begin{gathered}Q_1''Q_2Q_3 + Q_1Q_2''Q_3 + Q_1Q_2Q_3'' = \\ = Q_1'Q_2'Q_3 + Q_2'Q_3'Q_1 + Q_3'Q_1'Q_2,\end{gathered}$$

что в свою очередь дает в главном по x порядке

$$\begin{gathered}(m_1 - m_2)^2 + (m_2 - m_3)^2 + (m_3 - m_1)^2 = \\ = 2(m_1 + m_2 + m_3).\end{gathered} \tag{41}$$

Очевидно, уравнения (33) должны следовать из (40), и сравнение параметров этих уравнений дает

$$\begin{gathered}\alpha_j = \frac{\gamma}{3}(1 + m_{j+1} + m_{j-1} - 2m_j) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ \gamma_{j+1} - \gamma_j = 3(m_j - m_{j+1}).\end{gathered}$$

Отсюда, в частности, следуют соотношения (39). Указанные выше формулы вместе с (41) позволяют найти m_1, m_2, m_3 при заданном $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$\begin{gathered}m_j = \frac{1}{3}(\gamma_j - 1)(\gamma_j - 2) + \frac{1}{9}(\gamma_j - \gamma_{j+1})(\gamma_{j-1} - \gamma_j), \\ \gamma_j = \frac{3}{\gamma}\alpha_j.\end{gathered} \tag{42}$$

Отметим еще полезную формулу

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1 - \frac{1}{3}(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1),$$

которая эквивалентна (41).

Образ (39) при отображении (42) выходит, вообще говоря, за рамки множества неотрицательных целых чисел m_j. Можно проверить, что это противоречие снимается дополнительным условием

$$\gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv \gamma_3 \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 3), \tag{43}$$

выделяющим центры треугольников (39). По-видимому, это условие гарантирует также, что целыми числами являются коэффициенты полиномов Q_j, найденных из (40). Приведем несколько примеров:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\alpha} = (-1, 2, 2), \quad \mathbf{Q} = (x, 1, 1), \\ \boldsymbol{\alpha} = (-1, 5, -1), \quad \mathbf{Q} = (x^2 - 1, 1, x^2 + 1), \\ \boldsymbol{\alpha} = (1, 4, -2), \quad \mathbf{Q} = (x, 1, x^2 + 1), \\ \boldsymbol{\alpha} = (5, -4, 2), \quad \mathbf{Q} = (x, x^4 + 2x^2 - 1, x^2 + 1).\end{gathered} \tag{44}$$

Как уже отмечалось, рациональные решения (33) отвечают нечетным функциям g_j. Соответствующие этим решениям полиномы Q_j являются четными функциями x, если их степени m_j четны, и нечетными в противоположном случае. Можно доказать, что полиномы Q_j, найденные из (40), (43), не могут иметь общих нулей.

Отметим, что выше перечислены все возможные решения (40), для которых одно из $m_j = 0$. При этом $Q_j = 1$, а остальные два полинома являются, в силу (40), полиномами Эрмита.

3.2. Кулоновский газ

Общепринятому определению PIV соответствует случай $\gamma = -2$ в (30). Воспользуемся тем свойством уравнения PIV, что любая особенность решения в конечной части комплексной плоскости имеет вид

$$w \sim \frac{c}{\xi - \xi_0} - \xi_0, \quad c^2 = 1. \tag{45}$$

Хорошо известно также, что асимптотическое поведение функций g_i на бесконечности определяется как

$$g_i \to -\frac{2}{3}\xi, \quad \xi \to \infty, \tag{46}$$

либо

$$g_1 \to -2\xi, \quad g_2, g_3 \to 0, \qquad \xi \to \infty. \tag{47}$$

Будем искать рациональные решения уравнения Пенлеве IV в виде

$$w = -\delta\xi + \sum_i \frac{c_i}{\xi - \xi_i}, \tag{48}$$

где $\delta = 2/3$ соответствует случаю «центров» (46), (39), а $\delta = 0$ или $\delta = 2$ приводит к случаю «углов» треугольника. Подставляя (48) в (45), получаем

$$(\delta - 1)\xi_i = \sum_{j\neq i} \frac{c_j}{\xi_i - \xi_j}, \quad c_i = \pm 1. \tag{49}$$

Уравнение (49) описывает электронный газ с кулоновским взаимодействием с параболическим потенциалом, а также статистику собственных значений случайной эрмитовой матрицы, так как (49) может быть получено варьированием следующего функционала:

$$U = \sum_i \frac{1}{2}(1-\delta)c_i\xi_i^2 + \sum_{i\neq j} c_i c_j \log(\xi_i - \xi_j). \tag{50}$$

Частный случай, когда все заряды $c_i = 1$ (либо все $c_i = -1$), приводит к известному решению уравнения PIV

$$w = -2\xi + \frac{H_n'(\xi)}{H_n(\xi)}, \tag{51}$$

где $H_n(\xi)$ — полиномы Эрмита (ср. [9]). Таким образом, корни полиномов Эрмита H_n описывают статическое распределение одинаковых зарядов в потенциале (50).

Интересно, что в случае двух разноименных зарядов решения (48) нет — происходит аннигиляция электрона на дырке. В то же время решение $\mathbf{Q}(1,4,2)$ (см. (44)) определяет три решения уравнения (49) при $\delta = 2/3$, два из которых тривиальны (соответствуют корням полиномов Эрмита), а одно соответствует системе двух положительных и одного отрицательного зарядов:

$$\xi_{1,2} = \pm i, \quad \xi_3 = 0, \quad c_{1,2} = 1, \quad c_3 = -1. \tag{52}$$

В общем случае имеем три решения системы (49), причем все положительные заряды расположены в корнях полинома Q_{j+1}, а все отрицательные — в корнях полинома Q_{j-1}; соответственно число зарядов $N_\pm = \deg Q_{j\pm 1}$.

4. МОДЕЛЬ ЛАНДАУ—ЛИФШИЦА

В определенном смысле наиболее общим из рассматриваемых нами интегрируемых уравнений является анизотропная модель Ландау—Лифшица

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times (\mathbf{S}_{xx} + \hat{J}\mathbf{S}), \quad S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1, \tag{53}$$

где $\hat{J}$ — симметричная матрица. Это векторное уравнение при помощи параметризации вектора $\mathbf{S}$

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= (S_1, S_2, S_3) = \\ &= \big(p(q^2-1) + q,\ ip(q^2+1) + iq,\ 2pq + 1\big)\end{aligned} \tag{54}$$

приводятся к лагранжевой форме (1):

$$\begin{aligned}L = iqp_t + p_x q_x - q_x^2 p^2 - p^2 r(q) - \\ - \frac{1}{2}pr'(q) - \frac{1}{12}r''(q),\end{aligned} \tag{55}$$

где

$$4r(q) = -\left(\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial p}\hat{J}\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial p}\right). \tag{56}$$

В случае диагональной матрицы $\hat{J}$ имеем

$$4r(q) = (J_2 - J_1)q^4 + 2(J_1 + J_2 - 2J_3)q^2 + J_2 - J_1. \tag{57}$$

Следует отметить, что заменив лагранжиан L_1 из (7) на (55), где $r(q)$ — произвольный полином четвертой степени по переменной q, можно было бы утверждать, что любое интегрируемое обобщение НУШ сводится к (1) или (55) (см., например, [2, 3]).

Наряду с (54) используются другие параметризации комплексной сферы, например, стереографическая проекция. Наиболее интересной для нас является известная связь задачи о параметризации со спектральной задачей

$$\psi_{xx} + (z(x) - \lambda)\,\psi_x + p(x)\psi = 0. \tag{58}$$

А именно, если $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x)$ — кривая на сфере $(\mathbf{S}, \mathbf{S}) = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$, то

$$\begin{aligned} &(\mathbf{S}, \mathbf{S}) = 1 \ \Rightarrow\ \mathbf{S}_x = k\mathbf{N}, \\ &\mathbf{N}_x = -k\mathbf{S} + \chi\mathbf{B}, \quad \mathbf{B}_x = -\chi\mathbf{N}, \end{aligned} \tag{59}$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{S} \times \mathbf{N}$ — бинормаль. Эти уравнения Френе тесно связаны с (58), и, определив коэффициенты p, z из формул

$$k^2 = 4p, \quad i\chi + z + (\log k)_x = \lambda, \tag{60}$$

можно проверить, что пара решений $\psi_j(x)$, $j = 1, 2$, уравнения (58) позволяет восстановить кривую $\mathbf{S}(x)$ по заданным кривизне и кручению:

$$\begin{aligned} &w(x)S_3 = (\psi_1\psi_2)_x, \quad w(x)(S_1 + iS_2) = i(\psi_2^2)_x, \\ &w(x)(S_1 - iS_2) = i(\psi_1^2)_x. \end{aligned} \tag{61}$$

Здесь $w = w(x)$ обозначает вронскиан

$$w = \psi_{1,x}\psi_2 - \psi_{2,x}\psi_1$$

рассматриваемых решений.

4.1. Случай $J = 0$

Покажем теперь, что уравнения (16) задают временную динамику кривизны и кручения для изотропной модели Ландау—Лифшица:

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{xx}, \quad S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1. \tag{62}$$

Действительно, дифференцируя по t уравнения Френе (59), получим следующие уравнения для кривизны k и кручения χ:

$$k_t + 2k_x\chi + k\chi_x = 0, \quad \chi_t = \left(\frac{k_{xx}}{k^2} + \frac{1}{2}k^2 - \chi^2\right)_x.$$

Действительно, подстановка (60) переводит эти уравнения в (16):

$$i\psi_t = (z + \lambda)\psi_x - p\psi, \tag{63}$$

$$iw_t + w_{xx} + 2pw = 2\lambda w_x, \quad w_x = (\lambda - z)w.$$

Используя преобразования Миуры (18), можно получить, например, уравнение непосредственно для проекции спина на ось z для модели (62):

$$\begin{aligned} &\left(\partial_\xi + \frac{w' + \gamma}{w}\right) S_3 = -(w + 2\xi), \\ &\gamma = c_1 - c_2 + 2, \end{aligned} \tag{64}$$

где $w = w(\xi, \alpha, \beta)$ — произвольное решение уравнения PIV с параметрами

$$a = \frac{1}{2}(c_1 + c_2), \quad b = -\frac{1}{2}(c_1 - c_2 + 2)^2. \tag{65}$$

Уравнение (64) имеет частное решение $\sigma = \pm 1$, если

$$\begin{aligned} &w' + \gamma = \mp w(w + 2\xi) \iff w = -\xi \pm \frac{\psi_\nu'}{\psi_\nu}, \\ &\psi'' + (2\nu + 1 - \xi^2)\psi = 0, \quad \mp(\gamma - 1) = 2\nu + 1, \end{aligned} \tag{66}$$

причем, если $\nu = 0, 1, 2 \ldots$, мы опять получим набор рациональных решений PIV (51).

Так как $\sigma = \pm 1 + C\psi e^{\pm\xi^2}$, частное решение (64) имеет вид

$$S_3 = \pm 1 + C\,H_n(\xi). \tag{67}$$

Используя $\mathbb{Z}_3$-симметрию уравнения PIV, можно записать уравнение (64) через функции g_i (см. (33)), получая сразу три автомодельных решения модели Ландау—Лифшица (62)

$$(\partial_\xi + g_i - g_{i+1})S_3^i = g_i + g_{i+1}. \tag{68}$$

О связи модели Гейзенберга с уравнением PIV см. также [10].

5. МОДЕЛЬ НУШ

Интересно рассмотреть различные (в том числе и неинтегрируемые) обобщения нелинейного уравнения Шредингера. Итак, НУШ с коэффициентами, зависящими от времени, имеет вид

$$iq_t + f(t)q_{xx} + g(t)|q|^2q = 0. \tag{69}$$

Переобозначая время

$$t \to \int^t f(t')dt' \tag{70}$$

и константу связи $g(t)$

$$g(t) \to \frac{g\,(t)}{f\,(t)}, \tag{71}$$

переписываем уравнение в виде

$$iq_t + q_{xx} + g(t)\,|q|^2\,q = 0. \tag{72}$$

Оно допускает самоподобное решение $g(t)$ вида

$$g(t) = \alpha(4t)^{(m-1)/2}, \tag{73}$$

где $m \in R$, а константу α можно положить равной ± 1 (важен выбор знака). Автомодельное решение (с точностью до масштабных преобразований и $t > 0$) имеет вид

$$\begin{aligned} &q = |q|\,e^{i\Theta(\eta,t)}, \quad |q|^2 = 4k(t)^{m+1}Y'(\eta), \\ &\eta = k(t)x, \quad k(t) = \frac{1}{2t^{1/2}}, \end{aligned} \tag{74}$$

где

$$\Theta(\eta,t) = \theta(\eta) + \theta_0 \log t, \qquad \theta_0 \in R, \tag{75}$$

$$\theta(\eta) = \frac{\eta^2}{2} + m\int \frac{Y}{Y'}\,d\eta, \tag{76}$$

а Y удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} 2Y'''Y' - Y''^2 + 4\eta^2 Y'^2 - 4m^2Y^2 + \\ + 16\alpha Y'^3 - 16\theta_0 Y'^2 = 0. \end{aligned} \tag{77}$$

Тест Пенлеве для этого уравнения приводит к выводу, что решения (77) не имеют подвижных особых точек при $m^2 = 1$. В этом случае уравнение (77) интегрируется до уравнения второго порядка (с помощью интегрирующего множителя Y''/Y', ср. (31))

$$\begin{aligned} Y_{\eta\eta}^2 + 4\left(\eta Y_\eta - Y\right)^2 + \\ + 2\alpha Y_\eta(2Y_\eta - \alpha\theta_0)^2 + 2\alpha\mu^2 Y_\eta = 0, \end{aligned} \tag{78}$$

где μ^2 — константа интегрирования. Автомодельное решение НУШ было впервые получено в [1] в случае $\theta_0 = 0$. В общем случае свойства таких решений НУШ могут быть изучены так же, как и в [1]. Решение Y может быть записано в виде

$$\begin{aligned} -\alpha Y = \frac{1}{2}W\left(W-\eta\right)^2 + \frac{1}{8W}\times \\ \times\left[W_\eta^2 - 2W_\eta - \mu^2 + 1\right] + \frac{1}{2}\theta_0\left(W - \eta\right), \end{aligned} \tag{79}$$

где W удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} WW_{\eta\eta} = \frac{1}{2}W_\eta^2 - 6W^4 + 8\eta W^3 - \\ - 2(\eta^2 - \theta_0)W^2 - \frac{1}{2}\left(\mu - 1\right)^2, \end{aligned} \tag{80}$$

совпадающему (с точностью до замены переменных) с PIV. Уравнение (79) можно рассматривать как алгебраическую квадратуру (78), которая квадратична по $Y_{\eta\eta}$.

Отметим, что

$$-2\alpha Y_\eta = (W-\eta)^2 + \frac{\left(W_\eta + \mu - 1\right)^2}{4W^2}. \tag{81}$$

Таким образом, при $\alpha = -1$ и вещественных μ и W условие $Y_\eta \geq 0$ выполнено автоматически. С другой стороны, для $\alpha = 1$ и при вещественных μ и W получаем, что $Y_\eta \leq 0$, т.е. нет автомодельных решений. Остановимся на случае $\alpha = -1$.

Можно выразить W через Y:

$$W = \frac{-\mu Y_{\eta\eta} + \left(2Y_\eta + \theta_0\right)\left(2Y + \eta\theta_0\right) + \eta\mu^2}{\left(2Y_\eta + \theta_0\right)^2 + \mu^2}. \tag{82}$$

Исходя из вывода Бюро [11, стр. 210] уравнение (78) можно решить алгебраически иным путем, а именно, можно выразить Y через другую функцию $\widehat{W}$:

$$\begin{aligned} 4Y = h\eta + \frac{\widehat{W}_\eta^2}{2\widehat{W}} - 2\widehat{W}^3 - 4\eta\widehat{W}^2 + \\ + 2\left(\eta^2 - a\right)\widehat{W} + \frac{b}{4\widehat{W}}, \end{aligned} \tag{83}$$

причем $\widehat{W}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \widehat{W}\widehat{W}_{\eta\eta} = \frac{1}{2}\widehat{W}_\eta^2 - 6\widehat{W}^4 + 8\eta\widehat{W}^3 - \\ - 2\left(\eta^2 - a - \sigma^2\right)\widehat{W}^2 + \frac{b}{4}, \end{aligned} \tag{84}$$

где

$$\sigma^4 = -1,$$

а константы a, b и h определены следующим образом:

$$4a^3 + 3(3\mu^2 - \theta_0^2)a + \theta_0\left(9\mu^2 + \theta_0^2\right) = 0, \tag{85}$$

$$3b = -2a^2 - 2(3\mu^2 - \theta_0^2), \tag{86}$$

$$h = \frac{2}{3}\left(a - 2\theta_0\right). \tag{87}$$

Корни алгебраического уравнения на a имеют вид

$$a_1 = -\theta_0, \tag{88}$$

$$a_{2,3} = \frac{1}{2}\theta_0 \pm \frac{3}{2}i\mu. \tag{89}$$

Тогда

$$b_1 = -2\mu^2, \tag{90}$$

$$b_{2,3} = \frac{1}{2}\left(\theta_0 \mp i\mu\right)^2, \tag{91}$$

$$h_1 = -2\theta_0, \tag{92}$$

$$h_{2,3} = -\theta_0 \pm i\mu, \tag{93}$$

а значит, функция $\widehat{W}$ может быть выражена через Y.

В случае $a_1 = -\theta_0$ получаем

$$\widehat{W}_1 = \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\frac{Y}{Y_\eta} - \frac{\sigma^2}{4}\frac{Y_{\eta\eta}}{Y_\eta}, \tag{94}$$

а в случае $a_{2,3} = \theta_0/2 \pm 3i\mu/2$

$$\widehat{W}_{2,3} = \frac{\eta Y_\eta - Y}{2Y_\eta + \theta_0 \pm i\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{Y_{\eta\eta}}{2Y_\eta + \theta_0 \pm i\mu}. \tag{95}$$

Величины $\widehat{W}$ связаны соотношениями

$$\frac{\zeta_2 W_2}{W_2 - W_1} = \frac{\zeta_3 W_3}{W_3 - W_1} = \frac{\zeta_3 W_3 - \zeta_2 W_2}{W_3 - W_2}, \tag{96}$$

где

$$\zeta_{2,3} = \frac{1}{2}(\theta_0 \pm i\mu). \tag{97}$$

Преобразования Бэклунда для НУШ редуцируются в соответствующие преобразования для автомодельных решений Y. Можно получить новое автомодельное решение $\widetilde{Y}$, которое удовлетворяет (78) при $\mu \to 2 - \mu$ и имеет вид

$$\widetilde{Y} = Y + \frac{1}{2}\times \frac{(\mu - 1)\left[(2Y_\eta + \theta_0)^2 + \mu^2\right]}{\left[-\mu Y_{\eta\eta} + (2Y_\eta + \theta_0)(2Y + \eta\theta_0) + \eta\mu^2\right]}. \tag{98}$$

6. НУШ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера с переменной дисперсией $d(z)$

$$i\psi_z + d(z)\psi_{xx} + g(\psi^*\psi)\psi = 0, \tag{99}$$

которое может быть получено варьированием следующего лагранжиана:

$$L = \int dz \times \int dt\left[i\psi^*\psi_z - d(z)\psi_x^*\psi_x + \frac{g}{2}(\psi^*\psi)^2\right]. \tag{100}$$

С помощью канонического преобразования $(\psi, \psi^*) \to (\rho, \phi)$ (при этом $\psi = \rho^{1/2}e^{i\phi}$) лагранжиан (100) переходит в

$$L = \int dz \int dt\left[-\rho\phi_z - d\rho\phi_t^2 - d\frac{\rho_t^2}{4\rho} + \frac{g}{2}\rho^2\right]. \tag{101}$$

Уравнение непрерывности

$$\rho_z + 2d\partial_t\rho\phi_t = 0 \tag{102}$$

можно проинтегрировать, выбрав автомодельную форму ρ:

$$\begin{gathered}\rho = \lambda(z)\,f(\xi),\\ \phi = -\frac{\lambda'}{4d\lambda}t^2 + \phi_0(z), \quad \xi = \lambda t.\end{gathered} \tag{103}$$

Лагранжиан (101) при таком выборе автомодельной подстановки преобразуется к виду

$$L = \int \frac{dz}{\lambda(z)} \int d\xi\left[-f\lambda\partial_z\phi_0(z) - \frac{d\lambda^3}{4}\frac{f_\xi^2}{f} + \frac{g}{2}\lambda^2 f^2 + \left\{\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda'}{4d\lambda}\right)' - d\lambda\left(\frac{\lambda'}{2d\lambda}\right)^2\right\}f\xi^2\right]. \tag{104}$$

Варьируя лагранжиан (104) по f и ϕ_0, можно получить уравнения для автомодельных решений. При выполнении условий

$$\lambda d = \alpha, \quad (d')^2 = \epsilon d^2 + 4\alpha^3\gamma \tag{105}$$

уравнение для «плотности» f имеет вид

$$\frac{\alpha}{2}\left[\frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2}\right] + \gamma\xi^2 + gf = 0. \tag{106}$$

Если $\alpha\gamma > 0$, мы получаем периодическое решение для $d(z)$, но $f \to \infty$ при $\xi \to \infty$; если же $\alpha\gamma < 0$, $\epsilon > 0$, то (106) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}d = \sqrt{-\frac{4\alpha^3\gamma}{\epsilon}}\,\mathrm{ch}\left(z\sqrt{\epsilon}\right),\\ y'' + \frac{\gamma}{\alpha}\xi^2 y + \frac{g}{\alpha}y^3 + Ey = 0, \quad y^2 = f.\end{gathered} \tag{107}$$

Мы будем говорить, что в этом случае получено точное автомодельное решение уравнения (99), поскольку решения уравнения (107) для y конечны при $\xi \to \infty$, не имеют особых точек и обладают известными асимптотиками (уравнение Шредингера осциллятора с кубической нелинейностью). С этой точки зрения, в случае периодической дисперсии точных решений нет. Периодический случай интересен тем, что уравнение (99) описывает распространение сигнала в оптических волокнах, состоящих из протяженных кусков с различной дисперсией. В работе [12] было построено вариационное решение уравнения типа (99). Вывод об отсутствии точных решений (99) в периодическом случае не обязательно означает отсутствие решений типа вариационных, но может указывать на их неустойчивость.

Основная часть данной работы посвящена исследованию автомодельных решений одномерных интегрируемых динамических систем. Общий лагранжев подход, тем не менее, применим и для неинтегрируемых систем. При этом, конечно, ряд таких симметрий, как преобразования Миуры и Бэклунда отсутствует. Однако уравнения для автомодельных решений легко выводятся и в этом случае динамическим образом, т. е. с сохранением всех возможных параметров. Было бы интересно проанализировать автомодельные решения динамических систем в двумерном случае.

Данная работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-01161) и программы «Научные школы Российской федерации» (грант № 96-15-96093).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Boiti and F. Pempinelli, Nuovo Cimento B **59**, 40 (1980).

2. В. Г. Марихин, А. Б. Шабат, ТМФ **118**, 217 (1999).

3. А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, ТМФ **62**, 163 (1985).

4. Ю. Н. Овчинников, Письма в ЖЭТФ **69**, 387 (1999).

5. V. I. Gromak, Differential Equations **23**, 506 (1987).

6. A. P. Veselov and A. B. Shabat, Funct. Anal. Appl. **27**, 1 (1993).

7. N. A. Lukashevich, Differential Equations **3**, 395 (1967).

8. V. E. Adler, Physica D **73**, 335 (1994).

9. P. Estevez and P. Clarkson, E-prints archives, solv-int/9904002.

10. F. W. Nijhoff, G. R. W. Quispel, J. van der Linden, and H. W. Capel, Physica A **119**, 101 (1983); G. R. W. Quispel and H. W. Capel, Phys. Lett. A **88**, 371 (1982); Physica A **117**, 76 (1983).

11. F. J. Bureau, Annali di Matematica (IV) **91**, 163 (1972).

12. S. Turitsyn, Phys. Rev. E **58**, R1256 (1998).