

## МЕХАНИЗМ УСКОРЕНИЯ ФЕРМИ В РАССЕЙВАЮЩИХ БИЛЬЯРДАХ С ВОЗМУЩАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

А. Ю. Лоскутов\*, А. Б. Рябов, Л. Г. Акиншин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119899, Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 февраля 1999 г.

Работа посвящена исследованию проблемы ускорения Ферми, возникающем в рассеивающих бильярдах типа газа Лоренца, граница которых изменяется со временем по некоторому закону. Рассмотрены два случая колебаний границы: стохастический, когда граница возмущается по случайному закону, и регулярный, что соответствует изменению по гармоническому закону. Аналитически показано, что в таких бильярдах наблюдается ускорение Ферми. Исследованы зависимости первого и второго моментов приращения скорости от скорости бильярдной частицы, а также средней скорости ансамбля частиц от времени и от числа столкновений. Получены распределения частиц по скоростям. Проведено сопоставление аналитических и численных результатов.

PACS: 05.20, 05.45

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Бильярдом называется динамическая система, отвечающая движению точечной частицы внутри некоторой области  $Q$  с кусочно-гладкой границей  $\partial Q$  при условии отражения от нее по закону «угол падения равен углу отражения». В зависимости от различных конфигураций границы бильярда движение бильярдной частицы (шара) может быть регулярным, эргодическим или перемешивающим. Рассеивающим бильярдом [1] называется система с границей  $\partial Q$  выпуклой внутрь области  $Q$ . Хорошо известно, что такой бильярд обладает перемешиванием и динамика бильярдной частицы в нем хаотична.

Если множество  $\partial Q$  не меняется со временем, то такие системы называются бильярдами с постоянной (неподвижной) границей, если же  $\partial Q = \partial Q(t)$ , — то бильярдами с возмущаемой (подвижной) границей. Бильярды с неподвижной границей сравнительно хорошо изучены (см. [1–7] и приведенные там ссылки). В то же время работы, посвященные системам, отвечающим бильярдам с возмущаемыми границами, весьма немногочисленны (см., например, [7–11]), хотя их исследование представляет большой интерес как для решения некоторых вопросов статистической физики, так и с точки зрения существования неограниченного роста скорости шара, восходящей к проблеме так называемого ускорения Ферми [12, 13].

Ускорением Ферми называется явление неограниченного разгона частиц различной природы вследствие их столкновения с движущимися массивными рассеивателями.

\*E-mail: loskutov@moldyn.phys.msu.su

Впервые механизм такого ускорения был предложен Ферми [12] для объяснения происхождения космических частиц высоких энергий. Позже были разработаны различные модели (см., например, [14–21]), в той или иной степени описывающие происхождение этого явления. Так, Улам [14] показал, что если частица движется между осциллирующей и неподвижной стенками и фаза колебаний в момент столкновения является случайной величиной, то частица может приобретать неограниченную скорость. Более полное исследование модели Улама было проведено Либерманом и Лихтенбергом [16], которые показали, что в случае гладкой зависимости скорости стенки от времени в области больших скоростей стохастические слои изолированы друг от друга инвариантными кривыми. Именно они и ограничивают набор энергии частицей. Если такая зависимость недостаточно гладкая, то инвариантных кривых не существует и возможен неограниченный рост скорости частицы. Более поздние работы (см. [16, 19–21], и цитированную там литературу), в которых рассматривалась модель Улама в различных ее модификациях, прояснили некоторую связь между законом колебаний стенок (т. е. гладкостью зависимости скорости стенок от времени и степени случайности их колебаний) и наличием ускорения Ферми.

В хаотических бильярдах даже в случае гладкой зависимости скорости границы от времени угол подлета частицы к ней можно рассматривать как случайную величину. Следовательно, проекция скорости частицы на нормаль к границе в точке соударения (именно она изменяется при отражении, а тангенциальная компонента остается постоянной) будет стохастической величиной. Очевидно, в этом случае изменение скорости будет носить случайный характер.

В данной работе исследуется проблема возникновения ускорения Ферми на примере обобщенного бильярда — газа Лоренца с открытым горизонтом с возмущаемой границей. При этом изучаются два разных случая, соответствующие стохастическим и регулярным (гармоническим) колебаниям границы. Отметим, что во всех известных авторам публикациях проблема ускорения Ферми рассматривалась на примере интегрируемых систем или систем, близких к интегрируемым. По-видимому, в этом контексте исследование хаотических бильярдов с возмущаемыми границами в данной работе проведено впервые.

Статья состоит из трех основных частей. Первая часть посвящена основным понятиям и выводу отображений, описывающих динамику бильярда. Вторая часть содержит численное и аналитическое исследование возможности ускорения Ферми. В третьей части приведены численно полученные зависимости скорости частиц от времени и числа столкновений и проведено сопоставление с аналитическими результатами.

## 2. ГАЗ ЛОРЕНЦА

Данный раздел посвящен основным понятиям и выводу отображений, описывающих динамику двумерного газа Лоренца.

Рассмотрим некоторую плоскую область  $Q$  с кусочно-гладкой границей  $\partial Q$ . Рассеивающим бильярдом [1, 4] называется система, состоящая из нейтральных  $\partial Q_i^0$  и рассеивающих  $\partial Q_i^+$  (т. е. выпуклых внутрь области  $Q$ ) компонент границы  $\partial Q$ . Одной из разновидностей таких бильярдов является система, заданная в неограниченной области  $D$ , состоящая из множества круглых бесконечно тяжелых рассеивателей  $B_i$  с границами  $\partial Q_i$  и радиусами  $R_i$ , расположенных в узлах бесконечной периодической ре-

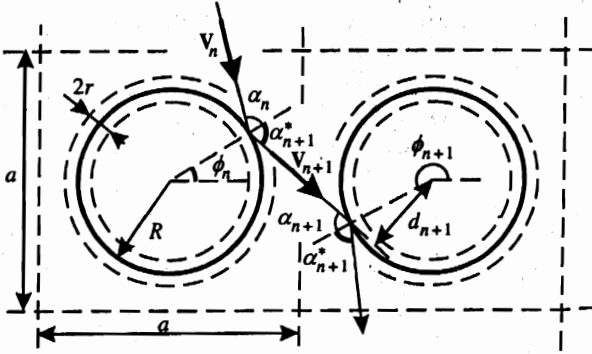


Рис. 1. Модель газа Лоренца. Рассеиватели (круги радиуса  $R$ ) расположены в узлах периодической решетки с периодом  $a$

сетки с периодом  $a$  (см. рис. 1). При условии, что  $B_i$  неподвижны, бильярд в области  $Q = D \setminus \bigcup_{i=1}^r B_i$  называется газом Лоренца. Частица движется между рассеивателями, отражаясь по закону «угол падения равен углу отражения». Для  $\partial Q = \text{const}$  такой бильярд был достаточно подробно изучен (см., например, [1, 3, 4, 6] и приведенные там ссылки).

Отношение  $(a/R)^2$  является одним из основных параметров газа Лоренца. В зависимости от его значения различают газ Лоренца с ограниченным горизонтом ( $(a/R)^2 < 4$ ), с открытым горизонтом ( $4 < (a/R)^2 < 8$ ) и бесконечным горизонтом ( $(a/R)^2 > 8$ ). В первом случае движение частицы ограничено одной ячейкой, во втором и третьем случаях ей доступно все пространство. Для бесконечного горизонта из-за увеличения вероятности длинных перелетов изменяются статистические свойства бильярда. В частности, замедляется скорость убывания корреляций и не сходится среднее значение длины свободного пробега [3, 4, 22–24]. В то же время для газа Лоренца с ограниченным и открытым горизонтами наблюдается экспоненциальный спад корреляций. Средняя длина свободного пробега определяется как  $l = \pi A/P$ , где  $A$  — доступная частице область бильярда, а  $P$  — периметр рассеивателей. Для системы с открытым горизонтом  $l = (a^2 - \pi R^2)/2R$ , а для бильярда с бесконечным горизонтом значение  $l$  не ограничено сверху.

Предположим, что радиусы рассеивателей  $B_i$  газа Лоренца возмущаются по некоторому закону, т. е. все границы  $\partial Q_i$  совершают малые колебания в нормальном направлении. В работе рассматриваются два различных случая: периодические (и синфазные) осцилляции и стохастические изменения радиусов рассеивателей. Первый случай соответствует ситуации, когда все границы осциллируют по одному и тому же закону и в одной фазе. Второй случай отвечает колебаниям множества границ рассеивателей с равномерно распределенной случайной начальной фазой.

### 2.1. Газ Лоренца с неподвижной границей

Как известно, в качестве канонических переменных для бильярдов с невозмущенными границами можно выбрать азимутальный угол  $\phi$  и угол падения  $\alpha$  между внутренней нормалью к поверхности и вектором скорости частицы перед соударением. Введем угол отражения  $\alpha^*$  между внешней нормалью и вектором скорости после соударения (см.

рис. 1). Очевидно, что  $\phi \in [0, 2\pi]$ , а углы  $\alpha$  и  $\alpha^*$  изменяются в интервале  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Для описания динамики невозмущенного бильярда необходимо получить отображение  $(\alpha_n, \phi_n) \rightarrow (\alpha_{n+1}, \phi_{n+1})$ , переводящее значения переменных  $(\alpha, \phi)$  в момент перед  $n$ -м столкновением с  $\partial Q$  в их значения в момент перед  $(n + 1)$ -м столкновением. Из геометрических соображений (см. рис. 1) понятно, что

$$\phi_n + \alpha_n^* + \pi = \phi_{n+1} + \alpha_{n+1}. \tag{1}$$

Кроме того,  $\alpha_n^* = -\alpha_n$ , так как углы отсчитываются в противоположные стороны.

Введем систему координат с центром в круге, на котором произошло очередное рассеяние и определим уравнение прямой, по которой будет двигаться частица после столкновения. Тогда нетрудно найти расстояние, на котором частица пройдет мимо другого центра, отстоящего на  $p$  ячеек по горизонтали и  $q$  ячеек по вертикали:

$$d_{n+1} = a [p \sin(\phi_n + \alpha_n^*) - q \cos(\phi_n + \alpha_n^*)] - R \sin \alpha_n^*. \tag{2}$$

Значение  $p$  считается положительным, если частица движется вправо, и отрицательным в противном случае; соответственно,  $q$  положительно, если частица движется вверх, и отрицательно, если вниз. Величины  $p$  и  $q$  определяются из условия рассеяния, т. е. как минимальные по модулю целые числа, при которых выполняется  $|d_{n+1}| \leq R$ . Вычислив прицельный параметр  $d_{n+1}$ , легко найти угол, под которым произойдет столкновение со следующим рассеивателем:

$$\alpha_{n+1} = \arcsin \frac{d_{n+1}}{R}. \tag{3}$$

Якобиан полученного отображения (см. (1)–(3)) равен

$$\frac{\partial(\phi_{n+1}, \alpha_{n+1})}{\partial(\phi_n, \alpha_n)} = \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha_{n+1}}.$$

Таким образом, отображение сохраняет фазовый объем  $\cos \alpha d\alpha d\phi$ . Отсюда, в частности, следует, что если рассматриваемый бильярд является эргодическим, то величина  $\alpha_n$  будет распределена по закону

$$\rho_\alpha(\alpha) = \frac{1}{2} \cos \alpha, \tag{4}$$

где  $1/2$  — нормировочный множитель.

### 2.2. Газ Лоренца с осциллирующими границами рассеивателей

Теперь нетрудно получить отображение, описывающее динамику бильярда с возмущаемой границей в предположении, что амплитуда колебаний границы рассеивателя много меньше его радиуса, т. е. геометрическими изменениями границы можно пренебречь.

Допустим, что рассеивающая компонента  $\partial Q^+$  границы  $\partial Q$  сжимается и расширяется (см. рис. 1), так что ее радиус меняется по закону

$$R = R(t) = R + r(t), \quad \text{где} \quad \max |r(t)| \ll R.$$

Тогда скорость границы будет зависеть от времени как  $u(t) = \dot{r}(t)$ . Далее для определенности будем считать, что  $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$ , где  $u_0 = \omega r_0$ . В этом случае помимо величин  $\alpha$  и  $\phi$  для описания поведения системы необходимо ввести еще две динамические переменные: скорость частицы  $v$  и время столкновения  $t$ . Учитывая, что при отражении от рассеивателя меняется только нормальная (радиальная) компонента скорости, а тангенциальная остается неизменной, получим отображение для модуля скорости частицы после столкновения:

$$v_{n+1} = \sqrt{v_n^2 - 4u_n v_n \cos \alpha_n + 4u_n^2}. \quad (5)$$

Здесь  $u_n \equiv u_0 \cos \omega t_n$  — скорость границы рассеивателя в момент  $n$ -го столкновения. В свою очередь, связь между углом падения и углом отражения можно записать в виде

$$\alpha_n^* = -\arcsin\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} \sin \alpha_n\right).$$

Теперь, вычисляя расстояние между последовательными соударениями, нетрудно получить отображение для момента столкновения  $t_n$ :

$$t_{n+1} = t_n + \frac{l_{n+1}}{v_{n+1}}, \quad (6)$$

$$l_{n+1} = \sqrt{\left[R(\cos \phi_{n+1} - \cos \phi_n) - pa\right]^2 + \left[R(\sin \phi_{n+1} - \sin \phi_n) - qa\right]^2}.$$

Здесь  $l_n$  — длина свободного пробега. В предположении  $r \ll R$  отображения для переменной  $\phi$  и прицельного параметра  $d$  останутся теми же, что и для невозмущенного бильярда (см. (1) и (2)).

### 3. УСКОРЕНИЕ ФЕРМИ

Во время соударений с возмущаемой границей величина скорости бильярдного шара постоянно меняется. Как показывают исследования [11], эти изменения скорости носят случайный характер. Поэтому далее рассмотрим ансамбль частиц и найдем распределение частиц по скоростям и среднюю скорость в зависимости от времени  $t$  и числа столкновений  $n$  (число столкновений и время не пропорциональны друг другу, так как за одно и то же время «быстрая» частица испытывает больше соударений, чем «медленная»). В данном разделе сначала обсуждается вопрос о среднем изменении скорости в бильярдах произвольной формы с возмущаемыми границами, затем исследуется проблема ускорения Ферми в газе Лоренца с хаотически и регулярно осциллирующими рассеивателями.

#### 3.1. Среднее изменение скорости в общем случае

Рассмотрим два последовательных столкновения шара со стенкой в бильярде произвольной конфигурации (рис. 2). Обозначим через  $\alpha_0$  угол падения частицы при первом соударении, а через  $\alpha_1$  — при втором (они вводятся точно так же, как в п. 2.1). Кроме того, пусть  $v_0$  и  $v_1$  обозначают модули скоростей шара соответственно перед первым и перед вторым столкновениями. Для проекций скоростей используем следующие индексы: верхние индексы  $\tau$  и  $n$  обозначают соответственно тангенциальную и нормальную

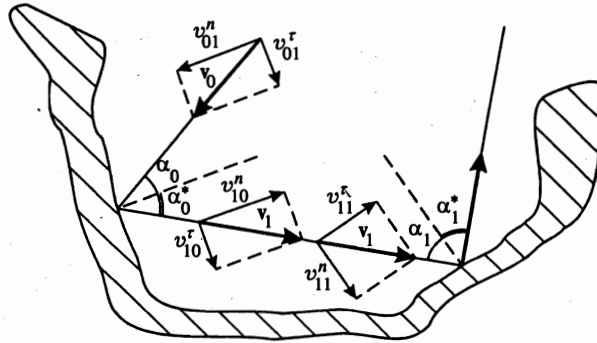


Рис. 2. Бильярд произвольной конфигурации

проекции, первый нижний индекс соответствует индексу скорости, второй полагается равным единице, если рассматриваются проекции перед столкновением, и нулю, если после него. Таким образом,  $v_{10}^r$  будет обозначать тангенциальную проекцию скорости  $v_1$  в точке первого столкновения, а  $v_{11}^r$  — тангенциальную проекцию в точке второго столкновения; в общем случае они не равны (см. рис. 2). Пусть  $u(t)$  — скорость движения границы. Очевидно, что должно выполняться соотношение

$$\langle u(t) \rangle_t = 0, \tag{7}$$

которое является следствием условия, что граница в среднем остается на месте.

Рассмотрим одно столкновение частицы со стенкой. Тангенциальная составляющая скорости при этом, очевидно, останется постоянной. Изменение же нормальной составляющей нетрудно найти, переходя в систему отсчета, связанную со стенкой. Таким образом, для первого столкновения можно записать

$$\begin{aligned} v_{10}^n &= -v_{01}^n + 2u(t_n) = -v_0 \cos \alpha_0 + 2u(t_n), \\ v_{10}^r &= v_{01}^r = v_0 \sin \alpha_0, \\ v_1 &= \sqrt{v_0^2 - 4v_{01}^n u(t_n) + 4u^2(t_n)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Легко видеть, что если рассматривать только одно столкновение, то  $\langle \Delta v_{10}^r \rangle = 0$  и  $\langle \Delta v_{10}^n \rangle = 0$  для бильярда любой конфигурации. Кроме того, изменение скорости связано только с изменением ее нормальной компоненты, поскольку тангенциальная составляющая сохраняется при отражении. Следовательно, средний прирост скорости будет зависеть от значения нормальной компоненты при следующем столкновении. Однако в общем случае можно говорить лишь о среднем значении нормальной компоненты, т. е.

$$\langle v_{11}^n \rangle = \langle v_1 \cos \alpha_1 \rangle = \left\langle \sqrt{v_0^2 - 4v_{01}^n u(t) \cos \alpha_0 + 4u^2(t_n)} \cos \alpha_1 \right\rangle, \tag{9}$$

где усреднение проводится по углам  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  и времени  $t$ .

Соотношение (9) уместно проиллюстрировать двумя примерами.

**Модель Улама** (см. [14, 16–21]). На расстоянии  $L$  друг от друга расположены две параллельные тяжелые стенки, между которыми движется шарик. Одна из стенок совершает периодические колебания с амплитудой  $\delta$ , такие что  $L \gg \delta$ . Конкретная зависимость колебаний от времени для нашего анализа не существенна, важно лишь, чтобы скорость движения стенки удовлетворяла соотношению (7). Поскольку тангенциальная составляющая скорости в этой модели постоянна,  $v^T = \text{const}$ , то скорость и угол падения оказываются связанными соотношением

$$v \sin \alpha = v^T = \text{const}. \quad (10)$$

В свою очередь, нормальная проекция скорости после первого столкновения,  $v_{10}^n$ , и перед вторым,  $v_{11}^n$ , равны по модулю. Следовательно,

$$\langle v_{11}^n \rangle = \langle v_{10}^n \rangle = \langle -v_{01}^n + 2u(t_n) \rangle = v_{01}^n.$$

Таким образом, в среднем ускорения в этой модели нет.

**Газ Лоренца.** Легко видеть, что вследствие сильных перемешивающих свойств углы  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  независимы друг от друга, а значит

$$\langle v_{11}^n \rangle = \langle \cos \alpha_1 v_1 \rangle_{\alpha_0, \alpha_1, t} = \langle \cos \alpha_1 \rangle_{\alpha_1} \langle v_1 \rangle_{\alpha_0, t}.$$

Следовательно, колебания (увеличение и уменьшение) скорости при соударениях связаны с изменением ее модуля, а не с колебаниями нормальной проекции, как это имеет место в предыдущем случае. Как будет показано ниже, величина  $\langle v_n \rangle$  растет с увеличением числа  $n$ , и, таким образом, можно говорить о наличии ускорения Ферми в газе Лоренца.

По-видимому, это утверждение можно распространить и на другие системы, в которых между углом падения и скоростью нет такой однозначной связи (10) как в модели Улама. Одним из промежуточных звеньев между моделью Улама и рассеивающим бильярдом является бильярд типа «стадион», проблема ускорения Ферми для которого численно исследовалась в работе [11].

### 3.2. Стохастически возмущаемая граница рассеивателей

Пусть скорость границы рассеивателя, с которым происходит  $n$ -е столкновение, равна

$$u_n = u_0 \cos \varphi_n, \quad (11)$$

где  $u_0$  — амплитудное значение скорости колебания границы, а множество  $\{\varphi_n\}$  есть множество некоррелированных между собой случайных величин, равномерно распределенных в интервале  $[0, 2\pi)$ . Найдем функцию распределения частиц по скоростям и зависимость средней скорости ансамбля частиц от числа соударений  $n$  и времени  $t$ . В случае малых скоростей частицы ( $v \ll u_0$ ) в выражении для скорости (5) основную роль играет последний член и, следовательно,

$$v_{n+1} \approx 2|u(t_n)|.$$

Если колебания границы заданы в соответствии с выражением (11), то

$$\langle v_{n+1} \rangle \approx 2 \langle |u(t_n)| \rangle_t = 4 \frac{u_0}{\pi}.$$

Таким образом, уже после первого столкновения средняя скорость становится больше величины  $u_0$ .

Теперь найдем изменение скорости в случае  $v \gg u_0$ . Раскладывая (5) в ряд Тейлора по параметру  $u/v$ , получим выражение для изменения скорости:

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = -2u_n \cos \alpha_n + 2 \frac{u_n^2}{v_n} \sin^2 \alpha_n + v_n O \left( \left( \frac{u_n}{v_n} \right)^3 \right), \quad (12)$$

где  $u_n$  — скорость границы рассеивателя при  $n$ -ом столкновении.

Используя соотношение (4) и условие равномерного распределения по фазе колебаний в момент соударения, найдем  $\langle \Delta v_n \rangle$  и  $\langle (\Delta v_n)^2 \rangle$ :

$$\begin{aligned} \mu_s &\equiv \langle \Delta v_n \rangle = \frac{M_s}{v}, \\ \sigma_s^2 &\equiv \langle (\Delta v_n)^2 \rangle = \frac{4}{3} u_0^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь для простоты дальнейших выкладок введена величина  $M_s \equiv u_0^2/3$ ; индекс  $s$  обозначает стохастический случай. При подсчете среднего (см. (12)) ненулевой вклад дает только второе слагаемое, а при вычислении дисперсии достаточно учесть вклад, связанный с первым слагаемым.

При достаточно больших  $n$  от первого уравнения системы (13) можно перейти к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial v(n)}{\partial n} = \frac{M_s}{v(n)}. \quad (14)$$

Его решение с начальным условием  $v(0) = v_0$  дает зависимость наиболее вероятной скорости от числа соударений:

$$v(n) = \sqrt{2M_s n + v_0^2}. \quad (15)$$

Поскольку скорость частиц представляется в виде суммы случайных независимых величин  $\Delta v_n$  с известным средним и дисперсией, то на основании центральной предельной теоремы Ляпунова можно утверждать, что плотность распределения случайной величины  $v_n = v_0 + \sum_{i=1}^n \Delta v_i$  будет стремиться к нормальной со средним  $v(n)$  и дисперсией  $n\sigma_s^2$ . Таким образом, распределение частиц по скоростям имеет вид расплывающегося гауссовского пакета. Максимум распределения дается наиболее вероятной скоростью  $v(n)$ , которая растет как корень из  $n$ .

Приведенные рассуждения верны только в случае достаточно больших скоростей частицы ( $v \gg u_0$ ). Чтобы описать распределение при малых скоростях, введем еще одно условие — отсутствие потока частиц в область отрицательных скоростей:  $(v \partial \rho / \partial v)_{v=0} = 0$ . Хорошо известно, что удовлетворяющее этому условию гауссовское распределение имеет вид

$$\rho(v, n) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi n}} \left[ \exp \left( -\frac{[v - v(n)]^2}{2\sigma_s^2 n} \right) + \exp \left( -\frac{[v + v(n)]^2}{2\sigma_s^2 n} \right) \right]. \quad (16)$$



Это позволяет найти среднюю скорость ансамбля частиц в зависимости от числа столкновений:

$$V(n) = \sigma_s \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \exp\left(-\frac{v^2(n)}{2\sigma_s^2 n}\right) + v(n) \Phi\left(\frac{v(n)}{\sigma_s \sqrt{2n}}\right), \quad (17)$$

где  $\Phi(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x \exp(-x^2) dx$  — известный интеграл ошибок. Здесь и далее буквой  $V$  обозначена средняя скорость ансамбля частиц. Подставляя все значения и раскладывая в ряд выражение для скорости, можно найти, что

$$V(n) = C\sqrt{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (18)$$

где постоянная  $C = \sqrt{2} [\sigma_s \exp(-M_s/\sigma_s^2)/\sqrt{\pi} + \Phi(\sqrt{M_s}/\sigma_s)\sqrt{M_s}] \approx 1.143u_0$ .

Таким образом, соотношения (16) и (18) дают распределение по скоростям и среднюю скорость ансамбля частиц в зависимости от числа столкновений.

Для нахождения средней скорости частиц в зависимости от времени воспользуемся уравнением Фоккера—Планка:

$$\frac{\partial \rho(v, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v} (A\rho(v, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (B\rho(v, t)),$$

где коэффициенты  $A$  и  $B$  имеют следующий вид:

$$A \equiv \left\langle \frac{\Delta v}{\tau} \right\rangle = \frac{M_s}{l}, \quad B \equiv \left\langle \frac{\Delta v^2}{\tau} \right\rangle = \frac{\sigma_s^2 v}{l}.$$

Здесь среднее время между столкновениями  $\tau = l/v$ ,  $l$  — средняя длина свободного пробега, а  $\Delta v$  и  $\Delta v^2$  взяты из уравнений (13). Теперь, подставляя полученные коэффициенты в уравнение, найдем

$$\frac{\partial \rho(v, t)}{\partial t} = -\frac{M_s}{l} \frac{\partial}{\partial v} \rho(v, t) + \frac{1}{2} \frac{\sigma_s^2}{l} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (v\rho(v, t)). \quad (19)$$

Если параметры  $M_s$  и  $\sigma_s$  заданы в соответствии с выражениями (13), то решение этого уравнения при скоростях частиц много больших начальной скорости, т. е. через достаточно большой интервал времени, будет стремиться к

$$\rho(v, t) = \frac{1}{\sqrt{2tA\pi v}} \exp\left(-\frac{v}{2tA}\right),$$

где  $A = M_s/l$ . Используя его, получаем среднюю скорость частиц:

$$V(t) = \frac{M_s}{l} t + v_0 = \frac{1}{3} \frac{u_0^2}{l} t + v_0. \quad (20)$$

Таким образом, в исследуемой системе наблюдается ускорение Ферми, причем скорость растет линейно со временем.

### 3.3. Периодически возмущаемые границы рассеивателей

Пусть все границы рассеивателей сжимаются и расширяются по некоторому периодическому закону и в одной и той же фазе. Тогда в течение одной половины периода скорость частицы при столкновениях будет увеличиваться, а в течение другой — уменьшаться. При достаточно больших скоростях время свободного пробега  $\tau_s$  становится меньше периода колебаний  $T$  радиусов рассеивателей. Это приводит к корреляциям изменений скорости частицы, так что ее последовательные приращения (12) уже нельзя считать независимыми.

В этом пункте представлены результаты численных расчетов дисперсии и среднего приращения скорости, а также оценки скорости спада корреляционной функции  $R(m) = \langle \Delta v_n \Delta v_{n+m} \rangle$ . Из них, в частности, следует, что наличие корреляций может приводить к увеличению первого и второго моментов. Расчеты проводились на модели газа Лоренца со следующими параметрами: радиус рассеивателей  $R = 0.4$ ; расстояние между центрами  $a = 1$  (таким образом, основной параметр модели  $(a/R)^2 = 6.25$ ); амплитудное значение скорости колебаний рассеивателей  $u_0 = 0.01$ ; частота колебаний  $\omega = 1$ .

Из анализа, проведенного в предыдущем пункте, вытекает, что при больших скоростях частицы  $\langle \Delta v \rangle \sim 1/v$ . Поэтому для исследования и графического представления более удобной оказывается величина  $M \equiv \langle \Delta v \rangle v$ . На рис. 3 представлены графики зависимости величины  $M$  от скорости частицы для стохастических (ломаная 1) и периодических (ломаная 2) колебаний границы. Как видно из графика, в случае стохастических колебаний величина  $M_s \approx u_0^2/3$ , что совпадает с результатами предыдущего пункта. В случае регулярных колебаний  $M_r$  сначала растет, затем, по-видимому, выходит на константу  $M_r^{max} = (1.15 \pm 0.10)u_0^2$  при  $v \geq 15$ , что при данной геометрии бильярда соответствует в среднем  $n \geq 150$  столкновениям частицы с границей в течение одного

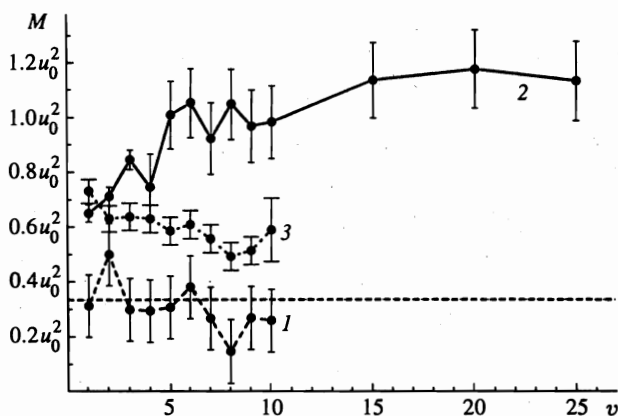


Рис. 3. Зависимость величины  $M \equiv v \langle \Delta v \rangle$  от скорости частицы. Кривые 1 и 2 рассчитаны для модели газа Лоренца, соответственно, в случае стохастических и регулярных осцилляций границ. Кривая 3 получена на основании упрощенного отображения (22). Штриховая линия соответствует рассчитанному на основании выражения (13) значению величины  $M_s$  в газе Лоренца в случае стохастических осцилляций границ. Результаты получены при  $u_0 = 0.01$ ,  $a = 1$ ,  $R = 0.4$

периода колебаний. Кроме того, легко видеть, что ускорение частицы в случае регулярных колебаний границы оказывается в 3-4 раза больше, чем при стохастических колебаниях.

Для проведения анализа изменений скорости в хаотических бильярдах с периодически осциллирующими границами можно предложить следующий подход. Рассмотрим приближенное отображение для скорости (12). Поскольку корреляции величин  $\alpha_n$  по-прежнему экспоненциально убывают (так как это определяется геометрией бильярда), соотношения можно усреднить по  $\alpha$ , пользуясь (4). Тогда

$$\langle \Delta v \rangle_\alpha = -\frac{\pi}{2} u_0 \cos \omega t_n + \frac{u_0^2 \cos \omega t_n}{v_n}. \quad (21)$$

В течение периода колебаний наибольший вклад в изменение скорости дает первое слагаемое. Следовательно, для учета корреляций в первом приближении достаточно учитывать изменения скорости, связанные только с первым слагаемым, а вторым слагаемым можно пренебречь. С другой стороны, учет корреляционных поправок во втором слагаемом приводит к членам более высокого порядка малости, чем среднее от него. Таким образом, можно не учитывать корреляционные эффекты во втором слагаемом. Поэтому допустимо независимо вычислить две величины, связанные с первым и вторым слагаемыми, т. е.

$$\langle \Delta v \rangle = \langle \Delta v \rangle_I + \langle \Delta v \rangle_{II},$$

причем  $\langle \Delta v \rangle_{II} = u_0^2 / (3v)$ , что совпадает с величиной  $\mu_s$  для стохастического случая (см. (13)), а  $\langle \Delta v \rangle_I$  — поправка, обусловленная наличием корреляций. Отбрасывая в выражении (21) второе слагаемое, получим следующее отображение для вычисления величины  $\langle \Delta v \rangle_I$ :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \gamma \cos \theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{l_{n+1} \omega}{v_{n+1}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $\gamma = -\pi u_0 / 2$  и вместо времени была введена фаза столкновения  $\theta_n \equiv \omega t_n$ . Приведенное отображение в точности соответствует известному отображению Улама [14–21] с той лишь разницей, что в данном случае длина свободного пробега  $l_n$  является случайной величиной, которая может принимать значения из определенного интервала.

Исследуем численно данное отображение при тех же значениях  $u_0$  и  $\omega$ , какие были выбраны при исследовании газа Лоренца. Предположим, что длина свободного пробега  $l_n$  имеет нормальное распределение со средним  $l = 0.62$  и дисперсией  $\sigma_l^2 = 0.657$ . Это соответствует дисперсии и средней длине свободного пробега, найденным численно для  $R = 0.4$  и  $a = 1$  (см. выше). На рис. 3 представлен график зависимости величины  $\langle \Delta v \rangle_I v + u_0^2 / 3$  (ломаная линия 3), рассчитанной на основе отображения (22). Как видно из графика, в данном отображении первый момент приращений скорости становится положительным, но при этом он все равно меньше наблюдаемого приращения скорости в газе Лоренца. Тем не менее данное отображение значительно проще для исследования, чем выражение (21).

Теперь оценим дисперсию и скорость спада корреляций изменений скорости. Предположим, что скорость частицы столь велика, что ее изменением за  $n$  соударений можно пренебречь. Понятно, что для выполнения этого условия при любом  $n$  достаточно соответствующим образом выбрать  $v$  и  $u_0$ . Найдем корреляции приращений

скорости  $\Delta v_m$  и  $\Delta v_{m+n}$  (см. (12)) при  $n \rightarrow \infty$ . Учитывая в первом приближении только первые слагаемые, получим

$$R(n) \equiv \langle \Delta v_m \Delta v_{m+n} \rangle = u_0^2 \frac{\pi^2}{4} \langle \cos \omega t_m \cos \omega t_{m+n} \rangle,$$

где в соответствии с (4) учтено, что  $\langle \cos \alpha_n \rangle = \pi/4$ . Полагая частоту колебаний равной единице и вводя обозначения  $S_n \equiv \sum_{i=1}^n \tau_{m+i}$ , где  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ , найдем, что

$$\langle \cos t_m \cos t_{m+n} \rangle = \langle \cos t_m \cos (t_m + S_n) \rangle.$$

Величину  $S_n$  можно представить в виде

$$S_n = \sum_{i=1}^n (l + \Delta l_i) / v,$$

где  $\Delta l_i$  — отклонение от средней длины свободного пробега при  $i$ -м перелете. Поскольку  $S_n$  является суммой независимых случайных величин, ее распределение при больших  $n$  будет стремиться к нормальному распределению со средним  $nl$  и дисперсией  $n\sigma_l^2$ , где  $\sigma_l^2$  — дисперсия длины свободного пробега. Раскладывая косинус суммы и проводя усреднение по  $S_n$ , получим следующее выражение для корреляционной функции приращений скорости:

$$R(n) \simeq \frac{\pi^2}{8} u_0^2 \cos(\omega n \tau) \exp\left(-\frac{n}{N}\right), \quad (23)$$

где  $\omega$  — частота колебаний рассеивателя,  $N = v^2 / (\omega^2 \sigma_l^2)$ . Таким образом, последовательные изменения скорости скоррелированы тем сильнее, чем выше скорость, а «время полураспада»  $N$  (т.е. число соударений, после которых корреляции убывают в  $e$  раз) растет как  $v^2$ . Отметим, что число столкновений за период растет пропорционально  $v$ . Таким образом, для правильного вычисления дисперсии необходимо учитывать тем большее число периодов колебаний, чем выше скорость частицы. Однако вопрос о том, каким образом это можно сделать, пока остается открытым.

Для того чтобы в первом приближении оценить дисперсию, рассмотрим изменение скорости только после двух последовательных соударений с границей. При этом будем считать, что корреляции между тремя и более изменениями пренебрежимо малы. В пределе больших скоростей бильярдной частицы коррелятор последовательных приращений скорости можно оценить как

$$\langle \Delta v_n \Delta v_{n+1} \rangle = u_0^2 \frac{\pi^2}{4} \langle \cos^2 \omega t_n (1 - O(\tau^2)) \rangle = u_0^2 \frac{\pi^2}{8} + O\left(\frac{u_0^2}{v^2}\right).$$

Учитывая это выражение и (13), получим

$$\sigma_r^2 = \frac{\langle (\Delta v_n + \Delta v_{n+1})^2 \rangle}{2} \approx \left(\frac{4}{3} + \frac{\pi^2}{8}\right) u_0^2. \quad (24)$$

На рис. 4 приведены численные и аналитические оценки зависимости дисперсии изменения скорости в стохастическом (штриховая линия) и регулярном (сплошные линии) случаях. В случае стохастических колебаний численная и аналитическая (см. (13))

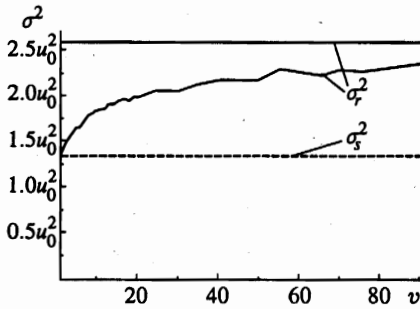


Рис. 4. Зависимость дисперсии от скорости частицы в газе Лоренца в случае стохастических (штриховая кривая) и регулярных (сплошные линии) осцилляций. Прямая линия отвечает теоретической оценке дисперсии в регулярном случае (24). Результаты получены при  $u_0 = 0.01$ ,  $a = 1$ ,  $R = 0.4$

оценки совпадают, и на графике приведено только значение  $\sigma_s^2$ , полученное численно. Регулярным колебаниям на графике соответствуют прямая линия, рассчитанная на основании выражения (24), и ломаная, полученная численно. Чтобы учесть корреляции между изменениями скорости, в регулярном случае находилась эффективная дисперсия  $\sigma_r^2 = \langle \Delta V^2 \rangle / N_{max}$ , где  $\Delta V$  — полное изменение скорости в течение  $N_{max}$  столкновений. При этом на основании соотношений (23) для спада корреляционной функции величина  $N_{max}$  полагалась равной  $10v^2 / (\omega^2 \sigma_r^2)$ , т. е. в десять раз больше, чем характерное число расцепления корреляций. Как видно из графиков, дисперсия  $\sigma_r^2$  в стохастическом случае постоянна, тогда как в регулярном случае ( $\sigma_r^2$ ) она растет вместе со скоростью. Кроме того, оценка (24) дисперсии в регулярном случае несколько завышена.

Таким образом, численные и аналитические оценки, приведенные в этом пункте свидетельствуют о том, что ускорение частиц должно наблюдаться в хаотических бильярдах с периодически осциллирующими границами. По-видимому, можно утверждать, что детерминированная случайность — достаточное условие возникновения ускорения Ферми. Кроме того, наличие периодических колебаний границы бильярда увеличивает рост скорости частицы.

### 3.4. Численные результаты

В этом разделе приводятся численно полученные зависимости скорости частиц от числа столкновений и времени, которые сопоставляются с аналитическими, полученными выше. Вычисления проводились на основе модели газа Лоренца со следующими параметрами: амплитудное значение скорости колебаний границы рассеивателя  $u_0 = 0.01$ ; радиус рассеивателей  $R = 0.4$ ; расстояние между центрами  $a = 1$ ; частота осцилляций границы  $\omega = 1$ ; начальная скорость  $v_0 = 1$ . Таким образом, соответствующее аналитически полученное значение длины свободного пробега составляет  $l = 0.6216815$ . Численно найденные длина свободного пробега (см. (6)) и ее дисперсия при данной геометрии бильярда составляют соответственно  $l = 0.62163 \pm 0.00003$  и  $\sigma_l^2 = 0.657 \pm 0.001$ .

Реализации отличались друг от друга начальными значениями  $\alpha$  и  $\phi$ , которые выбирались случайным образом. Исследовались два различных случая: стохастические колебания границ рассеивателей при равномерном распределении фазы колебаний и регулярные колебания границ. В обоих случаях динамика бильярдного шара (частицы) определялась из отображения, полученного в п. 2.1, 2.2. При этом скорость колебаний границ рассеивателей в момент столкновения в первом случае определялась как  $u_n = u_0 \cos \varphi_n$  (где  $\varphi_n$  — равномерно распределенная на интервале  $[0, 2\pi)$  случайная

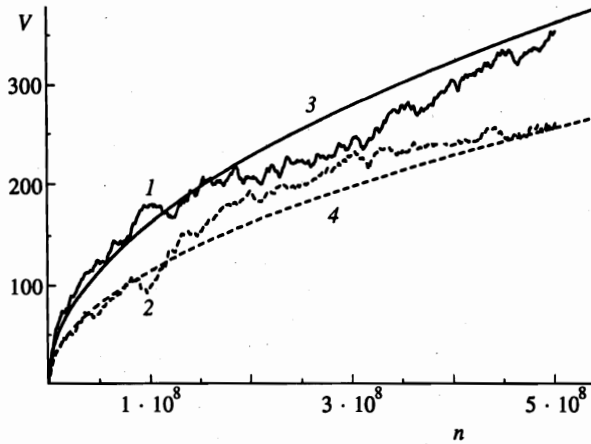


Рис. 5. Зависимости средней скорости частиц от числа столкновений в газе Лоренца (кривые 1 и 2) и их аппроксимации на основе уравнения (18) (кривые 3 и 4). Штриховые линии соответствуют стохастическому случаю осцилляций границ, сплошные — регулярным осцилляциям. Средние получены на основании ста реализаций процесса, различающихся начальными направлениями скорости, которые выбирались случайно. Результаты получены при  $u_0 = 0.01$ ,  $a = 1$ ,  $R = 0.4$

величина), а во втором — как  $u_n = u_0 \cos \omega t_n$  (где  $t_n$  — момент соударения частицы с границей). В каждом случае было построено 100 реализаций динамики бильярдной частицы. Усредненные зависимости скорости от числа столкновений и времени представлены соответственно на рис. 5 и рис. 6. На обоих графиках сплошные линии соответствуют регулярному случаю, а штриховые — стохастическому.

На рис. 5 приведены зависимости средней скорости ансамбля частиц от числа столкновений  $n$  на протяжении  $5 \cdot 10^8$  итераций. Видно, что оба графика хорошо аппроксимируются корневой зависимостью (18). При этом в стохастическом случае величины  $M_s$  и  $\sigma_s$  были найдены из уравнений (13), а в регулярном — взяты предельные значения  $M_r$  и  $\sigma_r$ , полученные из численного эксперимента, результаты которого приведены в предыдущем пункте.

На графиках зависимости средней скорости от времени (рис. 6) представлены средние по результатам 100 реализаций для стохастического (штриховые линии) и регулярного (сплошные линии) случаев. Динамика частицы рассматривалась в интервале  $[0; 3 \cdot 10^6]$  единиц времени, причем отдельные траектории («быстрых» частиц) включали в себя до  $3 \cdot 10^9$  итераций. Аппроксимация средней скорости частиц проводилась на основании соотношения (20). Для стохастических колебаний рассеивателей параметр  $M_s$  рассчитывался из уравнений (13), а для регулярных — как предельное значение величины  $M_r$ , полученной в предыдущем пункте. Как следует из графиков, рост средней скорости близок к линейному, и аппроксимация средней скорости на основании формулы (20) дает неплохое согласие с численным экспериментом.

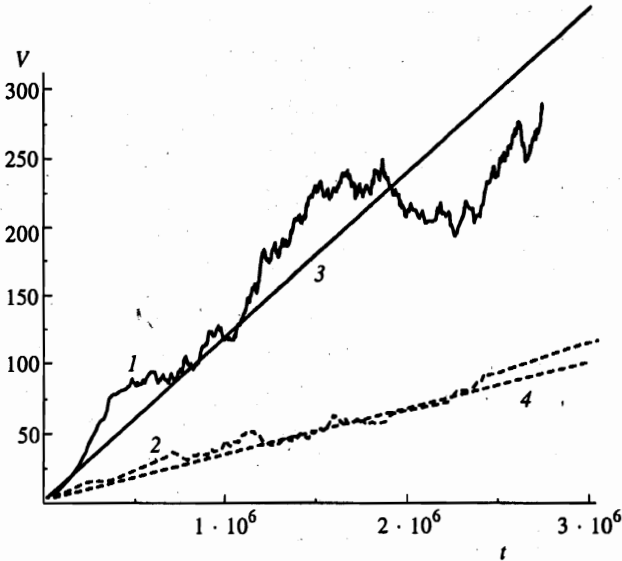


Рис. 6. То же, что на рис. 5, но в зависимости от времени. Аппроксимация проводилась на основании уравнения (20)

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Бильярды являются достаточно удобными моделями целого ряда физических систем. Например, многим динамическим задачам могут быть поставлены в соответствие уравнения траектории частицы в бильярдах заданной формы. Более того, большинство подходов к проблеме перемешивания в системах из многих частиц восходят к задачам бильярдного типа. Естественным обобщением бильярдных систем являются бильярды, границы которых не являются неподвижными, а изменяются по какому-либо закону. Это достаточно новая область, открывающая новые перспективы в исследовании многих давно известных, но малоизученных проблем. Так, задача о динамике частицы в бильярде, граница которого со временем изменяется, имеет прямое физическое приложение как модель неравновесной статистической механики. Как показывают исследования, для бильярда с возмущенными границами существенным оказываются его динамические свойства: если он проявляет хаотическую динамику, то возмущение границы может привести к неограниченному росту скорости частицы, т. е. такому бильярду может быть присуще ускорение Ферми.

В настоящей работе исследовалась проблема ускорения Ферми в динамических системах, порождаемых рассеивающими плоскими бильярдами с возмущаемой границей. Рассматривался бильярд типа газа Лоренца, граница которого осциллирует по некоторому закону. Как известно, обычный газ Лоренца (т. е. с невозмущенной границей) обладает ярко выраженными хаотическими свойствами (перемешиванием, расцеплением корреляций и т. п.). Возмущение границ такого бильярда приводит к возникновению ускорения Ферми. При этом модель исследована в двух различных вариантах: со стохастически и регулярно осциллирующими границами рассеивателей. Найдено, что ускорение больше в случае регулярных колебаний границы.

Можно выделить два основных механизма ускорения, которые были выявлены при

выводе распределения частиц по скоростям в зависимости от числа столкновений в стохастическом случае (п. 3.3). Во-первых, это механизм, возникающий вследствие выполнения соотношения  $\langle \Delta v \rangle > 0$  (см. (13)) и приводящий к сносу всех частиц в направлении положительных скоростей. Во-вторых, это дисперсионный (или флуктуационный) механизм, проявляющийся по двум причинам: а)  $\langle \Delta v^2 \rangle > 0$ , и поэтому вероятностный пакет «расплывается» со временем; б) модуль скорости не может быть отрицательным и, таким образом, расплывание пакета не симметрично, а направлено в сторону больших скоростей, что выражается через переход от простого нормального распределения к распределению (16). При этом, как показывают аналитические и численные исследования, флуктуации и среднее увеличение скорости частицы выше в случае регулярных колебаний границ рассеивателей, что приводит к большему росту скорости. Таким образом, можно также говорить о механизме, обусловленном корреляциями между последовательными изменениями скорости.

Нетрудно понять, что рассуждения, используемые при выводе зависимости скорости частицы от числа соударений и времени, легко перенести на любой другой бильярд, для которого известно вероятностное распределение угла  $\alpha$  (угол между нормалью к поверхности в точке соударения и скоростью частицы). Поэтому развитая в данной работе техника может оказаться полезной в при изучении проблемы ускорения Ферми в общем случае.

Наличие хаотичности в системе может приводить к изменению ее статистических свойств. В недавней работе Тсанга и Нгаи [10] был рассмотрен бильярд в области, образованной прямоугольником, углы которого заменены четвертями окружностей радиуса  $R$  (скругленные углы), а одна из сторон периодически осциллирует. Частица движется внутри этой области, сталкиваясь с границами. При этом удар с границей не является абсолютно упругим: частица теряет часть своей скорости, пропорциональную некоторой постоянной  $\delta$  ( $\delta \ll 1$ ). Эта модель близка к модели Улама, но наличие закругленных углов вносит элемент случайности в динамику частицы. В работе [10] исследовался процесс релаксации системы к равновесному состоянию. Аналогичные исследования были проведены ранее в работах Тсанга и Либермана [25] на модели Улама. Как было показано, в модели Улама величина  $\Phi(t) = E(t) - E(\infty)$ , представляющая собой отклонение средней энергии системы от ее равновесного значения, убывает экспоненциально, т. е.  $\Phi(t) \propto \exp(-t/\tau)$ , что, вообще говоря, естественно для большинства физических систем. Исследование этой величины, проведенное на бильярдной модели [10], показало, что релаксация системы к равновесию происходит медленнее, а  $\Phi(t) \propto \exp\left[-(t/\tau)^\beta\right]$ , где  $\beta < 1$ , причем величина  $\beta$  убывает с увеличением  $R$ . Из результатов, полученных в предыдущих разделах, становится понятным, в чем состоит возможная причина уменьшения скорости релаксации системы. Действительно, с увеличением радиусов дуг растет элемент хаотичности в системе, что приводит к появлению ускорения частиц. Поэтому релаксация системы к равновесному состоянию, связанная с наличием диссипации энергии частиц в системе, будет происходить медленнее. Развитые в данной работе подходы дают возможность определения величины  $\beta$  и, соответственно, скорости релаксации к равновесию систем, в которых хаотическая динамика является доминирующей.

Таким образом, на основании проведенных исследований допустимо сделать важное предположение: хаотичность бильярда с неподвижной границей является достаточным условием для возникновения в нем ускорения Ферми при включении возмущения границы.



## Литература

1. Я. Г. Синай, Успехи матем. наук **25**, 141 (1970).
2. L. A. Bunimovich, Commun. Math. Phys. **65**, 295 (1979).
3. L. A. Bunimovich and Ya. G. Sinai, Commun. Math. Phys. **78**, 479 (1981).
4. Л. А. Бунимович, *Динамические системы*, т. 2, ВИНТИ, Москва (1985), с. 173.
5. L. A. Bunimovich, Chaos **1**, 187 (1991).
6. A. Tabachnikov, *Billiards*, France Math. Soc. Press, Lyon (1995).
7. *Proc. of the Int. Conf. on Classical and Quantum Billiards*, J. Stat. Phys. **83**, № 1–2 (1996).
8. J. Koiller, R. Markarian, S. Q. Kamphorst, and S. P. de Carvalho, Nonlinearity **8**, 983 (1995); J. Stat. Phys. **83**, 127 (1996).
9. *New Trends in Hamiltonian Systems*, World Sci., Singapore (1996).
10. K. J. Tsang and K. L. Ngai, Phys. Rev. E **56**, R17 (1997).
11. Л. Г. Акиншин, К. А. Васильев, А. Ю. Лоскутов, А. Б. Рябов, *Физическая мысль России* 2–3, 87 (1997).
12. E. Fermi, Phys. Rev. **75**, 1169 (1949).
13. Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, ДАН СССР **159**, 306 (1964).
14. S. M. Ulam, in *Proc. of the 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability*, California Univ. Press (1961), Vol. 3, p. 315.
15. A. Brahic, Astron. Astrophys. **12**, 98 (1971).
16. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, Москва (1984).
17. Г. М. Заславский, *Стохастическая необратимость в нелинейных системах*, Наука, Москва (1970).
18. A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, and R. H. Cohen, Physica D **1**, 291 (1980).
19. Л. Д. Пустыльников, ДАН СССР **292**, 549 (1987).
20. Л. Д. Пустыльников, Матем. сб. **85**, 113 (1994).
21. T. Krüger, L. D. Pustyl'nikov, and S. E. Troubetzkoy, Nonlinearity **8**, 397 (1995).
22. P. R. Baldwin, J. Phys. A **24**, L941 (1991).
23. N. Chernov, J. Stat. Phys. **88**, 1 (1997).
24. P. L. Garrido, J. Stat. Phys. **88**, 807 (1997).
25. K. J. Tsang and M. A. Lieberman, Physica D **11**, 147 (1984). Phys. Lett. A **103**, 175 (1984).