

ИНДУЦИРОВАННАЯ ЦВЕТНЫМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ШУМОМ СВЕРХЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ К СЛАБЫМ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМ СИГНАЛАМ В СИСТЕМЕ С ON-OFF-ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬЮ

О. В. Геращенко*

*Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова Российской академии наук
188350, Гатчина, Ленинградская обл., Россия*

Поступила в редакцию 17 марта 1999 г.

Проведено экспериментальное изучение влияния конечного времени корреляции управляющего мультипликативного шума на сверхчувствительность к слабым знакопеременным сигналам в системе с on-off-перемежаемостью. Показано, что коэффициент усиления имеет максимум при оптимальном выборе времени корреляции и интенсивности управляющего шума.

PACS: 05.45.+b, 02.50.-г, 05.40.+j, 84.30.-г

1. ВВЕДЕНИЕ

Ранее в работах [1–3] на примере простой нелинейной системы с on-off-перемежаемостью — передемпфированного крамерсовского осциллятора — теоретически и экспериментально было показано существование нового явления — индуцированной белым мультипликативным шумом сверхчувствительности к сверхслабым знакопеременным сигналам. Однако реальные стохастические процессы всегда имеют конечное корреляционное время, т. е. белый шум является абстракцией. Поэтому изучение влияния цветного шума на сверхчувствительность является естественным этапом в изучении этого интересного явления.

В данной работе экспериментально, в аналоговой электронной схеме, исследуется влияние времени корреляции управляющего мультипликативного шума на явление сверхчувствительности нелинейной системы, демонстрирующей on-off-перемежаемостью.

В работах [1–3] был изучен передемпфированный крамерсовский осциллятор с управляющим мультипликативным δ -коррелированным шумом. Кратко напомним основные результаты. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение для такой системы:

$$\frac{dx}{dt} = [\lambda + \beta\eta(t)]x - Ux^3 + E(t), \quad (1)$$

где $\eta(t)$ — δ -коррелированный гауссовский случайный процесс с интенсивностью β , $E(t)$ — периодический сигнал с нулевым средним. Это уравнение для частицы с нулевой массой, которая движется в биквадратном потенциале с модулируемой белым гауссовским шумом высотой потенциального барьера. В адиабатическом приближении, когда

*E-mail: gerashch@hep486.pnpi.spb.ru

время установления стационарной плотности вероятности $F(x)$ много меньше периода сигнала $E(t)$, можно записать $F(x)$ в виде

$$F(x) = C|x|^{\alpha-1}\theta(\text{sign}(E(t)x))\phi(x, x_1, \beta), \quad (2)$$

где θ — единичная функция Хевисайда, C — нормировочная константа, а вид функции $\phi(x, x_1, \beta)$ определяется видом нелинейности потенциала и приводит к отсечке $x(t)$ на характерном масштабе системы x_1 .

Видно, что основным параметром, определяющим динамику такой системы, является параметр α :

$$\alpha = 2\lambda/\beta^2. \quad (3)$$

Условие $|\alpha| \ll 1$ является для системы (1) условием возникновения *on-off*-перемежаемости, когда система, находясь в ламинарной фазе, внезапно возбуждается до отсечки x_1 , определяемой размером системы, и снова возвращается в ламинарную фазу. При этом стационарная плотность вероятности имеет степенной вид:

$$F(x) \sim |x|^{\alpha-1}. \quad (4)$$

Отметим характерные черты решения (2): во-первых, степенная зависимость плотности вероятности в широком интервале $A_0 \sim \exp(-1/|\alpha|) < x < x_1$ при $|\alpha| \ll 1$, что характерно для явления *on-off*-перемежаемости [4–6]; во-вторых, чувствительность к знаку сигнала $E(t)$ при амплитуде сигнала $A > A_0$. Подчеркнем, что величина A_0 экспоненциально мала по параметру $1/|\alpha|$.

Выражение для коэффициента усиления при $|\alpha| \ll 1$ имеет вид

$$I = \frac{\langle |x(t)| \rangle}{A} \sim \begin{cases} (1/A) \ln(1/A), & z \ll 1, \\ |\alpha|/A^{1-|\alpha|}, & z \gg 1, \alpha < 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$z = |\alpha| \ln(1/A). \quad (6)$$

Таким образом, стохастическая система, управляемая внешним мультипликативным шумом, в области *on-off*-перемежаемости может усиливать сверхслабый знакопеременный сигнал до отсечки, определяемой характерными размерами системы, с коэффициентом усиления $I \sim 1/A$, где A — амплитуда сигнала [1–3].

Можно показать, что в случае «цветного» дихотомического шума получается следующее выражение для параметра α :

$$\alpha = \frac{\lambda\gamma}{\Delta^2 - \lambda^2} \approx \frac{\lambda\gamma}{\Delta^2}, \quad \lambda \ll \Delta, \quad (7)$$

где $1/\gamma$ — время корреляции шума, Δ — амплитуда шума, λ — линейный по динамической переменной член в уравнении (11). При этом в области *on-off*-перемежаемости $F(x)$ имеет степенной вид (4). Поскольку *on-off*-перемежаемость наблюдается при условии $|\alpha| \ll 1$, то как видно из уравнения (7), переход к пределу «белого» шума требует одновременного уменьшения λ , поэтому при конечной величине λ и достаточно большой величине γ система не будет обладать сверхчувствительностью, а коэффициент усиления уменьшится. Если величина λ остается постоянной, то тогда для сохранения *on-off*-перемежаемости (и сверхчувствительности) необходимо увеличивать интенсивность шума Δ .

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

На рис. 1 приведена аналоговая схема, использовавшаяся в эксперименте. Она представляет собой параллельно соединенные конденсатор и нелинейный элемент с управляемой напряжением $V_n(t)$ проводимостью $G(t)$, реализованный на операционном усилителе и коммутаторе. Управляющее напряжение $V_n(t)$ представляло собой дихотомический (телеграфный) шум. Входной прямоугольный сигнал $E(t)$ с нулевым средним, амплитудой A и периодом T подавался через резистор R .

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) схемы показана на рис. 2. Видно, что управляющий телеграфный шум изменяет знак проводимости схемы.

Запишем уравнение Кирхгофа для нашей схемы:

$$\frac{E(t) - V(t)}{R} = C \frac{dV}{dt} + I(V), \quad (8)$$

где $V(t)$ — исследуемое напряжение, CdV/dt — ток через конденсатор, $I(V)$ — ток через нелинейный элемент с флуктуирующей проводимостью, $E(t)$ — входной сигнал.

Поскольку из (2) следует, что основной вклад в стационарную плотность вероятности $F(V)$ вносит область малых $V(t)$, а роль нелинейности сводится к отсечке для больших напряжений $V(t) \approx V_1$, где V_1 определяется из условия $I(V_1) = 0$, интерес для нас представляет поведение системы в линейной области. Перепишем уравнение (8) для $|V(t)| < V_0$. Тогда для тока $I(V)$ можно записать

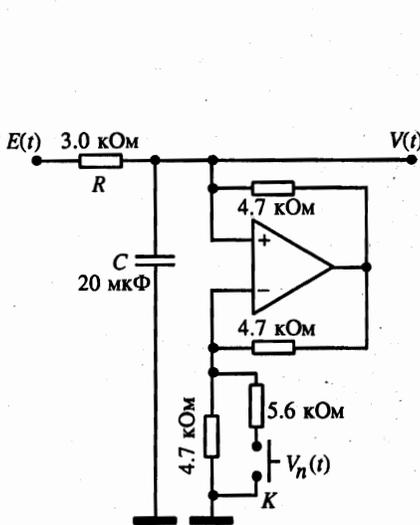


Рис. 1

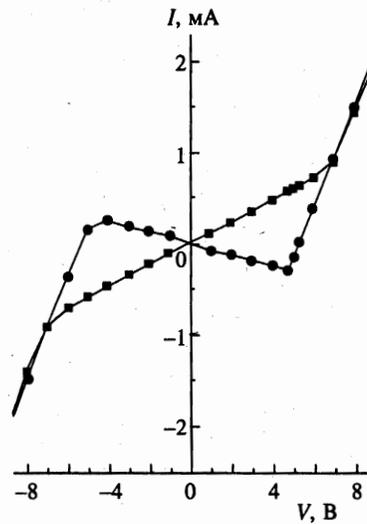


Рис. 2

Рис. 1. Аналоговая электронная схема, используемая в эксперименте. Операционный усилитель — КР544УД1, реле K — РЭС49

Рис. 2. Статическая вольт-амперная характеристика электронной схемы, изображенной на рис. 1. При $|V| < V_0 \approx 5$ В под действием мультипликативного шума происходит модуляция проводимости схемы. При $|V| > 7$ В ветви ВАХ совпадают

$$I(V) = (G_0 + g(t))V = [G_0 + g_0\xi(t)]V, \quad (9)$$

где $g(t)$ — флуктуирующая проводимость, случайным образом принимающая значения $\pm g_0$. Ее корреляционная функция следующая:

$$\langle g(0)g(t) \rangle = g_0^2 \langle \xi(0)\xi(t) \rangle = g_0^2 \exp(-\gamma_0|t|). \quad (10)$$

Подставим (9) в (8) и перейдем к безразмерному времени $\tau = t/RC$:

$$\frac{dV}{d\tau} = [\lambda + \Delta\xi(\tau)]V + E(\tau), \quad (11)$$

$$\langle \xi(0)\xi(\tau) \rangle = \exp(-\gamma|\tau|), \quad \lambda = -R|G_0|, \quad \Delta = Rg_0, \quad \gamma = RC\gamma_0. \quad (12)$$

Видно, что шум в уравнение (11) входит мультипликативно, т. е. умножается на переменную V .

В нашем случае из ВАХ на рис. 2 получаем $\lambda \approx -0.09$, $\Delta \approx 0.27$.

На рис. 3 показано выходное напряжение $V(t)$, когда на вход схемы подается прямоугольный сигнал с амплитудой $A = 50$ мВ и частотой $f_s = 0.3$ Гц для разных величин γ . Видно, что на малый входной сигнал система реагирует «выбросами» до отсечки $|V_1| \approx 5$ В и тем самым усиливает его. Такое поведение характерно для явления *on-off*-перемежаемости, когда система, находясь в ламинарной фазе, возбуждается до отсечки и снова переходит в ламинарную фазу. Видно также, что при $\gamma < f_s$ переключения происходят не при каждой смене знака сигнала (нарушается условие адиабатичности) и в спектре практически отсутствует основная гармоника сигнала. Увеличение γ приводит к переключениям на каждом полупериоде сигнала и, следовательно, к его дальнейшему усилению.

Характерным признаком *on-off*-перемежаемости наряду со скейлинговой зависимостью стационарной плотности вероятности (4) является степенное поведение плотности вероятности длины ламинарной фазы [4–6]:

$$P_L(L) \propto L^{-3/2}, \quad (13)$$

где L — длина ламинарного участка.

Экспериментально ламинарная фаза определялась следующим образом: в реализации $V(t)$ находился максимальный выброс $V_{max} \approx V_1 \approx 5$ В, задавался порог ламинарности p в долях V_{max} , ламинарная фаза $V(t)$ определялась условием $V(t) < pV_{max}$. На рис. 4 приведена гистограмма $P_L(L)$ для постоянного входного сигнала $E(t) = E = 15$ мВ при пороге ламинарности $p = 0.1$, которая хорошо согласуется с теоретической (13). Отклонения от зависимости (13) происходят на характерных временах $1/\gamma$ (уменьшение P_L при $L \sim 1/\gamma$) и $1/\lambda$ (экспоненциальный спад при больших $L \sim 1/|\lambda|$). Измерение зависимости $P_L(L)$ дает другой способ оценки параметров γ и λ . Из рис. 4 получим $\gamma \sim 1$, $|\lambda| \sim 0.1$, что совпадает с результатом прямого измерения величины γ по спектру управляющего шума, и с величиной $|\lambda| = 0.09$, определенной из вольт-амперной характеристики на рис. 2.

На рис. 5 приведена зависимость коэффициента усиления от величины параметра γ . Коэффициент усиления определяется выражением

$$K(A) = \sqrt{S_V(f_s)\Delta f}/A, \quad (14)$$

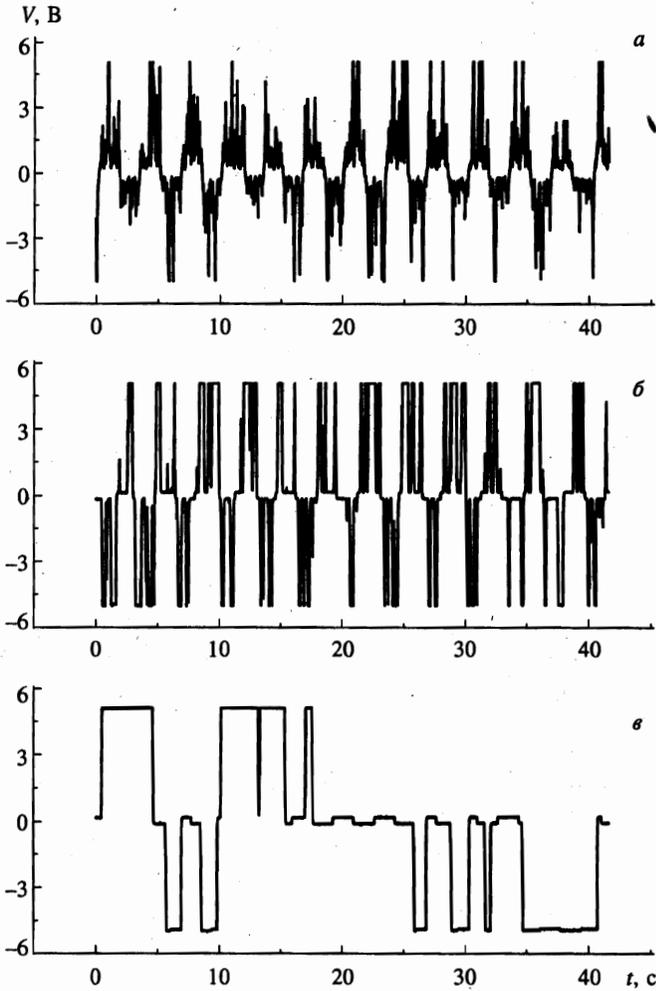


Рис. 3. Выходное напряжение $V(t)$ для случая, когда на схему подается прямоугольный сигнал с амплитудой $A = 50$ мВ и частотой 0.3 Гц (0.0018 в безразмерных единицах) при разных значениях параметра γ : $\gamma = 1.14$ (а), 0.065 (б) и 0.0068 (в)

где $S_V(f_s)$ — спектральная интенсивность первой гармоники выходного сигнала, $\Delta f = 0.03$ Гц — ширина спектральной полосы при измерении $S_V(f)$.

Видно, что при $\gamma < f_s$ нарушается условие адиабатичности сигнала по сравнению с шумом, поэтому усиление уменьшается. При большой величине γ параметр α , согласно выражению (7), приближается к единице, и усиление также падает. Итак, можно выбрать оптимальное корреляционное время управляющего шума, когда коэффициент усиления имеет максимальную величину.

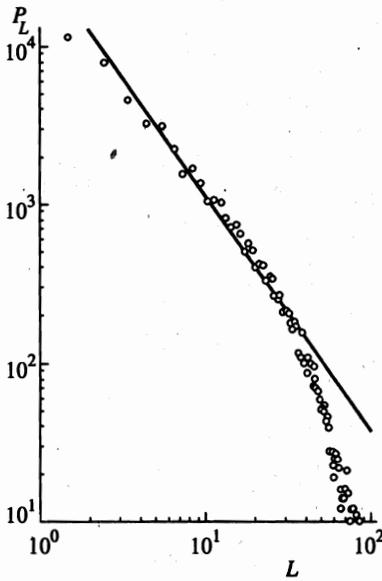


Рис. 4

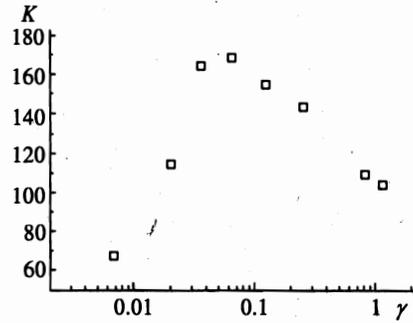


Рис. 5

Рис. 4. Гистограмма распределения длины ламинарной фазы при постоянном входном сигнале $E(t) = E = 15$ мВ и пороге ламинарности $p = 0.1$ при $\gamma = 1.14$. Прямая проведена с наклоном $-3/2$

Рис. 5. Зависимость коэффициента усиления от параметра γ для входного прямоугольного сигнала с амплитудой $A = 10$ мВ и периодом 3.3 с (безразмерная частота сигнала 0.0018)

3. ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе экспериментально показано, что наблюдается явление сверхчувствительности к слабым знакопеременным сигналам в системе с *on-off*-переключаемостью при воздействии на нее мультипликативного управляющего шума с конечным временем корреляции $1/\gamma$ и достаточно большой интенсивностью Δ . При этом коэффициент усиления сигнала максимален в оптимальном диапазоне времен корреляции шума.

Автор выражает благодарность С. Л. Гинзбургу и М. А. Пустовойту за постоянный интерес и полезные дискуссии.

Работа поддержана Государственной программой «Физика квантовых и волновых процессов» (подпрограмма «Статистическая физика», проект VIII-3), Государственной программой «Нейтронные исследования вещества» и Российским фондом фундаментальных исследований (проект 99-02-17545).

Литература

1. S. L. Ginzburg and M. A. Pustovoit, Phys. Rev. Lett. **80**, 4840 (1998).
2. С. Л. Гинзбург, М. А. Пустовойт, Письма в ЖЭТФ **67**, 592 (1998).
3. О. В. Герашенко, С. Л. Гинзбург, М. А. Пустовойт, Письма в ЖЭТФ **67**, 945 (1998).
4. N. Platt, E. A. Spiegel, and C. Tresser, Phys. Rev. Lett. **70**, 279 (1993).
5. J. F. Heagy, N. Platt, and S. M. Hammel, Phys. Rev. E **49**, 1140 (1994).
6. N. Platt, S. M. Hammel, and J. F. Heagy, Phys. Rev. Lett. **72**, 3498 (1994).