

ОПИСАНИЕ ДИФРАКЦИИ И ФОКУСИРОВКИ УЛЬТРАКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ НА ОСНОВЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА КИРХГОФА—ЗОММЕРФЕЛЬДА

*Е. М. Михайлов, П. А. Головинский**

*Воронежская государственная архитектурно-строительная академия
394006, Воронеж, Россия*

Поступила в редакцию 12 апреля 1999 г.

Решена скалярная задача о распространении импульса плоской волны за диафрагмой. Расчет проведен на основе нестационарного интеграла Кирхгофа—Зоммерфельда и разложения импульса по всплескам. Рассмотрены два типа диафрагмы — круглая и квадратная. Рассчитано распространение импульса в условиях фокусировки и построена функция Грина задачи дифракции для круглого отверстия с безаберрационной фокусировкой и без нее.

PACS: 42.25.-p

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время все большее число новых экспериментальных результатов в области лазерной физики получают с помощью сфокусированных в пространстве и сжатых во времени импульсов. Соответствующий раздел оформился в самостоятельное направление оптики фемтосекундных лазерных импульсов [1]. Весьма впечатляющим стало экспериментальное наблюдение самофокусировки коротких лазерных импульсов и нелинейного томпсоновского рассеяния [2, 3], а также генерации жесткого рентгеновского излучения при фокусировке импульсного излучения на металлическую мишень [4]. Различные теоретические модели, используемые для описания импульсов [5–7], а также предлагаемые новые эксперименты по их взаимодействию с электронами [8–11] основываются на описании лазерного излучения в виде гауссовых пучков [12, 13]. Оценки показывают, что ряд типов лазеров приближается по своим параметрам к физическому пределу по энергии, снимаемой в одном импульсе. Естественный резерв для дальнейшего увеличения пиковой интенсивности лазерных импульсов состоит не только в пространственной фокусировке, но одновременно в предельной временной компрессии импульсов. Уже реализована схема для одного из наиболее перспективных титан-сапфировых лазеров, обеспечива-

ющая уменьшение длительности импульса до 5 фс [14]. При этом длина импульса становится соизмеримой с длиной волны, и теория квазистационарных гауссовых волновых пучков [12, 13] становится неприменимой. Новые экспериментальные возможности делают необходимым развитие адекватной теории дифракции и фокусировки ультракоротких импульсов. В работе [15] сделан шаг на пути к построению такой теории для задачи дифракции на отверстии в бесконечном плоском экране на основе нестационарного дифракционного приближения Кирхгофа—Зоммерфельда. В ней показана возможность эффективного обобщения теории дифракции монохроматических полей на существенно нестационарный случай и рассмотрена дифракция полупериодного электромагнитного импульса.

Одновременно данный круг вопросов привлек внимание специалистов в области генерации и распространения импульсов в радио и СВЧ диапазонах. В работе [16] автор одновременно и независимо от [15] пришел к нестационарной формулировке метода Кирхгофа и применил его к расчету дифракции прямоугольного импульса бесконечной длительности на круглой диафрагме. Подобная постановка задачи может представлять интерес также в акустике и других приложениях, когда имеет место линейная дифракция ультракоротких импульсов в условиях малой дисперсии. Отметим, что наряду с определенным прогрессом в правильной постановке задачи работы [15, 16] не разрешают в полной мере про-

*E-mail: golovinsk@phys.vgasa.voronezh.su

блему дифракции и фокусировки ультракоротких импульсов. Так, в работе [15] остается открытым вопрос о построении единых методов расчетов дифракции ультракоротких импульсов произвольной формы. Содержащееся в работе [16] решение для импульса ступенчатой формы позволяет в принципе развить далее теорию для импульсов произвольной формы на основе интеграла Дюамеля, но такое обобщение не проведено. Что касается задачи о фокусировке ультракоротких импульсов, то в работе [15] она затрагивается только вскользь, а в [16] такая задача не ставилась. Настоящая работа посвящена развитию последовательного подхода к построению теории дифракции и фокусировки ультракоротких импульсов на основе использования всплесков и построению нестационарных функций Грина как отклика на дельта-импульс. В работе используется скалярное приближение.

Классический стационарный метод Кирхгофа решения дифракционных задач состоит в использовании интегральной теоремы, согласно которой значение функции ψ , являющейся решением скалярного уравнения Гельмгольца, в произвольной точке $M(x, y, z)$ внутри замкнутого объема выражается через значение функции ψ и ее первой производной на поверхности, ограничивающей данный объем [17]. Метод Кирхгофа является адекватным математическим выражением принципа Гюйгенса—Френеля, согласно которому возмущение в некоторой точке пространства M есть результат интерференции волн, испускаемых вторичными источниками. Эти источники находятся на поверхности, расположенной между точкой M и реальным источником волн. Можно получить и нестационарное выражение [18], связывающее значения поля ψ на границе и внутри замкнутой области пространства. В отсутствие внутри объема источников поля справедлива теорема Кирхгофа

$$\begin{aligned} \psi &= \int_{-\infty}^{\tau} dt' \int_{S(V)} \psi \nabla G(\mathbf{R}, t-t') - G(\mathbf{R}, t-t') \nabla \psi d\mathbf{S} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S(V)} \left(\frac{1}{R} \nabla - \frac{1}{cR} \nabla R \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \frac{1}{R} \right) \psi \Big|_{t'=t-R/c} d\mathbf{S}, \quad (1) \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}',$$

а

$$G(\mathbf{R}, t-t') = \begin{cases} 0, & t < t', \\ -\frac{c}{4\pi} \frac{\delta(R-c(t-t'))}{R}, & t > t' \end{cases}$$

— функция Грина нестационарного скалярного волнового уравнения, которая описывает распространение волны от точки с радиус-вектором \mathbf{r}' в момент

времени t' в точку с радиус-вектором \mathbf{r} в момент времени t .

Используем эту формулу для определения поля волны, прошедшей через экран с отверстием. Значение поля в исследуемой точке определяется только значениями поля и его производной на поверхности теневой стороны экрана и отверстия. Приближенные граничные условия Кирхгофа соответствуют следующим предположениям: значения ψ и $\nabla\psi$ равны нулю всюду, за исключением отверстий; значения ψ и $\nabla\psi$ внутри отверстия такие же, как и в отсутствие экрана. Для квазистационарных полей эти приближения, как правило, обеспечивают хорошую точность.

Метод выбора функции Грина, предложенный Зоммерфельдом [18], исключает необходимость одновременного задания граничных условий для поля и его производной по нормали при рассмотрении дифракции на экране. Соответствующие нестационарные функции Грина

$$\begin{aligned} G_{\mp} &= -\frac{c}{4\pi} \frac{\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - c(t-t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mp \\ &\mp \frac{c}{4\pi} \frac{\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1| - c(t-t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — координаты точки наблюдения, $\mathbf{r}' = (\xi, \eta, -\zeta)$ — координаты источника поля, а $\mathbf{r}'_1 = (\xi, \eta, \zeta)$ — координаты точки зеркального источника поля, расположенного к реальному источнику симметрично относительно поверхности плоского экрана.

Мы будем пользоваться более удобной в нестационарных расчетах подстановкой G_+ в интеграл Кирхгофа (1). Она дает

$$G_+ = 0,$$

$$\nabla G_+ = -2 \frac{c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\delta(R-c(t-t'))}{R}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \psi &= \int_{-\infty}^{\tau} dt' \int_{S(V)} \psi \nabla G_+ d\mathbf{S} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_S \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta, t')}{R} \Big|_{\zeta=0, t'=t-R/c} dS, \quad (3) \end{aligned}$$

где учтено, что $\partial/\partial\zeta = -\partial/\partial z$.

Если в правой части (3) заменить ψ на невозмущенное значение поля, то мы получим метод расчета нестационарных задач дифракции на основе нестационарного интеграла Кирхгофа—Зоммерфельда.

2. ПРОХОЖДЕНИЕ ИМПУЛЬСА ЧЕРЕЗ КВАДРАТНОЕ ОТВЕРСТИЕ

Рассмотрим прохождение импульса плоской электромагнитной волны через квадратное отверстие. В качестве профиля плоской волны рассмотрим волновой всплеск [19, 20].

Всплески представляют собой отличный от набора Фурье полный ортонормированный набор функций. Он позволяет представлять функции в виде разложения в ряд по такому набору. Всю ось z можно покрыть с помощью подходящих преобразований локализованной функции, которая быстро стремится к нулю. Естественной операцией при этом является сдвиг вдоль оси, а для воспроизведения масштаба неоднородностей — масштабирование аргумента.

Если взять для определенности масштабирование степени 2, то порождаемый набор функций есть $\psi(2^j z - k)$, где j и k — целые.

За основу берется базисный всплеск, из которого получается весь набор функций-всплесков при помощи сдвигов и растяжений. Введем скалярное произведение

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(z)q^*(z) dz$$

и норму $\|p\| = \langle p, p \rangle^{1/2}$. Если порождающая функция ψ нормирована, то нормированные всплески семейства $\{\psi_{jk}\}$ имеют вид

$$\psi_{jk}(z) = 2^{j/2} \psi(2^j z - k).$$

Семейство $\{\psi_{jk}\}$ образует ортонормированный базис, так что

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km},$$

и каждая функция $f \in L^2(R)$ может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда:

$$f(z) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}(z).$$

В качестве базового всплеска можно взять, например, одну из функций вида [19]

$$\psi_m(z) = (-1)^m \partial_z^m \exp(-z^2/2) \quad (4)$$

при некотором фиксированном m . Возьмем базовый всплеск (4), соответствующий $m = 1$ (рис. 1), т. е.

$$\psi_1(z) = \frac{z-b}{a} \exp\left(-\frac{(z-b)^2}{2a^2}\right).$$

Всплеск похож на характерный ультракороткий импульс. Пусть задано такое начальное распределение

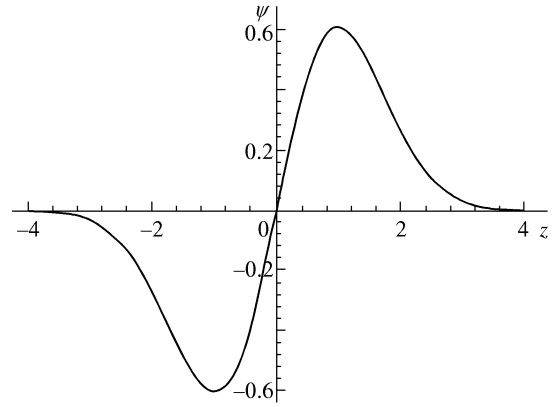


Рис. 1. Вид базового всплеска при $a = 1$ и $b = 0$

импульса вдоль оси z . Тогда ему соответствует плоская волна, распространяющаяся вдоль этой оси:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi_1(z - ct) = \frac{(z - ct - b)}{a} \times \exp\left(-\frac{(z - ct - b)^2}{2a^2}\right). \quad (5)$$

Импульс произвольной формы может быть разложен по всплескам, дифракция каждого из которых описывается формулой (3) при подстановке в правую часть невозмущенного поля. В силу линейности задачи результат дифракции будет суперпозицией соответствующих решений для отдельных всплесков с весами исходного разложения.

Подставим базисный всплеск в нестационарный интеграл Кирхгофа—Зоммерфельда. Тогда

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{S(V)} \frac{\Psi(\xi, \eta, 0, t - R/c)}{R} dS = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{S(V)} \frac{\Psi(R - ct)}{R} dS, \end{aligned} \quad (6)$$

где переменные $\xi, \eta, 0$ представляют собой координаты точек в плоскости диафрагмы, по которым ведется интегрирование, $dS = d\xi d\eta$. С учетом (5) получим

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial z} \times \\ &\times \int_{S(V)} \frac{(R - \tau) \exp(-(R - \tau)^2/2a^2)}{R} dS, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\tau = ct + b$.

Для вычисления интеграла воспользуемся диф-

ференцированием интеграла по параметру и представим формулу (7) в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{a}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{S(V)} \frac{\exp(-(R-\tau)^2/2a^2)}{R} dS. \quad (8)$$

Предположим, что расстояние от исследуемой точки до диафрагмы много больше размеров диафрагмы и $R \approx r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Теперь представим вектор \mathbf{R} в виде разности векторов $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \rho\mathbf{e}$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор, проведенный из центра диафрагмы в точку наблюдения поля, \mathbf{e} — единичный вектор, направленный вдоль полярного радиуса в текущую точку интегрирования. Тогда

$$R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2\rho\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}} \approx r + \frac{\rho^2 - 2\rho(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})}{2r},$$

$$(R-\tau)^2 = \Delta^2 + \Delta \frac{\rho^2 - 2r\rho \cos \theta}{r} + \frac{(\rho^2 - \rho r \cos \theta)^2}{4r^2}, \quad (9)$$

где $\Delta = r - \tau$, $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Событие $\Delta = 0$ означает, что в точку наблюдения (x, y, z) пришла центральная часть импульса волны от точки $(0, 0, 0)$ на поверхности диафрагмы. В выражении (9) θ есть угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{e} . Последнее слагаемое осложняет вычисление интеграла (8). Отбросить его в общем случае нельзя, так как оно само не является малым. Поэтому для проведения расчетов во всем пространстве приходится вычислять интеграл численно. Аналитические результаты можно получить в приосевой области, что часто представляет наибольший интерес. В ней параметр $\rho/r \ll 1$. В этом приближении

$$(R-\tau)^2 = \left[\Delta^2 + \frac{\Delta}{r} (\rho^2 - 2(x\xi + y\eta)) + \frac{(\rho^2 - 2(x\xi + y\eta))^2}{4r^2} \right],$$

и интеграл в формуле (8) можно переписать в виде

$$\int \frac{\exp(-(R-\tau)^2/2a^2)}{R} dS = \frac{\exp(-\Delta^2/2a^2)}{r} \times \int \exp\left(-\frac{\Delta}{2a^2r} \{\rho^2 - 2(x\xi + y\eta)\}\right) d\xi d\eta. \quad (10)$$

При интегрировании по апертуре квадратной

диафрагмы размером $2A \times 2A$ факторизуется вспомогательный интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{-A}^A \int_{-A}^A \exp[-\alpha(\xi^2 + \eta^2 - 2(x\xi + y\eta))] d\xi d\eta = \\ & = \int_{-A}^A \exp(-\alpha(\xi^2 - 2x\xi)) d\xi \times \\ & \times \int_{-A}^A \exp(-\alpha(\eta^2 - 2y\eta)) d\eta = I(x)I(y). \quad (11) \end{aligned}$$

Интегралы, содержащие параметры x и y , разделились, они одинаковые, и их можно вычислить отдельно:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-A}^A \exp(-\alpha(\xi^2 - 2x\xi)) d\xi = \frac{\sqrt{\pi}e^{\alpha x^2}}{2\sqrt{\alpha}} \times \\ & \times [\operatorname{erf}(\sqrt{\alpha}(A-x)) - \operatorname{erf}(-\sqrt{\alpha}(A+x))], \quad (12) \end{aligned}$$

где интеграл ошибок [21]

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{-A}^A d\xi \int_{-A}^A d\eta \frac{\exp(-(R-\tau)^2/2a^2)}{R} = \\ & = \frac{\exp(-\Delta^2/2a^2)}{r} I(x)I(y), \end{aligned}$$

$I(x)$ определяется формулой (12), а $\alpha = \Delta/2a^2r$. Следовательно, скалярный потенциал

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{a}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \tau} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2a^2}\right) I(x)I(y). \quad (13)$$

Учитывая, что вся зависимость $I(x), I(y)$ от z и τ содержится в параметре α , производные от интегралов I можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} I(x) = \frac{\partial I(x)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z} = I'_\alpha(x) \frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

После вычисления производных получим

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{a}{2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2a^2}\right) \left[\left(\frac{z}{a^2r^2} - \frac{\Delta}{a^2r^2} - \frac{z\Delta^2}{a^4r^2} \right) \times \right. \\ & \times I(x)I(y) + \left(\frac{1}{2a^2r^3} + \frac{\Delta z}{2a^4r^3} - \frac{\Delta\tau z}{2a^4\tau^4} + \frac{z}{2a^2r^4} \right) \times \\ & \times \left(I'_\alpha(x)I(y) + I'_\alpha(y)I(x) \right) + \frac{\tau z}{a^4r^5} \times \\ & \left. \times \left(I''_{\alpha\alpha}(x)I(y) + 2I'_\alpha(x)I'_\alpha(y) + I(x)I''_{\alpha\alpha}(y) \right) \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

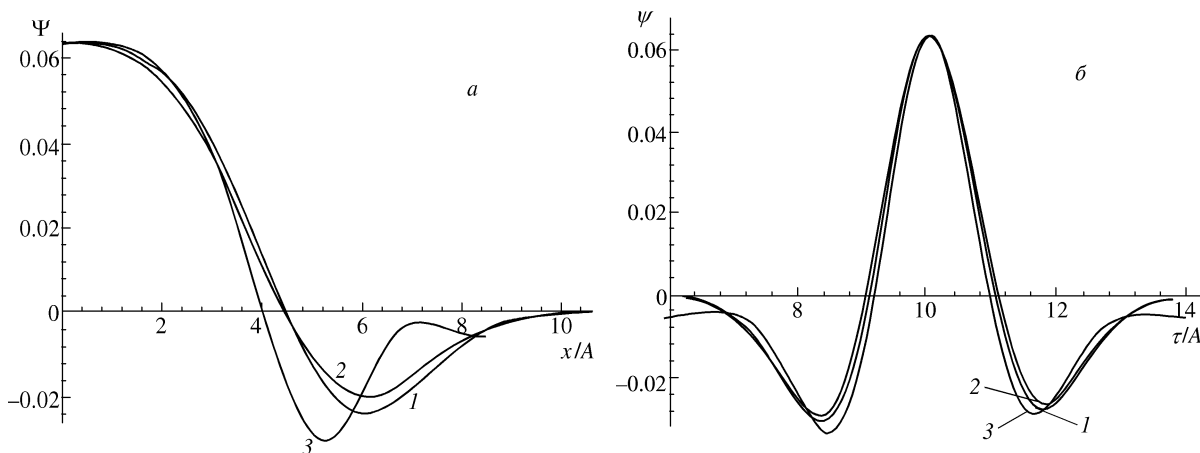


Рис. 2. Зависимость поля Ψ в точке $(0, 0, 10A)$ в поперечном сечении от расстояния x/A (а) и от параметра времени τ/A (б): 1 — результат приближенного расчета по формуле (14), 2 — результат прямого численного интегрирования; 3 — результат расчета методом квазистационарных гауссовых пучков [1]

На рис. 2а, б представлены результаты расчетов дифракции для квадратной диафрагмы со стороной A в точке $(0, 0, 10A)$. Импульс излучения имел форму всплеска (5) с параметрами $a = A, b = 0$. Сравнение показывает хорошее согласие результатов численного интегрирования по формуле (8) и расчетов по приближенной формуле (14). Отличие численного расчета от аналитического составляет не более трех процентов. Интересно отметить, что форма импульса, найденного путем прямого численного интегрирования, более не симметрична относительно центра импульса в отличие от формы, рассчитанной по приближенной формуле. Расчет методом квазистационарных гауссовых пучков выполнен для момента времени $t = 0$, так как этот метод предполагает одновременную модуляцию всего импульса вдоль оси z . Сравнение показывает, что метод квазистационарных гауссовых пучков удовлетворительно воспроизводит продольную структуру импульса после диафрагмы, но плохо согласуется с более точными расчетами для поперечного распределения поля. Это связано с недостаточным учетом фазовых соотношений между плосковолновыми компонентами импульса в методе квазистационарных гауссовых пучков.

На рис. 3 показано поперечное распределение поля волны в плоскости $z = 10A$ в разные моменты времени. Видно, что перед максимальным значением скалярного потенциала волны имеется область с противоположным значением потенциала, которой нет в исходном импульсе (5). С течением времени максимумы поля отодвигаются от оси z и уменьшаются по амплитуде.

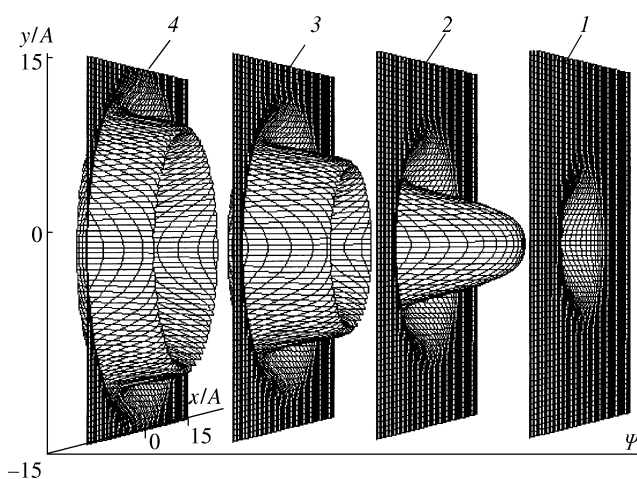


Рис. 3. Поперечное распределение поля $\Psi(x, y)$ дифрагированного импульса в плоскости $z = 10A$ в различные моменты времени $\tau/A = 8$ (1), 10 (2), 12 (3), 14 (4)

3. ПРОХОЖДЕНИЕ ИМПУЛЬСА ЧЕРЕЗ КРУГЛОЕ ОТВЕРСТИЕ

Рассмотрим теперь прохождение плоской электромагнитной волны через круглое отверстие. В качестве профиля плоской волны снова возьмем волновой всплеск.

Будем вычислять интеграл в формуле (8) в цилиндрических координатах. Выберем систему координат так, чтобы полярная ось совпадала с осью z . Вектор \mathbf{r} расположим в плоскости xz , как показано на рис. 4. Считая функцию $1/R$ медленно меняющейся, вынесем $1/r$ из-под знака интегрирования и

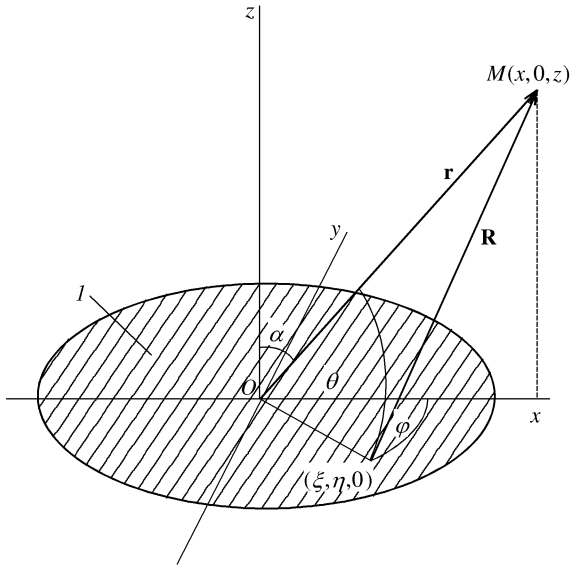


Рис. 4. Система координат для вычисления интеграла Кирхгофа в случае круглой диафрагмы (1): $M(x, 0, z)$ — точка наблюдения поля, α — угол между вектором \mathbf{r} и осью z , φ — полярный угол вектора $(\xi, \eta, 0)$ в плоскости диафрагмы, θ — угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}_e

запишем

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{a}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{I}{r}, \quad (15)$$

где

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^A \exp\left(-\frac{(R-\tau)^2}{2a^2}\right) \rho d\rho, \quad (16)$$

φ — полярный угол, A — радиус отверстия. Предположим, что исследуемая точка находится на большом расстоянии от диафрагмы по сравнению с размерами диафрагмы, $r \gg A$. Тогда

$$R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta} \approx r + \frac{\rho^2 - 2\rho \cos \theta}{2r},$$

$$R - \tau \approx \Delta + \frac{\rho^2 - 2\rho \cos \theta}{2r}.$$

На основании рис. 4 получим

$$\text{ctg } \theta = \cos \varphi \text{tg } \alpha,$$

где α — угол между осью z и вектором \mathbf{r} . Отсюда

$$\cos \theta = \frac{\text{ctg } \theta}{\sqrt{1 - \text{ctg}^2 \theta}} = \frac{\cos \varphi \text{tg } \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi \text{tg}^2 \alpha}}. \quad (17)$$

Введем параметр $\beta = \text{tg } \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}/z$. С точностью до членов второго порядка малости по β из (17) следует, что

$$\cos \theta = \frac{\beta \cos \varphi}{\sqrt{1 + \beta^2 \cos^2 \varphi}} \approx \beta \cos \varphi. \quad (18)$$

Используя симметрию задачи и сделанные выше приближения, можно получить аналитический ответ на оси излучения. В этом случае при интегрировании в плоскости диафрагмы $\cos \theta$ всегда равен нулю. Поэтому интеграл по φ есть 2π и вместо (16) имеем

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_0^A \exp\left(-\frac{1}{2a^2} \left(\Delta + \frac{\rho^2}{2r}\right)\right) \rho d\rho = \\ &= 2\pi \left[ar \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \text{erf}\left(\frac{\sqrt{2}(A^2 + 2\Delta r)}{4ar}\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{erf}\left(\frac{\Delta}{a\sqrt{2}}\right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (15) для ψ , получим

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\Delta z}{ar} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2a^2}\right) + \frac{z}{2ar^2} \times \\ &\times \left[(A^2 + 2\Delta r) \left(1 + \frac{\Delta}{r}\right) - \frac{1}{2r^2} (A^2 + 2\Delta r)^2 \right] \times \\ &\times \exp\left(\frac{A^2 + 2\Delta \rho}{8a^2 r^2}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим теперь поле в приосевой области. Для этого разложим подынтегральное выражение уравнения (16) по степеням малости $\cos \theta$:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{(R-\tau)^2}{2a^2}\right) &= \exp\left(-\frac{(\Delta + \rho^2/2r)^2}{2a^2}\right) + \\ &+ \frac{\rho}{a^2} \left(\Delta + \frac{\rho^2}{2r}\right) \exp\left(-\frac{(\Delta + \rho^2/2r)^2}{2a^2}\right) \cos \theta + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Учтем, что $\cos \theta$ в нашем приближении определяется формулой (18) и

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0.$$

С точностью до членов второго порядка малости по параметру β подынтегральное выражение формулы (16) определяется первым слагаемым формулы (21). Следовательно, в приосевой области с точностью до второго порядка по параметру β скалярный потенциал ψ по-прежнему определяется формулой (20).

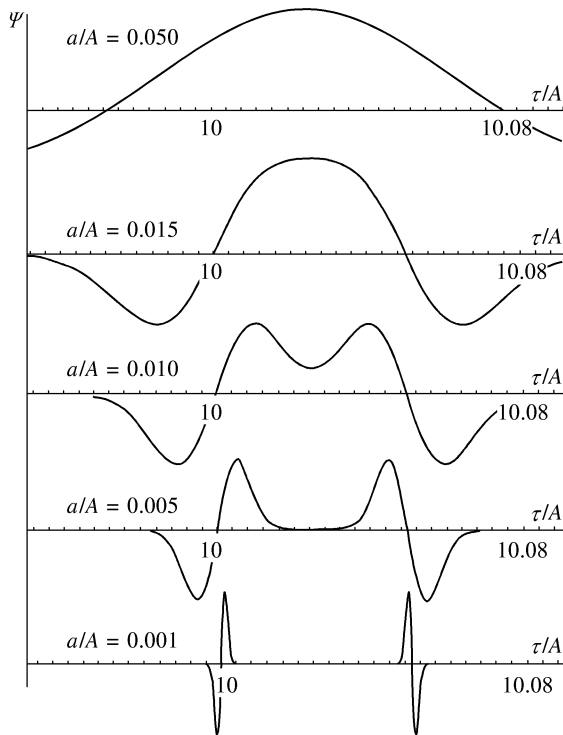


Рис. 5. Поведение дифрагированного импульса Ψ в зависимости от времени τ/A для разных значений отношения длины импульса a к радиусу апертуры диафрагмы A

На рис. 5 изображена временная форма дифрагированного импульса на оси излучения в зависимости от характерной длины исходного импульса a/A . Видно, что для достаточно короткого импульса при $a < A^2/2z$ результат имеет вид двух всплесков, разнесенных по времени на $\Delta t = A^2/2zc$. Это согласуется с результатами работы [15] для дифракции полуволнового импульса.

4. БЕЗАБЕРРАЦИОННАЯ ФОКУСИРОВКА ИМПУЛЬСА

Нестационарный метод Кирхгофа—Зоммерфельда также позволяет рассмотреть фокусировку импульса. При описании дифракции плоской волны на основе формулы (8) мы использовали постоянство значения падающей волны на апертуре диафрагмы. Соответствующая плоская поверхность описывается уравнением $\zeta = 0$. Действие фокусирующего устройства, расположенного в плоскости диафрагмы, сводится к искажению плоского фронта волны и превращению его в сферический. В зависимости от выпуклости сферического фронта прошедшая волна будет испытывать фокусировку или

дефокусировку. Уравнение сферы, имеющей центр в фокусе оптической системы с радиус-вектором \mathbf{F} , есть $\tilde{r}_{\pm} = |\mathbf{r} - \mathbf{F}| = \sqrt{(z \pm F)^2 + x^2 + y^2}$. Здесь знак «-» соответствует фокусировке, а «+» — дефокусировке. Вводя уравнение сферы вместо уравнения плоскости заменой $z - ct \rightarrow \tilde{r}_{\pm} \pm ct - F$ в фазе дифрагирующей волны в уравнении (6), получим

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\Psi(\tilde{r}_{\pm} \pm ct' - F)}{R} \Big|_{\zeta=0, t'=t-R/c} dS. \quad (22)$$

Предположим, что фокусное расстояние $F \gg A$, где A — характерные размеры диафрагмы. Тогда расстояние от фокуса (мнимого фокуса) до точки в плоскости диафрагмы можно приближенно записать как

$$\tilde{r}_{\pm} = \sqrt{F^2 + \xi^2 + \eta^2} \approx F + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2F} = F + \frac{\rho^2}{2F},$$

а (22) переписать в виде

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_S \frac{\Psi(\rho^2/2F \pm (ct - R))}{R} dS. \quad (23)$$

В пределе при $F \rightarrow \infty$ формула (23) переходит в формулу (6) для плоской волны.

Рассмотрим дифракцию всплеска (5) на круглом отверстии при наличии фокусировки (дефокусировки). Вспомогательный интеграл (16) теперь примет вид

$$I_f = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^A \exp\left(-\left(R - \tau \pm \frac{\rho^2}{2F}\right)^2 / 2a^2\right) \rho d\rho. \quad (24)$$

В приосевом приближении так же, как и в случае без фокусировки,

$$R - \tau \pm \frac{\rho^2}{2F} \approx \Delta + \frac{\gamma\rho^2 - 2\rho \cos\theta}{2r},$$

где $\gamma = 1 \pm r/F$ — параметр фокусировки. Как и ранее, разложим подынтегральное выражение формулы (24) в ряд по параметру малости $\cos\theta$:

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{(R - \tau \pm \rho^2/2F)^2}{2a^2}\right) = \\ & = \exp\left(-\frac{(\gamma\Delta + \gamma\rho^2/2r)^2}{2a^2}\right) + \\ & + \frac{\rho}{a^2} (\Delta + \gamma\rho^2/2r) \times \\ & \times \exp\left(-\frac{(\Delta + \gamma\rho^2/2r)^2}{2a^2}\right) \cos\theta + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Подобно плоскому случаю, интеграл от второго слагаемого уравнения (25) пропадает. В результате

$$I_f = 2\pi \left[\frac{ar}{\gamma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(\gamma A^2 + 2\Delta r)}{4ar} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\Delta}{a\sqrt{2}} \right) \right\} \right]. \quad (26)$$

Проводя дифференцирование, получим ответ

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = & -\frac{az}{\gamma r} \left(\frac{1}{\gamma F} - \frac{\Delta}{a^2} \right) \exp \left(-\frac{\delta^2}{2a^2} \right) + \\ & + \frac{az}{\gamma r} \left[\frac{(\gamma A^2 + 2\Delta r)}{4a^2 r} \left(2 + \frac{2\Delta}{r} - \frac{A^2}{rF} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4a^2 r^3} (\gamma A^2 + 2\Delta r)^2 - \frac{1}{\gamma F} \right] \times \\ & \times \exp \left(\frac{(\gamma A^2 + 2\Delta r)}{8a^2 r^2} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Полученное выражение описывает фокусировку импульса при выборе отрицательного знака F и дефокусировку при выборе положительного знака. На рис. 6 представлены результаты расчета временной зависимости фокусированного и нефокусированного импульса вблизи фокуса. Видно, что нефокусированный импульс разбился на два всплеска, тогда как фокусированный представляет собой один импульс. Фокусирующее устройство в соответствии с принципом Ферма обеспечивает одинаковую оптическую разность хода для разных лучей, приходящих в фокус. Поэтому временная форма импульса не искажается. При удалении от фокуса подобная компенсация пропадает и форма импульса искажается, так же как в случае без фокусировки.

5. ФУНКЦИЯ ГРИНА В ЗАДАЧЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Удобным и универсальным способом решения линейных задач, в которых требуется нахождение отклика системы на произвольное возмущение, является построение отклика на δ -импульс, т. е. функции Грина $g(\mathbf{r}, t)$.

Рассмотрим прохождение δ -импульса через круглое отверстие. Подставляя δ -импульс в нестационарный интеграл Кирхгофа—Зоммерфельда (6), получим

$$g(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_S \frac{\delta(R - \tau)}{R} dS. \quad (28)$$

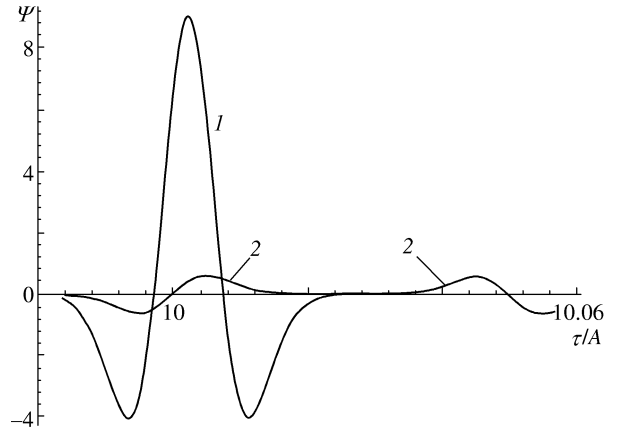


Рис. 6. Сравнение временной зависимости поля Ψ фокусированного (1) и нефокусированного (2) импульсов вблизи фокуса

Выберем новую систему координат K' , начало координат которой совпадает с проекцией точки (x, y, z) на плоскость диафрагмы, ось $O'z'$ параллельна оси Oz , а ось $O'x'$ проходит через центр диафрагмы, как показано на рис. 7. В этой системе координат $z = z'$, $y = y'$, $R = \sqrt{\rho'^2 + z'^2}$ — расстояние от точки в области диафрагмы до исследуемой точки, а $\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$,

$$dR = \frac{2\rho' d\rho'}{R}. \quad (29)$$

Переходя в интеграле, входящем в формулу (28), к интегрированию в полярных координатах ρ', φ' и воспользовавшись (29), получим

$$g(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint \delta(R - \tau) d\varphi' dR = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \phi. \quad (30)$$

Здесь ϕ есть угол, который опирается на дугу, вырезаемую диафрагмой из окружности с центром в начале координат системы K' . Эта дуга представляет собой геометрическое место точек, удаленных от точки наблюдения поля (x, y, z) на расстояние $\tau = ct$, на которое распространился свет от точек отверстия диафрагмы за время t . Выражение (30) надо понимать в том смысле, что

$$\begin{cases} R = \tau, \\ \phi = \phi(\tau). \end{cases} \quad (31)$$

Найдем аналитическое выражение для величины ϕ . Из рис. 7 видно, что ось $O'x'$ является осью симметрии. Поэтому

$$\cos \frac{\phi}{2} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

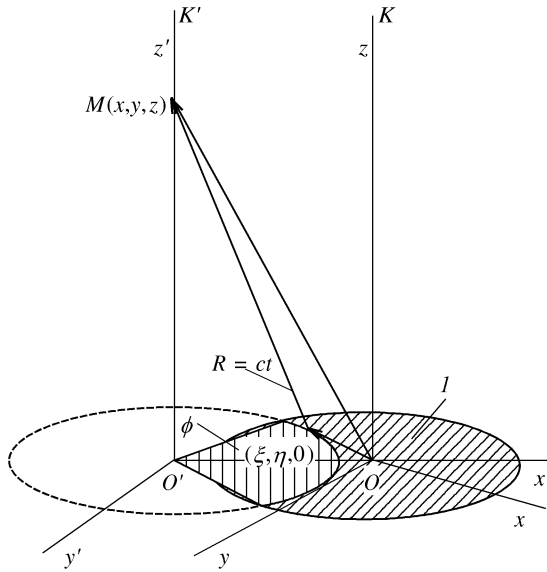


Рис. 7. Системы координат K и K' функции Грина g в задаче о прохождении импульса через круглую диафрагму: $M(x, y, z)$ — точка наблюдения поля, I — апертура диафрагмы, ϕ — угол наблюдения дуги окружности из центра координат O' системы K'

Система уравнений для определения координат пересечения двух окружностей, одна из которых имеет центр в начале координат системы K' и радиус $\sqrt{x'^2 + y'^2}$, а другая — центр в начале координат системы K и радиус A , имеет вид

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 = \tau^2 - z^2, \\ (x' - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + y'^2 = A^2. \end{cases}$$

Раскрывая скобки и вычитая первое уравнение из второго, получаем

$$\tau^2 - z^2 - 2x'\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 = A^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^2 - z^2 + x^2 + y^2 - A^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \\ y' &= \pm \sqrt{\tau^2 - z^2 - x'^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Условием существования решения является положительность выражения, стоящего под знаком корня в уравнении для y' . Физически это означает, что решение существует, если свет дошел от диафрагмы, в противном случае $\phi = 0$. Таким образом,

$$\phi = \begin{cases} 0, & x'^2 < \tau^2 - z^2, \\ 2 \arccos \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, & x'^2 > \tau^2 - z^2. \end{cases} \quad (33)$$

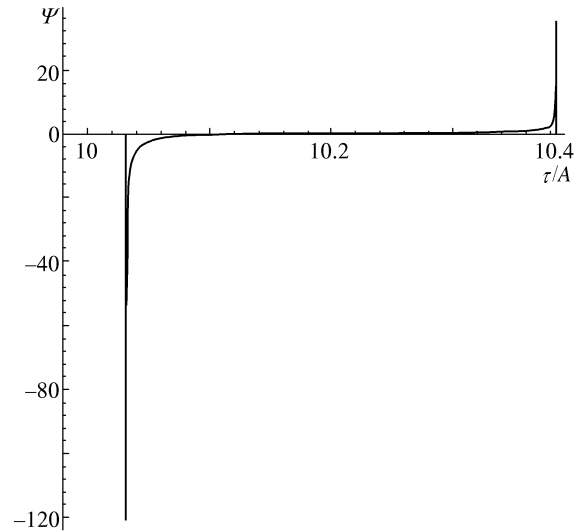


Рис. 8. Пространственное распределение функции Грина вдоль оси x в задаче о прохождении плоской волны через диафрагму в момент времени $\tau/A = 10.5$ и $z/A = 10$

Если точка наблюдения находится на оси диафрагмы, то для любого момента времени, когда свет успевает прийти от диафрагмы, угол ϕ всегда равен 2π , т. е.

$$\phi = \begin{cases} 0, & \tau^2 - z^2 < 0, \\ 2\pi, & x'^2 > \tau^2 - z^2, \\ 0, & x'^2 < \tau^2 - z^2. \end{cases} \quad (34)$$

Для получения выражения для функции Грина формулу (34) необходимо продифференцировать по z . Учтем, что дифференциал от единичного скачка является δ -функцией. Тогда скалярный потенциал поля на оси излучения приобретает характер двух δ -импульсов, разнесенных по времени на $\Delta t = (\sqrt{z^2 + A^2} - z)/c$ и противоположных по знаку, как показано на рис. 8. Подобная ситуация отмечена в работе [15] при рассмотрении дифракции полуволнового импульса конечной ширины на круглой диафрагме. В ней авторами показано, что плотность энергии прошедшей волны в области $\Delta t > \tau_0$ (τ_0 — длительность падающего импульса) удваивается. При движении точки наблюдения в плоскости перпендикулярной оси распространения волны вид скалярного потенциала меняется. Передний δ -образный импульс размывается, причем это размывание становится максимальным для точек, лежащих над границей диафрагмы. Второй импульс не претерпевает сильных изменений.

Построим функцию Грина g_f в задаче о фокусировке импульса, для чего вновь возьмем исходный

δ -импульс и знак «-» в формуле (22), соответствующий фокусировке. Для вычисления соответствующего интеграла необходимо выяснить, при каких условиях аргумент δ -функции обращается в нуль. Перейдем от интегрирования по поверхности к интегрированию по объему. Тогда

$$g_f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \times \int_V \frac{\delta(r - R + ct - F)\delta(\zeta)}{R} d\xi d\eta d\zeta. \quad (35)$$

Две δ -функции задают в пространстве кривую в виде

$$\begin{cases} R - r + \tau - F = 0, \\ \zeta = 0, \end{cases} \quad (36)$$

где R — расстояние от точки на диафрагме до точки наблюдения, а r — расстояние от фокуса до точки на диафрагме. Первое уравнение (36) задает гиперболоид вращения с фокусами в точке наблюдения и в фокусе оптической системы. Второе уравнение задает плоскость диафрагмы. Система уравнений (36) представляет собой линию пересечения гиперболоида вращения и плоскости, т. е. эллипс.

Рассмотрим длиннофокусное приближение, когда размеры диафрагмы малы по сравнению с фокусным расстоянием и расстоянием до точки наблюдения, т. е. $A \ll F$, $A \ll r$. Тогда аргумент δ -функции можно разложить по малому параметру $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}/r$:

$$r - R + \tau - F \approx -\Delta - \left(\frac{r-R}{2rR}\right) (\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{r}(x\xi + y\eta),$$

где $\Delta = r - \tau$. Используя свойства δ -функции

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x),$$

получим

$$\begin{aligned} &\delta\left(-\Delta - \frac{r-F}{2rF}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{r}(x\xi + y\eta)\right) = \\ &= \frac{2rF}{r-F}\delta\left(\xi^2 + \eta^2 - \frac{2F}{r-F}(x\xi + y\eta) + \frac{2rF\Delta}{r-F}\right) = \\ &= \frac{2rF}{r-F}\delta\left(\left(\xi - \frac{Fx}{r-F}\right)^2 + \left(\eta - \frac{Fy}{r-F}\right)^2 + \frac{2rF\Delta}{r-F} - \frac{F^2}{(r-F)^2}(x^2 + y^2)\right). \end{aligned}$$

Аргумент δ -функции, приравненный нулю, представляет собой уравнение линии, на которой подынтегральная функция будет отлична от нуля.

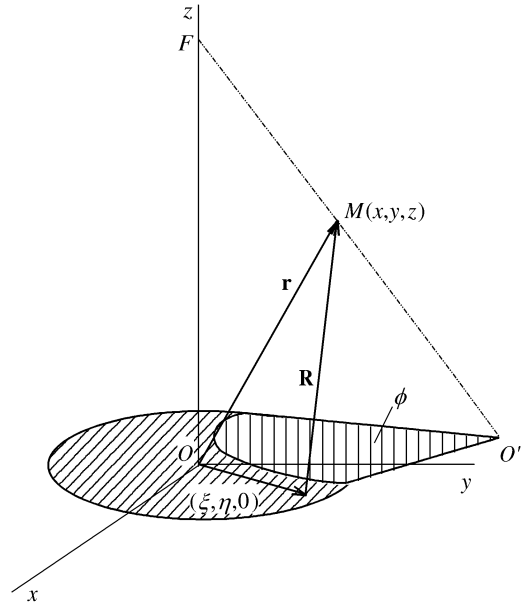


Рис. 9. Система координат для расчета функции Грина g_f в задаче о фокусировке импульса: $M(x, y, z)$ — точка наблюдения поля, ϕ — угол наблюдения дуги окружности из точки $O'(xF/(F-r), yF/(F-r), 0)$, F — координата фокуса

При сделанных приближениях это — уравнение окружности с центром в точке O' и координатами $(2xF/(r-F), 2yF/(r-F))$. Если перенести начало координат в центр и перейти к полярным координатам, то функцию Грина можно выписать в виде

$$g_f(\mathbf{r}, t) = \frac{F}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\phi}{r-F}, \quad (37)$$

где ϕ — угол, вырезаемый окружностью радиуса ρ' (рис. 9) из диафрагмы.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрение дифракции предельно коротких импульсов на основе нестационарного интеграла Кирхгофа—Зоммерфельда демонстрирует необходимость модификации принципа Гюйгенса—Френеля. В нестационарной форме сформулируем его следующим образом: поле, создаваемое в результате дифракции, может быть найдено путем суммирования вкладов от областей волнового фронта, отстоящих от точки наблюдения на фиксированное расстояние, соответствующее времени распространения импульса. Вклад равноудаленных областей фронта беретс с одним знаком при положительной производной

амплитуды по времени и с противоположным знаком — при отрицательной. В применении к стационарным задачам такое условие означает сдвиг фазы интерферирующих волн на $\pi/2$. Это устраняет известную фазовую неточность стационарной формулировки [22]. При прохождении коротких импульсов через узкую диафрагму число колебаний в импульсе увеличивается на единицу.

Подходящим полным базисом для описания ультракоротких импульсов являются всплески. Нами найдено решение для дифракции всплеска на отверстиях квадратной и круглой форм. При дифракции импульса на узком отверстии происходит конечное расплывание импульса при его распространении после диафрагмы. Фокусировка частично компенсирует это явление в пределах фокусного расстояния.

Для описания распространения импульса произвольной формы через отверстие построена функция Грина распространения плоской волны с начальной формой в виде дельта-импульса Дирака. Она равна производной по направлению распространения от углового размера дуги, вырезаемой радиусом распространения из диафрагмы. Функции Грина для дифракции и фокусировки предоставляют альтернативную по отношению к всплескам возможность расчета распространения импульсов. Полученные результаты могут быть перенесены на полное векторное описание электромагнитных полей на основе векторов Герца.

Авторы выражают благодарность И. Я. Новикову за введение в предмет теории всплесков, А. В. Бердышеву за помощь в постановке задачи и А. Л. Гутману за полезные ссылки.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).
2. А. В. Borisov, A. V. Borovskiy, V. V. Korobkin et al., *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2309 (1992).
3. C. Bula, K. T. McDonald, E. J. Prebys et al., *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3116 (1996).
4. J. D. Kmetec, C. L. Gordon III, J. J. Macklin et al., *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1527 (1992).
5. А. В. Borisov, A. V. Borovskiy, V. V. Korobkin et al., *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1753 (1990).
6. H. S. Brandi, C. Manus, G. Mainfray et al., *Laser Physics* **3**, 405 (1993).
7. K. Krushelnick, A. Ting, C. I. Moore et al., *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4047 (1997).
8. Н. Б. Нарожный, М. С. Фофанов, *ЖЭТФ* **110**, 26 (1996).
9. L. C. Stainhauer and W. D. Kimura, *J. Appl. Phys.* **72**, 3237 (1992).
10. Н. Б. Баранова, Б. Я. Зельдович, *ЖЭТФ* **105**, 469 (1994).
11. Ю. Н. Еременко, Л. С. Мхитарьян, *ЖЭТФ* **111**, 1554 (1997).
12. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1979).
13. А. Н. Ораевский, *ЖЭТФ* **187**, 3 (1997).
14. A. Baltushka, Z. Wei, M. S. Pshenichnikov, and D. A. Wiersma, *Opt. Lett.* **22**, 269 (1997).
15. В. А. Алешкевич, В. К. Петерсон, *Письма в ЖЭТФ* **66**, 232 (1997).
16. А. Л. Гутман, *РЭ* **42**, 271 (1997).
17. А. Зоммерфельд, *Оптика*, ИИЛ, Москва (1973).
18. М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин, *Классическая электродинамика*, Наука, Москва (1953).
19. Н. М. Астафьева, *УФН* **166**, 1145 (1996).
20. И. Я. Новиков, С. В. Стечкин, *ФПМ* **3**, 1 (1997).
21. M. Abramovitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards (1964).
22. Г. С. Ландсберг, *Оптика*, Наука, Москва (1976).