

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, СЕЛЕКТИВНО ОТРАЖЕННОГО ОТ ХОЛОДНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЫ

*Б. А. Векленко\*, Ю. Б. Шеркунов*

*Московский энергетический институт  
111250, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15 февраля 1999 г.

Ставится и решается задача о квантостатистических свойствах резонансного излучения, селективно отраженного от невозбужденных сред, если в рассеиваемом потоке излучения фотоны взаимно коррелированы. Учет взаимной корреляции фотонов принципиально не допускает решения задачи методами теории возмущений. Указывается квантовый аналог оптической теоремы погашения, обращающий в нуль бесконечную подпоследовательность диаграмм Фейнмана. Предсказывается частотно-угловое распределение квантов в отраженном потоке. Для усредненных характеристик отражения восстанавливаются формулы Френеля. Указываются границы их применимости при описании отражения взаимно коррелированных фотонов. Предсказывается эффект подавления при отражении излучения лазерного источника.

PACS: 42.50.ct

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Резонансное взаимодействие электромагнитного поля с веществом принадлежит к разряду сильных взаимодействий в том смысле, что обусловленные ими оптические эффекты не допускают исследований методами теории возмущений. Интерес к таким явлениям традиционно велик и в последние годы усилился в связи с исследованиями оптических эффектов в плотных средах [1, 2] и взаимодействия лазерного излучения с веществом [3–5]. Одним из проявлений резонансного взаимодействия электромагнитного поля с веществом служит селективное отражение света от границы раздела между газом и вакуумом. Эта область исследований имеет свое богатое прошлое. В 1909 г. Вуд [6] экспериментально обнаружил смену диффузного рассеяния света зеркальным по мере увеличения давления отражающих паров, что дало пищу исследователям на добрую половину столетия [7, 8]. В 1966 г. Кёстлер [9] экспериментально обнаружил возможность усиления резонансного излучения при отражении его от инверсно-заселенной среды. Эта работа вызвала новый поток исследований, в какой-то степени подытоженный в монографии [10]. Пока рано констатировать полное согласие теории с экспериментом. Но именно здесь при подробном исследовании влияния вынужденных процессов излучения на механизм отражения удалось показать [11, 12] неприменимость полуклассической (semiclassical) теории излучения, оперирующей с неквантованным электромагнитным полем. Оказалось, что учет квантовых свойств излучения качественно

\* E-mail: phf@deans.mpei.ac.ru

на макроскопическом уровне изменяет результаты расчетов. Это в конечном счете вызвано корреляционными свойствами квантов в среде и изменением числа квантов при вынужденном излучении. Естественно ожидать, что нечто подобное должно проявлять себя при обратном процессе, т. е. при процессе рассеяния коррелированных квантов в условиях их возможного поглощения. Это означает, что коррелированные кванты не рассеиваются в холодных средах независимо, если даже взаимодействие света с каждым отдельным атомом среды рассматривать в линейном приближении. По аналогии с эффектами, указанными в [12], следует ожидать неприменимость теории возмущений в этом случае. Почему такое явление ранее не было обнаружено, в чем его характерные особенности, и как возникают формулы Френеля, не обладающие неаналитическими по заряду особенностями? На эти вопросы ниже дается ответ.

Мы рассмотрим резонансное отражение от полубесконечной среды двух поперечно поляризованных квантов, принадлежащих рассеиваемой моде с волновым вектором  $\mathbf{k}_0$  и поляризацией  $\lambda_0$  и описываемых единой волновой функцией  $(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}^+)^2|0\rangle/\sqrt{2}$ . Через  $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+$  ( $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}$ ) обозначен оператор рождения (уничтожения) фотона в состоянии  $(\mathbf{k}, \lambda)$ . Найдем вероятность обнаружения одного или сразу обоих фотонов в моде отражения  $(\mathbf{k}, \lambda)$ . На этом элементарном примере изучим статистические свойства отраженного поля. Исследуем его усредненные характеристики.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Некоторые качественные особенности отражения коррелированных фотонов можно обнаружить на основе общих рассуждений. Обозначим собственные функции гамильтониана рассеивающей среды через  $\varphi_i$ . Примем во внимание адиабатическую гипотезу. Пусть до взаимодействия с излучением среда находилась в состоянии  $\varphi_0$ . Полная волновая функция системы «излучение + среда» может быть представлена в виде

$$\Psi = \varphi_0 f_0 + \sum_{i \neq 0} \varphi_i f_i.$$

Для описания поля излучения в среде достаточно знать его матрицу плотности:

$$\begin{aligned} \rho &= \text{Sp}_a \Psi \Psi^* = \rho^{(c)} + \rho^{(n)}, \\ \rho^{(c)} &= f_0 f_0^*, \quad \rho^{(n)} = \sum_{i \neq 0} f_i f_i^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Операция  $\text{Sp}_a$  распространяется на атомную систему, функции  $f_i$  зависят от аргументов электромагнитного поля. Матрица  $\rho^{(c)}$ , соответствующая когерентному каналу рассеяния, описывает процессы рассеяния, в результате которых атомы среды возвращаются в исходное (в том числе трансляционное) состояние. Матрица  $\rho^{(n)}$ , соответствующая некогерентному каналу рассеяния, описывает прочие процессы рассеяния. Матрица  $\rho$  может быть непосредственно измерена методами фотоотчетов [13]. Она же позволяет рассчитать любые усредненные характеристики электромагнитного поля. Пусть  $\hat{A}^\nu(\mathbf{r})$  — оператор векторного потенциала ( $\hbar = c = 1$ ):

$$\hat{A}^\nu(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{e_{\mathbf{k}\nu}^\lambda}{\sqrt{2kV}} (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}),$$

где  $e_{\mathbf{k}\nu}^\lambda$  — орты поляризации,  $V = L_x L_y L_z$  — нормировочный объем, который в окончательном результате полагается бесконечным,  $V \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{r}$  — координата наблюдения. Среднее значение оператора  $\hat{A}^\nu(\mathbf{r})$  находится как

$$\langle \hat{A}^\nu(\mathbf{r}) \rangle = \text{Sp } \hat{A}^\nu(\mathbf{r})\rho.$$

Суммирование осуществляется по аргументам электромагнитного поля. На этом примере продемонстрируем удобство псевдокоординатного представления [14], переход к которому осуществляет оператор

$$\hat{U} = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \hat{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{k} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}.$$

В псевдокоординатном представлении оператор  $\hat{A}^\nu$  теряет зависимость от  $\mathbf{r}$ , матрица

$$\rho(\mathbf{r}) = \hat{U} \rho \hat{U}^+$$

такую зависимость приобретает. Теперь конструкцию  $\rho(\mathbf{r})$  будем называть матрицей плотности электромагнитного поля в точке  $\mathbf{r}$ . Ее введение удобно для решения граничных задач. В частности, если рассеивающая среда занимает полупространство  $z > 0$ , то для исследования отраженного поля достаточно знать  $\rho(\mathbf{r})$  при  $z \rightarrow -\infty$ . Если в рассеиваемой моде содержится один квант  $\hat{a}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}^+ |0\rangle$ , то [14] при  $n_\mu \lambda^3 \gamma_r / \gamma < 1$  матрица плотности  $\rho^{(c)}$ , описывающая отраженный квант  $(\mathbf{k}, \lambda)$ , имеет вид

$$\rho^{(c)}(\mathbf{r} | 1 \rightarrow 1) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{8k_{0z}^4} |c^{k\lambda k_0\lambda_0}(k_0)|^2 \delta(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^+ |0\rangle \langle 0| \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (2)$$

где

$$c^{k\lambda k_0\lambda_0}(k_0) = \sum_{m\mu} P_{m\mu}^{*\lambda}(\mathbf{k}) P_{m\mu}^{\lambda_0}(\mathbf{k}_0) \frac{n_\mu}{k_0 - \omega_{m\mu} + i\gamma/2},$$

$$\gamma = \gamma_\mu + \gamma_m, \quad \lambda = 2\pi/k, \quad \boldsymbol{\kappa} = \{k_{0x}, k_{0y}, -k_{0z}\}.$$

Здесь использовано двухуровневое приближение для атомов. При этом зеемановским подуровням их возбужденного состояния поставлен в соответствие индекс  $m$ , невозбужденного состояния индекс  $\mu$ ,  $\omega_{m\mu}$  — частота резонансного перехода,  $n_\mu$  — концентрация рассеивающих атомов, находящихся на  $\mu$ -ом зеемановском подуровне. Эффект Доплера считается пренебрежимо малым,  $\gamma_\mu$  и  $\gamma_m$  — столкновительные ширины невозбужденных и возбужденных состояний. Предполагается, что их сумма превышает радиационную ширину  $\gamma_r$  возбужденного состояния атома. Далее в дипольном приближении

$$P_{m\mu}^\lambda(\mathbf{k}) = \frac{e}{m} \int \psi_m^*(\boldsymbol{\rho}) \hat{\mathbf{p}} e_{\mathbf{k}}^\lambda \psi_\mu(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\nabla,$$

где через  $\psi_{m\mu}$  обозначены волновые функции валентных электронов в атомах. Предполагается также, что каждый атом газа обладает одним валентным электроном. Матрица  $\rho^{(c)}(\mathbf{r} | 1 \rightarrow 1)$  нормирована так, что  $\text{Sp } \rho^{(c)}$  при  $z \rightarrow -\infty$  определяет собой вероятность

нахождения фотона в моде отражения  $(\kappa, \lambda)$ . Для конкретизации (2) следует воспользоваться формулой суммирования

$$\sum_{m\mu} P_{m\mu}^{*\lambda_1}(\mathbf{k}_1) P_{m\mu}^{\lambda_2}(\mathbf{k}_2) = \frac{\pi(2jm+1)}{\omega_{m\mu}} \gamma_r(\mathbf{e}_{\mathbf{k}_1}^{\lambda_1} \mathbf{e}_{\mathbf{k}_2}^{\lambda_2}). \quad (3)$$

Здесь  $j_\mu$  — орбитальное квантовое число. Теперь

$$\text{Sp} \rho^{(c)}(\mathbf{r}|1 \rightarrow 1) = \frac{1}{8k_{0z}^4} \left| \frac{\pi(2jm+1)}{\omega_{m\mu}} \gamma_r(\mathbf{e}_{\mathbf{k}_0}^{\lambda_0} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{\lambda}) \frac{n_\mu(2j\mu+1)}{k_0 - \omega_{m\mu} + i\gamma/2} \right|^2. \quad (4)$$

Эта формула представляет собой не что иное, как формулу Френеля, записанную для разреженных сред. Для резонансной частоты  $k_0 = \omega_{m\mu}$  находим

$$\text{Sp} \rho^{(c)}(\mathbf{r}|1 \rightarrow 1) \propto \left( n_\mu \lambda^3 \frac{\gamma_r}{\gamma} \right)^2.$$

Пусть теперь рассеиваемое электромагнитное поле состоит из двух квантов, находящихся в одном и том же состоянии  $(\mathbf{k}_0, \lambda_0)$  и описывающихся единой волновой функцией. Что можно сказать о функции распределения квантов в моде отражения  $(\kappa, \lambda)$ ? Нас интересует отражение под зеркальным углом (селективное рассеяние). Диффузное рассеяние опускаем. Вернемся к представлению (1) и рассмотрим когерентный канал рассеяния. Предположим, что в условиях линейного взаимодействия поля с отдельными атомами одновременное рассеяние двух квантов происходит взаимно независимо. В формировании рассеянного поля в когерентном канале принимает участие тонкий приграничный слой рассеивающей среды толщиной  $\sim k_0^{-1}$ . Поэтому можно воспользоваться теорией возмущений. Учитывая независимый характер рассеяния квантов, для вероятности рассеяния двух фотонов из исходного состояния в двухфотонное конечное состояние будем иметь

$$\text{Sp} \rho^{(c)}(\mathbf{r}|2 \rightarrow 2) = \left| \text{Sp} \rho^{(c)}(\mathbf{r}|1 \rightarrow 1) \right|^2 \propto \left( n_\mu \lambda^3 \frac{\gamma_r}{\gamma} \right)^4. \quad (5)$$

При вычислении матрицы  $\rho^{(c)}$ , разумеется, возникает член  $\rho^{(c)}(\mathbf{r}|2 \rightarrow 1)$ , описывающий селективное рассеяние лишь одного из двух квантов, в то время как другой квант продолжает распространяться в первоначальном направлении  $\mathbf{k}_0$ . В низшем порядке теории возмущений этот член пропорционален  $(n_\mu \lambda^3 \gamma_r / \gamma)^2$  и, казалось бы, при малых концентрациях  $n_\mu$  должен быть определяющим, превосходя по модулю выражение (5). В действительности так не происходит. Дело в том, что распространяющийся в направлении  $\mathbf{k}_0$  квант с полубесконечной средой рано или поздно обязательно провзаимодействует. Он либо пополнит канал  $\rho^{(c)}(\mathbf{r}|2 \rightarrow 2)$  в высших приближениях, либо, будучи поглощенным, нарушит исходное состояние среды и приведет к смене когерентного канала рассеяния на некогерентный. Таким образом, из физических соображений ясно, что этот член учитывать не следует. Математически это означает, что в когерентном канале рассеяния найдется бесконечная подпоследовательность членов, описываемая диаграммами Фейнмана в высших приближениях, сумма которых с обсуждаемым членом дает нуль. Подробное математическое доказательство этого физически очевидного аналога теоремы погашения [15] мы опускаем. Итак, вклад в когерентный канал

рассеяния описывает лишь формула (5). Из проведенного анализа следуют два вывода. Во-первых, при изучении статистических свойств рассеянного излучения нельзя ограничиваться низшими порядками теории возмущений даже в тех ситуациях, анализ которых на языке «квантовых средних» теорию возмущений допускает. Во-вторых, из аналога теоремы погашения следует, что судьба одного из квантов сказывается на судьбе другого. Таким образом, рассеяние квантов не может быть представлено в виде взаимно независимых процессов.

Справедливость обоих выводов вновь подтверждается при анализе некогерентного канала рассеяния. В этом канале в низшем порядке теории возмущений надлежит рассматривать процесс поглощения одного из квантов средой и упругого рассеяния другого кванта в моду отражения ( $\kappa, \lambda$ ). Вероятность такого процесса пропорциональна

$$e^2 n_\mu \left( n_\mu \lambda^3 \frac{\gamma_r}{\gamma} \right)^2 |\delta(\kappa - k_0) \delta(k_0 - \omega_{m\mu})|^2. \quad (6)$$

Этот очевидный результат влечет за собой важные следствия. Из него и из соотношения (5) следует, что вектор Пойнтинга  $s$  отраженного луча в низшем порядке теории возмущений должен быть пропорционален  $e^6$ . Но такого быть не может, поскольку полуклассическая теория излучения, согласно формуле Гейзенберга—Крамерса [16], требует выполнения закона  $s \propto e^4$ . Выход из подобной ситуации указывают особенности некогерентного канала рассеяния. При малом коэффициенте отражения, т. е. при  $n_\mu \lambda^3 \gamma_r / \gamma < 1$ , вероятность отражения обоих квантов должна быть меньше вероятности отражения одного из них. Это означает, что основная роль в формировании вектора Пойнтинга принадлежит некогерентному каналу. В этом канале степень константы взаимодействия  $e$  может быть понижена по сравнению с первым членом теории возмущений лишь в том случае, если коэффициенты разложения сингулярны и в высших приближениях сингулярность растет. Так оно и оказывается в действительности. Мы вновь приходим к выводу о том, что распространение фотонов взаимно зависимо и необходимо осуществлять суммирование бесконечной подпоследовательности фейнмановских диаграмм.

Вернемся к выражению (6). Такому произведению из четырех  $\delta$ -функций Дирака не может быть приписан разумный смысл. Стандартный выход из положения заключается в трактовании исследуемого комбинированного процесса как двух независимых: поглощения одного из фотонов и рассеяния другого. Вероятность каждого из процессов пропорциональна  $\delta^2$ . Такие конструкции уже могут быть трактованы как вероятности процессов в единицу времени. Подобная трактовка возможна, если выражения типа (6) возникают в итоговой формуле. Но если они возникают на промежуточном этапе, то необходимо учитывать бесконечное число членов в высших приближениях теории возмущений, «размазывающих»  $\delta$ -функции. По этой причине лучше выражение (6) трактовать как вероятность рассеяния одного из квантов при условии поглощения другого и описывать эту условную вероятность единой формулой. «Размазанные» суммированием бесконечных подпоследовательностей  $\delta$ -функции более не допускают трактовку искомого выражения как произведения вероятностей независимых событий. Поведение фотонов оказывается взаимно зависимым. Техническая процедура, адекватная задаче, описана ниже. Используемое нами ограничение в конечных формулах низшим приближением по параметру  $n_\mu \lambda^3 \gamma_r / \gamma$  позволяет, согласно проведенному анализу, ограничиться исследованиями лишь некогерентного канала рассеяния.

## 3. МЕТОД Г-ОПЕРАТОРОВ

Расчет матрицы плотности  $\rho$  фотонной подсистемы, резонансно взаимодействующей с атомарной средой, с корректным учетом корреляторов фотон—фотон удобно выполнить методом Г-операторов [11, 12]. Ниже излагаются лишь канва метода и его истоки. Воспользуемся следующей аналогией. Рассмотрим квантовый газ, и пусть  $\check{\psi}(\mathbf{r}, t)$  — его полевой оператор в представлении Гейзенберга. Интересуясь плотностью энергии газа или его потоком, построим билинейную по операторам функцию Грина [17] полностью определяющую эти характеристики:

$$G(x, x') = -i\langle \hat{T} \check{\psi}(x) \check{\psi}^+(x') \rangle, \quad x = \{\mathbf{r}, t\}. \quad (7)$$

Если нас интересует флуктуация потока энергии, то конструкция (7) оказывается недостаточной. С другой стороны, функция (7) определяет концентрацию частиц по формуле

$$n(x) = iG(x, x'), \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}', \quad t' \rightarrow t + 0.$$

Теперь, изучая диффузию, мы легко найдем любой момент распределения:

$$\langle \mathbf{r}^m \rangle = \frac{\int \mathbf{r}^m G(x, x') d\mathbf{r}}{\int G(x, x') d\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}', \quad t' \rightarrow t + 0.$$

Таким образом, функция Грина играет роль функции распределения параметров, являющихся аргументами усредняемых полевых операторов  $\check{\psi}$  и  $\check{\psi}^+$ . При вторичном квантовании аргументы (координаты частиц) волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, t)$  переходят в аргументы полевых операторов  $\check{\psi}(\mathbf{r}, t)$ . Метод квантовых функций Грина в формализме вторичного квантования дает возможность вычислить функцию распределения (матрицу плотности) частиц как функцию их координат. Схема трансформации следующая:

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \check{\psi}(\mathbf{r}, t) \rightarrow iG(x, x') \rightarrow n(x). \quad (8)$$

Квантованное электромагнитное поле описывается волновой функцией  $\Phi(\mathbf{N}, t)$ , где вектор  $\mathbf{N} = \dots, N_{\mathbf{k}\lambda}, \dots$  представляет собой набор чисел заполнения  $N_{\mathbf{k}\lambda}$  отдельных мод  $(\mathbf{k}, \lambda)$ . Нас интересует матрица плотности  $\rho$ , зависящая от  $\mathbf{N}$ . Схема расчетов, по аналогии с (8), выглядит так:

$$\Phi(\mathbf{N}, t) \rightarrow \check{\Phi}(\mathbf{N}, t) \rightarrow i\mathcal{D}(\mathbf{N}, t, \mathbf{N}', t') \rightarrow \rho.$$

Следовательно, если мы хотим знать  $\rho(\mathbf{N}, t)$ , то формально можно поступить следующим образом. Вторично квантованную систему, описываемую функцией  $\Phi(\mathbf{N}, t)$ , надлежит проквантовать еще раз. При этом возникает оператор  $\check{\Phi}(\mathbf{N}, t)$ . В возникшем таким образом формализме следует построить функцию Грина  $\mathcal{D}$ . В действительности используемый нами формализм, напоминающий технику «третичного» квантования полей, по сути дела таковым не является. Используемое нами «третичное» квантование оказывается формальной операцией и строится путем специально подобранного унитарного преобразования динамических уравнений, не деформирующего основных принципов. Сошлемся вновь на аналогию. Квантовую механику одной частицы можно строить в координатном представлении, опираясь на волновую функцию  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , или

же воспользоваться представлением вторичного квантования. Связь между ними унитарна. В представлении вторичного квантования бозе- и ферми-поля в случае только одной частицы приводят к совпадающим результатам. Для построения нашего формализма это замечание существенно. Использование унитарного преобразования позволяет отказаться от термина «третичное» квантование и назвать построенное представление  $\Gamma$ -представлением по аналогии с многочастичным  $\Gamma$ -пространством статистической функции. Итак, формальная сторона построения  $\Gamma$ -представления из представления вторичного квантования фактически копирует метод построения представления вторичного квантования из конфигурационного представления [18]. По этой причине любая дисгармония в  $\Gamma$ -представлении немедленно указала бы на аналогичную дисгармонию в представлении вторичного квантования. С другой стороны, в  $\Gamma$ -представлении возможны все разработанные для квантовых систем методы исследования типа фейнмановских диаграмм, уравнений Дайсона, спектральных представлений, дисперсионных соотношений и т. д.

Пусть вторично квантованное поперечное электромагнитное поле квазирезонансно взаимодействует с газом, состоящим из атомов с одним валентным электроном. Уравнение Шредингера системы запишем в виде

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}', \quad \hat{H}_0 = \hat{H}_{ph} + \hat{H}_a,$$

$$\hat{H}_{ph} = \sum_{k\lambda} k \hat{\alpha}_{k\lambda}^+ \hat{\alpha}_{k\lambda}, \quad \hat{H}_a = \sum_{ip} \varepsilon_i(\mathbf{p}) \hat{b}_{ip}^+ \hat{b}_{ip},$$

$$\hat{H}' = -\frac{e}{m} \int \hat{\psi}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \hat{\psi} d\mathbf{r} d\mathbf{R} + \hat{H},$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \sum_{ip} \psi_i(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{R}}}{\sqrt{V}} \hat{b}_{ip}, \quad \varepsilon_i(\mathbf{p}) = \varepsilon_i + \frac{p^2}{2M}.$$

Здесь  $\psi_i(\mathbf{r} - \mathbf{R})$  — волновые функции электронов в атомах с энергией  $\varepsilon_i$ ,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}$  — координаты электрона и атомного остатка,  $\mathbf{p}$  — импульс атома,  $M$  — его масса. Через  $\hat{H}$  обозначен гамильтониан взаимодействия атомов газа с резервуаром. В отсутствие температурного вырождения атомов, что подразумевается, операторы  $\hat{b}_{ip}$  ( $\hat{b}_{ip}^+$ ) уничтожения (рождения) атомов в состоянии  $(i, \mathbf{p})$  можно считать принадлежащими полю Бозе—Эйнштейна. Мы опускаем учет продольной компоненты электромагнитного поля, понимая, что в средах повышенной плотности она даст о себе знать, усложняя предсказываемые нами эффекты, но не устраняя их.

Для расчета  $\rho(\mathbf{N}, t)$  воспользуемся методом  $\Gamma$ -операторов, автоматически разделяющим когерентный и некогерентный каналы рассеяния. Строим  $\Gamma$ -представление следующим образом. Любое состояние свободного вторично квантованного электромагнитного поля с определенной энергией может быть описано волновой функцией

$$\Phi^0(\mathbf{N}|\zeta) = \prod_{k\lambda} \varphi(N_{k\lambda}|\zeta_{k\lambda}), \quad (9)$$

где  $\varphi$  — волновая функция квантового осциллятора, зависящая от аргументов  $\zeta_{k\lambda}$ . Физический смысл этих аргументов для нас сейчас не существует. Строим  $\Gamma$ -пространство с

порождающим вектором  $\rangle_{\Gamma}^0$  [11, 12]. Будем говорить, что этот вектор представляет собой математический вакуум. Пусть  $\hat{\mathfrak{A}}(N)$  — оператор уничтожения коллектива невзаимодействующих фотонов с набором чисел заполнения  $N$ ,  $\hat{\mathfrak{A}}^+(N)\rangle_{\Gamma}^0$  — волновая функция такого состояния. Эти волновые функции образуют полный базис для разложения любой волновой функции, описывающей физически допустимые состояния. Между введенными таким образом базисными векторами  $\hat{\mathfrak{A}}^+(N)\rangle_{\Gamma}^0$  и функциями (9) существует унитарное преобразование, осуществляемое оператором  $\hat{O}$  [11, 12]:

$$\hat{O} = \hat{\Phi}^+_{\Gamma}, \quad \hat{\Phi}(\zeta) = \sum_N \Phi^0(N|\zeta)\hat{\mathfrak{A}}(N), \quad \Psi_{\Gamma} = \hat{O}\Psi.$$

Если считать, что вновь введенные операторы  $\hat{\mathfrak{A}}(N)$  и  $\hat{\mathfrak{A}}^+(N)$  подчиняются перестановочным соотношениям поля Бозе—Эйнштейна,

$$[\hat{\mathfrak{A}}(N), \hat{\mathfrak{A}}^+(N')] = \delta(N, N'), \tag{10}$$

то очевидно, что  $\Gamma$ -пространство изоморфно пространству чисел заполнения бозе-частиц. Но числа заполнения в  $\Gamma$ -пространстве не превышают единицу, поскольку вектору  $(\hat{\mathfrak{A}}^+(N))^n\rangle_{\Gamma}^0$  при  $n > 1$  никакое физическое состояние не отвечает. Можно говорить, что в  $\Gamma$ -пространстве существует одна «суперчастица», для описания кинетики которой достаточен базис  $\hat{\mathfrak{A}}^+(N)\rangle_{\Gamma}^0$ . Но поведение одной частицы с равным успехом может быть описано с помощью бозе- и ферми-полевых операторов. Это означает, что для операторов  $\hat{\mathfrak{A}}$  и  $\hat{\mathfrak{A}}^+$  можно использовать антикоммутиационные соотношения. Итог расчетов не изменится. Допустимы для них и другие коммутационные соотношения [19]. Отсюда видно, что физического смысла эти операторы не имеют. В целях простоты будем для них использовать коммутационное соотношение (10). В  $\Gamma$ -представлении уравнение Шредингера принимает вид [12]

$$i \frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial t} = \left[ \hat{H}_a + \sum_N \varepsilon(N)\hat{\mathfrak{A}}^+(N)\hat{\mathfrak{A}}(N) - \frac{e}{m} \int \hat{\Phi}^+ \hat{\psi}^+ \hat{p} \hat{A}(\mathbf{r}) \hat{\psi} \hat{\Phi} d\mathbf{r} d\mathbf{R} d\zeta \right] \Psi_{\Gamma} + \hat{H} \Psi_{\Gamma},$$

где

$$\varepsilon(N) = \sum_{k\lambda} k N_{k\lambda}, \quad d\zeta = \prod_{k\lambda} d\zeta_{k\lambda}.$$

Среднее значение любого фотонного оператора  $\hat{K}$  может быть вычислено по формуле [12]

$$\langle \hat{K} \rangle = \text{Sp } \hat{K} \rho = \int \hat{K}(\zeta', \zeta) \rho(\zeta, \zeta') d\zeta d\zeta', \tag{11}$$

где

$$\rho(\zeta, \zeta') = \langle \hat{\Phi}^+(\zeta') \hat{\Phi}(\zeta) \rangle_{\Gamma}, \quad \rangle_{\Gamma} = \Psi_{\Gamma}. \tag{12}$$

Выражение (11) справедливо для любого оператора  $\hat{K}$ . Это означает, что конструкция (12) представляет собой искомую матрицу плотности  $\rho$  фотонной подсистемы, взаимодействующей с атомарным газом. Для расчета  $\rho$  воспользуемся техникой кинетических функций Грина [20] в  $\Gamma$ -представлении. Введем в рассмотрение

$$\mathcal{D}_{ll'}(\zeta, t, \zeta', t') = -i \left\langle \hat{T}_c \hat{\Phi}_l(\zeta, t) \hat{\Phi}_{l'}^+(\zeta', t') \hat{S}_c \right\rangle_{0\Gamma}, \tag{13}$$

где  $\tilde{\Phi}$  — операторы поля в представлении взаимодействия:

$$\tilde{\Phi}(\zeta, t) = \sum_N \Phi^0(N|\zeta) \hat{\mathfrak{U}}(N) \exp[-i\varepsilon(N)t].$$

Усреднение в (13) проводится по начальному состоянию атомной системы и поля фотонов до включения взаимодействия между ними. Индекс  $l$  описывает временной контур, исходящий ( $l = 1$ ) из точки  $t \rightarrow -\infty$ , простирающийся до  $t \rightarrow \infty$  и возвращающийся вновь ( $l = 2$ ) в точку  $t \rightarrow -\infty$ ,  $\hat{T}_c$  — хронологический оператор на этом контуре. Оператор  $\hat{S}_c$  имеет вид

$$\hat{S}_c = \hat{T}_c \exp \left\{ \sum_l (-1)^{l+1} \frac{ie}{m} \int \tilde{\Phi}_l^+ \tilde{\psi}_l^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \tilde{\psi}_l \tilde{\Phi}_l d\zeta d\mathbf{r} d\mathbf{R} dt \right\},$$

$$\tilde{\psi} = \sum_{ip} \psi_i(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \frac{\hat{b}_{ip}}{\sqrt{V}} \exp[ip\mathbf{R} - i\varepsilon_i(p)t].$$

Мы опустили оператор  $\hat{H}$ , влияние которого через массовые операторы проявит себя в уширении энергетических уровней атомов. Для расчета конструкции (13) используется стандартная техника перехода к нормальному произведению полевых операторов. Но так как [11] на физических состояниях  $(\hat{\mathfrak{U}}(N))^n_{\Gamma} = 0$  при  $n > 1$ , то все нормальные произведения кроме простейшего дают нулевой результат. В этом заключается основное достоинство формализма Г-операторов. Функции  $\mathcal{D}_{ll'}$  обладают следующей структурой [11]:

$$\mathcal{D}_{ll'} = \Delta_{ll'} - i\rho_{ll'}.$$

При этом  $\rho = \rho_{12} = i\mathcal{D}_{12}$  при  $t = t'$ . Для  $\Delta_{ll'}$  и  $\rho_{ll'}$  возникает следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= \rho_{12}^{(c)} + \rho_{12}^{(n)}, \\ \rho_{12}^{(c)} &= \left(1 + \Delta_r \hat{\mathcal{F}}_r\right) \rho_{12}^0 \left(1 + \hat{\mathcal{F}}_a \Delta_a\right), \\ \rho_{12}^{(n)} &= -\Delta_r \hat{\mathcal{F}}_{12}^{(n)} \Delta_a, \quad \Delta_r = \Delta_r^0 + \Delta_r^0 \hat{\mathcal{F}}_r \Delta_r. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь  $\hat{\mathcal{F}}_{ll'}$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{ll'}^{(n)}$  — поляризаационные операторы в Г-технике,

$$\Delta_r = \Delta_{11}, \quad \Delta_a = -\Delta_{22} = \Delta_r^+, \quad \hat{\mathcal{F}}_r = \hat{\mathcal{F}}_{11}, \quad \hat{\mathcal{F}}_a = \hat{\mathcal{F}}_{22} = \hat{\mathcal{F}}_r^+,$$

$\rho^0$  — матрица плотности свободного поля фотонов. В энергетическом представлении

$$\Delta_r^0 = \left(E - \hat{H}_{ph} + i0\right)^{-1}.$$

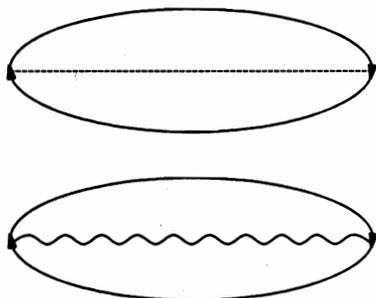


Рис. 1. Схематическое изображение поляризационных операторов  $\hat{\mathcal{P}}_{l_1 l_2}$  и  $\hat{\mathcal{P}}_{l_1 l_2}^{(n)}$ , отвечающих формулам (15). Атомным функциям  $G_{l_1 l_2}$  соответствуют сплошные линии, пропагатору  $\Delta_{l_1 l_2}^0$  — штриховая, матрице  $\rho_{l_1 l_2}^0$  — волнистая

Простейшим поляризационным операторам

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}_{l_1 l_2} &= - \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_{\nu_1 \nu_2} \int \hat{p}^{\nu_1} \hat{A}^{\nu_1} G_{l_1 l_2}^0(X_1, X_2) \Delta_{l_1 l_2}^0 (-1)^{l_2+1} \times \\ &\quad \times \hat{p}^{\nu_2} \hat{A}^{\nu_2} G_{l_2 l_1}^0(X_2, X_1) dr_1 dr_2 d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2, \quad X = \{\mathbf{r}, \mathbf{R}, t\}, \\ \hat{\mathcal{P}}_{l_1 l_2}^{(n)} &= - \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_{\nu_1 \nu_2} \int \hat{p}^{\nu_1} \hat{A}^{\nu_1} G_{l_1 l_2}^0(X_1, X_2) \times \\ &\quad \times \rho_{l_1 l_2}^0 (-1)^{l_2+1} \hat{p}^{\nu_2} \hat{A}^{\nu_2} G_{l_2 l_1}^0(X_2, X_1) dr_1 dr_2 d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \end{aligned} \tag{15}$$

отвечают фейнмановские графы, представленные на рис. 1. На этом рисунке сплошные линии изображают функции  $G_{l_1 l_2}^0$ , штриховая —  $\Delta_{l_1 l_2}^0$ , волнистая линия отвечает  $\rho_{l_1 l_2}^0$ . Каждому узлу графа отвечает множитель  $\hat{p}^\nu \hat{A}^\nu$ . Явный вид функций Грина атомной системы мы заимствуем из работы [14].

#### 4. НЕКОГЕРЕНТНЫЙ КАНАЛ РАССЕЙЯНИЯ

Нас интересует вероятность нахождения в моде отражения  $(\kappa, \lambda)$  одного кванта, если число заполнения квантов в моде  $(\mathbf{k}_0, \lambda_0)$  равно двум. В низшем порядке теории возмущений соответствующей матрице  $\rho^{(n)}(\mathbf{r}|2 \rightarrow 1)$  отвечает сумма диаграмм Фейнмана, изображенных на рис. 2. Расчет этих диаграмм продемонстрируем на примере первой из них. Отвечающее ей аналитическое выражение следует из итераций системы уравнений (14):

$$\rho_{12}^{(n)}(\mathbf{r}|2 \rightarrow 1) = -\Delta_r^0 \hat{\mathcal{P}}_r \Delta_r^0 \hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)} \Delta_a^0 \hat{\mathcal{P}}_a \Delta_a^0. \tag{16}$$

Согласно принятым правилам, левой функции  $\Delta_r^0$  выражения (16) на рис. 2 в первой диаграмме отвечает левая штриховая линия. Затем в той же диаграмме следует изображение оператора  $\hat{\mathcal{P}}_r$ , согласующееся с рис. 1. Далее вновь штриховая линия, отвечающая  $\Delta_r^0$ , и затем изображение оператора  $\hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)}$ . Правая часть графа в соответствии с аналитическим выражением (16) строится симметричным образом. Для операторов  $\hat{\mathcal{P}}_r$  и  $\hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)}$  используются выражения (15). Если пространство однородно и процесс рассея-

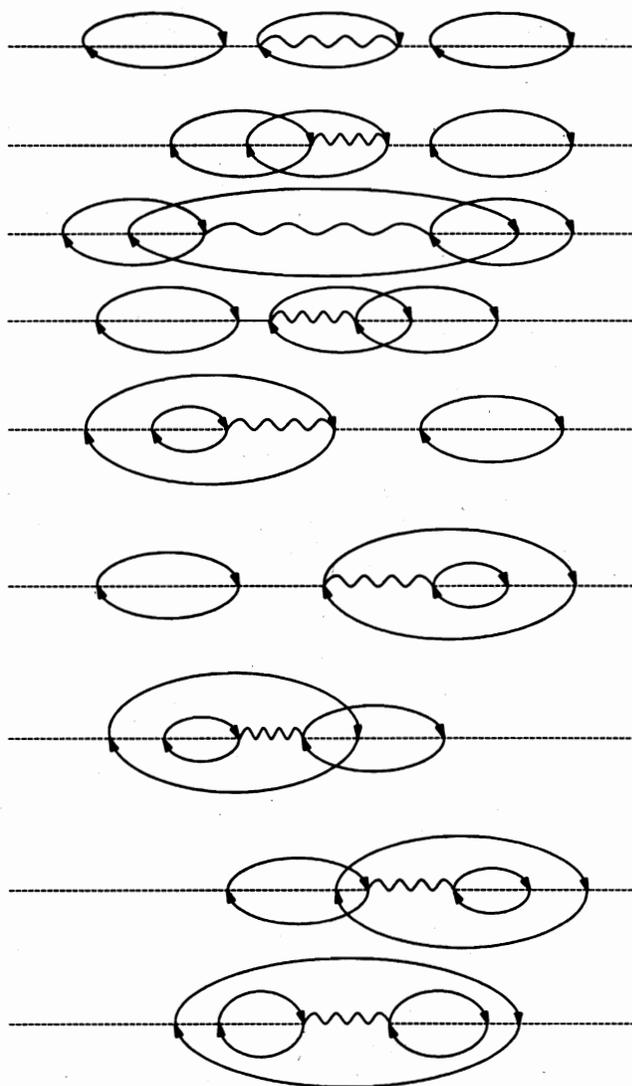


Рис. 2. Диаграммы некогерентных процессов рассеяния, поставляющих один фотон в моду отражения при наличии двух фотонов в рассеиваемой моде

ния стационарен, то в энергетическом представлении [11]

$$\hat{\mathcal{G}}_r^\infty(E) = \sum_{\mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}_1 \lambda_1}^+ C_r^{\mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2} (E - \hat{H}_{ph}) \hat{\alpha}_{\mathbf{k}_2 \lambda_2},$$

$$C_r^{\mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2}(E) = c_r^{\mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2}(E) \delta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \tag{17}$$

$$c_r^{\mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2}(E) = \sum_{m\mu} \frac{P_{m\mu}^{*\lambda_1}(\mathbf{k}_1) P_{m\mu}^{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)}{2kV} \frac{N_\mu}{E - \omega_{m\mu} + i\gamma/2}.$$

Как и ранее, эффектом Доплера пренебрегаем,  $N_\mu$  — число заполнения  $\mu$ -подуровней атомов. Используя правило суммирования (3), для  $\text{Im } \hat{\mathcal{P}}_r^\infty$  получаем

$$\begin{aligned} \text{Im } \hat{\mathcal{P}}_r^\infty(E) \hat{\alpha}_{k\lambda} |0\rangle &= -\frac{1}{2} \gamma_{ph}(E) \hat{\alpha}_{k\lambda}^+ |0\rangle, \\ \gamma_{ph}(E) &= \frac{\pi^2(2j_m + 1)}{\omega_{m\mu}^2} \gamma_r n_\mu (2j_\mu + 1) \delta_\gamma(E - \omega_{m\mu}), \\ \delta_\gamma(E) &= - \left[ \left( E + \frac{i\gamma}{2} \right)^{-1} - \left( E - \frac{i\gamma}{2} \right)^{-1} \right] \frac{1}{2\pi i}. \end{aligned} \tag{18}$$

Для оператора  $\hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)}$  из (15) следует

$$\hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)}(E) = \sum_{k_1 \lambda_1 k_2 \lambda_2} \hat{\alpha}_{k_1 \lambda_1} \int C_{12}^{k_1 \lambda_1 k_2 \lambda_2}(E_1) \rho_{12}(E - E_1) \frac{dE_1}{2\pi} \hat{\alpha}_{k_2 \lambda_2}^+.$$

Если среда пространственно однородна, то

$$\begin{aligned} C_{12}^{k_1 \lambda_1 k_2 \lambda_2}(E) &= \delta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) c_{12}^{k_1 \lambda_1 k_2 \lambda_2}(E), \\ c_{12}^{k_1 \lambda_1 k_2 \lambda_2}(E) &= -2\pi \sum_{m\mu} \frac{P_{m\mu}^{\lambda_1}(\mathbf{k}_1) P_{m\mu}^{*\lambda_2}(\mathbf{k}_2)}{2kV} N_\mu \delta_\gamma(E + \varepsilon_m - \varepsilon_\mu). \end{aligned} \tag{19}$$

Если рассеивающая среда занимает полупространство  $z > 0$ , то в вигнеровском приближении в формулах (16) и (18) надлежит осуществить замену [11]

$$\delta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \rightarrow \delta(k_{1x}, k_{2x}) \delta(k_{1y}, k_{2y}) \delta^+(k_{1z} - k_{2z}),$$

где

$$\delta^+(q) = \int_0^{L_z/2} e^{-iqz} \frac{dz}{L_z}.$$

Учитывая в стационарных условиях разностную зависимость  $\rho_{12}^{(n)}$  от  $t$  и  $t'$ , после преобразования Фурье в согласии с формулой (16) будем иметь

$$\begin{aligned} \rho_{12}^{(n)}(E|2 \rightarrow 1) &= - \left( E - \hat{H}_{ph} + i0 \right)^{-1} \sum_{k_1 \lambda_1 k_2 \lambda_2} \hat{\alpha}_{k_1 \lambda_1}^+ C_r^{k_1 \lambda_1 k_2 \lambda_2}(E - \hat{H}_{ph}) \times \\ &\times \hat{\alpha}_{k_2 \lambda_2} \left( E - \hat{H}_{ph} + i0 \right)^{-1} \sum_{k_3 \lambda_3 k_4 \lambda_4} \hat{\alpha}_{k_3 \lambda_3} C_{12}^{k_3 \lambda_3 k_4 \lambda_4} \rho_{12}^0 \hat{\alpha}_{k_4 \lambda_4}^+ \left( E - \hat{H}_{ph} - i0 \right)^{-1} \times \\ &\times \sum_{k_5 \lambda_5 k_6 \lambda_6} \hat{\alpha}_{k_5 \lambda_5}^+ C_a^{k_5 \lambda_5 k_6 \lambda_6} \left( E - \hat{H}_{ph} \right) \hat{\alpha}_{k_6 \lambda_6} \left( E - \hat{H}_{ph} - i0 \right)^{-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

В псевдокоординатном представлении выражение (20) выглядит так:

$$\rho_{12}^{(n)}(\mathbf{r}, E|2 \rightarrow 1) = - \sum_{\mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2} \frac{\exp(i\mathbf{k}_1 \mathbf{r})}{E - k_1 + i0} \frac{C_r^{k_1 \lambda_1 k_0 \lambda_0}(E)}{E - k_0 + i0} \times \\ \times \frac{C_{12}^{k_0 \lambda_0 k_0 \lambda_0}(E - 2k_0)}{E - k_0 - i0} C_a^{k_0 \lambda_0 k_2 \lambda_2}(E) \frac{\exp(-i\mathbf{k}_2 \mathbf{r})}{E - k_2 - i0} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}_1 \lambda_1}^+ |0\rangle \langle 0| \hat{\alpha}_{\mathbf{k}_2 \lambda_2}.$$

При этом

$$\rho_{12}^0(E) = \pi (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}_0 \lambda_0}^+)^2 |0\rangle \langle 0| (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}_0 \lambda_0})^2 \delta(E - 2k_0).$$

Интересуясь лишь отраженным лучом, полагаем  $z \rightarrow -\infty$ . Это обстоятельство позволяет воспользоваться асимптотической формулой [14]

$$\frac{1}{2k} \frac{\exp(ik_z z)}{E - k + i0} \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} iL_z \frac{\exp(ik_z z)}{2k_z} \delta\left(k_z, -\sqrt{E^2 - k_x^2 - k_y^2}\right) \rightarrow \\ \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 2\pi i \frac{\exp(ik_z z)}{2k_z} \delta\left(k_z + \sqrt{E^2 - k_x^2 - k_y^2}\right). \quad (21)$$

Здесь  $\delta(k, k')$  — символ Кронекера,  $\delta(k - k')$  — дельта-функция Дирака. Конструкция формул (21) обеспечивает правильные результаты при последующем предельном переходе  $V \rightarrow \infty$  и выполнении операции  $\text{Sp } \hat{K} \rho_{12}$  при любом операторе  $\hat{K}$ . Произведение символов Кронекера

$$\delta(k_{1z}, -\sqrt{E^2 - k_{1x}^2 - k_{1y}^2}) \delta(k_{2z}, -\sqrt{E^2 - k_{2x}^2 - k_{2y}^2})$$

в силу равенств  $k_{1x} = k_{2x}$ ,  $k_{1y} = k_{2y}$  можно переписать в виде

$$\delta(k_{1z}, k_{2z}) \delta(k_{1z}, -\sqrt{E^2 - k_{1x}^2 - k_{1y}^2}).$$

Имея в виду последующий предельный переход  $V \rightarrow \infty$ , запишем в согласии с (21)

$$\delta(k_{1z}, -\sqrt{E^2 - k_{1x}^2 - k_{1y}^2}) \rightarrow \frac{2\pi}{L_z} \delta(k_{1z} + \sqrt{E^2 - k_{1x}^2 - k_{1y}^2}).$$

Теперь мы в состоянии выполнить интегрирование по  $E$ , проведя предварительно замену переменной

$$E^2 - k_{1x}^2 - k_{1y}^2 = t^2.$$

Будем иметь

$$\rho_{12}^{(n)}(\mathbf{r}|2 \rightarrow 1) = \int_{z \rightarrow -\infty} \rho_{12}^{(n)}(\mathbf{r}, E|2 \rightarrow 1) \frac{dE}{2\pi} = \\ = L_z \sum_{\mathbf{k}_1 \lambda_1 \mathbf{k}_2 \lambda_2} \frac{k_1}{k_{1z}} \frac{C_r^{k_1 \lambda_1 k_0 \lambda_0}(k_1)}{k_1 - k_0 + i0} C_{12}^{k_0 \lambda_0 k_0 \lambda_0}(k_1 - 2k_0) \times \\ \times \frac{C_a^{k_0 \lambda_0 k_2 \lambda_2}(k_1)}{k_1 - k_0 - i0} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}_1 \lambda_1}^+ |0\rangle \langle 0| \hat{\alpha}_{\mathbf{k}_2 \lambda_2}. \quad (22)$$

Выражение (22) обладает неинтегрируемым полюсом при  $k_1 = k_0$ . Это именно та особенность, о которой упоминалось в разд. 2.

Возникновение особенностей вызвано содержащимися в (20) пропагаторами  $\Delta_{r,a}^0$ , описывающими эволюцию фотона в среде. Особенность исчезает, если вместо  $\Delta_{r,a}^0$  использовать полные пропагаторы, учитывающие взаимодействие фотона со средой. В качестве приемлемой аппроксимации заменим  $\Delta_{r,a}^0$  пропагаторами фотона в бесконечной среде  $\Delta_{r,a}^\infty$  [12]:

$$\begin{aligned} \Delta_r^0(E) &\rightarrow \Delta_r^\infty(E), & \Delta_r^\infty(E)\hat{\alpha}_{k\lambda}^+|0\rangle &= \left(E - k + i\frac{\gamma_{ph}}{2}\right)\hat{\alpha}_{k\lambda}^+|0\rangle; \\ \Delta_a^0(E) &\rightarrow \Delta_a^\infty(E), & \Delta_a^\infty(E)\hat{\alpha}_{k\lambda}^+|0\rangle &= \left(E - k - i\frac{\gamma_{ph}}{2}\right)\hat{\alpha}_{k\lambda}^+|0\rangle. \end{aligned}$$

Результативно такая замена влечет за собой в формуле (22) замену

$$|(k_1 - k_0 + i0)^{-1}|^2 \rightarrow \left| \left( k_1 - k_0 + i\frac{\gamma_{ph}(k_1)}{2} \right)^{-1} \right|^2.$$

Далее

$$\begin{aligned} k_1 k_0 C_r^{k_1 \lambda_1 k_0 \lambda_0}(k_1) C_a^{k_0 \lambda_0 k_1 \lambda_1}(k_1) &= \frac{\sin^2 [(k_{1z} - k_{0z})L_z/4]}{(k_{1z} - k_{0z})^2 L_z^2} \times \\ &\times \delta(k_{1x}, k_{0x})\delta(k_{1y}, k_{0y})\delta(k_{2x}, k_{0x})\delta(k_{2y}, k_{0y}) \left| c^{k_1 \lambda_1 k_0 \lambda_0}(k_0) \right|^2. \end{aligned}$$

Интересуясь диагональными элементами матрицы плотности, считаем  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Теперь формулу (22) при  $\gamma \gg \gamma_{ph}$  можно переписать так ( $L_z \rightarrow \infty$ ):

$$\begin{aligned} \rho_{12}^{(n)}(\mathbf{r}|2 \rightarrow 1) &= \frac{1}{L_z} \sum_{k_1 \lambda_1} \frac{\pi^2 (2j_m + 1)(2j_\mu + 1) k_{1z}}{\omega_{m\mu}^2 k_1} \gamma_r n_\mu \delta_\gamma(\omega_{m\mu} - k_0) \times \\ &\times \frac{\delta(k_{1x}, k_{0x})\delta(k_{1y}, k_{0y})}{(k_1 - k_0)^2 + \gamma_{ph}^2(k_0)/4} \hat{\alpha}_{k_1 \lambda_1}^+ |0\rangle \langle 0| \hat{\alpha}_{k_1 \lambda_1} | \text{Sp } \rho_{12}^{(c)}(\mathbf{r}|1 \rightarrow 1). \end{aligned} \quad (23)$$

Из-за наличия в знаменателях выражения (23) величин  $\gamma$  и  $\gamma_{ph}$  в отраженном потоке излучения не выполняются равенства  $k_{1z} = -k_{0z}$  и  $k_1 = k_0$ . Таким образом, налицо узкое частотно-угловое распределение отраженного потока с полушириной пропорциональной

$$\Delta\vartheta \propto \left( \sqrt{\cos\vartheta + \frac{\gamma_{ph}(k_0)}{k_0}} - \cos\vartheta \right) \sin\vartheta,$$

где  $\vartheta$  — угол падения луча. Подобное частотно-угловое распределение было обнаружено ранее [12] при исследовании отражения однофотонного состояния от термически возбужденной среды. Полуклассическая теория излучения такого распределения не предсказывает. Не возникает это распределение и в расчетах, базирующихся на технике функций Грина [17], предусматривающей разрыв корреляторов фотон—фотон. Таким образом, наличие частотно-углового распределения в направлении зеркального отражения представляет собой характерное следствие взаимной корреляции фотонов в процессе отражения.

Представляет интерес интегральная вероятность отражения одного кванта поляризации  $\lambda$ , т. е.

$$\text{Sp } \rho_{12}^{(n)}(\mathbf{r}|2 \rightarrow 1),$$

причем суммирование по  $\lambda$  опускаем.

После исчезновения в (23) сумм из-за наличия символов Кронекера остается суммирование по  $k_{1z}$ , которое при  $L_z \rightarrow \infty$  заменяется интегрированием, и при  $\gamma \gg \gamma_{ph}$  имеем

$$\frac{\text{Sp } \rho_{12}^{(n)}(\mathbf{r}|2 \rightarrow 1)}{\text{Sp } \rho_{12}^{(c)}(\mathbf{r}|1 \rightarrow 1)} = -\frac{\pi(2j_m + 1)}{2\omega_{m\mu}^2} \gamma_r n_\mu \delta_\gamma(\omega_{m\mu} - k_0)(2j_\mu + 1) \times \\ \times \int_{-\infty}^0 \frac{k_{1z}}{(k_1 - k_0)^2 + \gamma_{ph}^2(k_0)/4} \frac{dk_{1z}}{k_1}. \quad (24)$$

В последнем интеграле существенна область  $k_{1z} = -k_{0z}$ . По этой причине воспользуемся разложением

$$k_1 = k_0 - \frac{k_{0z}}{k_0}(k_{1z} + k_{0z})$$

и заменим верхний предел интегрирования на бесконечность. С учетом (18) выражение (24) оказывается равным единице. Теперь надо вспомнить, что мы рассчитали вклад лишь первой диаграммы, изображенной на рис. 2. Учет других диаграмм приводит в формуле (23) к замене

$$\left[ (k_1 - k_0)^2 + \frac{\gamma_{ph}^2}{4} \right]^{-1} \rightarrow 4\pi^2 \delta_{\gamma_{ph}}^2(k_1 - k_0).$$

При такой замене величина отношения (24) удваивается. В результате имеем

$$\frac{\text{Sp } \rho_{12}^{(n)}(\mathbf{r}|2 \rightarrow 1)}{\text{Sp } \rho_{12}^{(c)}(\mathbf{r}|1 \rightarrow 1)} = 2, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (25)$$

Двойка соответствует числу квантов в рассеиваемой моде. Поскольку  $\rho^{(c)}(\mathbf{r}|1 \rightarrow 1)$  при  $z \rightarrow -\infty$  определяет вероятность отражения кванта при одном кванте в исходной моде  $(\mathbf{k}_0, \lambda_0)$ , интегральный результат может быть истолкован как следствие независимого рассеяния квантов. В интегральной характеристике (25) корреляционные свойства квантов нивелируются. Формула (25) формально напоминает формулу (28) из работы [12]. В работе [12] среда считается возбужденной, а процессы рассеяния в некотором смысле обратными по отношению к исследуемым здесь. Различие в два раза вызвано тем, что в работе [12] при расчете параметров излучения, отраженного от возбужденной среды, для оператора  $\hat{\rho}_{12}^{(n)}$  в качестве аппроксимации использовалось его выражение для однородного пространства. Учет в этом операторе конечных размеров среды изменит результат в два раза.

Интегральный коэффициент отражения  $R$  при  $n_\mu \lambda^3 \gamma_r / \gamma < 1$  в согласии с формулами (5) и (25) при  $z \rightarrow -\infty$  оказывается равным

$$R = \text{Sp } \rho_{12}^{(n)}(\mathbf{r}|2 \rightarrow 1) / \text{Sp } (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}_0, \lambda_0}^+ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}_0, \lambda_0} \rho^0) = \text{Sp } \rho^{(c)}(\mathbf{r}|1 \rightarrow 1), \quad z \rightarrow -\infty.$$

Таким образом, мы возвращаемся к формуле (4), т. е. к классической формуле Френеля, аналитически зависящей от константы взаимодействия поля с веществом при  $e \rightarrow 0$ .

Только при расчете такой интегральной характеристики как  $R$  можно считать фотоны взаимно независимыми и использовать понятие показателя преломления среды, который, собственно, и определяет формулы Френеля. Напомним, что до интегрирования по углам  $\vartheta$  мы имели неаналитическую по  $e$  зависимость (23), определяющую частотно-угловое распределение квантов. Для описания такого частотно-углового распределения показателя преломления недостаточно.

Результат расчетов оказывается иным, если  $\gamma \ll \gamma_{ph}$ , что легко реализуется в эксперименте. На смену формуле (25) при  $k_0 = \omega_{m\mu}$  приходит следующая формула:

$$\frac{\text{Sp } \rho_{12}^{(n)}(r|2 \rightarrow 1)}{\text{Sp } \rho_{12}^{(c)}(r|1 \rightarrow 1)} \propto \frac{\gamma}{\gamma_{ph}(\omega_{m\mu})}, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (26)$$

В этих условиях формулы Френеля нарушаются, а отражение подавляется. Другими словами, учет взаимной корреляции фотонов при  $\gamma \ll \gamma_{ph}$  влечет за собой неприменимость полуклассической (semiclassical) теории излучения для расчета отражения резонансного излучения даже от невозбужденных сред, если только в рассеиваемом потоке кванты взаимно коррелированы. Коэффициент отражения  $R$  здесь начинает зависеть от статистических свойств падающего излучения даже при линейном взаимодействии света с отдельными атомами среды.

Подавление отражения взаимно коррелированных фотонов поддается экспериментальной проверке. Дело в том, что квантовая структура электромагнитного потока в свободном пространстве может быть различной. Если в потоке излучения оптического генератора фотоны в основном взаимно коррелированы, то доля таких фотонов в потоке черного излучения значительно меньше. Таким образом, в соответствии с формулой (26) следует ожидать уменьшения коэффициента отражения  $R$  при замене теплового источника рассеиваемого потока на лазерный, что можно обнаружить, сопоставляя критические концентрации атомов, определяющие взаимную смену диффузного и зеркального характера отражения в эксперименте Вуда [6] при тепловом и лазерном источниках рассеиваемого излучения.

## Литература

1. Ю. К. Земцов, А. Ю. Сечин, А. Н. Старостин, А. Г. Леонов, А. А. Руденко, Д. И. Чехов, ЖЭТФ 114, 135 (1998).
2. А. А. Пантелеев, В. А. Росляков, А. Н. Старостин, ЖЭТФ 97, 1777 (1990).
3. М. И. Дьяконов, В. И. Перель, ЖЭТФ 58, 1090 (1970).
4. И. М. Петров, Ю. А. Матюгин, С. Г. Раутиан, В. П. Чеботарев, ЖЭТФ 58, 1243 (1970).
5. А. Д. Ахсаханян, С. В. Гапонов, В. И. Лучин, А. П. Чиринянов, ЖТФ 58, 1885 (1988).
6. R. W. Wood, Phys. Zs. Bd 10(13), 425 (1909).
7. W. Heering, Z. Phys. B 20, 69 (1975).
8. M. Cröbel and W. Heering, Appl. Phys. 21, 77 (1980).
9. Ch. I. Köstler, IEEE 2, 580 (1966).
10. Б. Б. Бойко, Н. С. Петров, *Отражение света от усиливающих и нелинейных сред*, Наука и техника, Минск (1988).
11. Б. А. Векленко, ЖЭТФ 96, 457 (1989).
12. Б. А. Векленко, Р. Б. Гусаров, Ю. Б. Шеркунов, ЖЭТФ 113, 521 (1998).

13. Ф. Арекки, М. Скалли, Г. Хакен, В. Вайдлих, *Квантовые флуктуации излучения лазера*, Мир, Москва (1974).
14. Б. А. Векленко, Изв. вузов. Физика, вып. 9, 71 (1983).
15. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1973).
16. В. Гайтлер, *Квантовая теория излучения*, Изд-во иностр. лит., Москва (1956).
17. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Гостехиздат, Москва, (1962).
18. Д. А. Киржниц, *Полевые методы в теории многих частиц*, Гос. изд-во лит. по атомной науке и технике Гос. комитета по использованию атомной энергии СССР, Москва (1963).
19. Б. А. Векленко, Изв. вузов. Физика, вып. 5, 81 (1978).
20. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ 47, 1515 (1964).