ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 3(9), стр. 858–869

ВЫНУЖДЕННОЕ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ

*Р. А. Исмаилов, А. Я. Казаков**

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения 190000, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 17 марта 1999 г.

Если N атомов взаимодействуют одновременно с квазирезонансными классическим и квантованным полями, между модами происходит обмен фотонами. Этот процесс обладает кооперативными свойствами: число фотонов в квантованной моде осциллирует, и амплитуда этих осцилляций пропорциональна N^2.

PACS: 42.50.Fx

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть двухуровневый атом взаимодействует одновременно с классической и квантованной модами, квазирезонансными частоте атомного перехода. Как было показано в [1–3], в такой системе происходит обмен фотонами между классической и квантованной модами. Разумеется, аналогичный обмен будет происходить и в том случае, когда с обеими модами взаимодействует одновременно N одинаковых атомов. При этом возникает естественный вопрос: будут ли при этом проявляться кооперативные свойства? В данной работе мы покажем, что ответ на этот вопрос положительный. Именно, динамика системы N атомов + классическое поле + квантованное поле обнаруживает определенное сходство с явлением сверхизлучения [4]. Так, число фотонов в квантованной моде осциллирует, и амплитуда этих осцилляций пропорциональна N^2. Вместе с тем, в отличие от «обычного» сверхизлучения, частота осцилляций не зависит от N.

На физическом уровне подобная система может быть реализована с помощью цепочки атомов. При этом направление распространения классического поля и ось резонатора квантованной моды мы полагаем ортогональными линии, на которой расположены атомы. Предполагается, что атомы находятся, с одной стороны, достаточно далеко друг от друга, чтобы пренебречь их непосредственным взаимодействием. С другой стороны, они должны находиться достаточно близко друг к другу, чтобы считать, что они одинаковым образом взаимодействуют с классическим и квантованным полями.

Будем рассматривать соответствующую задачу в рамках картины Шредингера. Основу нашего подхода составляет соответствующим образом модифицированная модель Джейнса—Каммингса. Разумеется, воздействие на атомы классической компоненты поля намного существенней, чем воздействие квантованной компоненты. При

*E-mail: akaz@phsc2.stu.neva.ru

этом эволюцию атомов можно разделить на две части: «быструю», связанную со взаимодействием атомов с классической компонентой, и «медленную», связанную со взаимодействием их с квантованной компонентой. Иными словами, мы полагаем (и это предположение достаточно естественно), что R — параметр Раби классического поля — значительно превосходит R_q — эффективный параметр Раби квантованной моды. Это условие дает возможность отделить быструю часть динамики атомов от медленной. Для этого мы используем надлежащую процедуру усреднения (более подробное ее обсуждение см. в [3, 5]) и с ее помощью выведем усредненный (по быстрым осцилляциям) гамильтониан, управляющий медленной эволюцией системы. (С формальной точки зрения, мы используем подходящую версию теории возмущений и строим старший член решения начальной задачи по малому параметру R_q/R.) При этом усредненный гамильтониан в физически интересных ситуациях имеет простую структуру — он распадается в произведение одномерного фоковского оператора и матричного оператора. Этот факт позволяет свести построение решения задачи при любом N к решению набора одномерных задач (по существу, к решению аналогичной задачи для $N = 1$). Поэтому мы начинаем изложение с описания необходимых нам результатов работы [3], в которой обсуждался случай $N = 1$, а затем на этой основе обсудим ситуацию с произвольным числом атомов.

2. СЛУЧАЙ $N = 1$

2.1. Основные положения

Рассмотрим сначала вкратце случай $N = 1$. Исходным для нас является гамильтониан

$$H = \omega a^+ a + \kappa J_0 + \zeta(a^+ J_- + a J_+) + \mu \left[J_- \exp(i\Omega t) + J_+ \exp(-i\Omega t)\right], \tag{1}$$

где a^+ и a — операторы рождения и уничтожения квантованной моды, ω — частота этой моды, Ω — частота классической моды, параметр μ мы будем (допуская определенную неточность) называть параметром Раби классического поля. Матрицы

$$J_0 = \mathrm{diag}\{1, -1\}, \quad J_- = J_+^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

описывают двухуровневый атом и его взаимодействие с внешним квазирезонансным полем. Они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left[a, a^+\right] = 1, \quad \left[J_0, J_-\right] = -2J_-, \quad [J_0, J_+] = 2J_+.$$

Параметр ζ характеризует взаимодействие атома с квантованной модой. Волновая функция системы подчиняется уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi. \tag{2}$$

Гамильтониан (1) выписан в рамках приближения вращающейся волны. Таким образом, мы полагаем, что оптическая частота значительно превосходит все другие частотные параметры нашей задачи. Подобные модели (в более частных предположениях типа $\omega = \Omega$ или $\omega = 2\kappa = \Omega$) использовались в работах [6–8] в другом физическом контексте: квантованная мода рассматривалась как пробное поле для состояния атома.

Замечание. Мы полагаем, что классическое поле монохроматично. Как показано в [3], использование полихроматического классического поля (т. е. многочастотного поля, гармоники которого расположены эквидистантно) не приводит к возникновению новых по сравнению с монохроматическим полем ситуаций.

2.2. Усреднение по быстрым осцилляциям

Наша ближайшая цель — выписать усредненный по быстрым осцилляциям гамильтониан, который управляет медленной частью эволюции системы. В качестве первого шага мы используем известное преобразование:

$$\Psi(t) = \exp\left[-i\omega t(a^+a + J_0/2)\right]\Phi(t). \tag{3}$$

Это преобразование отделяет оптическую частоту, и мы получаем

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \left\{\left(\kappa-\frac{\omega}{2}\right)J_0+\zeta(a^+J_-+aJ_+)+\mu\left[J_-\exp\left(-i(\omega-\Omega)t\right) + J_+\exp\left(i(\omega-\Omega)t\right)\right]\right\}\Phi. \tag{4}$$

Далее, пусть 2×2-матрица $\Xi(t)$ будет решением следующей начальной задачи:

$$i\frac{d}{dt}\Xi = \left\{\left(\kappa-\frac{\omega}{2}\right)J_0 + \mu\left[J_-\exp\left(-i(\omega-\Omega)t\right) + J_+\exp\left(i(\omega-\Omega)t\right)\right]\right\}\Xi, \tag{5}$$

$$\Xi(0) = I, \tag{6}$$

где I — единичная 2×2-матрица. Нетрудно выписать эту матрицу в явном виде:

$$\Xi(t) = \exp\left[i(\omega-\Omega)tJ_0/2\right]U\exp\left[-iRtJ_0\right]U^{-1},$$

$$U = \begin{pmatrix} \mu & \Delta - R \\ R-\Delta & \mu \end{pmatrix}, \quad R = \sqrt{\mu^2+\Delta^2}, \quad \Delta = \kappa - \Omega/2.$$

Мы ищем решение уравнения (4) в виде

$$\Phi(t) = \Xi(t)\varphi(t). \tag{7}$$

Используя соотношение (5), получаем уравнение для $\varphi(t)$:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \zeta\Xi^{-1}(t)(a^+J_- + aJ_+)\Xi(t)\varphi(t). \tag{8}$$

Таким образом, мы переходим от волновой функции $\Phi(t)$ к функции $\varphi(t)$ с помощью подстановки

$$\Phi(t) = \exp\left[-i\omega t(a^+a + J_0/2)\right]\Xi(t)\varphi(t),$$

причем, как следует из (6),

$$\varphi(0) = \Phi(0).$$

Уравнение (8) «проще», чем (2), так как его правая часть пропорциональна малому параметру R_q. Этот факт дает возможность применить подходящую асимптотическую процедуру для построения его решения.

Обсудим физический смысл приведенных выше преобразований. Матрица $\Xi(t)$ представляет собой решение задачи об эволюции двухуровневого атома под воздействием классического поля. При этом функция $\phi(t)$ описывает медленную часть эволюции системы, вызванную взаимодействием атома с квантованным полем. Таким образом, соотношение (7) представляет нашу волновую функцию в виде произведения «быстрого» и «медленного» сомножителей. Иными словами, оно означает, что мы переходим к представлению нашей волновой функции с помощью базиса «одетых классическим полем» состояний атома.

Отделяя быстрые осцилляции, связанные с воздействием классического поля, получаем

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \zeta \left\langle \Xi^{-1}(t)(a^+J_- + aJ_+)\Xi(t)\right\rangle \varphi(t). \tag{9}$$

Здесь $\langle ... \rangle$ означает, что мы опускаем быстрые гармоники. Именно здесь (в неявной форме, более точное описание см. в [3, 5]) используется тот факт, что $R_q \ll R$.

Простые вычисления, которые мы опускаем, приводят к выводу, что оператор $\Xi^{-1}(t)(a^+J_- + aJ_+)\Xi(t)$ содержит только гармоники с частотами $\pm(\omega-\Omega)$, $\pm(\omega-\Omega\pm 2R)$. Если эти частоты порядка R, то им соответствуют быстрые гармоники и их следует отбросить при усреднении, оставляя только медленные гармоники. Мы рассмотрим следующую ситуацию, когда процедура усреднения дает нетривиальный эффект: $|\omega - \Omega| = |2\nu| \ll R$. Оставляя только эти медленные гармоники в правой части (9), получаем для старшего члена асимптотики по малому параметру $(\nu, R_q)/R$:

$$H_{av} = \rho\left(a^+e^{2i\nu t} + ae^{-2i\nu t}\right)UJ_0U^{-1},$$

где $\rho = \zeta\mu(R-\Delta)/D$, $D = \mu^2 + (R-\Delta)^2$. Как следует из последнего соотношения, в этом случае динамика системы после разложения по базису матрицы UJ_0U^{-1} расцепляется на две одномерные задачи.

Есть еще две возможности, когда усреднение правой части (9) дает ненулевой вклад, при другом выборе медленных гармоник. При этом мы получаем гамильтониан стандартной модели Джейнса—Каммингса. Мы не будем здесь обсуждать соответствующие ситуации.

2.3. Частный случай

Рассмотрим сначала одну из упомянутых выше одномерных задач. Обсудим динамику системы, управляемой гамильтонианом

$$H_1 = \rho\left[a^+\exp(2i\nu t) + a\exp(-2i\nu t)\right].$$

Мы используем представление Фока—Баргманна [9], так что $a^+ \to z$, $a \to D_z$, D_z означает дифференцирование по z. В результате мы сводим эту одномерную задачу к решению уравнения в частных производных:

$$i\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial t} = \rho\left[z\exp(2i\nu t) + \exp(-2i\nu t)D_z\right]\varphi(z,t). \tag{10}$$

Решение уравнения (10) описывается соотношением

$$\varphi(z,t) = \exp\left\{\frac{z\rho}{2\nu}[1-\exp(2i\nu t)] + \frac{\rho^2}{4\nu^2}[\exp(-2i\nu t)+2i\nu t-1]\right\}\times \\ \times Q\left[z+\frac{\rho}{2\nu}(\exp(-2i\nu t)-1)\right]. \qquad (11)$$

При этом функция $Q(z)$ описывает начальное распределение фотонов в квантованной моде. Именно, $Q(z)=\Phi_0(z)$. При $\nu=0$ выражение (11) переходит в

$$\varphi(z,t) = \exp\left(-i\rho zt-\rho^2t^2/2\right)Q(z-i\rho t).$$

Согласно [9], для оператора $G=(a^+a)^m$ имеем

$$\langle G\rangle = \int dzd\overline{z}\exp[-z\overline{z}]\overline{\varphi(z,t)}G\varphi(z,t). \qquad (12)$$

Соотношения (11), (12) позволяют вычислить динамику любой физической переменной при любых начальных данных. Обсудим ситуацию, когда квантованная мода в начальном состоянии содержит ровно m фотонов, а состояние атома является собственным вектором матрицы UJ_0U^{-1}. Ее собственные значения равны ±1. Для случая, когда собственное значение равно 1, получим[1)],

$$\varphi(z,t) = \frac{1}{\sqrt{m!}}\exp\left\{\frac{z\rho}{2\nu}[1-\exp(2i\nu t)] + \right. \\ \left. + \frac{\rho^2}{4\nu^2}[\exp(-2i\nu t)+2i\nu t-1]\right\}\left\{z+\frac{\rho}{2\nu}[\exp(-2i\nu t)-1]\right\}^m. \qquad (13)$$

Для числа фотонов в квантованной моде мы получаем следующее выражение:

$$\langle n(t)\rangle = \langle a^+a\rangle = m + \frac{\rho^2\sin^2(\nu t)}{\nu^2}.$$

При $\nu=0$, т. е. при точном совпадении частот классического и квантованного полей, получаем

$$\langle n(t)\rangle = m+\rho^2t^2.$$

Наши результаты позволяют вычислить квантово-статистические характеристики квантованного излучения, а также рассмотреть случай, когда начальное состояние является когерентным [3].

2.4. Общий случай

Обсудим теперь ситуацию, когда начальное состояние не является собственным вектором оператора UJ_0U^{-1}. Нетрудно вычислить собственные векторы этого оператора, ортогональные друг другу:

[1)] Результаты для другого случая можно получить с помощью соответствующей замены знака.

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{pmatrix} \mu \\ R-\Delta \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{D}} \begin{pmatrix} \Delta - R \\ \mu \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_k = (-1)^{k+1}$, $k = 1, 2$ есть соответствующие собственные значения. Мы ищем решение уравнения Шредингера с гамильтонианом H_{av} в виде линейной комбинации

$$\varphi(t) = \eta_1(t)e_1 + \eta_2(t)e_2,$$

где функции $\eta_k(t)$, $k = 1, 2$, принимают значения в фоковском пространстве. Для этих функций получаем следующий аналог уравнения (10):

$$i\frac{\partial \eta_k(t)}{\partial t} = \varepsilon_k \rho \left[a^+ \exp(2i\nu t) + a \exp(-2i\nu t)\right] \eta_k(t).$$

Решение этих уравнений (в рамках представления Фока—Баргманна) по существу описано выше, так что

$$\eta_k(z,t) = \exp\left\{ \frac{\varepsilon_k \rho z}{2\nu} [1 - \exp(2i\nu t]) + \frac{\rho^2}{4\nu^2} [\exp(-2i\nu t) + 2i\nu t - 1] \right\} \times$$
$$\times Q_k \left(z + \frac{\varepsilon_k \rho}{2\nu} [\exp(-2i\nu t) - 1] \right),$$

причем функции $Q_k(z)$ определяются из начальных значений. Если

$$\varphi(z, 0) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) \\ \varphi_2(z) \end{pmatrix},$$

то

$$Q_1(z) = \frac{\mu\varphi_1(z) + (R-\Delta)\varphi_2(z)}{\sqrt{D}}, \quad Q_2(z) = \frac{\mu\varphi_2(z) + (\Delta - R)\varphi_1(z)}{\sqrt{D}}.$$

Для оператора $G = (a^+a)^m$, действующего в фоковском пространстве, вычислить его значение можно согласно соотношению

$$\langle G \rangle = \sum_{k=1,2} \int dz\, d\bar{z} \exp[-z\bar{z}]\, \overline{\eta_k(z,t)} G \eta_k(z,t).$$

3. СЛУЧАЙ $N > 1$

3.1. Основные положения

Если наша система содержит $N > 1$ одинаковых двухуровневых атомов, в качестве пространства состояний мы рассматриваем

$$L = F \otimes C^2 \otimes C^2 \ldots \otimes C^2,$$

причем фоковское пространство F описывает состояния квантованной моды, а N экземпляров C^2 описывают состояния атомов. Таким образом, L есть множество линейных комбинаций векторов вида $f|v_1 v_2 \ldots v_N\rangle$, где $f \in F$, а v_k, $k = 1, 2, \ldots N$, — двумерные векторы (допуская некоторую вольность, будем называть их «компонентами» вектора $|v_1v_2...v_N\rangle$). Будем использовать в $C^2 \otimes C^2 ... \otimes C^2$ базис из векторов $|e_{k_1}e_{k_2}...e_{k_N}\rangle$, где $k_m = 1, 2$.

Определим операторы $J_0^{(m)}$, $J_\pm^{(m)}$, $\Xi^{(m)}(t)$, $1 \le m \le N$, следующим образом: они действуют на m-ю компоненту вектора $|v_1v_2...v_N\rangle$ как операторы, соответственно, $J_0, J_\pm, \Xi(t)$, не изменяя других компонент. Тогда гамильтониан нашей системы можно представить в виде

$$H = \omega a^+ a + \kappa \sum_{m=1}^{N} J_0^{(m)} + \zeta \sum_{m=1}^{N} (a^+ J_-^{(m)} + a J_+^{(m)}) + \\ + \mu \sum_{m=1}^{N} \left[J_-^{(m)} \exp(i\Omega t) + J_+^{(m)} \exp(-i\Omega t) \right].$$

Он описывает взаимодействие N идентичных двухуровневых атомов одновременно с квазирезонансными классическим и квантованным полями. Он выписан в рамках приближения вращающейся волны, так что мы, как и ранее, полагаем, что оптические частоты значительно превосходят все остальные частотные параметры задачи.

Нас интересует динамика волновой функции $\Psi(t)$ — решения соответствующего уравнения Шредингера. Как и ранее, можно отделить оптическую частоту, используя аналог соотношения (3):

$$\Psi(t) = \exp\left[-i\omega t \left(a^+ a + \sum_{m=1}^{N} \frac{J_0^{(m)}}{2} \right) \right] \Phi(t).$$

Для функции $\Phi(t)$ получаем уравнение

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t) = \left\{ \left(\kappa - \frac{\omega}{2}\right) \sum_{m=1}^{N} J_0^{(m)} + \zeta \sum_{m=1}^{N} \left(a^+ J_-^{(m)} + a J_+^{(m)} \right) + \right. \\ \left. + \mu \sum_{m=1}^{N} \left[J_-^{(m)} \exp[i(\Omega - \omega)t] + J_+^{(m)} \exp[i(\omega - \Omega)t] \right] \right\} \Phi(t).$$

Матрицы $\Xi^{(m)}(t)$, введенные выше, коммутируют друг с другом. Введем матрицу

$$\Xi_N(t) = \prod_{m=1}^{N} \Xi^{(m)}(t).$$

Очевидно, что $\Xi_N(0)$ — единичная матрица в $C^2 \otimes C^2 ... \otimes C^2$. Эта матрица является решением уравнения

$$i\frac{d}{dt}\Xi_N(t) = \left\{ \left(\kappa - \frac{\omega}{2}\right) \sum_{m=1}^{N} J_0^{(m)} + \right. \\ \left. + \mu \sum_{m=1}^{N} \left[J_-^{(m)} \exp[i(\Omega - \omega)t] + J_+^{(m)} \exp[i(\omega - \Omega)t] \right] \right\} \Xi_N(t).$$

После подстановки $\Phi(t) = \Xi_N(t)\varphi(t)$, которая является аналогом замены (7) в случае $N > 1$, для функции $\varphi(t)$ получаем уравнение

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \zeta\Xi_N^{-1}(t)\sum_{m=1}^{N}(a^+J_-^{(m)} + aJ_+^{(m)})\Xi_N(t)\varphi(t). \tag{14}$$

Отметим, что при наших заменах $\varphi(0) = \Psi(0)$. Оператор

$$\Xi_N^{-1}(t)\exp\left[-i\omega t\left(a^+a + \sum_{m=1}^{N}\frac{J_0^{(m)}}{2}\right)\right]\Xi_N(t)$$

унитарен и коммутирует с оператором a^+a. Следовательно, для оператора $G = (a^+a)^m$, действующего в фоковском пространстве F, имеем

$$\langle G\rangle = \langle\overline{\Phi(t)}, G\Phi(t)\rangle = \langle\overline{\varphi(t)}, G\varphi(t)\rangle.$$

3.2. Процедура усреднения

В правой части уравнения (14) присутствуют, как и в случае с одним атомом, быстрые, связанные со взаимодействием с классическим полем, и медленные, связанные со взаимодействием атомов с квантованной модой, осцилляции. Выбрасывая быстрые гармоники, приходим к уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \zeta\left\langle\Xi_N^{-1}(t)\sum_{m=1}^{N}(a^+J_-^{(m)} + aJ_+^{(m)})\Xi_N(t)\right\rangle\varphi(t).$$

Будем рассматривать, как и ранее, случай $|\omega - \Omega| = |2\nu| \ll R$. Это условие фиксирует ограничение на разность частот классической и квантованной компонент. В этом случае усреднение приводит к нетривиальному вкладу, и мы находим

$$H_{av} = \rho\left[a^+\exp(2i\nu t) + a\exp(-2i\nu t)\right]\sum_{m=1}^{N}U_mJ_0^{(m)}U_m^{-1}.$$

Здесь матрица U_m действует как матрица U на m-ю компоненту, не изменяя остальных. Отметим, что слагаемые в правой части этого выражения коммутируют друг с другом. Этот гамильтониан управляет медленной эволюцией «одетых полем» атомов в случае $N > 1$. Как и в случае $N = 1$, усредненный гамильтониан представляет собой произведение фоковского оператора $a^+\exp(2i\nu t) + a\exp(-2i\nu t)$ на матрицу. Таким образом, если мы перейдем к разложению по базису собственных векторов этой матрицы, усредненный гамильтониан будет представлять собой совокупность одномерных гамильтонианов. Разложим искомую функцию по этому базису:

$$\varphi(t) = \sum_{\sigma}\eta_\sigma(t)|e_{k_1}e_{k_2}...e_{k_N}\rangle,$$

где функция $\eta_\sigma(t)$ принимает значения в фоковском пространстве, σ означает набор N чисел $k_1, k_2, ..., k_N$, каждое из которых равно 1 или 2, и суммирование происходит по всем таким наборам σ (их всего 2^N разных вариантов). Для каждого $\eta_\sigma(t)$ получаем

$$i\frac{\partial}{\partial t}\eta_\sigma(t) = \rho S_\sigma\left[a^+\exp(2i\nu t) + a\exp(-2i\nu t)\right]\eta_\sigma(t), \tag{15}$$

где

$$S_\sigma = \sum_{m=1}^{N}(-1)^{k_m+1},$$

в сумме участвуют числа k_m, составляющие набор σ. S_σ является суммой по m собственных чисел операторов $U^m J_0^{(m)} U_m^{-1}$ равных ± 1. Отметим следующее важное обстоятельство: в уравнение (15) от набора σ входит только множитель S_σ. Решение соответствующей начальной задачи при условии $\eta_\sigma(z_0) = Q_\sigma(z)$ имеет вид

$$\eta_\sigma(z,t) = \eta_\sigma(z,0)\varphi_\sigma(z,t),$$

где

$$\varphi_\sigma(z,t) = \exp\left\{S_\sigma \frac{z\rho}{2}\nu\,[1-\exp(2i\nu t])+ \right.$$
$$\left. + S_\sigma^2 \frac{\rho^2}{4\nu^2}\,[\exp(-2i\nu t) + 2i\nu t - 1]\right\} Q_\sigma\left(z + S_\sigma \frac{\rho}{2\nu}\,[\exp(-2i\nu t) - 1]\right).$$

Если оператор $G = (a^+a)^m$ действует только на фоковскую составляющую, мы получаем, используя представление Фока—Баргманна,

$$\langle G\rangle = \langle\overline{\varphi(z,t)}, G\varphi(z,t)\rangle = \sum_\sigma \int dz\,d\overline{z}\exp(-z\overline{z})\,\overline{\eta_\sigma(z,t)}G\eta_\sigma(z,t).$$

Эти соотношения позволяют описать в аналитических терминах решение любой начальной задачи.

3.3. Начальная задача

Обсудим здесь задачу, соответствующую следующим начальным данным: в квантованной моде содержится m фотонов, все атомы находятся в одном состоянии $v \in C^2$, $v = e_1\cos\chi + e_2\sin\chi$. Раскладывая нашу волновую функцию по базису, описанному выше, для соответствующих коэффициентов получаем

$$\eta_\sigma(z,0) = (\cos\chi)^{N-k}\,(\sin\chi)^k\,\frac{z^m}{\sqrt{m!}},$$

где k — число двоек в наборе σ. Таким образом,

$$\eta_\sigma(z,t) = (\cos\chi)^{N-k}\,(\sin\chi)^k\,\varphi_\sigma(z,t).$$

Для данного набора σ обозначим через $|\sigma|$ число двоек в этом наборе. Отметим, что если $|\sigma| = k$, то $S_\sigma = N - 2k$, причем имеется C_N^k разных наборов с фиксированным k. Тогда выражение для $\varphi_\sigma(z,t)$ можно получить из (11) подстановкой $\rho \to (N-2k)\rho$.

Для фоковского оператора $G = (a^+a)^m$ имеем

$$\langle G\rangle = \sum_\sigma \int dz\,d\overline{z}\exp(-z\overline{z})\,\overline{\eta_\sigma(z,t)}G\eta_\sigma(z,t) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N}\sum_{|\sigma|=k}\int dz\,d\overline{z}\exp(-z\overline{z})\,\overline{\eta_\sigma(z,t)}G\eta_\sigma(z,t) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} C_N^k\,(\cos\chi)^{2N-2k}\,(\sin\chi)^{2k}\int dz\,d\overline{z}\exp(-z\overline{z})\,\overline{\varphi_\sigma(z,t)}G\varphi_\sigma(z,t)\Big|_{|\sigma|=k}.$$

Здесь учтен тот факт, что динамика коэффициентов $\eta_\sigma(z,t)$ с одинаковым значением S_σ идентична. Таким образом, для вычисления значений $\langle G\rangle$ мы можем использовать полученные выше соотношения.

Применим эти результаты для нахождения числа фотонов в квантованной моде. Соответствующие интегралы в последнем выражении в данном случае уже вычислены выше. Получаем

$$\langle n(t)\rangle = \sum_{k=0}^{N} C_N^k (\cos\chi)^{2N-2k} (\sin\chi)^{2k} \left[m + (N-2k)^2 \rho^2 \frac{\sin^2(\nu t)}{\nu^2}\right].$$

В наших выкладках используются следующее простое соотношение: для любого целого s

$$\sum_{k=0}^{N} C_N^k (N-2k)^s \cos^{2N-2k}\chi \sin^{2k}\chi =$$

$$= (\cos\chi\sin\chi)^N \frac{d^s}{dy^s}\left\{[\exp y + \exp(-y)]^N\right\}\Big|_{\exp y = \operatorname{tg}\chi}.$$

В итоге получаем

$$\langle n(t)\rangle = m + \frac{\rho^2 \sin^2 \nu t}{\nu^2}\left[N(N-1)\cos^2 2\chi + N\right]. \qquad (16)$$

Напомним, что N — число атомов. Таким образом, мощность излучения в квантованной моде, пропорциональная $\langle n(t)\rangle$, пропорциональна N^2. Соотношение (16) демонстрирует кооперативное поведение атомов в нашей системе, типичное для сверхизлучения (см. соответствующее обсуждение в [4]). Однако, в отличие от «обычного» сверхизлучения, в данном случае временная динамика не зависит от N. Мощность излучения является периодической функцией времени, причем период определяется расстройкой между частотами классической и квантованной компонент поля.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Еще раз опишем основные результаты работы. Если двухуровневый атом взаимодействует одновременно с классическим полем и квантованной модой, происходит обмен фотонами между классической и квантованной компонентами, атом при этом играет роль своеобразного «переносчика» фотонов. Если с классической и квантованной модами взаимодействует одновременно N одинаковых двухуровневых атомов, причем их начальные состояния идентичны, этот процесс обмена фотонами демонстрирует кооперативные свойства — мощность излучения пропорциональна N^2. Временная динамика при этом не зависит от N и является периодической, период определяется разностью частот классической и квантованной компонент.

Напомним сущность эффекта сверхизлучения [4]. Если имеется набор двухуровневых атомов, в начальный момент времени приведенных в верхнее состояние и взаимодействующих с квантованным полем, это взаимодействие принимает коллективный характер — число фотонов в квантованной моде испытывает всплеск, амплитуда которого пропорциональна N^2. Если бы атомы «сбрасывали» фотоны независимо друг от друга, число фотонов в квантованной моде было бы пропорционально N. Это различие и позволяет говорить о сверхизлучении. При рассмотрении этого эффекта в полностью квантовых терминах обычно (из технических соображений) обсуждают динамику разности населенностей, а затем, используя сохранение «числа возбуждений» в рассматриваемой системе, вычисляют мощность излучения (см. [4, стр. 22]). В нашем случае с квантованным полем взаимодействуют атомы, на которые воздействует и классическое поле. При этом нет аналога закона сохранения числа возбуждений. Взаимодействующий с классическим полем атом можно рассматривать как «одетый полем» атом. Таким образом, мы обсуждаем взаимодействие квантованной моды с ансамблем таких «одетых полем» атомов. Как следует из результатов работы [3], в подобных системах происходит перекачка фотонов в квантованную моду и обратно. Отдельные атомы при этом взаимодействуют друг с другом через состояние поля в квантованной моде. Это взаимодействие влияет на сам процесс переброски фотонов, придавая ему коллективный характер, причем здесь можно усмотреть аналогию с интерференционными явлениями. Если при «обычном» сверхизлучении источником фотонов в моде является ансамбль атомов, предварительно приведенных в возбужденное состояние, то в нашем случае источником фотонов в квантованной моде является классическое поле. Динамику процесса, которая существенно отличается от динамики «обычного» сверхизлучения, при этом диктует классическое поле. Сама постановка задачи позволяет понимать описанный эффект — коллективный переброс фотонов в квантованную моду во внешнем классическом поле — как «вынужденное сверхизлучение».

Наши результаты получены в результате применения к исходному гамильтониану процедуры усреднения — по существу, подходящей версии теории возмущений. Условиями ее применимости являются следующие ограничения: $R_q/R \ll 1$, $\nu/R \ll 1$. При этом мы строим старший член асимптотики решения по этим малым параметрам. Эти условия имеют ясный физический смысл и легко реализуются на практике. Первое означает, что квантованное поле имеет амплитуду существенно меньшую, чем классическое, а второе условие накладывает определенные ограничения для разности частот классического и квантованного полей. Именно при наличии этих условий усредненный гамильтониан, управляющий «медленной» динамикой системы, имеет простую структуру — он распадается в произведение одномерного фоковского оператора и чисто матричного оператора. Этот факт и дает возможность описать решение задачи в явных аналитических терминах. Разумеется, полный гамильтониан задачи, включающий и поправки к усредненному, не обладает такой простой структурой, но его члены, имеющие более сложную структуру, влияют на более младшие члены асимптотики решения (см. детали в [3], [5]). Существенное упрощение структуры гамильтониана происходит при его усреднении в рамках процедуры, по существу восходящей к известным работам Пуанкаре, Боголюбова и Митропольского [11]

Мы обнаружили наличие сверхизлучения в рамках достаточно строгих предположений об идентичности атомов и их начальных состояний. Разумеется, в реальной ситуации эти предположения могут выполняться лишь приближенно. Однако есть основания полагать, что и при учете необходимых поправок (в рамках надлежащей теории возмущений) этот эффект будет иметь место. Привлекательной особенностью рассмотренной здесь модели является возможность вычислить все интересные в приложениях характеристики излучения в квантованной моде в явных аналитических терминах.

Литература

1. A. Ya. Kazakov, Phys. Lett. A **206**, 229 (1995).
2. А. Я. Казаков, Опт. и спектр. **81**, 549 (1996).
3. A. Ya. Kazakov, Quant. Semiclass. Opt. **10**, 753 (1998).
4. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).
5. А. Я. Казаков, ТМФ **117**, 92 (1998).
6. C. K. Law and J. H. Eberly, Phys. Rev. A **43**, 6337 (1991).
7. P. Alsing, D.-S. Guo, and H. J. Carmichael, Phys. Rev. A **45**, 5135 (1992).
8. I. V. Jyotsna and G. S. Agarwal, Opt. Commun. **99**, 344 (1993).
9. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их приложения*, Наука, Москва (1987).
10. Е. И. Алискендеров, А. С. Шумовский, Хо Чунг Зунг, Физика ЭЧАЯ **24**, 409 (1993).
11. А. Найфэ, *Введение в методы возмущений*, Мир, Москва (1984).