ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 3(9), стр. 870–884

КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ВЕРСИИ ЭФФЕКТА КАПИЦЫ—ДИРАКА

М. А. Ефремов [a], *М. В. Федоров* [b*]

[a] *Московский инженерно-физический институт*
115409, Москва, Россия
[b] *Институт общей физики Российской академии наук*
117942, Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 апреля 1999 г.

Рассеяние электронов на стоячей электромагнитной волне (эффект Капицы—Дирака) рассмотрено в рамках квантовомеханического и классического описания движения электронов. Найдены средний угол рассеяния и функция распределения электронов после рассеяния. Показано, что в квантовомеханической картине при задании начальной волновой функции электрона в виде плоской волны возникает характерный параметр $\beta = mc^2/\hbar\omega^2\tau$ (где ω и τ — частота поля и длительность взаимодействия), разделяющий области брэгговского ($\beta \ll 1$) и почти классического ($\beta \gg 1$) рассеяния. В области $\beta \gg 1$ средний угол рассеяния не зависит от выбора способа описания, однако функции распределения электронов после рассеяния существенно различны в квантовом и классическом подходах. В области $\beta \ll 1$ различны как функция распределения, так и средний угол рассеяния. По-видимому, для устранения обнаруженных различий необходима модификация квантовой теории и задание начальной волновой функции электрона в виде более или менее локализованного волнового пакета. Полученные результаты могут быть использованы для определения размеров волнового пакета, характеризующего состояние электронов в пучке, из экспериментов по рассеянию на стоячей световой волне.

PACS: 41.85.-p, 42.65.-k

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассеяние электронов на стоячей электромагнитной волне впервые было рассмотрено Капицей и Дираком в 1933 г. [1]. Впоследствии этот эффект (эффект Капицы—Дирака) широко исследовался как теоретически [2–4], так и экспериментально [5–12]. Наиболее убедительные экспериментальные данные были получены в работе [10], хотя они и относятся к диапазону достаточно сильных полей ($\sim 10^{13}$ Вт$\cdot$см$^{-2}$), и наблюдаемый эффект может интерпретироваться как обобщение эффекта Капицы—Дирака на многофотонный случай [2, 3].

С квантовой точки зрения эффект Капицы—Дирака представляет собой индуцированное комптоновское рассеяние. Поскольку стоячая волна есть суперпозиция двух встречных бегущих волн одинаковой частоты (ω), процесс индуцированного комптоновского рассеяния в данном случае состоит в поглощении фотона из одной из бегущих волн и индуцированном излучении фотона другой волны. При этом, очевидно, энергия электрона не меняется, а импульс меняется на $\pm 2\hbar\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ — волновой вектор одной из бегущих волн. При заданных ω и $\mathbf{k}$ из условия равенства энергии электрона до и

*E-mail: fedorov@theor.msk.ru

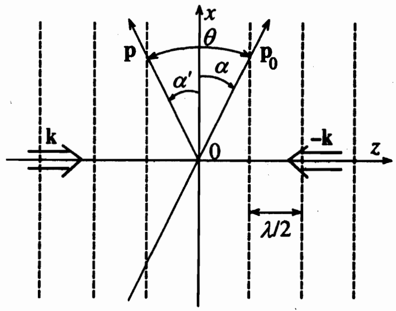

Рис. 1. Схема рассеяния электронов на стоячей световой волне в эффекте Капицы—Дирака

после рассеяния следует, что такой процесс возможен не при любых, а только при определенных направлениях начального импульса электрона. Согласно [1], вынужденное комптоновское рассеяние электронов на стоячей волне интерпретируется как дифракция де-бройлевской волны электрона на периодической структуре с периодом $\lambda/2$ (где $\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина волны поля излучения), образованной плоскостями равных фаз (пучностей) стоячей волны. Отмеченное выше условие, следующее из законов сохранения энергии и импульса и определяющее направление движения падающего электрона, при котором возможно индуцированное комптоновское рассеяние на стоячей волне, интерпретируется как условие Вульфа—Брэгга для дифракции де-бройлевской волны электрона на периодической решетке [1]. Если $\pi/2 - \alpha$ — угол между направлением импульса падающего электрона $\mathbf{p}_0$ и волновым вектором $\mathbf{k}$ (α — угол скольжения падающего электрона), то условие Вульфа—Брэгга имеет вид $\alpha = \pm\alpha_{Br}$, где α_{Br} — брэгговский угол:

$$\alpha_{Br} = \arcsin\left(\frac{\lambda_{DB}}{\lambda}\right) = \arcsin\left(\frac{\hbar k}{p_0}\right) \approx \frac{\hbar k}{p_0}. \tag{1}$$

В типичных условиях ($\omega = 3 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ и $v_0 = p_0/m = 10^8$ см·с$^{-1}$) $\alpha_{Br} \approx 10^{-3} \ll 1$. В дальнейшем считаем малым не только брэгговский угол α_{Br}, но и начальный и конечный углы скольжения α и α', а также и угол рассеяния электрона $\theta = \alpha' - \alpha$ (см. рис. 1).

Насколько нам известно, во всех выполненных до настоящего времени теоретических исследованиях эффекта Капицы—Дирака использовалось квантовомеханическое описание электрона, причем его начальная волновая функция задавалась в виде плоской волны. Вместе с тем оправдан и интересен и другой подход: рассеяние классического электрона полем классической стоячей световой волны. Такая постановка задачи рассмотрена в четвертом разделе статьи. В разд. 2 будут сформулированы основные приближения и общая постановка задачи. В третьем разделе дано краткое описание известных и некоторых ранее не описанных результатов квантового рассмотрения. Сравнение результатов классического и квантового подходов указывает на существенные различия. Обсуждение причин этих различий и перспектив дальнейших исследований будут даны в пятом разделе статьи. В данной работе мы ограничиваемся приближением слабого поля стоячей волны, а скорость электрона считается малой по сравнению со скоростью света.

2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для определенности, пусть вектор $\mathbf{k}$ направлен вдоль оси z; примем также, что поле стоячей волны линейно поляризовано и вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ направлен вдоль оси x; пусть начальный импульс электрона $\mathbf{p}_0$ лежит в плоскости xz и составляет угол α с направлением оси x (рис. 1). Пусть для простоты геометрия является плоской, т.е. поле излучения не зависит от координаты y и проекция импульса электрона на направление оси y равна нулю как до, так и после рассеяния.

Как при квантовом, так и при классическом описании движения электрона исходным пунктом при постановке задачи является его гамильтониан в поле внешнего излучения. Считая, что в любом случае внешнее электромагнитное излучение описывается классически, для конфигурации типа стоячей волны напряженность электрического поля задаем в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)\,[\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz)]\,, \tag{2}$$

где $E_0(t)$ — амплитудная огибающая импульса излучения, $k = \omega/c$. Гамильтониан нерелятивистского электрона в поле (2), как хорошо известно, имеет вид

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t)/c)^2}{2m}\,, \tag{3}$$

где $\mathbf{A}(t)$ — векторный потенциал, отвечающий напряженности (2):

$$\mathbf{A} = -\frac{c\mathbf{E}_0(t)}{\omega}\,[\sin(\omega t - kz) + \sin(\omega t + kz)]\,. \tag{4}$$

Выражение (3) для гамильтониана электрона в равной степени применимо как для квантового, так и для классического описания с той лишь разницей, что если в классическом подходе импульс электрона $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ — это обычная функция, то в квантовой теории — это оператор $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$.

Будем использовать приближение усредненного гамильтониана [2–4]. В этом приближении считается, что электрон в поле совершает как быстрые, так и медленные движения (в масштабе периода поля $2\pi/\omega$), но амплитуды быстрых изменений координат, импульса, волновой функции малы по сравнению с их крупномасштабными медленными изменениями. Это предположение позволяет получить уравнения для медленных компонент рассматриваемых величин с помощью простого усреднения гамильтониана (3) по времени, что дает

$$\overline{H} = \frac{\mathbf{p}^2 + e^2\overline{\mathbf{A}^2(t)}/c^2}{2m} \cong H_0 + H_{int}. \tag{5}$$

Здесь $H_0 = \mathbf{p}^2/2m$ — гамильтониан свободного электрона, а H_{int} — гамильтониан взаимодействия с полем, который удобно записать в виде

$$H_{int} = 2U(t)\cos(2kz), \tag{6}$$

где $U(t)$ — медленно зависящий от времени пондеромоторный потенциал электрона:

$$U(t) = \frac{e^2 E_0^2(t)}{4m\omega^2}\,. \tag{7}$$

Следует заметить, что задача о рассеянии электронов может рассматриваться как в нестационарной, так и в стационарной постановке. Если каждая из двух встречных бегущих волн имеет вид коротких импульсов и если длительность импульсов мала по сравнению со временем, необходимым для пересечения электроном фокальной области, то, как и было указано выше, $E_0(t)$ — это амплитудная огибающая импульсов поля. В этом случае задача о рассеянии имеет явно нестационарный характер. С другой стороны, если длительность импульсов много больше времени, необходимого для пересечения электроном фокальной области, поле можно считать стационарным, но неоднородным: $E_0 = E_0(x)$. В этом случае включение и выключение взаимодействия с полем осуществляются по мере прохождения электроном фокальной области. Можно убедиться, что как в квантовом, так и в классическом описании при определенных довольно естественных предположениях стационарная задача о рассеянии может быть сведена к нестационарной с помощью введения «эффективного времени» $t = x/v_{0x}$ и переобозначения $E_0(x) = E_0(tv_{0x})$ на $E_0(t)$, где v_{0x} — проекция начальной скорости электрона v_0 на ось x. В связи с этим ограничимся рассмотрением нестационарной задачи рассеяния, имея в виду возможность использования результатов и в стационарном случае.

В дальнейшем, не конкретизируя явно вид огибающей поля $E_0(t)$, полагаем, что она определяется некоторой четной функцией времени $f(t)$ такой, что

$$f(t) = f(-t), \quad f_{max} = f(0) = 1, \quad E_0(t) = E_0 f(t),$$

и, в соответствии с уравнением (7),

$$U(t) = U_0 f^2(t),$$

где E_0 и $U_0 = e^2E_0^2/4m\omega^2$ — максимальные значения амплитуды напряженности $E_0(t)$ и пондеромоторного потенциала $U(t)$. Конечной целью решения как классической, так и квантовой задач будем считать вычисление среднего угла рассеяния электрона и функции распределения электронов по углам после рассеяния.

3. МОДЕЛЬ РАССЕЯНИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЭФФЕКТА КАПИЦЫ—ДИРАКА

3.1. Средний угол отклонения электрона в поле стоячей волны

Используя гамильтониан (5), ищем решение уравнения Шредингера в виде разложения по плоским волнам, которые удобно нормировать на единицу в кубе периодичности (размером V, в окончательных результатах $V \to \infty$)

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p} C(\mathbf{p}, t) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\mathbf{pr} - \frac{p^2}{2m}t\right)\right]. \tag{8}$$

Коэффициенты разложения волновой функции $C(\mathbf{p}, t)$ удовлетворяют уравнению, следующему непосредственно из уравнения Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} C(\mathbf{p}, t) = \sum_{p'} H_{int}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p^2 - p'^2}{2m}\right)t\right] C(\mathbf{p}', t), \tag{9}$$

где $H_{int}(\mathbf{q})$ — фурье-образ энергии взаимодействия (6):

$$H_{int}(\mathbf{q}) = \frac{1}{V}\int d\mathbf{r}\, H_{int}(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{i\mathbf{qr}}{\hbar}\right). \tag{10}$$

В модели рассеяния плоских волн предполагается, что до начала взаимодействия с полем электрон находится в состоянии с определенным значением импульса $\mathbf{p}_0$ и начальное условие к уравнению (9) имеет вид

$$C(\mathbf{p}, t \to -\infty) = \delta_{p,p_0}. \tag{11}$$

Коэффициенты разложения в уравнении (8) $C(\mathbf{p}, t)$ — это амплитуды вероятности, а $|C(\mathbf{p}, t)|^2$ — вероятность нахождения электрона в состоянии с импульсом $\mathbf{p}$ к моменту времени t. Среднее изменение проекции импульса электрона на ось z в результате рассеяния определяется как

$$\langle \Delta p_z \rangle = \sum_p (p_z - p_{0z})\, |C(\mathbf{p}, t \to +\infty)|^2. \tag{12}$$

В приближении малого изменения импульса электрона, $\langle \Delta p_z \rangle \ll p_0$, величина $\langle \Delta p_z \rangle$ определяет и средний угол рассеяния электрона

$$\overline{\theta} \equiv \langle \alpha' - \alpha \rangle = \left\langle \arcsin\left[\frac{\Delta p_z}{|\mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}|}\cos(\alpha)\right]\right\rangle \approx \frac{\langle \Delta p_z \rangle}{p_0} = \sum_p \frac{p_z - p_{0z}}{p_0}\, |C(\mathbf{p}, t \to +\infty)|^2. \tag{13}$$

В приближении слабого поля в рамках первого порядка теории возмущений по взаимодействию электрона с полем, с учетом начального условия (11) и явного вида энергии взаимодействия H_{int} (6), непосредственно из уравнения (9) находим поправку первого порядка $C^{(1)}(\mathbf{p}, t = \infty)$ к невозмущенной амплитуде вероятности $C^{(0)}(\mathbf{p}, t) \equiv$ $\equiv C(\mathbf{p}, t = -\infty) = \delta_{p,p_0}$:

$$C^{(1)}(\mathbf{p}, \infty) = -\frac{i}{\hbar} U_0 \sum_{\pm} \delta_{p,p_0 \pm 2\hbar k} (f^2)_{\pm}, \tag{14}$$

где $(f^2)_{\pm}$ — фурье-образ квадрата безразмерной огибающей поля $f(t)$

$$(f^2)_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) \exp(i\nu t) dt, \tag{15}$$

вычисленный при значениях «частоты» фурье-преобразования ν, равной

$$\nu_{\pm} = \frac{(\mathbf{p}_0 \pm 2\hbar\mathbf{k})^2 - p_0^2}{2m\hbar} \approx \pm 2\omega \frac{v_0}{c} (\alpha \pm \alpha_{Br}). \tag{16}$$

Легко видеть, что «частоты» $\nu_{\pm}$ определяют степень близости угла скольжения падающих электронов α к брэгговским углам $\mp\alpha_{Br}$. Учитывая, что при малых ν $(f^2)_\nu \sim \tau$ (где τ — длительность взаимодействия), и сравнивая $C^{(1)}$ из уравнения (14) с $C^{(0)}$ из уравнения (11), находим, что параметром теории возмущений является $U_0\tau/\hbar$. Условие применимости приближения слабого поля в рассматриваемой модели рассеяния,

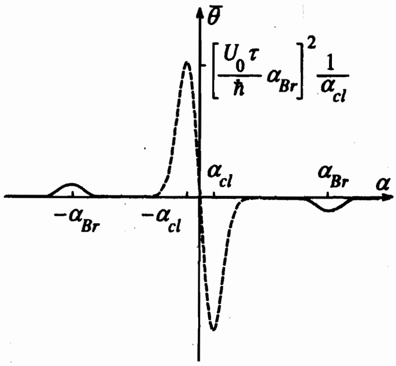

Рис. 2

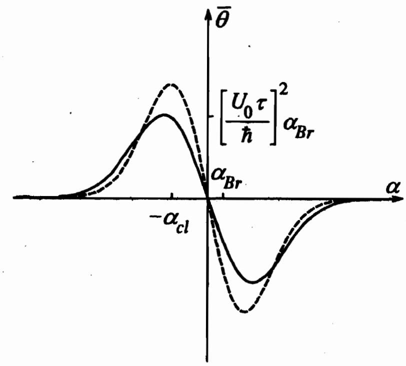

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость $\overline{\theta}(\alpha)$, найденная из квантовой (сплошная кривая) и классической (штриховая) теорий при $\beta = 0.2$

Рис. 3. Зависимость $\overline{\theta}(\alpha)$, найденная из квантовой (сплошная кривая) и классической (штриховая) теорий при $\beta = 2$

$U_0\tau/\hbar < 1$, например, при $\omega = 3\cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ и $\tau = 1$ пс и 1 нс выполняется при интенсивностях излучения $I \leq 10^{10}$ Вт·см$^{-2}$ и 10^7 Вт·см$^{-2}$ соответственно.

С помощью уравнений (13) и (14) в первом порядке квантовой теории возмущений легко находится и средний угол рассеяния электрона. Ввиду наличия δ-символов Кронекера в уравнениях (11), (14) угол скольжения рассеянных электронов пучка, $\alpha' = \arcsin(p_z/p)$, может принимать значения $\alpha' = \alpha$ и $\alpha' \approx \alpha \pm 2\alpha_{Br}$. В теории дифракции условие $\alpha' - \alpha = \pm 2\alpha_{Br}$ известно как условие Лауэ [13]. Средний угол рассеяния равен

$$\overline{\theta} = \left(\frac{U_0}{\hbar}\right)^2 2\alpha_{Br}\left\{\left|(f^2)_+\right|^2 - \left|(f^2)_-\right|^2\right\}. \tag{17}$$

В частном случае гауссовой огибающей, $f^2(t) = \exp(-(t/\tau)^2)$, уравнение (17) принимает вид

$$\overline{\theta} = \left(\frac{U_0}{\hbar}\tau\right)^2 2\pi\alpha_{Br}\left\{\exp\left(-\frac{\nu_+^2\tau^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\nu_-^2\tau^2}{2}\right)\right\}. \tag{18}$$

Помимо параметров импульса поля (интенсивность, длительность импульса, форма огибающей) средний угол рассеяния (17), (18) зависит также от направления импульса электрона в начальном состоянии $\mathbf{p}_0$ или, иначе говоря, от угла скольжения падающего электрона α, $\overline{\theta} = \overline{\theta}(\alpha)$. Эта зависимость, рассчитанная для случая гауссова импульса, изображена сплошными кривыми на рис. 2 и 3. Сплошная кривая на рис. 2 соответствует стандартным представлениям об эффекте Капицы—Дирака, согласно которым средний угол рассеяния отличен от нуля, только если начальный угол скольжения α близок к брэгговскому углу α_{Br}. В окрестности этих значений α сплошная кривая на рис. 2 имеет вид узких пиков с высотой $\pm(U_0\tau/\hbar)^2 2\pi\alpha_{Br}$ и шириной

$$\Delta\alpha = \frac{1}{\omega\tau v_0/c} = \alpha_{Br}\beta \ll \alpha_{Br},$$

где β — один из основных параметров квантовой теории эффекта Капицы—Дирака

$$\beta = \frac{mc^2/\hbar\omega}{\omega\tau}. \tag{19}$$

Как числитель, так и знаменатель дроби в правой части уравнения (19) велики, $mc^2/\hbar\omega \gg 1$ и $\omega\tau \gg 1$, и их отношение (параметр β) может быть как большим, так и малым. При $\omega = 3 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ значение $\beta = 1$ отвечает длительности взаимодействия $\tau \approx 10^{-10}$ с. Кривые на рис. 2 и 3 получены при $\beta \ll 1$ и $\beta \gg 1$, что при $\omega = 3 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ отвечает наносекундным и пикосекундным длительностям взаимодействия τ соответственно. При $\beta \ll 1$ в силу узости пиков кривой $\overline{\theta}(\alpha)$ слагаемые в фигурных скобках в правой части уравнений (17) и (18) не интерферируют друг с другом. Они могут быть отличны от нуля только по отдельности: первые слагаемые при $\alpha \approx -\alpha_{Br}$ и вторые — при $\alpha \approx \alpha_{Br}$. По мере уменьшения длительности взаимодействия (т. е. увеличения параметра β) пики кривой $\overline{\theta}(\alpha)$ уширяются, и в случае $\beta \gg 1$ ширина каждого из пиков становится значительно больше, чем расстояние между ними. В этих условиях, в отличие от случая $\beta \ll 1$, первые и вторые слагаемые уравнений (17) и (18) могут интерферировать и компенсировать друг друга, что существенно меняет структуру кривой $\overline{\theta}(\alpha)$ (рис. 3) и делает ее отличной от той, которая соответствует обычным представлениям об эффекте Капицы—Дирака. В целом при больших β пики кривой $\overline{\theta}(\alpha)$ становятся широкими и смещаются в область $|\alpha| \gg \alpha_{Br}$. Используя данное неравенство, можно преобразовать уравнения (17) и (18), разлагая фурье-образы квадрата огибающей поля (15) по степеням α_{Br} в определении $\nu_\pm$ (16). Преобразованное таким образом уравнение (17) принимает вид

$$\overline{\theta} \approx \left(\frac{U_0}{\hbar}\alpha_{Br}\right)^2 8\omega\frac{v_0}{c}\left.\frac{d\left|(f^2)_\nu\right|^2}{d\nu}\right|_{\nu=2\alpha\omega v_0/c}, \tag{20}$$

где по-прежнему $(f^2)_\nu$ определяется уравнением (15). В частном случае гауссовой функции $f(t)$ соответствующий результат может быть получен как из уравнения (20), так и непосредственно из уравнения (18) с помощью разложения по α_{Br}:

$$\overline{\theta} \approx -\left(\frac{U_0\tau^2\omega}{\hbar}\frac{v_0}{c}\alpha_{Br}\right)^2 16\pi\alpha \exp\left[-2\left(\omega\tau\frac{v_0}{c}\alpha\right)^2\right]. \tag{21}$$

В отличие от (17) и (18), правые части уравнений (20), (21) не зависит более от константы Планка $\hbar$ и могут рассматриваться как классический предел квантовой теории эффекта Капицы—Дирака. Результат (21) соответствует пунктирной кривой на рис. 3 (напомним, что сплошная кривая соответствует точной формуле (18)). Основные параметры кривой $\overline{\theta}(\alpha)$ (21) — это высота пиков $\pm\overline{\theta}_{max}$, их ширина $\Delta\alpha$ и место расположения $\mp\alpha_{cl}$:

$$\overline{\theta}_{max} = \left(\frac{U_0}{mv_0c}\omega\tau\right)^2 8\pi\omega\tau\frac{v_0}{c}\exp\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \Delta\alpha \sim \alpha_{cl} = \frac{1}{2\omega\tau v_0/c} = \frac{1}{2}\beta\alpha_{Br} \gg \alpha_{Br}. \tag{22}$$

3.2. Функция распределения электронов по углу рассеяния

Средний угол рассеяния электрона — это лишь одна из характеристик процесса рассеяния, которая может быть рассчитана как исходя из теории, так и из экспериментальных данных. По-видимому, всегда непосредственно в эксперименте измеряется функция распределения $F(\theta)$ рассеянных электронов по углам θ, или число электронов $F(\theta)d\theta$, регистрируемых детектором в заданном направлении θ в интервале углов $d\theta$. В рамках рассмотренной выше модели рассеяния плоской волны число электронов, имеющих импульс в интервале $[\mathbf{p}, \mathbf{p}+d\mathbf{p}]$, непосредственно связано с коэффициентами разложения $C(\mathbf{r}, t)$ волновой функции электрона $\Psi(\mathbf{r}, t)$ по плоским волнам (8):

$$\frac{dw}{d\mathbf{p}} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \left|C(\mathbf{p}, t \to +\infty)\right|^2. \tag{23}$$

Ввиду того что при малых изменениях импульса ($|\Delta p_z| \ll p_0$) $\Delta p_z \approx p_0\theta$ и $dp_z \approx p_0 d\theta$, плотность вероятности (23) может быть непосредственно связана с функцией распределения рассеянных по углам электронов

$$F(\theta) = \frac{dw}{d\theta} = \int d\mathbf{p}_\perp \frac{dw}{d\mathbf{p}_\perp d(p_z/p_0)} = \frac{p_0 V}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}_\perp \left|C(\mathbf{p}, t \to +\infty)\right|^2 \Big|_{p_z = p_0[\alpha+\theta]}, \tag{24}$$

где $d\mathbf{p}_\perp = dp_x dp_y$. При вычислении $C(\mathbf{p}, t)$ по теории возмущений и использовании выражений (11), (14) и т. п., символы Кронекера типа $\delta_{p,p'}$ выражаются через δ-функции Дирака с помощью соотношений вида

$$\delta_{p,p'} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'),$$

и в результате находим

$$F(\theta) = \left\{1 - \left(\frac{U_0}{\hbar}\right)^2 \left[\left|(f^2)_+\right|^2 + \left|(f^2)_-\right|^2\right]\right\} \delta(\theta) +$$
$$+ \left(\frac{U_0}{\hbar}\right)^2 \left[\left|(f^2)_+\right|^2 \delta(\theta - 2\alpha_{Br}) + \left|(f^2)_-\right|^2 \delta(\theta + 2\alpha_{Br})\right], \tag{25}$$

где, по-прежнему, фурье-образы квадрата огибающей поля $(f^2)_\pm$ определяются уравнениями (15) и (16). Заметим, что возникновение сингулярностей в функции распределения связано с неограниченностью области интегрирования по z. Реально размер этой области может ограничиваться, например, расстоянием между зеркалами или длиной фокуса L. В результате δ-функции в уравнении (25) и далее заменятся на функции конечной, но малой ширины $\delta\theta \sim \hbar/Lp_0$.

Функция распределения (25) удовлетворяет очевидным требованиям: она нормирована на единицу

$$\int F(\theta)d\theta = 1,$$

и средний угол рассеяния, вычисленный с помощью (25),

$$\overline{\theta} = \int \theta F(\theta) d\theta,$$

совпадает с ранее полученным выражением (17). Но, разумеется, функция распределения несет в себе значительно большую информацию о свойствах процесса рассеяния.

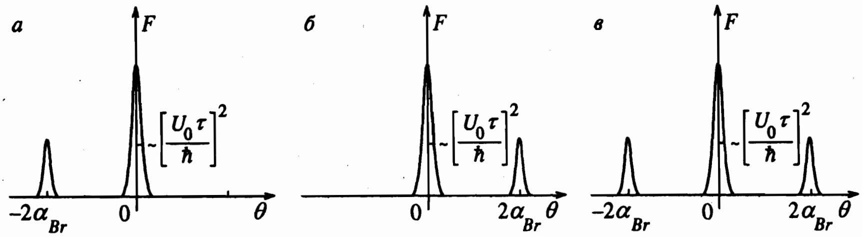

Рис. 4. Функция распределения рассеянных электронов, найденная из квантовой теории при: $\beta \ll 1$, $\alpha = \alpha_{Br}$ (*а*); $\beta \ll 1$, $\alpha = -\alpha_{Br}$ (*б*) и $\beta \gg 1$ (*в*)

В частности, с помощью $F(\theta)$ могут быть легко вычислены любые моменты угла рассеяния, например, средний квадрат угла рассеяния

$$\overline{\theta^2} = \int \theta^2 F(\theta) d\theta = \left(\frac{U_0}{\hbar}\right)^2 4\alpha_{Br}^2 \left[\left|(f^2)_+\right|^2 + \left|(f^2)_-\right|^2\right] \tag{26}$$

и т. д.

Функция распределения (25) изображена на рис. 4 в трех случаях: при $\beta \ll 1$, $\alpha = \alpha_{Br}$ (*а*), $\beta \ll 1$, $\alpha = -\alpha_{Br}$ (*б*) и $\beta \gg 1$ (*в*). В первых двух случаях имеется один единственный дополнительный пик (по сравнению с основным, отвечающим отсутствию рассеяния) и только при выполнении брэгговских условий $\alpha = \alpha_{Br}$ или $\alpha = -\alpha_{Br}$. В третьем случае ($\beta \gg 1$) в весьма широком диапазоне изменения α (вплоть до $|\alpha| \sim \alpha_{cl} \gg \alpha_{Br}$) в функции распределения $F(\theta)$ представлены оба дополнительных пика, причем их высоты соизмеримы по величине (они в точности равны по высоте только при $\alpha = 0$, когда вследствие этого $\overline{\theta} = 0$).

4. РАССЕЯНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОНА НА СТОЯЧЕЙ ВОЛНЕ

4.1. Средний угол рассеяния

В рамках классического подхода, рассматривая усредненный по времени гамильтониан (5) как классическую функцию Гамильтона с потенциальной энергией H_{int} (6), находим одномерное уравнение Ньютона, описывающее движение электрона в поле стоячей волны в направлении $z \parallel \mathbf{k}$,

$$m\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = 4kU(t)\sin\left(2kz(t)\right), \tag{27}$$

где $U(t)$ — пондеромоторный потенциал (7). Начальные условия к уравнению (27) задаем в некоторый отдаленный момент времени t_0 до начала взаимодействия с полем:

$$z(t_0) = z_0, \quad \dot{z}(t_0) = v_{0z}, \tag{28}$$

где z_0 — начальная координата, а v_{0z} — начальная скорость электрона в направлении z. При этом скорость движения электрона в перпендикулярном направлении x тождественно равна константе и $x(t) \equiv x_0 + v_{0x}(t - t_0)$. Как нетрудно убедиться, уравнение

(27) эквивалентно интегральному уравнению вида

$$z(t) = z_0 + v_{0z}(t - t_0) + \frac{4k}{m}\int_{t_0}^{t}(t - t')U(t')\sin\left(2kz(t')\right)dt'. \tag{29}$$

В приближении слабого поля ищем решение уравнения (29) методом итераций по взаимодействию, т. е. в виде ряда по степеням $U(t)$:

$$z^{(0)}(t) = z_0 + v_{0z}(t - t_0),$$

$$z^{(1)}(t) = \frac{4k}{m}\int_{t_0}^{t}(t - t')U(t')\sin\left(2kz^{(0)}(t')\right)dt', \tag{30}$$

$$z^{(2)}(t) = \frac{8k^2}{m}\int_{t_0}^{t}(t - t')U(t')z^{(1)}(t')\cos\left(2kz^{(0)}(t')\right)dt'$$

и т. д.

Угол рассеяния классической частицы θ определяется направлением ее скорости после рассеяния. В приближении малых углов рассеяния

$$\theta = \frac{\dot{z}(t \to \infty) - v_{0z}}{v_0}\cos(\alpha), \tag{31}$$

где $v_0 = (v_{0x}^2 + v_{0z}^2)^{1/2}$ — полная начальная скорость электрона, а α, как и прежде — угол скольжения до рассеяния (см. рис. 1). Используя формулы теории возмущений (30) для координаты z и определение (31), нетрудно найти и соответствующие явные выражения для угла рассеяния. В первом порядке теории возмущений результат вычислений имеет вид

$$\theta^{(1)}(t) = \theta_m(t)\sin(2kz_0 - \varphi), \tag{32}$$

где

$$\theta_m(t) = \frac{4\omega U_0}{mv_0c}\left|\int_{t_0}^{t}dt' f^2(t')\exp\left(2i\alpha\omega\frac{v_0}{c}\right)\right|,$$

$$\varphi(t) = 2kv_{0z}t_0 - \arcsin\left[\int_{t_0}^{t}dt' f^2(t')\sin\left(2\alpha\omega\frac{v_0}{c}\,t'\right) \Big/ \int_{t_0}^{t}dt' f^2(t')\cos\left(2\alpha\omega\frac{v_0}{c}\,t'\right)\right]. \tag{33}$$

В случае гладкой огибающей поля, задаваемой четной функцией $f(t)$, при $t \to \infty$ и $t_0 \to -\infty$ уравнения (33) существенно упрощаются:

$$\theta_m = \frac{4\omega U_0}{mv_0c}\left|(f^2)_\nu\right|_{\nu=2\alpha\omega v_0/c}, \quad \varphi = 2kv_{0z}t_0, \tag{34}$$

где, как и прежде, $(f^2)_\nu$ — фурье-образ квадрата огибающей $f(t)$ (15).

При заданных начальных условиях (28) в классике угол рассеяния θ (31) определен однозначно. Разброс по углам рассеяния возникает при переходе от рассмотрения движения одной частицы к рассеянию пучка частиц, каким-то образом распределенных по начальным параметрам z_0 и v_{0z}. Пусть в падающем пучке v_{0z} = const, а значения начальной координаты z_0 равнораспределены на интервале периодичности пондеромоторного потенциала (7) $\lambda/2$. По определению, средний угол рассеяния частиц пучка равен

$$\overline{\theta}_{cl} = \langle\theta(z_0, t\to\infty)\rangle_{z_0} = \left\langle \frac{\dot z(t\to\infty) - v_{0z}}{v_0}\right\rangle_{z_0} = \int\limits_0^{\lambda/2} \frac{dz_0}{\lambda/2}\,\frac{\dot z(t\to\infty) - v_{0z}}{v_0}. \tag{35}$$

Легко видеть, что в первом порядке теории возмущений по U_0 подстановка $\theta^{(1)}$ (32) в уравнение (35) и усреднение по z_0 дают нуль. Отличный от нуля средний угол рассеяния возникает только во втором порядке по U_0. Ввиду громоздкости общих формул приведем только выражение для угла рассеяния второго порядка, усредненное по z_0:

$$\overline{\theta^{(2)}_{cl}} = \frac{8k^3U_0^2}{m^2v_0}\,\frac{d}{d\nu}\left|(f^2)_\nu\right|^2\Big|_{\nu=2\alpha\omega v_0/c}, \tag{36}$$

что эквивалентно результату (20), полученному в предыдущем разделе в классическом пределе квантовой теории рассеяния плоской волны. Следует отметить, что в квантовой теории рассеяния плоской волны классический предел (20) получается только в приближении $\beta \gg 1$, где β — параметр, определенный уравнением (19). В классической теории рассеяния, вообще говоря, такого ограничения нет. Можно сказать, что классическая теория рассеяния распространяет результат (20), определенный ранее как классический предел квантовой теории, на весь интервал больших и малых значений параметра β. При этом, если в области $\beta \gg 1$ классика и квантовая теория рассеяния плоской волны дают одинаковые результаты (20) и (36), то в противоположном случае, $\beta \ll 1$, результаты квантовой (см. (17), (18)) и классической (см. (36)) теорий существенно различны, что явно видно из рис. 2, где сплошная и штриховая кривые — это зависимости $\overline{\theta}(\alpha)$, полученные из квантового и классического рассмотрений. Нам представляется, что указанное различие между результатами квантового и классического анализа может быть устранено, если в квантовой теории рассматривать рассеяние волновых пакетов, а не плоских волн [14–17]. При этом, если ширина волнового пакета мала по сравнению с $\lambda/2$ и если такой пакет не расплывается за время взаимодействия τ, результаты квантовомеханического решения задачи должны существенно отличаться от описанных в предыдущем разделе и полностью соответствовать классике при любых β. Решение квантовой задачи об эффекте Капицы—Дирака в терминах электронных волновых пакетов будет описано отдельно.

4.2. Классическая функция распределения электронов по углу рассеяния

В пучке классических электронов с однородным распределением по начальным координатам z_0 число электронов, имеющих значение координаты z в интервале от z_0 до $z_0 + dz_0$, очевидно, равно

$$dN(z_0) = N_0\frac{dz_0}{\lambda/2}, \tag{37}$$

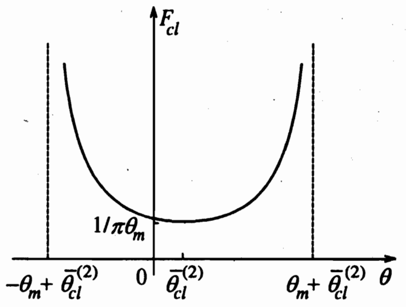

Рис. 5. Функция распределения рассеянных электронов, найденная из классической теории (40)

где N_0 — полное число электронов на интервале периодичности $\lambda/2$. До рассеяния (при $t = t_0$) все электроны пучка имеют одинаковую скорость v_0 и одинаковый угол скольжения α. Ввиду сохранения числа частиц, после рассеяния то же самое число электронов (37) будет иметь скорость v, направление которой соответствует интервалу углов $[\theta, \theta + d\theta]$:

$$dN(\theta) \cong N_0 F_{cl}(\theta) d\theta = \frac{N_0 d\theta}{\lambda/2} \sum_i \left| \frac{dz_0^{(i)}(\theta)}{d\theta} \right| = \frac{N_0 d\theta}{\lambda/2} \sum_i \frac{1}{|(d\theta(z_0)/dz_0)^{(i)}|}, \tag{38}$$

где $F_{cl}(\theta)$ — классическая функция распределения, $z_0(\theta)$ — функция, обратная $\theta(z_0)$. Эта функция может быть неоднозначной (см. ниже), в связи с чем в определениях (38) возникает сумма по i, где $i = 1, 2$ — номер решения уравнения $\theta = \theta(z_0)$ относительно z_0. Явный вид зависимости $\theta(z_0)$ определяется уравнением первого порядка теории возмущений по U_0 (34) с добавлением поправочного слагаемого, учитывающего вклад второго порядка в средний угол рассеяния (36):

$$\theta = \theta_m \sin(2kz_0 - \varphi) + \overline{\theta_{cl}^{(2)}}, \tag{39}$$

где θ_m и φ определены уравнениями (34). С помощью определения (38) и уравнения (39) для $\theta(z_0)$ в конечном итоге находим функцию распределения $F_{cl}(\theta)$ пучка классических электронов, рассеянных на стоячей волне:

$$F_{cl}(\theta) = \frac{1}{\pi \sqrt{\theta_m^2 - \left(\theta - \overline{\theta_{cl}^{(2)}}\right)^2}} \tag{40}$$

на интервале углов $-\theta_m + \overline{\theta_{cl}^{(2)}} < \theta < \theta_m + \overline{\theta_{cl}^{(2)}}$ и $F_{cl}(\theta) = 0$ вне этого интервала. Функция $F_{cl}(\theta)$ (40) изображена на рис. 5. Она, очевидно, разительно отличается от функции распределения, возникающей в модели рассеяния плоской волны (рис. 4). Поэтому прямое измерение углового распределения рассеянных электронов может служить источником информации о применимости той или иной модели. Функция распределения (40) нормирована на единицу. Она дает правильное значение среднего угла рассеяния, $\overline{\theta} = \overline{\theta_{cl}^{(2)}}$ (36). Функция $F_{cl}(\theta)$ асимметрична: она сдвинута как целое на $\overline{\theta_{cl}^{(2)}}$ относительно $\theta = 0$, и именно этой асимметрией обусловлено то, что средний угол рассеяния не равен нулю. С уменьшением напряженности поля ширина $2\theta_m$ области локализации $[-\theta_m+\overline{\theta_{cl}^{(2)}}, \theta_m+\overline{\theta_{cl}^{(2)}}]$ функции распределения $F_{cl}(\theta)$ (40) уменьшается пропорционально $U_0 \propto \varepsilon_0^2$, в то время как степень ее асимметрии уменьшается еще быстрее, пропорционально $U_0^2 \propto \varepsilon_0^4$. В силу нормировки на единицу отсюда следует, что в пределе $\varepsilon_0 \to 0$ функция $F_{cl}(\theta)$ превращается в $\delta(\theta)$, что соответствует отсутствию рассеяния в бесконечно слабом поле.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сформулируем кратко и обсудим основные полученные результаты.

1. В рамках квантовомеханического анализа рассеяния электрона на стоячей световой волне при задании начальной волновой функции электрона в виде плоской волны выявлены два разных режима рассеяния, различающихся по величине параметра β (19). Область $\beta \ll 1$ соответствует хорошо известной картине брэгговского рассеяния: рассеяние эффективно, только если начальный угол скольжения электрона α близок к брэгговскому углу, $\alpha = -\alpha_{Br}$ или $\alpha = \alpha_{Br}$, а зависимость от α среднего угла рассеяния $\overline{\theta}(\alpha)$ электрона имеет вид кривой с узкими пиками, локализованными в точках $\mp\alpha_{Br}$ (сплошная кривая на рис. 2). Напротив, в области $\beta \gg 1$ реализуется классический предел квантовой теории рассеяния. При этом пропадает резкая зависимость угла рассеяния от начального угла скольжения электрона. Зависимость $\overline{\theta}(\alpha)$ характеризуется гладкой и широкой кривой (сплошная кривая на рис. 3), максимум и минимум которой отвечают значениям α, по модулю значительно превышающим α_{Br}. В пределе очень больших β результат квантовомеханического расчета в модели рассеяния плоской волны перестает зависеть от константы Планка $\hbar$.

2. Выполнен классический расчет среднего угла рассеяния на стоячей волне пучка электронов, равнораспределенных по начальной поперечной координате z_0. Полученный результат совпадает с классическим пределом квантовой теории рассеяния электрона, начальная волновая функция которого задается плоской волной. Классическое рассмотрение не ограничено какими-либо предположениями о величине квантового параметра β. В области $\beta \gg 1$ результаты классического и квантового рассмотрения совпадают (рис. 3). Напротив, в области $\beta \ll 1$ эти результаты существенно различны, что ясно видно из рис. 2.

3. Еще более яркие различия между классической и квантовой теориями проявляются для найденной функции распределения рассеянных электронов (рис. 4 и 5). Из сказанного следует вывод о том, что на основании прямого экспериментального измерения углового распределения рассеянных электронов может сделать вывод о том, какая модель рассеяния плоской волны более адекватна для данного пучка электронов: классическая или квантовая.

Согласно сказанному выше, при $\beta \ll 1$ выводы о применимости или неприменимости той или иной модели могут быть сделаны и на основании измерения зависимости среднего угла рассеяния от начального угла скольжения $\overline{\theta}(\alpha)$. В квантовой модели рассеяния плоской волны узкие пики кривой $\overline{\theta}(\alpha)$ должны иметь место при $\alpha = \mp\alpha_{Br}$, а в классической теории — при значительно меньших значениях α, $\alpha = \mp\alpha_{cl} = \mp\beta\alpha_{Br}$ (22) (см. рис. 2), где $\beta\alpha_{Br} \ll \alpha_{Br}$.

Нам представляется, что причина указанных различий состоит именно в использовании плоской волны в качестве начальной волновой функции электрона в существующем варианте квантовой теории. Альтернативным вариантом квантовой теории является описание начального состояния электрона в виде локализованного волнового пакета [14]. Если размер пакета меньше, чем масштаб неоднородности $\lambda/2$, и если такой пакет не расплывается за время взаимодействия τ, следует ожидать полного совпадения результатов классического и квантового описаний. В полной мере эта программа еще не реализована и требует отдельного рассмотрения.

В терминах волновых пакетов предложенный и описанный выше эксперимент по измерению углового распределения рассеянных электронов и зависимости $\overline{\theta}(\alpha)$ может рассматриваться как способ измерения размера волнового пакета Δr. Если результаты измерений близки к предсказаниям классической теории, то, следовательно, $\Delta r \ll \lambda/2$. Если же результаты измерений близки к тому, что следует из квантовой теории рассеяния плоской волны, то это может рассматриваться как свидетельство того, что размер пакета очень велик, $\Delta r \gg \lambda/2$.

Размер волнового пакета для электронов пучка — это параметр, который обычно никак не проявляется и не обсуждается. Электроны в пучке рассматриваются либо как ансамбль классических точечных объектов (с размером порядка классического радиуса электрона $r_0 = e^2/mc^2 \approx 2.5 \cdot 10^{-13}$ см), либо как квантовая плоская волна. В данной работе, во-первых, обращается внимание на то, что эти два описания не эквивалентны и, во-вторых, предлагается эксперимент, который позволяет делать заключения о величине скрытого параметра электронов в пучке — размере квантового волнового пакета, характеризующего их состояние до рассеяния.

Поясним, наконец, в чем состоит специфика стоячей волны по сравнению с другими объектами, на которых может происходить рассеяние электронов. Масштаб неоднородности в стоячей волне $\lambda/2$ в оптическом диапазоне длин волн имеет порядок микрона ($\sim 10^{-4}$ см), что намного больше, чем в случае рассеяния на атомных мишенях. Именно это обстоятельство делает разумной постановку вопроса о рассеянии локализованных волновых пакетов с размером $\Delta r < \lambda/2$. При меньших размерах мишени и волнового пакета последний очень быстро «расплывается», вследствие чего условие $\Delta r < \lambda/2$ перестает выполняться. Например, волновой пакет атомного размера a ($\sim 10^{-8}$ см) расплывается за атомное время ($\sim 10^{-16}$ с). Поэтому при рассеянии электронов на атомах всегда $\Delta r \gg a$, и состояние падающих электронов можно аппроксимировать плоской волной. Напротив, волновые пакеты микронного размера не расплываются достаточно долго ($\sim 10^{-8}$ с), что делает возможной реализацию как случая $\Delta r > \lambda/2$, так и $\Delta r < \lambda/2$. Более того, в настоящее время существуют вполне реальные способы создания таких электронных волновых пакетов строго контролируемым образом. Один из таких способов — это многофотонная ионизация атомов лазерным полем. При этом размер образующихся в континууме волновых пакетов может определяться, например, длительностью импульса ионизирующего излучения. Эффективность такой схемы формирования локализованных волновых пакетов была продемонстрирована в эксперименте [10], где наблюдалось рассеяние полученных таким путем электронов на пондеромоторном потенциале в фокусе второго лазера. Возможно, что именно такая схема окажется наиболее удобной и для исследования описанных выше особенностей рассеяния на стоячей волне.

Литература

1. P. L. Kapitza and P. A. M. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc. **29**, 297 (1933).
2. М. В. Федоров, ЖЭТФ **52**, 1434 (1967).
3. М. В. Федоров, *Электрон в сильном световом поле*, Наука, Москва (1991), с. 45.
4. L. S. Bartell, J. Appl. Phys. **38**, 1561 (1967).
5. L. S. Bartell, R. R. Roskos, and H. B. Thompson, Phys. Rev. **166**, 1494 (1968).
6. Y. Takeda and I. Matsui, J. Phys. Soc. Jap. **15**, 1202 (1968).
7. H. C. Pfeiffer, Phys. Lett. A **26**, 326 (1968).
8. H. Schwarz, Phys. Lett. A **43**, 457 (1973).
9. L. S. Bartell, Phys. Lett. A **27**, 236 (1968).
10. P. H. Bucksbaum, M. Bashkansky, and T. J. McIlrath, Phys. Rev. Lett. **58**, 349 (1987).
11. P. H. Bucksbaum, D. W. Schumacher, and M. Bashkansky, Phys. Rev. Lett. **61**, 1182 (1988).
12. C. I. Moore, J. P. Knauer, and D. D. Meyerhofer, Phys. Rev. Lett. **74**, 2439 (1995).
13. Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Физматгиз, Москва (1963), гл. 3.
14. E. Schrödinger, Naturwissenschaften **28**, 664 (1926).
15. M. V. Fedorov, S. P. Goreslavsky, and V. S. Letokhov, Phys. Rev. E **55**, 1015 (1997).
16. V. G. Minogin, M. V. Fedorov, and V. S. Letokhov, Opt. Commun. **140**, 250 (1997).
17. D. R. Bitouk and M. V. Fedorov, Optics Express **2**, 404 (1998); Laser Phys. **8**, 544 (1998); Phys. Rev. A **58**, 1195 (1998).