

МНОГОФОТОННАЯ ИОНИЗАЦИЯ АТОМА ВОДОРОДА ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

О. Б. Препелица*

*Институт прикладной физики Академии наук Молдовы
277028, Кишинев, Молдова*

Поступила в редакцию 28 января 1999 г.

Рассматривается многофотонная ионизация основного состояния атома водорода в поле интенсивной циркулярно-поляризованной электромагнитной волны. Для описания состояний фотоэлектронов предложены квазиклассические волновые функции, частично учитывающие как воздействие сильной электромагнитной волны, так и кулоновского потенциала. Получены выражения для углового и энергетического распределений фотоэлектронов с энергиями, много меньшими потенциала ионизации невозмущенного атома. Показано, что благодаря учету кулоновского потенциала в волновых функциях конечных состояний электронов вероятность перехода вблизи порога ионизации стремится к значению, отличному от нуля. Кроме того, естественным образом получаются известные правила отбора для многоквантовых переходов в циркулярно-поляризованном электромагнитном поле. Результаты статьи сравниваются с аналогичными результатами, полученными в рамках приближения Келдыша—Фейсала—Рисса.

PACS: 32.80.Fm

1. ВВЕДЕНИЕ

Процесс многоквантовой ионизации атомов полем сильной электромагнитной волны исследовался как теоретически [1–13], так и экспериментально [14–19] (см. также книги [20–23] и обзоры [24, 25]). Следует отметить пионерскую работу Л. В. Келдыша [1] и последующие за ней работы [2–7], в которых были изучены основные закономерности многоквантового фотоэффекта. Общим для работ [1–9] является то, что в качестве волновой функции конечного состояния фотоэлектрона была использована волновая функция свободного электрона в поле волны (волновая функция Волкова), что, как известно, оправдано только для системы, связанной короткодействующими силами. Пренебрежение влиянием кулоновского потенциала на конечное состояние электрона, известное как приближение Келдыша—Фейсала—Рисса, приводит к предэкспоненциальной ошибке в формуле для вероятности ионизации нейтрального атома сильным электромагнитным полем, а также к неверной пороговой зависимости вероятности процесса от скорости фотоэлектрона. Вероятность появления фотоэлектрона с нулевым импульсом, рассчитанная в рамках приближения Келдыша—Фейсала—Рисса, оказывается равной нулю [8]. Тогда, как известно, что при расщеплении системы, связанной кулоновскими силами, пороговое значение вероятности процесса всегда отлично от нуля [26, 27]. Кроме того, пренебрежение кулоновским потенциалом в случае

*E-mail: exciton@cc.acad.md

ионизации атома циркулярно-поляризованным электромагнитным полем не позволяет получить многофотонные правила отбора для магнитного квантового числа (поскольку циркулярно-поляризованный фотон обладает проекцией момента 1 или -1 , при s -фотонном переходе должно выполняться правило отбора $s = |m_f - m_i|$, где m_i и m_f — проекции момента, соответственно, начального и конечного состояний).

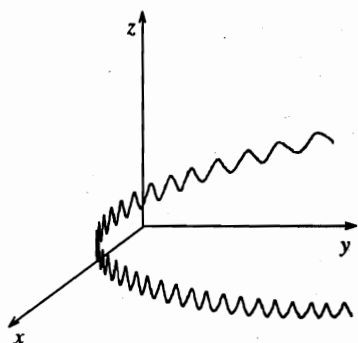
Первая трудность была преодолена в работах [4, 7], где было показано, что при определенных условиях роль кулоновского потенциала может быть учтена по теории возмущений. Тогда получается правильный предельный переход к формуле, описывающей вероятность ионизации атома постоянным электрическим полем [26]. Для разрешения недостатков теории были предложены еще несколько способов, из которых следует упомянуть подход с использованием так называемого полюсного приближения [21, 12], а также способ учета кулоновского взаимодействия фотоэлектрона с остаточным ионом путем замены плоской волны в волковском решении на кулоновскую волновую функцию непрерывного спектра с соответствующей асимптотикой [10, 11].

В настоящей работе рассматривается многофотонная ионизация атома водорода под действием циркулярно-поляризованной электромагнитной волны. Из квазиклассических соображений построена квазистационарная волновая функция фотоэлектрона, учитывающая как воздействие сильной электромагнитной волны, так и кулоновского потенциала. Показано, что при разложении упомянутой волновой функции с соответствующими асимптотическими свойствами (аналог функции Зоммерфельда) в ряд по парциальным волнам с определенными значениями проекции момента переход возможен только в те состояния, для которых выполняются многоквантовые правила отбора для магнитного квантового числа. Получены выражения для углового и энергетического распределений фотоэлектронов. Показано, что на пороге реакции вероятность ионизации стремится к постоянному, отличному от нуля значению. Найдено критическое значение напряженности электромагнитного поля, при котором высота основного (первого) надпорогового максимума в распределении фотоэлектронов по энергиям равна высоте второго надпорогового максимума. Полученные выражения для вероятности ионизации сравниваются с соответствующими выражениями, найденными в приближении Келдыша—Фейсала—Рисса. Показано, что последовательный учет кулоновского потенциала в волновых функциях конечного состояния электрона приводит к экспоненциальному росту вероятности ионизации по сравнению с предсказаниями теории Келдыша—Фейсала—Рисса.

2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ СИЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Построим приближенные волновые функции электрона, описывающие состояния непрерывного спектра в кулоновском и электромагнитных полях. Строго говоря, все состояния в поле волны принадлежат непрерывному спектру, так что здесь идет речь о квазистационарных состояниях, действительная часть средней энергии которых больше нуля. Будем рассматривать состояния электрона в околороговой области, с импульсами

$$p \ll \frac{\hbar}{r_b},$$



Траектория движения классического электрона в поле интенсивной электромагнитной волны

где $r_b = \hbar^2 / Me^2$ — боровский радиус, M и e — соответственно, масса и заряд электрона. Хорошо известно, что в околороговой области энергий состояния электрона являются квазиклассическими. Таким образом, основной вклад в эволюцию электрона вносит узкий пучок фейнмановских траекторий, расположенных вблизи его классической траектории. Поэтому целесообразно остановиться подробнее на движении классического электрона в поле волны. Известно, что если в отсутствие электромагнитного поля электрон двигался вдоль некоторой траектории $\mathbf{r}(t)$, то в поле напряженностью $\mathbf{E}(t)$ и частотой ω при выполнении условий

$$\min |\mathbf{r}(t)| \gg \max |\boldsymbol{\alpha}(t)|, \quad (1)$$

$$\omega \gg \frac{1}{T} \quad (2)$$

и

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{e\mathbf{E}(t)}{M\omega^2} \quad (3)$$

(T — период невозмущенного движения) электрон будет двигаться вдоль квазистационарной траектории (подробнее см. [28, § 30]):

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \boldsymbol{\alpha}(t). \quad (4)$$

Так что воздействие высокочастотной волны сводится главным образом к появлению осцилляций при движении электрона вдоль невозмущенной траектории $\mathbf{r}(t)$ (см. рисунок). Это формально совпадает с траекторией движения электрона в отсутствие внешнего воздействия, но в неинерциальной системе отсчета, в которой новые и старые координаты связаны соотношением (4). Поэтому, исходя из квазиклассических соображений, мы можем заключить, что волновая функция электрона в поле волны приближенно представляет собой кулоновскую волновую функцию, записанную в неинерциальной системе отсчета:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi^c(\mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha}(t), t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau \frac{e^2 \mathbf{A}^2(\tau)}{2Mc^2}\right), \quad (5)$$

где $\mathbf{A}(t)$ — вектор-потенциал приложенного электромагнитного поля, записанный в дипольном приближении, c — скорость света в вакууме, $\Psi^c(\mathbf{r}, t)$ — кулоновская волновая функция. Отметим, что, как и точная волновая функция электрона в кулоновском и электромагнитных полях, функция (5) не является состоянием с определенным моментом. Сохраняющейся величиной, в силу аксиальной симметрии системы, является проекция орбитального момента.

Соотношение (5) также может быть получено более формальным способом. Запишем гамильтониан электрона в кулоновском и электромагнитных полях:

$$H = \frac{\left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(t)\right)^2}{2M} - \frac{e^2}{|\mathbf{r}|}.$$

Представим его следующим образом:

$$H = H_0 + V_{int}, \quad (6)$$

$$H_0 = \frac{\left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(t)\right)^2}{2M} - \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha}(t)|}, \quad (7)$$

$$V_{int} = \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha}(t)|} - \frac{e^2}{|\mathbf{r}|}. \quad (8)$$

Легко видеть, что выражение (4) является решением классических уравнений движения, следующих из гамильтониана (7). Так что именно (7) главным образом определяет классическую траекторию движения электрона в поле волны. В этом смысле (7) является гамильтонианом нулевого приближения, а (8) должно рассматриваться как возмущение. Учитывая квазиклассичность электрона, т. е. то, что он с подавляющей вероятностью находится вблизи классической траектории, мы можем заключить, что при переходе к квантовомеханическому описанию разбиение полного гамильтониана (6) на гамильтониан нулевого приближения (7) и возмущение (8) остается в силе. Поэтому в качестве волновых функций нулевого приближения должны быть использованы решения уравнения Шредингера с гамильтонианом (7):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_0 \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (9)$$

Решение уравнения (9) с начальным условием $\Psi(\mathbf{r}, -\infty) = \Psi^c(\mathbf{r}, -\infty)$ будем искать в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = U(\hat{\mathbf{P}}, t) \Psi^c(\mathbf{r}, t), \quad (10)$$

$$U(\hat{\mathbf{P}}, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau \left(-\frac{e\mathbf{A}(\tau)\hat{\mathbf{P}}}{Mc} + \frac{e^2\mathbf{A}^2(\tau)}{2Mc^2}\right)\right). \quad (11)$$

Подставив (10), (11) в уравнение (9), после элементарных преобразований получим уравнение для функции $\Psi^c(\mathbf{r}, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^c(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} - \frac{e^2}{|\mathbf{r}|}\right) \Psi^c(\mathbf{r}, t).$$

Отсюда следует, что $\Psi^c(\mathbf{r}, t)$ действительно является кулоновской функцией, определяющей состояние электрона в отсутствие внешнего электромагнитного поля. Учитывая формулу (3), не составляет труда показать тождественность выражений (5), (10).

3. ВЕРОЯТНОСТЬ МНОГОКВАНТОВОЙ ИОНИЗАЦИИ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ АТОМА ВОДОРОДА

Рассмотрим амплитуду вероятности перехода из основного состояния невозмущенного атома $\Psi_i^c(\mathbf{r}, t)$ в состояния непрерывного спектра $\Psi_f(\mathbf{r}, t)$. Соответствующее выражение записывается в виде

$$A_{if} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\mathbf{r} \Psi_f^*(\mathbf{r}, t) \left(-\frac{e\mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{p}}}{Mc} + \frac{e^2\mathbf{A}^2(t)}{2Mc^2} \right) \Psi_i^c(\mathbf{r}, t). \quad (12)$$

Согласно формулам (5), (10), (11), конечное состояние электрона может быть выражено через невозмущенную кулоновскую функцию непрерывного спектра $\Psi_f^c(\mathbf{r}, t)$ в двух эквивалентных формах:

$$\Psi_f(\mathbf{r}, t) = \Psi_f^c(\mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha}(t)) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p^2}{2M} t + \int_{-\infty}^t d\tau \frac{e^2\mathbf{A}^2(\tau)}{2Mc^2} \right) \right), \quad (13)$$

$$\Psi_f(\mathbf{r}, t) = U(\hat{\mathbf{p}}, t) \Psi_f^c(\mathbf{r}) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2M} t \right). \quad (14)$$

Будем считать, что на временах $t \rightarrow \pm\infty$ поле отсутствует. Тогда, используя представление (14), после некоторых преобразований, связанных с интегрированием по частям в формуле (12), получим

$$A_{if} = \frac{i}{\hbar} \left(\frac{p^2}{2M} + I_0 \right) \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\mathbf{r} \Psi_f^*(\mathbf{r}, t) \Psi_i^c(\mathbf{r}, t),$$

где I_0 — потенциал ионизации основного состояния атома.

Введем фурье-образы кулоновских функций:

$$\varphi_{f,i}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} \Psi_{f,i}^c(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}).$$

С их помощью, а также с помощью представления волновой функции конечного состояния (13), преобразуем амплитуду ионизации к виду

$$A_{if} = \frac{i}{\hbar} \left(\frac{p^2}{2M} + I_0 \right) \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\left(\frac{p^2}{2M} + I_0 \right) t + \int_{-\infty}^t d\tau \frac{e^2\mathbf{A}^2(\tau)}{2Mc^2} \right) \right] \Phi(\boldsymbol{\alpha}(t)), \quad (15)$$

$$\Phi(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \int d\mathbf{r} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \varphi_f^*(\mathbf{k}) \varphi_i(\mathbf{k}') \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\boldsymbol{\alpha}(t)). \quad (16)$$

Легко видеть, что интегрирование по координатному пространству дает дельта-функцию $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, с помощью которой снимается интегрирование по \mathbf{k}' . После чего формула (16) принимает вид

$$\Phi(\alpha(t)) = (2\pi)^3 \int d\mathbf{k} \varphi_f^*(\mathbf{k}) \varphi_i(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\alpha(t)). \quad (17)$$

Для вычисления интеграла (17) удобно воспользоваться следующим приемом. Вместо исследуемого связанно-свободного перехода рассмотрим связанно-связанный переход из основного состояния в некоторое состояние дискретного спектра. Под $\varphi_j(\mathbf{k})$ в (17) временно будем понимать фурье-образ волновой функции связанного состояния с квантовыми числами (nlm) . После вычисления интеграла с помощью аналитического продолжения n в область мнимых значений найдем искомое значение интеграла (17). Такая процедура позволяет значительно упростить расчет, так как при вычислении (17) проще иметь дело с фурье-образами связанных состояний, чем с фурье-образами состояний непрерывного спектра. Отметим, что аналогичный прием использовался в работах [29, 30], где с помощью аналитического продолжения по известной амплитуде связанно-связанного перехода была найдена амплитуда связанно-свободного перехода.

Волновая функция связанного состояния, в которое формально происходит переход, может быть представлена в виде

$$\bar{\Psi}_f^c(\mathbf{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (18)$$

Запишем фурье-образы основного состояния и состояния (18) [31]:

$$\varphi_i(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_b^3}} \frac{1}{(k^2 + 1/r_b^2)^2}, \quad (19)$$

$$\bar{\varphi}_f(\mathbf{k}) = F_{nl}(k) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (20)$$

$$F_{nl}(k) = \frac{2^{2l+1} l! k^l}{\pi^2 r_b^{l+5/2} n^{l+2} (k^2 + 1/(nr_b)^2)^{l+2}} C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{k^2 - 1/(nr_b)^2}{k^2 + 1/(nr_b)^2} \right), \quad (21)$$

где $C_N^n(x)$ — функция Гегенбауэра.

Будем считать приложенное электромагнитное поле циркулярно-поляризованным:

$$\mathbf{E}(t) = E_0 (\mathbf{e}_x \cos(\omega t) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t)). \quad (22)$$

Здесь $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ — орты декартовой системы координат. Предположим также, что атом ориентирован так, что направление квантования совпадает с направлением распространения электромагнитной волны. Таким образом, приняв во внимание выражения (17), (19)–(22), запишем

$$\bar{\Phi}(\alpha(t)) = \frac{(2\pi)^3}{\sqrt{\pi r_b^3}} \int_0^\infty dk k^2 \frac{F_{nl}(k)}{(k^2 + 1/r_b^2)^2} \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \exp(-ik\alpha_0 \sin\theta \cos(\varphi - \omega t)),$$

$$\alpha_0 = \frac{eE_0}{M\omega^2}.$$

Можно показать, что значение интеграла во многом определяется полюсами подинтегральной функции. Согласно (21), таковыми являются $k = i/r_b, i/nr_b$. В слабых полях, когда $\alpha_0 \ll r_b$, вклады обоих полюсов сравнимы, в более сильных полях, $\alpha_0 \gg r_b$, благодаря экспоненциальному множителю в подинтегральном выражении основной вклад вносит полюс, ближайший к действительной оси $k = i/nr_b$. В этом случае, пренебрегая малыми членами порядка $1/n$, где $n \gg 1$, можем вынести из под знака интеграла знаменатель $(k^2 + 1/r_b^2)^2$ в точке $k = i/nr_b$. В результате получим

$$\bar{\Phi}(\alpha(t)) = (2\pi)^3 \varphi_i \left(\frac{i}{nr_b} \right) \int_0^\infty dk k^2 F_{nl}(k) \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \exp(-ik\alpha_0 \sin\theta \cos(\varphi - \omega t)).$$

Для сравнения запишем обратное преобразование Фурье волновой функции (18):

$$\bar{\Psi}_f^c(\mathbf{r}') = \int_0^\infty dk k^2 F_{nl}(k) \int d\Omega Y_{lm}(\theta, \varphi) \exp(ikr'(\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi'))).$$

Нетрудно заметить, что предпоследнее выражение представляет собой по сути обратное преобразование Фурье функции $\bar{\Psi}_f^c(\mathbf{r}')$, заданное в точке $r' = \alpha_0$, $\theta' = \pi/2$, $\varphi' = \omega t$. Таким образом, с учетом (18) мы имеем

$$\bar{\Phi}(\alpha(t)) = (2\pi)^3 \varphi_i \left(\frac{i}{nr_b} \right) R_{nl}(\alpha_0) Y_{lm} \left(\frac{\pi}{2}, \omega t \right), \quad \frac{\alpha_0}{r_b}, n \gg 1.$$

Если полученное выражение аналитически продолжить в область мнимых значений n , то мы придем к случаю, когда ионизация идет в состояние с определенным моментом и его проекцией. (Точнее, состоянием с определенным моментом и проекцией является $\Psi_f^c(\mathbf{r}, t)$ в формулах (13), (14).) Но, согласно общим принципам теории рассеяния, в качестве кулоновской волновой функции в выражениях (13), (14) должна быть взята волновая функция, асимптотическая форма которой содержит плоскую волну и наряду с ней сходящуюся сферическую волну. Указанная кулоновская функция может быть записана в виде разложения по парциальным волнам [26]:

$$\Psi_f^c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar p}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l \exp(-i\delta_l) R_{pl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta_p, \varphi_p),$$

где

$$R_{pl}(r) = \frac{C_{pl}}{(2l+1)!r_b} \left(\frac{2pr}{\hbar} \right)^l \exp\left(-\frac{i}{\hbar} pr\right) F\left(l+1+i\vartheta, 2l+2, 2\frac{i}{\hbar} pr\right),$$

$$C_{pl} = \sqrt{\frac{8\pi}{\vartheta(1-\exp(-2\pi\vartheta))}} \prod_{\eta=1}^l \sqrt{\eta^2 + \vartheta^2}, \quad \vartheta = \frac{\hbar}{pr_b},$$

θ_p, φ_p — аксиальный, полярный углы вектора \mathbf{p} .

Таким образом, учитывая последние выражения, находим искомое значение интеграла (17):

$$\Phi(\alpha(t)) = \frac{(2\pi)^{5/2}}{\hbar^{1/2} p} \varphi_i \left(\frac{i}{nr_b} \right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^{-l} \exp(i\delta_l) R_{pl}(\alpha_0) Y_{lm} \left(\frac{\pi}{2}, \omega t \right) Y_{lm}^*(\theta_p, \varphi_p).$$

Используя связь сферических функций и присоединенных полиномов Лежандра

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{(m+|m|)/2} i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi),$$

а также формулу (15), после простого интегрирования найдем амплитуду вероятности ионизации:

$$\begin{aligned} A_{if} = & i \frac{(2\pi)^{7/2}}{\hbar^{1/2} p} \left(\frac{p^2}{2M} + I_0 \right) \varphi_i \left(\frac{i}{nr_b} \right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{2l+1}{4\pi} \exp \left(i \left(\delta_l + \frac{\pi}{2} (l+m+|m|) \right) \right) \times \\ & \times \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} P_l^{|m|}(0) P_l^{|m|}(\cos \theta_p) \exp(-im\varphi_p) R_{pl}(\alpha_0) \times \\ & \times \delta \left(\frac{p^2}{2M} + I_0 + \frac{e^2 E_0^2}{2M\omega^2} - m\hbar\omega \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь считается, что $\alpha_0/r_b, \hbar/pr_b \gg 1$.

Остановимся на полученном выражении подробнее. Из вида дельта-функции следует, что из множества парциальных волн переход возможен только в то состояние, где магнитное квантовое число совпадает с фотонностью процесса. Это соответствует правилу отбора для магнитных квантовых чисел при дипольных многоквантовых переходах (из основного состояния) под действием циркулярно-поляризованного излучения [20].

Учитывая свойство нулей полиномов Лежандра

$$P_l^{|m|}(0) \sim \cos \left((l+|m|) \frac{\pi}{2} \right),$$

видим, что переход может идти только в состояния, для которых $l+|m| = 2N, N = 1, 2, 3 \dots$. Между тем дипольные правила отбора для орбитального квантового числа требуют, чтобы его изменение равнялось числу поглощенных в процессе перехода циркулярно-поляризованных фотонов, т. е. $l = |m|$. Тем не менее здесь нет противоречия, поскольку упомянутые правила отбора установлены для состояний с определенными моментами. В нашем случае из-за возмущения конечных состояний электромагнитным полем число l не является интегралом движения. Поэтому члены суммы (23) с данными l не определяют амплитуду ионизации в состояние с определенным моментом, равным $l\hbar$. Этим объясняется нарушение правил отбора в выражении (23).

Будем считать выполненным условие

$$\frac{p\alpha_0}{l\hbar} \ll 1 \quad (24)$$

(ниже будет показано, что именно это неравенство следует из условия применимости модели (1)). Для функций $R_{pl}(\alpha_0)$, содержащихся в формуле (23), воспользуемся асимптотическим представлением

$$R_{pl}(\alpha_0) \approx \frac{C_{pl}}{r_b(2l+1)!} \left(\frac{2p\alpha_0}{\hbar} \right)^l, \quad \frac{p\alpha_0}{l\hbar} \ll 1. \quad (25)$$

Учитывая (25), можно показать, что основной вклад в амплитуду ионизации вносит слагаемое с наименьшим возможным l :

$$l = |m| = s, \quad (26)$$

где через s обозначено число фотонов, поглощенных электроном в процессе перехода. Таким образом, опуская несущественные фазовые множители, представим амплитуду вероятности s -фотонной ионизации в следующем виде:

$$A_{if} = 2\pi \sum_{s=[s_0]} D_{ps} \left(\frac{p^2}{2M} + I_0 \right) \left(\frac{p\alpha_0}{\hbar} \sin \theta \right)^s \delta \left(\frac{p^2}{2M} + I_0 + \frac{e^2 E_0^2}{2M\omega^2} - s\hbar\omega \right),$$

$$D_{ps} = \sqrt{\frac{\pi^5 r_b^3 \vartheta}{\hbar^3}} \frac{1}{2^{s-2} s!} \prod_{\eta=1}^s \sqrt{1 + \left(\frac{\vartheta}{\eta} \right)^2},$$

где

$$s_0 = \frac{I_0}{\hbar\omega} + \frac{e^2 E_0^2}{2M\hbar\omega^3},$$

$[s_0]$ — минимальное число квантов электромагнитного поля, необходимое для ионизации атома, θ — угол между импульсом фотоэлектрона и направлением волны. При получении последних выражений была использована формула (19), а также учтена малость импульсов фотоэлектронов по сравнению с боровским импульсом:

$$\frac{pr_b}{\hbar} \ll 1.$$

Для конечного произведения существует асимптотическое представление:

$$\prod_{\eta=1}^s \left(1 + \left(\frac{\vartheta}{\eta} \right)^2 \right) = \frac{1}{2\pi\vartheta} \left(1 + \left(\frac{\vartheta}{s} \right)^2 \right)^{s+1/2} \exp \left(-2\vartheta \arctg \left(\frac{\vartheta}{s} \right) + \pi\vartheta \right), \quad \vartheta, s \gg 1.$$

В случае $\vartheta/s \ll 1$ оно имеет особенно простой вид:

$$\prod_{\eta=1}^s \left(1 + \left(\frac{\vartheta}{\eta} \right)^2 \right) = \frac{1}{2\pi\vartheta} \exp(\pi\vartheta). \quad (27)$$

Теперь после обычных преобразований найдем дифференциальную вероятность многоквантовой ионизации в единицу времени в виде суммы парциальных вероятностей:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \sum_{s=[s_0]} \frac{dW^s}{d\Omega}, \quad (28)$$

$$\frac{dW^s}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^6}{2^{2(s+1)}(s!)^2} \frac{\hbar\omega^2}{I_0} \left(s - \frac{e^2 E_0^2}{2M\hbar\omega^3} \right)^2 \left(\frac{p_s \alpha_0}{\hbar} \sin \theta \right)^{2s} g(p_s), \quad (29)$$

где

$$g(p_s) = \prod_{\eta=1}^s \left(1 + \frac{\hbar^2}{p_s^2 r_b^2 \eta^2} \right), \quad p_s = \sqrt{2M\hbar\omega(s - s_0)}.$$

Здесь и во всех последующих формулах считается $1 \ll \alpha_0/r_b \ll s$, $p_s \alpha_0/\hbar \ll s$.

Из формул (27), (28) следует, что угловое распределение фотоэлектронов имеет узкий максимум, лежащий в плоскости поляризации электромагнитной волны $\theta = \pi/2$. При отходе от угла $\theta = \pi/2$ вероятность обнаружения фотоэлектрона резко уменьшается и в предельном случае $\theta = 0$ обращается в нуль. Таким образом, угловое распределение фотоэлектронов качественно имеет тот же вид, что и в приближении Келдыша—Фейсала—Рисса [8].

Проинтегрировав дифференциальную вероятность по телесному углу, найдем распределение фотоэлектронов по энергиям:

$$W = \sum_{s=[s_0]} W^s, \tag{30}$$

$$W^s = \frac{(2\pi)^7}{2(2s+1)!} \frac{\hbar\omega^2}{I_0} \left(s - \frac{e^2 E_0^2}{2M\hbar\omega^3} \right)^2 \left(\frac{p_s \alpha_0}{\hbar} \right)^{2s} g(p_s). \tag{31}$$

Из формулы (31) следует, что вблизи порога ионизации, когда импульс фотоэлектрона стремится к нулю, вероятность процесса, как и должно быть для реакций с образованием заряженных частиц [26, 27], остается отличной от нуля:

$$\lim_{p_{s_0} \rightarrow 0} W^{[s_0]} = \frac{(2\pi)^7}{2(2[s_0]+1)!} \frac{I_0}{\hbar} \left(\frac{\alpha_0}{r_b} \right)^{2[s_0]}. \tag{32}$$

Найдем критическое значение напряженности электромагнитного поля, при котором высота первого дополнительного пика $s = [s_0] + 1$ становится равной высоте основного пика $s = [s_0]$. Будем считать, что высота основного пика описывается формулой (32). Тогда, используя формулы (31), (27), находим отношение

$$\frac{W^{[s_0+1]}}{W^{[s_0]}} \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{\hbar\omega}{I_0} \right)^{[s_0]-1/2} \frac{e^2 E_0^2}{M\hbar\omega^3} \exp \left(\pi \sqrt{\frac{I_0}{\hbar\omega}} \right).$$

Теперь из условия $W^{[s_0+1]}/W^{[s_0]} = 1$ легко получить критическое значение напряженности электромагнитного поля:

$$E_0^{cr} \approx \sqrt{\frac{\pi\hbar\omega^3}{e^2}} \left(\frac{I_0}{\hbar\omega} \right)^{[s_0]/2-1/4} \exp \left(-\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{I_0}{\hbar\omega}} \right).$$

Например, для потенциала ионизации $I_0 \sim 13.6$ эВ, частоты поля $\omega \approx 2.92 \cdot 10^{15}$ с⁻¹ имеем $E_0^{cr} \approx 9.76 \cdot 10^7$ В/см. В случае больших граничных импульсов фотоэлектронов $p_{s_0}^2/2M \sim \hbar\omega$ критическое значение напряженности поля того же порядка, что и в теории Келдыша—Фейсала—Рисса. В области полей $E_0 > E_0^{cr}$ распределение фотоэлектронов по энергиям имеет вид множества пиков, при этом максимум распределения смещен вправо от основного пика $s = [s_0]$. Отметим, что вдали от порога ионизации $s - [s_0] \gg 1$ отношение вероятностей имеет более привычный вид, там

$$\frac{W^{s+1}}{W^s} \sim \frac{E_0^2}{\omega^2},$$

что отличается от квазиклассического параметра $E_0^2/\omega^{10/3}$. Это объясняется тем, что при нахождении волновых функций (5), (10) мы пренебрегли взаимодействием (8).

Найдем число квантов s_{max} , для которого вероятность ионизации (31) при заданной напряженности поля E_0 достигает наибольшего значения.

Используя известную формулу Стирлинга, а также формулы (31), (27), запишем

$$W^s = \frac{(2\pi)^5}{2(2s+1)} \sqrt{\frac{\pi(s-s_0)}{s}} \frac{\hbar^2 \omega^3}{I_0^2} \left(s - \frac{e^2 E_0^2}{2M\hbar\omega^3} \right)^2 \exp(f(s)),$$

$$f(s) = 2s \left(\ln \frac{p_s \alpha_0}{2s\hbar} + 1 \right) + \pi \sqrt{\frac{I_0}{\hbar\omega(s-s_0)}}, \quad s > [s_0].$$

Формально считая s непрерывным параметром, найдем значение s_{max} из уравнения $f'(s_{max}) = 0$. В развернутой записи оно имеет вид

$$\ln \frac{e^2 E_0^2}{2M\hbar\omega^3} = \ln \frac{s_{max}^2}{s_{max} - s_0} - \frac{1}{s_{max} - s_0} \left(s_{max} - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{I_0}{\hbar\omega(s_{max} - s_0)}} \right). \quad (33)$$

Формула (33) определяет в неявном виде зависимость $s_{max} = s_{max}(E_0)$. Разрешить (33), к сожалению, не удастся. В качестве примера приведем величину s_{max} при следующих значениях параметров: $I_0 \approx 13.6$ эВ, $\omega \approx 2 \cdot 10^{15}$ с⁻¹, $[s_0] = 22$, $E_0 \approx 1.5 \cdot 10^8$ В/см; в соответствии с (33) имеем $s_{max} = 25$.

Максимальное значение вероятности $W^{s_{max}}$ определяется выражением

$$W^{s_{max}} = \frac{(2\pi)^5}{2(2s_{max}+1)} \sqrt{\frac{\pi(s_{max}-s_0)}{s_{max}}} \frac{\hbar^2 \omega^3}{I_0^2} \left(s_{max} - \frac{e^2 E_0^2}{2M\hbar\omega^3} \right) \exp(f(s_{max})), \quad (34)$$

$$f(s_{max}) = -\frac{s_{max}}{s_{max}-s_0} \left(2s_0 - s_{max} - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{I_0}{\hbar\omega(s_{max}-s_0)}} \left(1 + 2 \frac{s_{max}-s_0}{s_{max}} \right) \right),$$

$$[s_0] \gg s_{max} - [s_0] > 1.$$

Выражения (33), (34) могут быть использованы для сопоставления теоретической и экспериментальной зависимостей $W^{s_{max}}$ от напряженности поля.

Представляет интерес сравнить вероятность s -фотонной ионизации (31) с формулой для вероятности аналогичного процесса, рассмотренного в приближении Келдыша—Фейсала—Рисса [8]:

$$W_{KFR}^s = \frac{2^5 \pi^4}{(2s+1)!} \sqrt{\frac{\hbar^3 \omega^5}{I_0^3}} \left(s - \frac{e^2 E_0^2}{2M\hbar\omega^3} \right)^2 \sqrt{s - \frac{I_0}{\hbar\omega} - \frac{e^2 E_0^2}{2M\hbar\omega^3}} \left(\frac{p_s \alpha_0}{\hbar} \right)^{2s}. \quad (35)$$

Для значений $\hbar/p_s r_b s \ll 1$ находим

$$\frac{W^s}{W_{KFR}^s} = \exp \left(\pi \sqrt{\frac{I_0}{\hbar\omega(s-s_0)}} \right), \quad s > [s_0].$$

Таким образом, хотя бы частичный учет кулоновского потенциала в конечном состоянии электрона приводит к резкому (экспоненциальному) увеличению вероятности перехода. Экспоненциальные различия формул (31), (35) обусловлены дальностью действия

кулоновских сил, которыми пренебрегается в (35). Отметим, что при больших значениях s , а именно, при $s \gg s_0 + \pi^2 I_0 / \hbar \omega$ отношение вероятностей $W^{(s)} / W_{KFR}^{(s)}$ стремится к единице. Этот результат является вполне ожидаемым, поскольку для быстрых фотоэлектронов, с энергией много больше потенциала ионизации, применимо борновское приближение. Это означает, что в волновых функциях фотоэлектронов можно пренебречь влиянием кулоновского потенциала, что, в свою очередь, означает переход к приближению Келдыша—Фейсала—Рисса.

Напомним, что основным условием применимости формул (28)–(34) является квазиклассичность конечного состояния электрона, т. е. малость его импульса по сравнению с боровским импульсом. Результаты статьи хорошо описывают многофотонный случай ионизации атома $\gamma \gg 1$, где параметр Келдыша

$$\gamma^2 = \frac{2MI_0\omega^2}{e^2 E_0^2},$$

так как при этом вероятность появления фотоэлектрона с импульсом порядка или больше боровского пренебрежимо мала. В адиабатическом случае $\gamma \ll 1$ значимые импульсы фотоэлектронов (окрестность максимума энергетического распределения) намного превосходят боровский импульс [25, 13]. Поэтому при $\gamma \ll 1$ формулы (28)–(34) пригодны только для описания низкоэнергетической части фотоэлектронов. К сожалению, это не позволяет вычислить полную вероятность ионизации в очень сильном поле и тем самым получить предельный переход к случаю ионизации атома постоянным электрическим полем.

В завершение остановимся подробнее на критериях применимости (1), (2). Используя формулу, определяющую минимальное расстояние между ядром и классическим электроном в кулоновской задаче [28]:

$$r_{min} = \frac{\hbar^2}{p^2 r_b} \left(\sqrt{1 + \frac{p^2 r_b^2}{\hbar^2} l^2} - 1 \right), \quad l \gg 1,$$

представим неравенство (1) в виде

$$\frac{\alpha_0}{\sqrt{1 + p^2 r_b^2 l^2 / \hbar^2} - 1} \frac{p^2 r_b}{\hbar^2} \ll 1. \tag{36}$$

В предельном случае $pr_b l / \hbar \gg 1$ оно сводится к выражению

$$\frac{p\alpha_0}{\hbar l} \ll 1.$$

Нетрудно видеть, что последнее неравенство определяет верхнюю границу напряженности электромагнитного поля, следующую из (36), и совпадает с условием (24), в рамках которого получены основные результаты (28)–(34).

Движение электрона с положительной энергией в поле ядра не является периодическим, поэтому критерий (2) требует переформулировки. В нашем случае критерию (2) соответствует условие, что перемещение электрона вдоль невозмущенной траектории за период электромагнитного поля должно быть много меньше расстояния до ядра:

$$\frac{2\pi}{\omega} \frac{p}{M} \ll r_{min},$$

или иначе:

$$\frac{2\pi p^3 r_b}{\omega \hbar^2 M} \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 r_b^2 l^2 / \hbar^2 - 1}} \ll 1. \quad (37)$$

Можно показать, что для $l \gg 1$, $pr_b/\hbar \ll 1$ условия (36), (37) совместимы для широкого диапазона параметров ω и E_0 .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное рассмотрение надпороговой ионизации атома циркулярно-поляризованным электромагнитным полем показало, что использование квазиклассических волновых функций электрона в поле волны вида (5), (10) обладает рядом преимуществ по сравнению с волновой функцией или функцией, использованной в [10, 11]. Благодаря учету кулоновского взаимодействия в (5), (10) удалось получить два принципиальных результата: ненулевое пороговое значение вероятности ионизации (32) и должные правила отбора для магнитного квантового числа (26). Как уже отмечалось, эти результаты не получаются в приближении Келдыша—Фейсала—Рисса. Нарушение первого условия очевидно (см. формулу (35)), а в нарушении правил отбора можно убедиться, если в выражении для амплитуды перехода

$$A_{if} \sim \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dr \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \left(\mathbf{p} \mathbf{r} - \frac{1}{2M} \int_{-\infty}^t d\tau \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\tau) \right)^2 \right) \right) \exp \left(-\frac{r}{r_b} \right)$$

разложить плоскую волну в ряд по сферическим функциям [26] и при вычислении интеграла учесть их ортогональность.

Литература

1. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ 47, 1945 (1964).
2. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ 50, 1393 (1966).
3. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ 51, 309 (1966).
4. А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ 52, 514 (1967).
5. В. С. Попов, В. П. Кузнецов, А. М. Переломов, ЖЭТФ 53, 331 (1967).
6. Л. П. Котова, М. В. Терентьев, ЖЭТФ 52, 732 (1967).
7. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ 52, 223 (1967).
8. H. R. Reiss, Phys. Rev. A 22, 1786 (1980).
9. М. В. Аммосов, Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, ЖЭТФ 91, 2008 (1986).
10. R. Shakeshaft and R. Potolige, Phys. Rev. A 36, 5478 (1987).
11. S. Basile, F. Trombetta, G. Ferrante, R. Burlon et al., Phys. Rev. A 37, 1050 (1988).
12. Д. Ф. Зарецкий, Э. А. Нерсесов, ЖЭТФ 103, 1191 (1993).
13. В. П. Крайнов, Б. Шокри, ЖЭТФ 107, 1180 (1995).
14. Г. С. Воронов, Г. А. Делоне, Н. Б. Делоне, ЖЭТФ 51, 1660 (1966).
15. Г. А. Делоне, Н. Б. Делоне, Письма в ЖЭТФ 10, 413 (1969).
16. P. Agostini, G. Barjot, G. Mainfray, and J. Thebault, IEEE J. Quantum Electron. QE-6, 12 (1970).

17. P. Agostini, F. Fabre, G. Mainfray et al., *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1127 (1979).
18. G. Petite, P. Agostini, and F. Yergeau, *JOSA Ser. B* **4**, 765 (1987).
19. H. Humpert, H. Schurier, R. Hippler et al., *Phys. Rev. A* **32**, 3787 (1985).
20. Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *Атом в сильном световом поле*, Энергоатомиздат, Москва (1984), стр. 224.
21. М. В. Федоров, *Электрон в сильном световом поле*, Наука, Москва (1991), стр. 223.
22. Л. П. Рапопорт, Б. А. Зон, Н. Л. Манаков, *Теория многофотонных процессов в атомах*, Атомиздат, Москва (1978).
23. В сб. *Многофотонная ионизация атомов*, Труды ФИАН, Наука, Москва (1980), стр. 176.
24. Н. Б. Делоне, *УФН* **115**, 361 (1975).
25. Н. Б. Делоне, М. В. Федоров, *УФН* **158**, 215 (1989).
26. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989), стр. 767.
27. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971), стр. 543.
28. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1988), стр. 215.
29. Л. А. Буреева, *Астрономический журнал* **45**, 1215 (1968).
30. С. П. Гореславский, Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *ЖЭТФ* **82**, 1789 (1982).
31. Г. Бете, Э. Солпитер, *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*, ГИФМЛ, Москва (1960), стр. 562.