

## ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ПАЙЕРЛСА В СВЕТОВОМ ПОЛЕ

А. Л. Семенов\*

Ульяновский государственный университет  
432700, Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 23 июня 1999 г.

На основе уравнения Лагранжа для фоновой моды и уравнения Лиувилля для матрицы плотности электронной подсистемы получены уравнения, описывающие временную динамику параметра порядка фазового перехода металл—полупроводник  $\xi(t)$  и концентрации электрон-дырочных пар  $n(t)$  системы Пайерлса в световом поле. Анализ полученных уравнений проведен для стационарного режима (при адиабатически медленном изменении интенсивности  $I$  светового поля) и для переходного процесса вблизи начального и конечного состояний динамического равновесия (при ступенькообразном включении светового поля). Показано, что при адиабатически медленном увеличении интенсивности  $I$  до некоторого критического значения  $I_c$  ширина запрещенной зоны электронного спектра уменьшается, но полупроводниковая фаза системы Пайерлса остается устойчивой. При  $I > I_c$  устойчивость стационарного полупроводникового состояния ( $\xi \neq 0$ ) теряется. При ступенькообразном включении светового поля отклонение параметров системы от начальных значений описывается экспоненциальным законом с характерным обратным временем развития процесса, линейно зависящим от интенсивности облучения  $I$ . При приближении к новому положению равновесия возможны три качественно различных режима поведения параметра порядка  $\xi$  и концентрации  $n$ . При малых  $I$  ( $I < I_1$ ) имеет место чисто релаксационный аperiодический процесс. При промежуточных  $I$  ( $I_1 < I < I_c$ ) наблюдаются затухающие осцилляции  $\xi$  и  $n$  около нового полупроводникового стационарного состояния с меньшей шириной запрещенной зоны. При  $I > I_c$  стационарное полупроводниковое состояние с  $\xi \neq 0$  отсутствует. В рамках развитой теории проведена интерпретация экспериментальных данных по облучению пленки двуокиси ванадия мощным лазерным импульсом.

PACS: 05.70.Fh, 71.30.+h, 05.30.Fk, 42.65.Pc

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при уменьшении температуры  $T$  ниже некоторого критического значения  $T_0$  цепочка эквидистантно расположенных атомов, на каждом из которых находится по одному внешнему электрону, испытывает обратимый термодинамически равновесный фазовый переход, характеризующийся изменением кристаллической структуры (попарным сближением атомов в цепочке) и образованием запрещенной зоны в электронном спектре на уровне Ферми [1]. Данный переход, при котором, кроме того, имеет место однородная деформация атомной цепочки [2], называют переходом Пайерлса, а систему, в которой он происходит — системой Пайерлса.

Термодинамически равновесный фазовый переход металл—полупроводник (либо полупроводник—металл) в системе Пайерлса может также быть инициирован

\* E-mail: semenov@quant.univ.simbirsk.su

давлением (как одноосным, так и всесторонним) [3, 4], нарушением идеальности кристаллической решетки (в частности, при легировании примесями замещения) [1, 4–8], постоянным электрическим полем [9], адсорбцией молекул из газовой фазы и т. д. [4, 10, 11]. Вблизи критической точки  $T_0$  термодинамически равновесного фазового перехода металл—полупроводник в пленке из пайерлсовского материала на подложке образуется одномерная пространственная периодическая гетерофазная структура чередующихся металлической и полупроводниковой фаз [12].

Широкий интерес вызывает теоретическое и экспериментальное исследование термодинамически неравновесного фазового перехода в низкотемпературной полупроводниковой фазе системы Пайерлса, на каждом атоме которой находится по  $n$  ( $0 < |n - 1| < 1$ ) внешних электронов, в постоянном электрическом поле, направленном вдоль главной оси квазиодномерного кристалла [13–18]. Этот переход, проявляющийся в форме резкого возрастания электрической проводимости, когда напряженность электрического поля превышает некоторое пороговое значение, обусловлен возникновением движения вдоль атомной цепочки волны зарядовой плотности и связанной с ней первоначально статической фреilihовской фононной моды, образованной благодаря смещению атомов при пайерлсовском фазовом переходе металл—полупроводник.

Различного вида термодинамически неравновесные фотостимулированные неустойчивости и фазовые переходы в системе Пайерлса рассматривались авторами работ [19–25]. В статьях [19–22], в частности, было показано, что при облучении пайерлсовского полупроводника световым полем с частотой, превышающей ширину запрещенной зоны  $E_g$  электронного спектра, происходит рост концентрации  $n$  неравновесных электрон-дырочных пар и, как следствие, плавное уменьшение ширины запрещенной зоны. Когда же концентрация  $n$  достигает некоторого критического значения  $n_c$ , имеет место скачкообразное обращение  $E_g$  в нуль (фотоиндуцированный фазовый переход полупроводник—металл).

Благодаря особенностям электронного спектра пайерлсовского полупроводника (наличие особых точек Ван Хова [23], резких [24] или размытых [25] краев запрещенной зоны) в световом поле со специально подобранной центральной частотой оптического спектра возможны также резкие фотоиндуцированные переходы из одного полупроводникового состояния в другое [23–25]. Вблизи критической точки этих переходов в системе Пайерлса наблюдается безрезонаторная оптическая бистабильность при нарастающем поглощении [26].

Исследование временной динамики развития фотоиндуцированного фазового перехода, представляющего собой изменение структуры кристаллической решетки и ширины запрещенной зоны электронного спектра полупроводника при его облучении световым полем, проводилось для различных материалов в целом ряде работ [27–34]. Было показано, что при больших концентрациях неравновесных носителей могут возникать временные [27–29] и пространственные [30] периодические осцилляции параметров системы. Образующееся новое состояние в зависимости от конкретных условий является металлом [27], полупроводником с другой кристаллической модификацией [31], аморфным твердым телом [31], гетерофазной структурой [19, 21, 30, 32] и т. д. [33, 34].

В настоящей работе проводится исследование динамики фотоиндуцированного фазового перехода в системе Пайерлса в предположении постоянства характерных времен фононной и межзонной электронной релаксаций. В отличие от работ [27–34], где в качестве внешне контролируемого параметра выступала концентрация неравновесных электронов в зоне проводимости, а способ создания этой концентрации либо не рас-

смаивался, либо рассматривался на качественном уровне, в данной статье конкретизируется механизм взаимодействия электронной подсистемы с электромагнитным полем и учитывается возможность изменения концентрации неравновесных носителей в процессе развития фазового перехода. В качестве внешне контролируемого параметра выбирается интенсивность светового поля, что более оправдано с физической точки зрения. Световое поле рассматривается как квазимонохроматический стационарный случайный процесс, в котором благодаря электродипольному взаимодействию фотонов с электронной подсистемой полупроводника происходит фотостимулированная генерация неравновесных электрон-дырочных пар. Рост этой концентрации посредством электрон-фононного взаимодействия вызывает перестройку кристаллической структуры и электронного спектра системы Пайерлса.

В работе получены выражения, описывающие временную зависимость ширины запрещенной зоны в процессе фазового перехода на начальной стадии эволюции при развитии неустойчивости исходной устойчивой в отсутствие светового поля фазы и на конечной стадии вблизи нового стационарного состояния динамического равновесия. На основе развитой теории проведена интерпретация экспериментальных данных работы [35] по фотостимулированному фазовому переходу полупроводник—металл при облучении пленки двуокиси ванадия мощным лазерным импульсом.

## 2. ГАМИЛЬТониАН И ЭЛЕКТРОННЫЙ СПЕКТР СИСТЕМЫ

Рассмотрим цепочку атомов, на каждом из которых находится по одному внешнему электрону. Гамильтониан электронной подсистемы запишем в следующем виде:

$$H_e = \sum_{n,m(m>0)} B_{n,n+m} (a_n^+ a_{n+m} + a_{n+m}^+ a_n), \quad (2.1)$$

где  $n$  — номер атома в цепочке,  $B_{n,n+m}$  — интеграл перекрытия волновых функций  $n$ -го и  $n+m$ -го атомов,  $a_n^+$ ,  $a_n$  — операторы рождения и уничтожения электрона на  $n$ -ом атоме.

Для узкозонных систем (в частности, для рассматриваемой здесь модели Пайерлса) расстояние  $r_{n,n+1}$  между ближайшими соседними атомами в несколько раз превышает эффективный радиус  $R$  атомной волновой функции электрона. В этом случае интеграл перекрытия  $B_{n,n+m}$  приближенно определяется соотношением [36]

$$B_{n,n+m} \sim \exp(-r_{n,n+m}/R). \quad (2.2)$$

Координату  $x_n$   $n$ -го атома в цепочке с попарно сближающимися атомами запишем в форме

$$x_n = nr_0 + \frac{\cos(\pi n)R\xi}{2}, \quad (2.3)$$

где  $r_0$  — межатомное расстояние в металлической фазе,  $\xi$  — параметр удвоения периода одномерного кристалла (параметр порядка фазового перехода металл—полупроводник). Тогда для расстояния  $r_{n,n+m}$  получаем

$$r_{n,n+m} = mr_0 + (-1)^n R\xi \frac{((-1)^m - 1)}{2}. \quad (2.4)$$

С учетом (2.4) интеграл перекрытия  $B_{n,n+m}$  (2.2) принимает вид

$$B_{n,n+m} = b \exp \left( -\chi(m-1) + \frac{(-1)^n (1 - (-1)^m)}{2} \xi \right), \quad (2.5)$$

где  $\chi = r_0/R$  — безразмерный параметр, характеризующий относительную взаимную удаленность ближайших соседних атомов,  $b$  — интеграл перекрытия волновых функций ближайших соседних атомов в металлической фазе ( $\xi = 0$ ). Фазы атомных волновых функций при записи (2.1) выбираются таким образом, что  $b$  в (2.5) является действительной величиной.

Для диагонализации гамильтониана (2.1) воспользуемся методом канонических преобразований Боголюбова [37]. Перейдем к коллективным фермиевским операторам вторичного квантования  $c_k, c_k^\dagger$  по формуле

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k c_k e^{ikn}, \quad (2.6)$$

где  $N$  — число атомов в цепочке,  $k = 0, \pm 2\pi/N, \dots, \pm\pi, c_{k+2\pi} = c_k$ . В новом операторном представлении гамильтониан (2.1) принимает вид

$$H_e = \sum_k b (Q_k c_k^\dagger c_k + i R_k c_k^\dagger c_{k-\pi}), \quad (2.7)$$

где

$$Q_k = \frac{\text{ch } \xi \cos k (\exp(2\chi) - 1) + \cos(2k) \exp \chi - \exp(-\chi)}{\text{ch}(2\chi) - \cos(2k)}, \quad (2.8)$$

$$R_k = -\frac{\text{sh } \xi \sin k (\exp(2\chi) - 1)}{\text{ch}(2\chi) - \cos(2k)}. \quad (2.9)$$

Выполним в (2.7) еще одно каноническое преобразование к фермиевским операторам  $\alpha_k, \alpha_k^\dagger$  в соответствии с формулой

$$c_k = \frac{\alpha_k + i\varphi_k \alpha_{k-\pi}}{\sqrt{1 + \varphi_k^2}}. \quad (2.10)$$

Функция  $\varphi_k$  в (2.10) подбирается таким образом, чтобы получившийся гамильтониан в новых переменных  $\alpha_k, \alpha_k^\dagger$  имел диагональный вид:

$$H_e = \sum_k \varepsilon_k \alpha_k^\dagger \alpha_k. \quad (2.11)$$

После подстановки (2.10) в (2.7) и приравнивания к нулю недиагональных элементов находим  $\varphi_k$  и закон дисперсии  $\varepsilon_k$ :

$$\varphi_k = \frac{Q_k - Q_{k-\pi} - \text{sign}(Q_k - Q_{k-\pi}) \sqrt{(Q_k - Q_{k-\pi})^2 + 4R_k^2}}{2R_k}, \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_k = \frac{b}{2} \left( Q_k + Q_{k-\pi} + \text{sign}(Q_k - Q_{k-\pi}) \sqrt{(Q_k - Q_{k-\pi})^2 + 4R_k^2} \right). \quad (2.13)$$

Из соотношений (2.13), (2.8), (2.9) видно, что спектр  $\varepsilon_k$  при  $\xi \neq 0$  имеет две зоны, нижняя из которых в основном состоянии полностью заполнена, а верхняя пустая (полупроводниковая фаза). При  $\xi = 0$  спектр (2.13), (2.8), (2.9) представляет собой одну наполовину заполненную зону (металлическая фаза).

### 3. ОПЕРАТОР ДИПОЛЬНОГО МОМЕНТА

Оператор дипольного момента системы Пайерлса определяется соотношением

$$\mathbf{d} = \sum_{n,m(m>0)} (\mathbf{d}_{n,n+m} a_n^\dagger a_{n+m} + \mathbf{d}_{n,n+m}^* a_{n+m}^\dagger a_n), \quad (3.1)$$

где зависимость  $\mathbf{d}_{n,n+m}$  от  $\xi$  аналогична выражению (2.5):

$$\mathbf{d}_{n,n+m} = -e \int \psi_n^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \psi_{n+m}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = (\mathbf{d}_1 + i\mathbf{d}_2) \exp\left(-\chi(m-1) + (-1)^n (1 - (-1)^m) \frac{\xi}{2}\right). \quad (3.2)$$

Здесь  $\psi_n(\mathbf{r})$  — атомная волновая функция электрона, находящегося на  $n$ -ом узле,  $e$  — заряд электрона. Выбор фаз волновых функций  $\psi_n(\mathbf{r})$ , обеспечивающий реальность интеграла перекрытия (2.5), однозначно определяет  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  в (3.2).

Подставляя (2.6) в (3.1), с учетом (3.2) находим

$$\mathbf{d} = \sum_k [(\mathbf{d}_1 Q_k + \mathbf{d}_2 P_k) c_k^\dagger c_k + i(\mathbf{d}_1 R_k + \mathbf{d}_2 S_k) c_k^\dagger c_{k-\pi}], \quad (3.3)$$

где

$$P_k = -\frac{\text{ch } \xi \sin k (\exp(2\chi) + 1) + \sin(2k) \exp \chi}{\text{ch}(2\chi) - \cos(2k)}, \quad (3.4)$$

$$S_k = -\frac{\text{sh } \xi \cos k (\exp(2\chi) - 1)}{\text{ch}(2\chi) - \cos(2k)}. \quad (3.5)$$

Переходя в (3.3) к фермиевским операторам  $\alpha_k, \alpha_k^\dagger$ , с учетом (2.10), (2.12) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = \sum_k \left[ \left( \mathbf{d}_1 \frac{\varepsilon_k}{b} + \mathbf{d}_2 \frac{P_k + P_{k-\pi} \varphi_k^2 - 2S_k \varphi_k}{1 + \varphi_k^2} \right) \alpha_k^\dagger \alpha_k + \right. \\ \left. + i\mathbf{d}_2 \frac{\varphi_k (P_k - P_{k-\pi}) + S_k (1 - \varphi_k^2)}{1 + \varphi_k^2} \alpha_k^\dagger \alpha_{k-\pi} \right]. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Следует отметить формальное сходство операторов (2.1) и (3.1) при  $\mathbf{d}_2 = 0$ . Аналогичное сходство поэтому имеют и операторы (2.11) и (3.6).

Пусть в отсутствие внешнего электрического поля суммарный дипольный момент системы равен нулю. Тогда из (3.6), (2.13) следует, что  $\mathbf{d}_1 = 0$ . Таким образом, выбор фаз волновых функций  $\psi_n(\mathbf{r})$ , при котором интеграл  $B_{n,n+m}$  в (2.1) является действительной величиной, в рассматриваемом случае обеспечивает мнимость межузельного матричного элемента оператора дипольного момента  $\mathbf{d}_{n,n+m}$  в (3.1). Случай  $\mathbf{d}_1 \neq 0$ , по-видимому, может быть реализован в системах, обладающих сегнетоэлектрическими свойствами. Такие системы в данной работе не рассматриваются. При  $\xi \rightarrow 0$ , как видно из (2.12),  $\varphi_k \rightarrow 0$  для всех  $k \neq \pm\pi/2$ . Поэтому в (3.6)  $\mathbf{d}_{k,k-\pi} \rightarrow 0$ , и все дипольные переходы запрещены. Если  $\xi \neq 0$ , то в (3.6)  $\mathbf{d}_{k,k-\pi} \neq 0$ , и соответствующие дипольные переходы разрешены. Поскольку в этом случае первой зоной Бриллюэна является область  $k \in [-\pi/2, \pi/2]$ , данные переходы оказываются вертикальными межзонными в спектре (2.13).

#### 4. ДИНАМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНОЙ СИСТЕМЫ ПАЙЕРЛСА

Рассмотрим поведение низкотемпературной фазы системы Пайерлса при возбуждении в ней неравновесных электрон-дырочных пар. Будем предполагать, что данное возбуждение обусловлено вынужденными переходами электронов из валентной зоны в зону проводимости благодаря, например, дипольному электрон-фотонному взаимодействию с падающим излучением. Известно, что характерное время внутризонной релаксации электронов  $\tau_e \sim 10^{-14}$  с значительно меньше времени межзонной релаксации  $\tau \sim 10^{-11}$  с [38]. Поэтому при облучении системы световым полем с постоянной амплитудой можно приближенно считать [39], что внутри каждой электронной зоны устанавливается термодинамическое равновесие электронов со своим соответствующим данной зоне квазиуровнем Ферми. Вызванное внешним облучением нарушение термодинамического равновесия между зонами выражается различием соответствующих квазиуровней Ферми между собой.

Рассмотренный выше подход к описанию термодинамически неравновесной системы, состоящей из совокупности слабо взаимодействующих термодинамически равновесных подсистем, можно обобщить и на случай, когда падающее излучение имеет адиабатически медленно меняющуюся амплитуду  $A$  (изменение амплитуды поля  $\Delta A$  за время  $\tau_e \sim 10^{-14}$  с много меньше  $A$ ). Это связано с тем, что электронная подсистема внутри каждой из зон успевает полностью отслеживать изменение поля и поэтому в любой момент времени находится в состоянии термодинамического равновесия. Данная ситуация в некоторой степени аналогична обычно встречающейся при описании термодинамически равновесных систем при адиабатически медленном изменении внешних параметров. В дальнейшем мы ограничимся построением теории именно для такого случая, при этом переходные процессы, происходящие в каждой электронной зоне за характерное время, не превышающее время внутризонной электронной релаксации  $\tau_e \sim 10^{-14}$  с, нами обсуждаться не будут.

Свободная энергия  $F_j$  электронной подсистемы  $j$ -ой зоны ( $j = 1, 2$ ) определяется соотношением

$$F_j = \mu_j N_j - k_B T \sum_k \ln \left( 1 + \exp \left( \frac{\mu_j - \varepsilon_k}{k_B T} \right) \right), \quad (4.1)$$

где  $\mu_j, N_j$  — соответственно, квазиуровень Ферми и число электронов  $j$ -ой зоны. Суммирование по  $k$  в (4.1) идет в пределах  $j$ -ой зоны спектра (2.13) ( $|k| < \pi/2$  для  $j = 1$  и  $\pi/2 < |k| < \pi$  для  $j = 2$ ).

Рассматривая параметр  $\xi$  в качестве обобщенной координаты, запишем динамическое уравнение термодинамически неравновесной системы Пайерлса:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = Q, \quad (4.2)$$

где

$$L = \sum_n \frac{m(\dot{x}_n)^2}{2} - F_1 - F_2 - F_c \quad (4.3)$$

— функция Лагранжа,  $Q$  — обобщенная диссипативная сила (см. (5.17)), характеризующая релаксацию параметра порядка фазового перехода металл—полупроводник  $\xi$  к устойчивому положению равновесия. В (4.3)  $m$  — масса атома,

$$F_c = A\xi^2/2 \tag{4.4}$$

— свободная энергия кристаллической решетки, записанная в статическом приближении молекулярного поля [1], а также в гармоническом приближении, учитывающем только первый неисчезающий член разложения в ряд Тейлора по параметру порядка фазового перехода металл—полупроводник  $\xi$  с коэффициентом разложения  $A$ .

Подставляя соотношение (4.3) в (4.2), с учетом (4.4), (4.1), (2.3) получаем

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{4}{NmR^2} \left( \sum_{|k| \leq \pi/2} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \xi} \operatorname{th} \left( \frac{\varepsilon_k - \mu}{2k_B T} \right) - A\xi + QN \right). \tag{4.5}$$

Выражение (4.5) представляет собой динамическое уравнение системы Пайерлса, определяющее поведение параметра порядка фазового перехода металл—полупроводник  $\xi$  при возбуждении неравновесных электрон-дырочных пар. В дополнение к соотношению (4.5) запишем уравнение электронейтральности, связывающее концентрацию электрон-дырочных пар  $n$  и квазиуровень Ферми  $\mu$ :

$$n = \frac{N}{2} - \sum_{|k| \leq \pi/2} \operatorname{th} \left( \frac{\varepsilon_k - \mu}{2k_B T} \right). \tag{4.6}$$

Коэффициент разложения  $A$  в (4.4), (4.5) выражается через критическую температуру  $T_0$  термодинамически равновесного (в отсутствие светового поля) фазового перехода металл—полупроводник и другие характеристики системы. Условием равновесного фазового перехода металл—полупроводник является потеря устойчивости металлической фазы:

$$\partial^2 F(T_0, \xi = 0) / \partial \xi^2 = 0,$$

где  $F$  — свободная энергия термодинамически равновесной системы Пайерлса. В отсутствие светового поля в состоянии термодинамического равновесия диссипация отсутствует ( $Q = 0$ ), а квазиуровни Ферми валентной зоны и зоны проводимости спектра (2.13) равны нулю:

$$\mu_{1,2} = \mp \mu = 0.$$

Отсюда с учетом (4.5), (2.13) имеем

$$A = 2 \sum_{|k| \leq \pi/2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_k}{\partial \xi^2} \operatorname{th} \left( \frac{\varepsilon_k}{2k_B T_0} \right) \right) \Big|_{\xi=0}. \tag{4.7}$$

Вычисляя сумму в (4.7), приближенно находим

$$A = \frac{4bN}{\pi} \left( \ln \left( \frac{\pi b}{2k_B T_0} \right) + 1 \right). \tag{4.8}$$

Таким образом, мы получили уравнение (4.6), выражающее зависимость концентрации электрон-дырочных пар  $n$  от квазиуровня Ферми  $\mu$  и параметра порядка фазового перехода металл—полупроводник  $\xi$ , т. е.  $n(\mu, \xi)$ , а также динамическое уравнение (4.5), описывающее связь между параметром  $\xi$  системы Пайерлса и  $\mu$ , т. е.  $\xi(\mu)$ . В свою очередь квазиуровень Ферми  $\mu$  определяется степенью светового воздействия на систему. Уравнение, описывающее это воздействие, должно зависеть от конкретного механизма взаимодействия излучения с электронной подсистемой.

### 5. РЕЛАКСАЦИЯ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА $\xi$

Для вычисления обобщенной диссипативной силы  $Q$  в формуле (4.5) заметим, что параметр порядка  $\xi$  (2.3) характеризует фононную моду с волновым вектором  $q$  на краю зоны Бриллюэна ( $q = \pi$ ,  $q$  параллелен главной оси пайерлсовского кристалла). Предполагая, что релаксация фононной моды к термодинамически равновесному значению обусловлена фонон-фононным и фонон-электронным взаимодействиями, гамильтониан системы запишем в виде

$$H = H_0 + H_e + V + U, \quad (5.1)$$

где

$$H_0 = \sum_k \hbar \omega_k (b_k^\dagger b_k + 1/2), \quad H_e = \sum_k \varepsilon_k \alpha_k^\dagger \alpha_k \quad (5.2)$$

— соответственно гамильтонианы невзаимодействующих фононов и электронов ( $\omega_k$  — фононный спектр,  $\varepsilon_k$  — электронный спектр,  $b_k^\dagger, b_k$  ( $\alpha_k^\dagger, \alpha_k$ ) — соответственно, операторы рождения и уничтожения фонона (электрона) с волновым (квазиволновым) вектором  $k$ , предполагается, что суммирование в (5.2) и последующих формулах данного раздела идет также по всем ветвям фононного и электронного спектров);

$$V = \sum_{k,q} (V_{k,q} b_{k+q}^\dagger b_k b_q + \text{H.c.}) \quad (5.3)$$

— оператор фонон-фононного взаимодействия, при записи которого мы ограничились учетом только трехфононных процессов, имеющих место в кристаллической решетке с кубичным ангармонизмом [31, 40] ( $V_{k,q}$  — матричный элемент слияния двух фононов с волновыми векторами  $k$  и  $q$  в фонон с волновым вектором  $k+q$ );

$$U = \sum_{k,q} U_{k,q} \alpha_{k+q}^\dagger \alpha_k (b_q - b_{-q}^\dagger) \quad (5.4)$$

— фреilihовский гамильтониан электрон-фононного взаимодействия [1, 41] ( $U_{k,q}$  — матричный элемент перехода электрона с квазиволновым вектором  $k$  и фонона с волновым вектором  $q$  в электрон с квазиволновым вектором  $k+q$ ).

Изменение во времени оператора  $f_{k,p} \equiv b_p^\dagger b_k$  на кинетическом этапе эволюции во втором порядке теории возмущений по  $V+U$  описывается следующим уравнением [42]:

$$\frac{df_{k,p}}{dt} = i\hbar \text{Sp } \rho [H_0, f_{k,p}] + L_{k,p}^{(1)} + L_{k,p}^{(2)}, \quad (5.5)$$

где

$$L_{\mathbf{k},\mathbf{p}}^{(1)} = i\hbar \text{Sp } \rho [U + V, f_{\mathbf{k},\mathbf{p}}], \quad (5.6)$$

$$L_{\mathbf{k},\mathbf{p}}^{(2)} = -\hbar \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} \text{Sp } \rho \left[ U(\tau) + V(\tau), [U + V, f_{\mathbf{k},\mathbf{p}}] + i \sum_{\mathbf{q},\mathbf{s}} f_{\mathbf{q},\mathbf{s}} \frac{\partial L_{\mathbf{k},\mathbf{p}}^{(1)}}{\partial \gamma_{\mathbf{q},\mathbf{s}}} \right], \quad \eta \rightarrow +0. \quad (5.7)$$

Здесь

$$U(\tau) + V(\tau) = \exp \left\{ i \frac{H_0 + H_e}{\hbar} \tau \right\} (U + V) \exp \left\{ -i \frac{H_0 + H_e}{\hbar} \tau \right\} \quad (5.8)$$

— оператор  $U + V$  в представлении взаимодействия,  $\rho$  — статистический оператор (матрица плотности) идеального неравновесного газа фононов и электронов, определяющий  $c$ -числовые функции  $\gamma_{\mathbf{k},\mathbf{p}}$  с помощью уравнений:

$$\text{Sp } \rho = 1, \quad \text{Sp } \rho f_{\mathbf{k},\mathbf{p}} = \gamma_{\mathbf{k},\mathbf{p}}. \quad (5.9)$$

Подставляя  $U$  и  $V$  из (5.3), (5.4) в (5.5)–(5.8) и используя теорему Вика [43], получаем уравнение для числа фононов  $N_{\mathbf{k}}$  в состоянии с волновым вектором  $\mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{k}}}{dt} = & 4\pi \sum_{\mathbf{q}} |V_{\mathbf{q},\mathbf{k}-\mathbf{q}}|^2 \{N_{\mathbf{q}} N_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} (1 + N_{\mathbf{k}}) - (1 + N_{\mathbf{q}}) (1 + N_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) N_{\mathbf{k}}\} \delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{k}}) + \\ & + 8\pi \sum_{\mathbf{q}} |V_{\mathbf{q},\mathbf{k}}|^2 \{(1 + N_{\mathbf{q}}) (1 + N_{\mathbf{k}}) N_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - N_{\mathbf{q}} N_{\mathbf{k}} (1 + N_{\mathbf{q}+\mathbf{k}})\} \delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}) + \\ & + 2\pi \sum_{\mathbf{q}} |U_{\mathbf{q},\mathbf{k}}|^2 \{(1 - n_{\mathbf{q}}) n_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} (1 + N_{\mathbf{k}}) - n_{\mathbf{q}} (1 - n_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}) N_{\mathbf{k}}\} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - (\varepsilon_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{q}})/\hbar), \quad (5.10) \end{aligned}$$

где  $n_{\mathbf{k}}$  — число электронов в состоянии с квазиволновым вектором  $\mathbf{k}$ .

Используя выражение (5.10), для отклонения  $\delta N_{\mathbf{k}}$  числа фононов  $N_{\mathbf{k}}$  от термодинамически равновесного значения  $N_{\mathbf{k}}^{(0)}$ ,  $\delta N_{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}} - N_{\mathbf{k}}^{(0)}$ , находим

$$\frac{d\delta N_{\mathbf{k}}}{dt} = -\frac{\delta N_{\mathbf{k}}}{\tau_p}, \quad (5.11)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_p} = & 4\pi \sum_{\mathbf{q}} |V_{\mathbf{q},\mathbf{k}-\mathbf{q}}|^2 \left( N_{\mathbf{q}}^{(0)} + N_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{(0)} + 1 \right) \delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{k}}) + \\ & + 8\pi \sum_{\mathbf{q}} |V_{\mathbf{q},\mathbf{k}}|^2 \left( N_{\mathbf{q}}^{(0)} - N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} \right) \delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}) + \\ & + 2\pi \sum_{\mathbf{q}} |U_{\mathbf{q},\mathbf{k}}|^2 \left( n_{\mathbf{q}}^{(0)} - n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{(0)} \right) \delta(\omega_{\mathbf{k}} - (\varepsilon_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{q}})/\hbar) \quad (5.12) \end{aligned}$$

— обратное время фононной релаксации. Здесь

$$N_{\mathbf{q}}^{(0)} = (\exp \{ \hbar \omega_{\mathbf{q}} / k_B T \} - 1)^{-1} \quad (5.13)$$

— распределение Бозе—Эйнштейна,

$$n_q^{(0)} = (\exp\{(\varepsilon_q - \mu)/k_B T\} + 1)^{-1} \quad (5.14)$$

— распределение Ферми—Дирака,  $\mu$  — квазиуровень Ферми. Первое и второе слагаемые в правой части (5.12) соответствуют фонон-фононной, а третье — фонон-электронной релаксации.

Из уравнения (5.11) следует, что в классическом пределе  $N_k \gg N_k^{(0)}$  статистическое среднее значение энергии фононной моды (2.3)

$$\langle W \rangle = \frac{mR^2}{4} \langle \xi^2 \rangle \quad (5.15)$$

подчиняется уравнению

$$\frac{d\langle W \rangle}{dt} = -\frac{\langle W \rangle}{\tau_p} = \langle Q\xi \rangle. \quad (5.16)$$

Второе равенство в (5.16) с учетом (5.15) выполняется, если обобщенная диссипативная сила  $Q$  удовлетворяет соотношению

$$Q = -\frac{mR^2}{4\tau_p} \dot{\xi}, \quad (5.17)$$

характеризующему линейное затухание фононной моды.

## 6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ИЗЛУЧЕНИЕМ

Взаимодействие системы со световым полем будем описывать оператором  $V_1$ , который в дипольном приближении имеет вид

$$V_1 = -dE(t) = -d \int \mathbf{E}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (6.1)$$

где  $\mathbf{E}_\omega$ ,  $\omega$  — соответственно, амплитуда и частота спектральной компоненты светового поля.

Рассмотрим случай, когда падающее излучение  $\mathbf{E}(t)$  является линейно поляризованным вдоль оси кристалла квазимонохроматическим стационарным случайным процессом [44]. Тогда все спектральные компоненты  $\mathbf{E}_\omega$  статистически независимы [44, 45]:

$$\langle \mathbf{E}_\omega \mathbf{E}_{\omega_1} \rangle = G(\omega) \delta(\omega + \omega_1). \quad (6.2)$$

Здесь  $G(\omega)$  — спектральная плотность светового поля, которая для квазимонохроматического сигнала может быть представлена в следующем виде [44]:

$$G(\omega) = I g(|\omega| - \omega_0), \quad (6.3)$$

где  $\omega_0$  — несущая частота,  $g(x)$  — неотрицательная функция колоколообразной формы с максимумом в точке  $x = 0$ , удовлетворяющая условию нормировки

$$\int g(x) dx = 1. \quad (6.4)$$

Ширина  $\Delta\omega$  спектра  $G(\omega)$  удовлетворяет неравенству  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Величина

$$I = \int G(\omega)d\omega/2 \tag{6.5}$$

характеризует интенсивность светового поля (в гауссовой системе с точностью до множителя  $cn/2\pi$ , где в данном случае  $c$  — скорость света,  $n$  — показатель преломления среды).

Используя уравнение Лиувилля [46]

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H_e + V_1, \rho], \tag{6.6}$$

с учетом (6.1), (6.2) находим уравнение для диагональных элементов  $\rho_{kk}$  матрицы плотности  $\rho$  электронной подсистемы во втором порядке теории возмущений по  $V_1$ :

$$\frac{\partial \rho_{kk}}{\partial t} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_s |\mathbf{d}_{ks}|^2 G\left(\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_k}{\hbar}\right) (\rho_{ss} - \rho_{kk}), \tag{6.7}$$

где  $\mathbf{d}_{ks}$  — матричный элемент оператора дипольного момента (3.6). В частном случае монохроматического светового поля

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{6.8}$$

с равномерно распределенной случайной фазой  $\varphi$  спектральная плотность  $G(\omega)$  имеет вид

$$G(\omega) = \frac{\mathbf{E}_0^2 (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))}{4}. \tag{6.9}$$

Тогда уравнение (6.7) переходит в хорошо известное золотое правило Ферми для вероятности вынужденных переходов [45]:

$$\frac{\partial \rho_{kk}}{\partial t} = \frac{\pi}{2\hbar} |\mathbf{E}_0 \mathbf{d}_{kk}|^2 \delta(2\varepsilon_k - \hbar\omega_0). \tag{6.10}$$

В (6.10) предполагается, что нижний уровень (с квазиволновым числом  $k - \pi$ ) заполнен, а верхний (с квазиволновым числом  $k$ ) пустой.

С учетом (3.6), (2.13) из (6.7) получаем

$$\frac{\partial \rho_{kk}}{\partial t} = \frac{2\pi}{\hbar^2} d_k^2 G\left(\frac{2\varepsilon_k}{\hbar}\right) \text{th}\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{2k_B T}\right), \tag{6.11}$$

где

$$d_k = \left| d_2 \frac{\varphi_k (P_k - P_{k-\pi}) + S_k (1 - \varphi_k^2)}{1 + \varphi_k^2} \right|. \tag{6.12}$$

Принимая во внимание (2.13), из (6.11) находим кинетическое уравнение для концентрации  $n = 2 \sum_{|k| \leq \pi/2} \rho_{kk}$  электрон-дырочных пар системы Пайерлса:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{4\pi}{\hbar^2} \sum_{|k| \leq \pi/2} d_k^2 \text{th}\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{2k_B T}\right) G\left(\frac{2\varepsilon_k}{\hbar}\right) - \frac{n - n_0}{\tau}, \tag{6.13}$$

где  $n_0$  — концентрация электрон-дырочных пар в отсутствие светового поля, которую с учетом соотношения (4.6) можно записать в следующем приближенном виде:

$$n_0 = n(\mu = 0) = \begin{cases} N \sqrt{\frac{k_B T \operatorname{sh} \xi}{\pi b}} \exp \left\{ -\frac{2b \operatorname{sh} \xi}{k_B T} \right\}, & b\xi \gg k_B T, \\ \frac{N}{\pi} \left( \frac{k_B T}{b} \ln 2 - \frac{b}{2k_B T} \xi^2 \right), & b\xi \ll k_B T. \end{cases} \quad (6.14)$$

Последнее слагаемое в правой части уравнения (6.13) учитывает межзонную электронную релаксацию с характерным временем межзонной электронной релаксации  $\tau$ . Время  $\tau$  в случаях излучательной и безызлучательной рекомбинации электрон-дырочных пар, а также для рекомбинации с участием примесей и дефектов в общем случае зависит от концентрации электронов и дырок (см. [39, стр. 297]), однако мы в дальнейшем этой зависимостью будем пренебрегать, считая  $\tau$  заданным параметром. Выражение (6.13) показывает, что изменение концентрации электрон-дырочных пар  $n$  обусловлено взаимодействием электронной подсистемы со спектральными компонентами светового поля, имеющими частоты  $\omega_k = 2\varepsilon_k/\hbar$ .

Соотношения (4.6), (4.5), (6.13) с учетом (5.17) образуют замкнутую систему динамических уравнений относительно внутренних параметров  $\mu$ ,  $n$ ,  $\xi$  термодинамически неравновесной системы Пайерлса при заданных внешних параметрах  $T$ ,  $I$ ,  $\omega_0$  и т. д.

### 7. ДИНАМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННОГО ИЛИ СЛАБО ВЫРОЖДЕННОГО ПОЛУПРОВОДНИКА ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОН-ДЫРОЧНЫХ ПАР В ГЛУБИНУ ЗОНЫ ПРОВОДИМОСТИ МОНОХРОМАТИЧЕСКИМ СВЕТОВЫМ ПОЛЕМ

Анализ уравнений (4.5), (4.6) проведем в предположении, что система Пайерлса является невырожденным либо слабо вырожденным полупроводником:

$$\mu - 2b \operatorname{sh} \xi < 2k_B T. \quad (7.1)$$

Соотношение (7.1), накладывающее ограничение на пределы изменения квазиуровня Ферми  $\mu$ , с учетом уравнения (4.6) эквивалентно приближенному неравенству, ограничивающему концентрацию электрон-дырочных пар  $n$  сверху:

$$n < n_1 = \frac{8N}{3\pi} \sqrt{\frac{k_B T \operatorname{sh} \xi}{b}}. \quad (7.2)$$

Используя формулы (4.5), (4.6), с учетом (5.17) находим приближенное уравнение для параметра порядка фазового перехода металл—полупроводник  $\xi$ :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{1}{\tau_p} \frac{d\xi}{dt} = \frac{4}{NmR^2} \left( \frac{4bN}{\pi} \operatorname{sh} \xi K \left( \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \xi} \right) - 4bn \operatorname{ch} \xi - A\xi \right), \quad (7.3)$$

где  $K(x)$  — полный нормальный эллиптический интеграл первого рода.

С учетом того факта, что для реальных физических систем концентрация электрон-дырочных пар  $n \ll N$ , а параметр порядка фазового перехода металл—

полупроводник системы  $\xi \leq 0.5$  [1-4], из (7.3) приближенно получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{\tau_p} \frac{d\xi}{dt} = \frac{16b}{NmR^2} \left( \frac{N\xi}{\pi} \ln \left| \frac{\xi_0}{\xi} \right| - n \operatorname{sign} \xi \right), \quad (7.4)$$

где

$$\xi_0 = \frac{\pi}{2} \exp \left\{ \operatorname{Arccsin} \left( \frac{\pi}{4} \right) - \frac{A\pi}{4bN} \right\} \quad (7.5)$$

— параметр порядка фазового перехода металл—полупроводник при  $n = 0$ .

Отметим, что уравнение (7.4), полученное в предположении (7.1) (либо в эквивалентном (7.1) предположении (7.2)), как показывает проведенный нами анализ, оказывается справедливым еще в одном важном частном случае, когда температура  $T = 0$ , а концентрация электрон-дырочных пар  $n$  произвольна.

Проанализируем соотношение (6.13), описывающее изменение концентрации электрон-дырочных пар  $n$  под действием облучения, для случая монохроматического светового поля, когда фактор формы  $g(x)$  в (6.3) определяется соотношением

$$g(x) = \delta(x).$$

Перейдем в (6.13) от суммирования к интегрированию, т. е.  $\sum \rightarrow \int dE$ , имея в виду, что плотность электронных состояний  $\nu(E)$ , соответствующая спектру (2.13), для случая  $\chi \gg 1$  имеет вид

$$\nu(E) = \frac{2N|E|}{\pi \sqrt{(4b^2 \operatorname{ch}^2 \xi - E^2)(E^2 - 4b^2 \operatorname{sh}^2 \xi)}}, \quad (7.6)$$

а матричный элемент оператора дипольного момента  $d_k$  (6.12) при  $\epsilon_k = E$  в соответствии с (2.12), (2.13), (3.4), (3.5) определяется соотношением

$$d(E) \equiv d_k(\epsilon_k = E) = \frac{4bd_2 \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \xi}{E}. \quad (7.7)$$

Тогда в предположении отсутствия насыщения межзонных оптических переходов, когда приближенно выполняется соотношение

$$\operatorname{th}((\hbar\omega_0/2 - \mu)/2k_B T) = 1, \quad (7.8)$$

из (6.13) получаем

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{n - n_0}{\tau} + \frac{512Ib^2 d_2^2 \operatorname{ch}^2 \xi \operatorname{sh}^2 \xi}{\hbar^2 \omega_0 \sqrt{(16b^2 \operatorname{ch}^2 \xi - (\hbar\omega_0)^2)((\hbar\omega_0)^2 - 16b^2 \operatorname{sh}^2 \xi)}}. \quad (7.9)$$

Рассмотрим случай, когда частота  $\omega_0$  падающего светового поля такова, что имеют место оптические переходы электронов из глубины валентной зоны в глубину зоны проводимости. Тогда в (7.9) можно приближенно положить

$$16b^2 \operatorname{ch}^2 \xi - (\hbar\omega_0)^2 \approx (\hbar\omega_0)^2 - 16b^2 \operatorname{sh}^2 \xi. \quad (7.10)$$

При этом приближенно находим

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{n - n_0}{\tau} + \frac{64Id_2^2N\xi^2}{\hbar^2\omega_0}. \quad (7.11)$$

Таким образом, мы получили уравнение (7.11), описывающее поведение концентрации  $n(t)$  электрон-дырочных пар при облучении системы монохроматическим световым полем с интенсивностью  $I(t)$ , и уравнение (7.4), определяющее временную зависимость параметра порядка  $\xi(t)$  при изменении концентрации  $n$ . Эти уравнения (7.4), (7.11) являются основными динамическими уравнениями для невырожденного либо слабо вырожденного (см. (7.1)) полупроводникового состояния системы Пайерлса при оптическом возбуждении в ней электронов в глубину разрешенной зоны.

## 8. СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим сначала случай, когда пайерлсовский полупроводник облучается световым полем с постоянной интенсивностью. Положив в системе уравнений (7.4), (7.11)

$$\frac{dn}{dt} \equiv \frac{d\xi}{dt} \equiv 0, \quad (8.1)$$

находим ее стационарное решение  $\xi_s$ ,  $n_s$  как функцию интенсивности  $I$  в неявном виде

$$I = \frac{\hbar^2\omega_0}{64d_2^2N\xi_s^2\tau} \left( \frac{N|\xi_s|}{\pi} \ln \left| \frac{\xi_0}{\xi_s} \right| - n_0(\xi_s, T) \right), \quad (8.2)$$

$$n_s = \frac{N|\xi_s|}{\pi} \ln \left| \frac{\xi_0}{\xi_s} \right|. \quad (8.3)$$

Для того чтобы стационарное решение (8.2), (8.3) удовлетворяло используемому приближению (7.2) во всей области изменения  $\xi$  ( $0 < \xi \leq \xi_0$ ), необходимо выполнение соотношения, ограничивающего температуру  $T$  системы снизу:

$$\left( \frac{3}{4e} \right)^2 \xi_0 b < k_B T. \quad (8.4)$$

При более низких температурах, когда (8.4) несправедливо, решение (8.2), (8.3) удовлетворяет условию (7.2) только в области

$$\xi \in (0, \xi_1) \cup (\xi_2, \xi_0],$$

где  $\xi_1, \xi_2$  ( $\xi_1 < \xi_2$ ) являются корнями следующего трансцендентного уравнения:

$$\sqrt{\xi} \ln \left| \frac{\xi_0}{\xi} \right| = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{k_B T}{b}}. \quad (8.5)$$

Решение (8.2), (8.3), как показывает анализ системы уравнений (7.4), (7.11), является устойчивым при выполнении неравенства

$$\xi_s > \xi_c, \quad (8.6)$$

где

$$\xi_c = \xi_0 \exp \left\{ -1 - \frac{\pi m R^2}{16 b \tau_p \tau} \right\}. \quad (8.7)$$

Используя решение (8.2), (8.3), находим эквивалентное неравенству (8.6) условие, накладывающее ограничение сверху на интенсивность  $I$  светового поля:

$$I < I_c, \quad (8.8)$$

где

$$I_c = \frac{\hbar^2 \omega_0}{64 d_2^2 N \xi_c^2 \tau} (n_c - n_0(\xi_c, T)), \quad (8.9)$$

$$n_c = \frac{N \xi_0}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi m R^2}{16 b \tau_p \tau} \right) \exp \left\{ -1 - \frac{\pi m R^2}{16 b \tau_p \tau} \right\}. \quad (8.10)$$

Таким образом, при адиабатически медленном увеличении интенсивности  $I$  падающего монохроматического светового поля от нуля до значения  $I_c$ , определяемого (8.9), концентрация электрон-дырочных пар  $n$  в соответствии с описанием (8.2), (8.3) растет от термодинамически равновесного (в отсутствие облучения) значения  $n_0$  (6.14) до критического значения  $n_c$ , определяемого (8.10), а параметр порядка  $\xi$  уменьшается от значения, приближенно равного  $\xi_0$ , до  $\xi_c$ , определяемого (8.7). Когда  $I > I_c$ , стационарное полупроводниковое состояние, соответствующее (8.2), (8.3), теряет свою устойчивость, и отсутствует какое-либо другое устойчивое стационарное решение системы уравнений (7.4), (7.11), соответствующее полупроводниковой фазе.

Численные оценки  $n_c$  и  $I_c$  проведем для двуокиси ванадия, одномерная электронная зона проводимости которой образуется благодаря перекрытию  $3d$ -волновых функций атомов ванадия, расположенных в виде цепочек, параллельных кристаллической оси  $c$  [4]. При температуре ниже критического значения  $T_0 = 340$  К атомы ванадия в цепочке попарно сближаются, а в электронном спектре на уровне Ферми формируется запрещенная зона, так что низкотемпературную фазу  $\text{VO}_2$  можно рассматривать как одномерный (квазиодномерный) пайерлсовский полупроводник [2-4].

Взяв характерные для  $\text{VO}_2$  численные значения физических величин  $b \approx 0.3$  эВ,  $N \approx 10^{23}$  см $^{-3}$ ,  $\xi_0 \approx 0.5$  [3, 4],  $\tau \approx 3 \cdot 10^{-11}$  с,  $\tau_p \sim 10^{-13}$  с [38],  $d_2 \sim 10^{-18}$  СГС [45, 47],  $\hbar \omega_0 = 1.17$  эВ [35],  $m \approx 8.5 \cdot 10^{-23}$  г,  $R \approx 0.5 \cdot 10^{-8}$  см, из (8.9), (8.10) с учетом (8.7) получаем

$$n_c \sim 10^{21} \text{ см}^{-3}, I_c \sim 10^8 \text{ Вт/см}^2. \quad (8.11)$$

При этом условие (8.4) дает  $T > 100$  К.

## 9. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ НА МАЛЫХ ВРЕМЕНАХ

Исследуем поведение системы Пайерлса при облучении ее монохроматическим световым полем, зависимость интенсивности  $I$  которого от времени имеет вид ступеньки:

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ I = \text{const}, & t \geq 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Рассмотрим решение на начальном этапе эволюции, когда параметр порядка фазового перехода металл—полупроводник  $\xi$  близок к своему начальному значению  $\xi_0$ . Тогда система уравнений (7.4), (7.11) может быть приближенно линеаризована и в приближении [48]

$$\left| \frac{d^2\xi}{dt^2} \right| \ll \frac{1}{\tau_p} \left| \frac{d\xi}{dt} \right| \quad (9.2)$$

записывается следующим образом:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{16b\tau_p}{NmR^2} \left( \frac{N}{\pi} (\xi_0 - \xi) - n \right), \quad (9.3)$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{n - n_0}{\tau} + \frac{64d_2^2 N \xi_0}{\hbar^2 \omega_0} I \xi. \quad (9.4)$$

Начальные условия для (9.3), (9.4) имеют вид

$$\xi(t=0) = \xi_0 - \frac{\pi n_0}{N}, \quad n(t=0) = n_0. \quad (9.5)$$

Решая задачу (9.3)–(9.5), получаем

$$\xi = \xi_1 + \frac{\xi_0 - \xi_1 - \pi n_0/N}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}), \quad (9.6)$$

$$n = n_1 - \frac{(\xi_0 - \xi_1)N - \pi n_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \lambda_2 \left( \frac{\lambda_1 m R^2}{16b\tau_p} + \frac{1}{\pi} \right) e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 \left( \frac{\lambda_2 m R^2}{16b\tau_p} + \frac{1}{\pi} \right) e^{\lambda_2 t} \right), \quad (9.7)$$

где

$$\xi_1 = \left( \xi_0 - \frac{\pi n_0}{N} \right) \frac{\hbar^2 \omega_0}{\hbar^2 \omega_0 + 64\pi\tau I \xi_0 d_2^2}, \quad (9.8)$$

$$n_1 = \left( \frac{N \xi_0}{\pi} - n_0 \right) \frac{64\pi\tau I \xi_0 d_2^2}{\hbar^2 \omega_0 + 64\pi\tau I \xi_0 d_2^2}, \quad (9.9)$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{8b\tau_p}{\pi m R^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\pi m R^2}{4b\tau_p \tau} \left( 1 + \frac{64\pi\tau I \xi_0 d_2^2}{\hbar^2 \omega_0} \right)} \right]. \quad (9.10)$$

Учитывая характерные численные значения основных параметров (см. ниже либо численные оценки в конце разд. 8) и ограничиваясь рассмотрением случая  $I \ll \ll 10^{10}$  Вт/см<sup>2</sup>, из (9.10) приближенно находим

$$\lambda_1 = -\frac{16b\tau_p}{\pi m R^2}, \quad (9.11)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\tau} - \frac{64\pi I \xi_0 d_2^2}{\hbar^2 \omega_0}. \quad (9.12)$$

Из (9.11), (9.12) видно, что для характерных численных значений параметров (см. конец разд. 8) имеет место неравенство  $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$ . Поэтому в соответствии с выражением (9.6) характерное время  $\tau_0$  перехода в новую фазу приблизительно определяется соотношением

$$\tau_0 = \frac{1}{|\lambda_2|} = \frac{\hbar^2 \omega_0 \tau}{\hbar^2 \omega_0 + 64\pi I \xi_0 d_2^2 \tau} \quad (9.13)$$

Условие применимости используемого нами приближения (9.2) с учетом выражения (9.6) может быть записано в форме  $\tau_0 \gg \tau_p$ , откуда с использованием соотношения (9.13) находим неравенство, ограничивающее сверху интенсивность  $I$  светового поля:

$$I \ll \frac{\hbar^2 \omega_0}{64\pi \xi_0 d_2^2} \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{1}{\tau} \right). \quad (9.14)$$

Подставляя в (9.14) характерные численные значения параметров для двуокиси ванадия, а именно  $\xi_0 \approx 0.5$  [3, 4],  $\tau \approx 3 \cdot 10^{-11}$  с,  $\tau_p \sim 10^{-13}$  с [38],  $d_2 \sim 10^{-18}$  СГС [45, 47],  $\hbar \omega_0 = 1.17$  эВ [35], получаем условие применимости приближения (9.2):  $I \ll \ll 10^{10}$  Вт/см<sup>2</sup>, которое совпадает с приближением, используемым нами при выводе формул (9.11), (9.12).

В эксперименте [35] при облучении пленки двуокиси ванадия мощным лазерным импульсом интенсивностью  $I \approx 7 \cdot 10^8$  Вт/см<sup>2</sup> наблюдался фотоиндуцированный фазовый переход полупроводник—металл, происходящий за характерное время  $\tau_0 \approx 10^{-12}$  с. Численная оценка по формуле (9.13) дает  $\tau_0 \approx 1.6 \cdot 10^{-12}$  с. Таким образом, теоретическое значение  $\tau_0$ , вычисленное на основе развитой теории, хорошо согласуется с экспериментальными данными работы [35].

## 10. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ НА БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

Исследуем теперь поведение системы Пайерлса при облучении ее монохроматическим световым полем, зависимость интенсивности  $I$  которого от времени имеет вид ступеньки (9.1), на конечном этапе эволюции, когда параметр порядка фазового перехода металл—полупроводник  $\xi$  близок к своему новому устойчивому значению, соответствующему положению динамического равновесия,  $\xi \approx \xi_s(I)$  (см. (8.2)). При этом ограничимся рассмотрением случая интенсивностей  $I < I_c$ , когда конечным состоянием системы является полупроводниковая фаза (8.2), (8.3).

Линеаризованная вблизи стационарного решения  $\xi_s, n_s$ , определяемого (8.2), (8.3), система уравнений (7.4), (7.11) в приближении (9.2) имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{16b\tau_p}{NmR^2} \left[ \frac{N}{\pi} \ln \left| \frac{\xi_0}{e\xi_s} \right| (\xi - \xi_s) - (n - n_s) \right], \quad (10.1)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{128Id_2^2 N \xi_s}{\hbar^2 \omega_0} (\xi - \xi_s) - \frac{n - n_s}{\tau}. \quad (10.2)$$

Решение системы уравнений (10.1), (10.2) может быть записано следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_s \\ n_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp\{\lambda_1 t\} \\ \exp\{\lambda_2 t\} \end{pmatrix}, \quad (10.3)$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{8b\tau_p}{\pi m R^2} \ln \left| \frac{\xi_0}{e\xi_s} \right| - \frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\left( \frac{8b\tau_p}{\pi m R^2} \ln \left| \frac{\xi_0}{e\xi_s} \right| - \frac{1}{2\tau} \right)^2 + \frac{16b\tau_p}{\pi m R^2 \tau} \ln \left| \frac{\xi_0}{e\xi_s} \right| - \frac{2^{11} b \tau_p a_2^2 N \xi_s I}{\hbar^2 \omega_0}}, \quad (10.4)$$

а постоянные коэффициенты матрицы  $a_{ij}$  определяются из (10.1), (10.2) и начальных условий.

Из соотношения (10.4) видно, что при выполнении условия (8.6) (либо эквивалентного ему неравенства (8.8)) решение (10.3) имеет вид процесса, при котором  $\xi$  и  $n$  релаксируют к стационарному состоянию устойчивого динамического равновесия  $\xi_s$ ,  $n_s$ , определяемому (8.2), (8.3). При этом при малых интенсивностях  $I$  светового поля, когда  $\xi_s = \xi_s(I)$  (см. (8.2)) удовлетворяет приближенному неравенству

$$\xi_0 > \xi_s(I) > \xi_c \left( 1 + \sqrt{\frac{\pi m R^2}{2b\tau\tau_p}} \right), \quad (10.5)$$

подкоренное выражение в (10.4) положительно, и, следовательно, при  $t \rightarrow \infty$  асимптотическое поведение  $\xi(t)$  и  $n(t)$  имеет экспоненциальный вид

$$\begin{cases} \xi - \xi_s \propto \exp(-\gamma t), \\ n - n_s \propto \exp(-\gamma t) \end{cases} \quad (10.6)$$

с коэффициентом релаксации  $\gamma = -\lambda_1 > 0$  (10.4) (в (10.3) на больших временах  $t$  основную роль играет экспонента с меньшим коэффициентом затухания).

Неравенство (10.5) для  $\xi_s$  эквивалентно условию, ограничивающему интенсивность  $I$  светового поля сверху:

$$I < I_1, \quad (10.7)$$

где

$$I_1 \equiv I \left( \xi_0 \left( 1 + \sqrt{\frac{\pi m R^2}{2b\tau\tau_p}} \right) \exp \left\{ -1 - \frac{\pi m R^2}{16b\tau\tau_p} \right\} \right), \quad (10.8)$$

а функциональная зависимость  $I(\xi_s)$  определяется выражением (8.2).

Если интенсивность  $I$  светового поля удовлетворяет условию

$$I_1 < I < I_c, \quad (10.9)$$

при котором для  $\xi_s = \xi_s(I)$  (см. (8.2)) выполняется следующее приближенное неравенство:

$$\xi_c < \xi_s(I) < \xi_c \left( 1 + \sqrt{\frac{\pi m R^2}{2b\tau\tau_p}} \right), \quad (10.10)$$

то подкоренное выражение в (10.4) отрицательно, и при больших  $t$  поведение  $\xi(t)$  и  $n(t)$  имеет характер затухающих осцилляций

$$\begin{cases} \xi - \xi_s \propto \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \varphi_1), \\ n - n_s \propto \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \quad (10.11)$$

с циклической частотой

$$\omega = \frac{8b\tau_p}{\pi m R^2} \sqrt{\frac{\pi m R^2}{2b\tau_p} - \ln^2 \left| \frac{\xi_s}{\xi_c} \right|} \quad (10.12)$$

и коэффициентом затухания

$$\gamma = \frac{8b\tau_p}{\pi m R^2} \ln \left| \frac{\xi_s}{\xi_c} \right|. \quad (10.13)$$

Из (10.12), (10.13) видно, что при приближении интенсивности  $I$  к критическому значению  $I_c$  снизу (при этом  $\xi_s \rightarrow \xi_c + 0$ ) частота  $\omega$  (10.12) колебаний параметра порядка фазового перехода металл—полупроводник  $\xi$  и концентрации электрон-дырочных пар  $n$  увеличивается до своего максимального значения  $\omega_m$ :

$$\omega_m = \sqrt{\frac{32b\tau_p}{\pi m R^2 \tau}}, \quad (10.14)$$

а коэффициент затухания  $\gamma$  уменьшается до нуля.

Проведем численные оценки. Взяв характерные для  $\text{VO}_2$  численные значения физических величин, а именно  $b \approx 0.3$  эВ,  $N \approx 10^{23}$  см<sup>-3</sup>,  $\xi_0 \approx 0.5$  [3, 4],  $\tau \approx 3 \cdot 10^{-11}$  с,  $\tau_p \sim 10^{-13}$  с [38],  $d_2 \sim 10^{-18}$  СГС [45, 47],  $\hbar\omega_0 = 1.17$  эВ [35],  $m \approx 8.5 \cdot 10^{-23}$  г,  $R \approx 0.5 \cdot 10^{-8}$  см, из (10.14), (10.13) получаем

$$\begin{aligned} \omega(I = I_1) = 0, \quad \gamma(I = I_1) &\cong \sqrt{\frac{32b\tau_p}{\pi m R^2 \tau}} \approx 3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}, \\ \omega_m = \omega(I = I_c) &\approx 3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}, \quad \gamma(I = I_c) = 0. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Таким образом, вблизи критической точки  $I \approx I_c$  ( $I < I_c$ ) характерное время релаксации  $\gamma^{-1}$  (10.13) системы Пайерлса к положению устойчивого динамического равновесия  $\xi_s \approx \xi_c$  ( $\xi_s > \xi_c$ ) становится аномально большим ( $\gamma^{-1} \rightarrow \infty$  при  $I \rightarrow I_c - 0$ ).

## 11. ОБСУЖДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для экспериментальной проверки решения (8.2), (8.3), описывающего поведение параметра порядка фазового перехода металл—полупроводник  $\xi$  и концентрации электрон-дырочных пар  $n$  в стационарном режиме либо при адиабатически медленном изменении интенсивности светового поля  $I$ , когда характерное время плавного нарастания интенсивности в импульсе существенно превышает характерное время релаксационного процесса  $\tau_0 \sim 10^{-12}$  с (9.13), материал, обладающий пайерлсовской неустойчивостью, желательно брать в виде тонкой пленки, помещенной в прозрачное на частоте излучения лазера вещество с хорошим теплопроводом (например, в сверхтекучий гелий). Это позволит избежать чрезмерного нагрева системы даже при достаточно больших интенсивностях облучения  $I$ , близких к  $I_c$  (см. (8.11)).

При ступенькообразном включении светового поля (9.1) (либо при облучении прямоугольным лазерным импульсом большой длительности) экспериментальная проверка формулы (9.13) для характерного времени  $\tau_0$  фотоиндуцированного перехода в новое состояние динамического равновесия может быть выполнена в обычных условиях. В частности, экспериментальное исследование поведения пленки двуокиси ванадия

на алюминиевой подложке при облучении ее лазерным импульсом с интенсивностью  $I \approx 7 \cdot 10^8$  Вт/см<sup>2</sup> и длительностью  $6 \cdot 10^{-12}$  с проводилось в работе [35]. Было обнаружено, что в случае, когда энергия возбуждающих фотонов  $\hbar\omega_0 = 1.17$  эВ, VO<sub>2</sub> переходит из полупроводникового состояния в металлическое через время  $\tau_0 \sim 10^{-12}$  с после начала импульса. После этого металлическая фаза остается устойчивой на протяжении достаточно длительного времени  $t$  ( $t > 10^{-9}$  с). Если энергия возбуждающих фотонов  $\hbar\omega_0 = 2.34$  эВ, потеря устойчивости полупроводникового состояния двуокиси ванадия имеет место спустя время  $t \sim 10^{-9}$  с после начала облучения.

Для объяснения описанного выше экспериментально наблюдаемого явления проведем численную оценку максимально возможного изменения температуры  $\Delta T$  образца под действием лазерного облучения. Для этого рассмотрим очень тонкую ( $\sim 1$  нм) приповерхностную наиболее сильно нагреваемую область пленки в пренебрежении процессами теплопередачи и в предположении (достаточно условном на малых временах  $t < 10^{-12}$  с), что вся поглощаемая энергия излучения успевает переходить в тепло. Используя приближенную формулу

$$\Delta T = \frac{\alpha I \Delta t}{c \rho} \quad (11.1)$$

(где  $\alpha$ ,  $c$ ,  $\rho$  — соответственно, коэффициент оптического поглощения, удельная теплоемкость и плотность материала пленки,  $\Delta t$  — время облучения) и взяв характерные для VO<sub>2</sub> численные значения параметров  $\alpha \sim 10^5$  см<sup>-1</sup> [4],  $c \sim 1$  Дж/гК,  $\rho \approx 10$  г/см<sup>3</sup>,  $\Delta t = \tau_0 \sim 10^{-12}$  с получаем  $\Delta T \approx 10$  К. Учитывая, что температура термодинамически равновесного фазового перехода полупроводник—металл в двуокиси ванадия  $T_0 = 340$  К, приходим к выводу, что при комнатной температуре фотоиндуцированный переход в металлическую фазу, происходящий за время  $\tau_0 \sim 10^{-12}$  с, не может быть объяснен с точки зрения теплового механизма.

Вместе с тем устойчивость металлической фазы двуокиси ванадия после прохождения всего импульса ( $\Delta t \sim 6 \cdot 10^{-12}$  с), по-видимому, связана с достаточно высокой температурой  $T$  пленки ( $T > T_0 = 340$  К), поскольку в соответствии с формулой (11.1) в этом случае  $\Delta T \approx 60$  К.

Отметим, что наблюдаемая при энергии возбуждающих фотонов  $\hbar\omega_0 = 2.34$  эВ задержка фотоиндуцированного фазового перехода полупроводник—металл на время  $t \sim 10^{-9}$  с с нашей точки зрения обусловлена большим временем жизни  $\tau_\pi$  неравновесных электронов и дырок в  $\pi^*$ -зоне [35, 4], что замедляет на соответствующее время процесс нагрева пленки. В отличие от авторов работы [35], мы предполагаем, что в этом случае фотоиндуцированный переход в металлическую фазу обусловлен чисто тепловым механизмом, поскольку  $\tau_\pi \sim 10^{-9}$  с  $\gg \tau \sim 10^{-11}$  с [38], и поэтому концентрация неравновесных электрон-дырочных пар в  $d$ -зоне пренебрежимо мала ( $n \ll n_c$ ).

Интерпретацию результатов эксперимента [35] по фотоиндуцированному фазовому переходу полупроводник—металл, протекающему за характерное время  $\tau_0 \sim 10^{-12}$  с, проведем с точки зрения развитой в настоящей работе теории электрон-фононной неустойчивости полупроводниковой фазы системы Пайерлса. Прежде всего отметим, что интенсивность лазерного импульса в эксперименте [35]  $I \approx 7 \cdot 10^8$  Вт/см<sup>2</sup> превышает критическое значение  $I_c$  (8.11) и, следовательно, как показано в разд. 8–10, должен иметь место переход в металлическую фазу, что и наблюдалось в работе [35]. Экспериментально измеренное время перехода  $\tau_0 \sim 10^{-12}$  с близко к вычисленному в рамках настоящей теории (см. численную оценку к формуле (9.13) в конце разд. 9).

## 12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе в предположении постоянства характерных времен межзонной электронной релаксации  $\tau$  и фононной релаксации  $\tau_p$ , которые значительно превышают время внутризонной электронной релаксации  $\tau_e$ , исследована динамика нестационарного термодинамически неравновесного фотоиндуцированного фазового перехода в одномерной системе с пайерлсовской неустойчивостью.

Показано, что при облучении световым полем с интенсивностью  $I < I_c$  (8.9) пайерлсовский полупроводник переходит в новое полупроводниковое состояние с меньшей шириной запрещенной зоны электронного спектра. Данный переход представляет собой аperiodический релаксационный процесс (для случая  $I < I_1$  (10.8)) либо имеет вид затухающих осцилляций (для случая  $I_1 < I < I_c$ ).

При интенсивностях облучения  $I > I_c$  система переходит в металлическую фазу, и медленная (с характерным временем  $\tau \sim 10^{-11}$  с) межзонная релаксация электронов становится быстрой (с характерным временем  $\tau \sim 10^{-14}$  с) внутризонной релаксацией. Если при этом температура образца повышается выше критической температуры  $T_0$  термодинамически равновесного фазового перехода металл—полупроводник, то металлическая фаза оказывается устойчивой. В противном случае вопрос об устойчивости металлического состояния требует дополнительного анализа с учетом отклонения распределении электронов по энергиям внутри зоны проводимости от квазифермиевского и в настоящей работе не рассматривается.

## Литература

1. Л. Н. Булаевский, УФН 115, 263 (1975).
2. А. Л. Семенов, ФТТ 39, 925 (1997).
3. В. И. Емельянов, Н. Л. Левшин, А. Л. Семенов, Вестн. Моск. ун-та, сер. 3, физика, астрономия 30, 52 (1989).
4. А. А. Бугаев, Б. П. Захарченя, Ф. А. Чудновский, *Фазовый переход металл—полупроводник и его применение*, Наука, Ленинград (1979), с. 28.
5. В. И. Емельянов, Н. Л. Левшин, А. Л. Семенов, ФТТ 31, 261 (1989).
6. В. И. Емельянов, Н. Л. Левшин, А. Л. Семенов, Вестн. Моск. ун-та, сер. 3, физика, астрономия 31, 99 (1990).
7. А. Л. Семенов, ФТТ 36, 1974 (1994).
8. А. Л. Семенов, С. В. Сухов, Известия вузов. Физика Вып. 6, 120 (1996).
9. И. В. Криве, А. С. Рожавский, ЖЭТФ 81, 1811 (1981).
10. В. И. Емельянов, Н. Л. Левшин, А. Л. Семенов, Вестн. Моск. ун-та, сер. 3, физика, астрономия 29, 98 (1988).
11. В. И. Емельянов, Н. Л. Левшин, С. Ю. Поройков, А. Л. Семенов, Вестн. Моск. ун-та, сер. 3, физика, астрономия 32, 63 (1991).
12. В. И. Емельянов, А. Л. Семенов, ФТТ 32, 3083 (1990).
13. С. Н. Артеменко, А. Ф. Волков, С. В. Зайцев-Зотов, УФН 166, 434 (1996).
14. G. Gruner, Rev. Mod. Phys. 60, 1129 (1988).
15. С. А. Бразовский, И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ 71, 2338 (1976).
16. Л. П. Горьков, Е. Н. Долгов, ЖЭТФ 77, 396 (1979).
17. С. Н. Артеменко, А. Ф. Волков, ЖЭТФ 80, 2018 (1981).
18. С. Н. Артеменко, А. Ф. Волков, ЖЭТФ 81, 1872 (1981).

19. K. F. Berggren, V. A. Huberman, Phys. Rev. B **18**, 3369 (1978).
20. В. Ф. Елесин, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, ЖЭТФ **71**, 714 (1976).
21. В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, С. Н. Молотков, Микроэлектроника **12**, 499 (1983).
22. А. Л. Семенов, ФТТ **40**, 2113 (1998).
23. А. Л. Семенов, ЖЭТФ **114**, 1407 (1998).
24. А. Л. Семенов, ЖЭТФ **111**, 1398 (1997).
25. А. Л. Семенов, ЖЭТФ **111**, 2147 (1997).
26. Х. Гиббс, *Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света*, Мир, Москва (1988), с. 108.
27. Ю. В. Копаев, В. В. Меняйленко, С. Н. Молотков, ЖЭТФ **89**, 1404 (1985).
28. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **39**, 547 (1984).
29. В. Б. Стопачинский, И. М. Суслов, ЖЭТФ **91**, 314 (1986).
30. В. И. Емельянов, И. Ф. Уварова, ЖЭТФ **94**, 255 (1988).
31. V. I. Emel'yanov and D. V. Babak, Laser Physics **7**, 514 (1997).
32. Р. Ф. Мамин, ЖЭТФ **111**, 1465 (1997).
33. С. А. Ахманов, В. И. Емельянов, Н. И. Коротеев, В. Н. Семиногов, УФН **147**, 675 (1985).
34. Э. Шель, *Самоорганизация в полупроводниках*, Мир, Москва (1991).
35. А. А. Бугаев, В. В. Гудялис, Б. П. Захарченя и др., Письма в ЖЭТФ **34**, 452 (1981).
36. О. Маделунг, *Физика твердого тела: локализованные состояния*, Наука, Москва (1985), с. 144.
37. Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, Москва (1984), с. 282.
38. Н. Р. Белашенков, В. Б. Карасев, А. А. Солунин и др., ФТТ **36**, 2475 (1994).
39. В. Л. Бонч-Бруевич, С. Г. Калашников, *Физика полупроводников*, Наука, Москва (1977), с. 255.
40. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва, (1979), с. 342.
41. Н. Н. Боголюбов (мл.), Б. И. Садовников, А. С. Шумовский, *Математические методы статистической механики модельных систем*, Наука, Москва (1989), с. 180.
42. А. И. Ахнезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, Москва (1977), с. 227.
43. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978), с. 65.
44. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику*, Наука, Москва (1981), с. 42.
45. Д. Н. Клышко, *Физические основы квантовой электроники*, Наука, Москва (1986), с. 22.
46. А. С. Давыдов, *Теория твердого тела*, Наука, Москва (1976), с. 296.
47. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике: Сверхизлучение. Бистабильность. Фазовые переходы*, Наука, Москва (1988), с. 256.
48. Ю. Е. Кузовлев, Т. К. Соболева, А. Э. Филипов, ЖЭТФ **103**, 1742 (1993).