

**ГЕНЕРАЦИЯ СУБПУАССОНОВСКОГО СВЕТА ЧЕТЫРЕХУРОВНЕВЫМ
МИКРОЛАЗЕРОМ С ВЫСОКОДОБРОТНЫМ РЕЗОНАТОРОМ**Ю. М. Голубев^{a*}, Б.-Г. Енглерт^{c†}, М. О. Скалли^{b,c†}, Г. Вальтер^{c,d†}, Хуанг Ли^{b†}^a Научно-исследовательский институт физики,
Санкт-Петербургский государственный университет
198904, Санкт-Петербург, Россия^b Texas A&M University, USA^c Max-Planck Institute, Garching, Germany^d Ludwig-Maximilian University, Munich, Germany

Поступила в редакцию 10 марта 1999 г.

Построена кинетическая теория одноатомного четырехуровневого лазера при фиксации атома внутри высокодобротного оптического резонатора. Подобная постановка задачи сходна с той, которая была рассмотрена в эксперименте [2]. Использовано условие большого числа фотонов и малых фотонных флуктуаций. Показано, подбирая параметры возбуждающих атом периодических электромагнитных импульсов, можно осуществить регулярную накачку верхнего лазерного уровня и сформировать субпуассоновскую лазерную генерацию. Обсуждены причины, по которым статистическая картина излучения в этом случае отлична от микролазерной с регулярной инжекцией атомов.

PACS: 42.50.Dv

1. ВВЕДЕНИЕ

Термин «микролазеры» обычно употребляется для тех систем, в которых с лазерной модой взаимодействует малое число атомов или даже один атом. Эффективно обеспечить это можно, в принципе, двумя способами. Во-первых, каким-то образом зафиксировать (например, в атомной или ионной ловушке) положение этого малого количества активных атомов в оптическом резонаторе, возбуждая его внешним электромагнитным полем. Во-вторых, использовать в качестве активной среды атомные потоки с малой концентрацией атомов. И то, и другое было осуществлено экспериментально в группе Валтера [1, 2]. Поскольку проблема перестала быть чисто умозрительной, она требует физического осмысления и детальной теоретической поддержки.

Попытки применить к микролазерам (микромазерам) известные теории [3–5] встречаются с формальными трудностями. Это, например, хорошо проиллюстрировано в работе [6], где показано, что обобщения могут приводить даже к такого рода трудностям, как, например, появление отрицательных диагональных элементов матрицы плотности

*E-mail: yuri_golubev@pop.convey.ru

†B.-G. Englert, M. O. Scully, H. Walther, Hwang Lee.

поля генерации. Однако это должно быть вполне ожидаемо, поскольку при выводе кинетических уравнений в цитированных работах важным требованием было то, что число атомов, участвующих в лазерной генерации, в определенном смысле должно быть большим. Действительно, там на некоторой стадии требовалось построить приращение полевой матрицы на некотором достаточно большом временном интервале Δt (который является минимально возможным для анализа в теории) за счет взаимодействия лазерной моды с атомами, возбуждаемыми в лазерные состояния на этом же интервале. Затем пренебрегалось вкладом в это приращение тех атомов, которые возбуждались на границах интервала, что физически обосновано только при условии, что на выделенном временном интервале Δt возбуждаемых атомов много и они распределены по оси времени более или менее равномерно. Здесь следует подчеркнуть, что в упомянутых работах могла идти речь о большом числе именно разных атомов (а не о многократном возбуждении одного и того же атома), поскольку исследовалась двухуровневая система с возбуждением туда атомов откуда-то извне. Что будет происходить, когда атом только один (или их мало) и потому необходимо учитывать не только два лазерных уровня, но и вспомогательные, с которых атом попадает в лазерные состояния и на которые затем уходит? На этот вопрос можно ответить с помощью соответствующего теоретического анализа.

Один из возможных подходов к этой проблеме был представлен для микромазеров в работе [7]. В ней был использован оригинальный метод, который, как мы надеемся, может оказаться особенно полезным для микролазерной генерации с малым числом фотонов. Здесь же при описании микролазера мы будем исходить из того, что резонатор имеет высокую добротность и при стационарной генерации в лазерной моде происходит довольно значительное накопление фотонов. Это дает возможность применять приближение малых фотонных флуктуаций, и тогда традиционный метод кинетического уравнения для матрицы плотности поля генерации представляется вполне оптимальным.

Одной из причин появления данной работы является, по нашему мнению, отсутствие на настоящий момент теории микролазера. Вторая причина состоит в том, что микролазер с импульсной накачкой может оказаться перспективным источником субпуассоновского света. Напомним, что наибольшие успехи в этой области квантовой оптики достигнуты при использовании полупроводникового лазера [8]. Однако хорошо известны экспериментальные трудности работы с твердотельными лазерами, и потому следует рассматривать и другие направления, которые могут оказаться перспективными. При построении теории микролазера за основу обсуждения мы будем брать ситуацию, экспериментально реализованную в работе [2]. Напомним, там ион Ca^+ с помощью ионной ловушки локализовался внутри оптического резонатора. Возбуждение атома осуществлялось внешним электромагнитным полем. Эффективно ион Ca^+ мог быть представлен как четырехуровневый «атом». В нашей теории мы все это принимаем, но будем полагать, что возбуждение атома является импульсным, что дает нам возможность, варьируя параметры импульса, организовывать разные типы возбуждения активной среды от совершенно случайной (пуассоновской) до регулярной.

Физическая ситуация, которую мы собираемся здесь обсуждать, сходна с той, которая была представлена в работе [4]: объектом исследования является один и тот же четырехуровневый атом и полагается, что достаточно мощный и короткий электромагнитный импульс возбуждает атом (или все атомы) из основного состояния через самое верхнее на промежуточное, которое является верхним лазерным. Однако математическая обработка, примененная в работе [4] и использованная ниже, тем не менее разная.

Здесь мы будем рассматривать четырехуровневый атом именно как четырехуровневый с явным включением в теорию не только поля лазерной генерации, но и поля накачки. Это позволит нам корректно обсудить задачу с любым числом атомов, поскольку имеется возможность принимать во внимание любую степень возбуждения основного состояния.

В то же самое время в работе [4] четырехуровневый атом был нужен только для оправдания концепции регулярного возбуждения среды. Когда адекватность регулярной накачки была установлена, за основу расчета был взят все-таки двухуровневый атом. Конечно, хорошо известно, что четырехуровневый атом может быть эффективно сведен к двухуровневому с постоянной накачкой на верхний лазерный уровень, но для этого необходимо предположение, что мы имеем право пренебрегать изменением заселенности основного состояния. Как понятно из общих соображений и в чем мы убедимся далее, при этом возбуждение лазерного уровня может носить только случайный характер. Чтобы обеспечить регулярность, мы должны требовать, чтобы все атомы (или один атом, если он только один, но с единичной вероятностью) под воздействием импульса накачки практически одновременно покидали основное состояние. А это никак не может быть сведено к двухуровневому атому с постоянной накачкой.

2. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛАЗЕРА

Будем полагать, что единственный четырехуровневый атом находится в ловушке на пересечении осей двух оптических резонаторов (рис. 1). Один из резонаторов относится к исследуемому микролазеру, а другой — это резонатор вспомогательного импульсного лазера, осуществляющего возбуждение атома.

Энергетическая схема атома представлена на рис. 2. Импульсная накачка с частотой

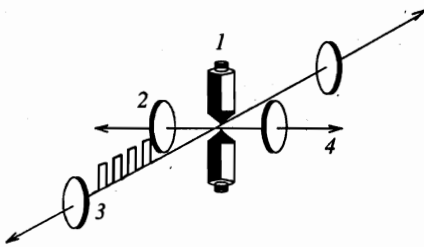


Рис. 1

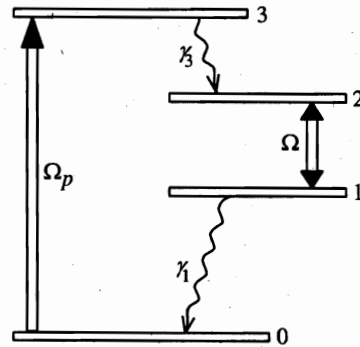


Рис. 2

Рис. 1. Схематическое изображение мысленного эксперимента: 1 — ионная ловушка; 2 — микролазер; 3 — возбуждающий импульсный лазер; 4 — к фотодетектору

Рис. 2. Энергетическая схема атома: Ω_p — частота Рabi накачки; Ω — частота Рabi лазерной генерации

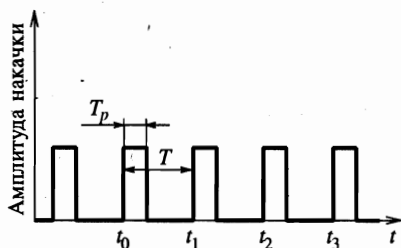


Рис. 3. Временная характеристика импульса накачки: T_p — длительность импульса; T — период импульсной накачки; $t_k = t_0 + kT$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

той Раби Ω_p находится в резонансе с атомным переходом 0–3. Совместно со спонтанной эмиссией на переходе 3–2 со скоростью γ_3 она обеспечивает заселение верхнего лазерного уровня 2. Тем самым при достижении порога обеспечивается и лазерная генерация на переходе 2–1 с частотой Раби Ω . И, наконец, спонтанная эмиссия со скоростью γ_1 снова переводит атом в основное состояние 0.

Чтобы сделать ситуацию наиболее простой в математическом отношении, примем некоторые соотношения между характерными временными параметрами нашей задачи. Прежде всего потребуем, чтобы t_p — время перехода из основного состояния в верхнее лазерное состояние под влиянием импульса накачки — было бы наименьшим временем задачи. Как увидим, для этого времени имеет место формула

$$t_p = \frac{\gamma_3}{4\Omega_p^2}. \quad (1)$$

Самым большим характерным интервалом будем считать время жизни лазерного фотона в оптическом резонаторе, которое равно обратной спектральной ширине лазерной моды, κ^{-1} . Именно это последнее требование позволит нам в дальнейшем построить кинетическое уравнение для матрицы плотности поля генерации.

Помимо этих имеются и другие характерные времена: T_p — длительность импульса накачки; T — период импульсной накачки (рис. 3), Ω^{-1} — период Раби лазерной генерации; γ_1^{-1} — время спонтанной релаксации нижнего лазерного состояния.

Взаимодействуя с внешней импульсной накачкой и с вакуумными полями, обеспечивающими спонтанную эмиссию, атом в некоторый момент времени покидает основное состояние 0 и возвращается туда снова через характерное время. Мы требуем здесь, чтобы это время было значительно меньше периода накачки T . Это, в частности, означает, что непосредственно перед приходом следующего импульса накачки атом находится в основном состоянии с достоверностью. В то же самое время в рассматриваемой кинетической теории важным является требование, чтобы развитие поля в резонаторе было значительно более медленным, чем развитие атомной системы. Это означает, что константа κ^{-1} должна быть тоже много больше всех характерных атомных констант. Более того, чтобы обеспечить стационарную генерацию при импульсной накачке будем даже требовать, чтобы

$$T \ll \kappa^{-1}. \quad (2)$$

Если также потребовать, чтобы длительность импульса накачки T_p и характерное время t_p заселения верхнего лазерного уровня этим импульсом были меньше, чем период Раби лазерной генерации Ω^{-1} ,

$$T_p, t_p \ll \Omega^{-1}, \quad (3)$$

то в течение этих временных интервалов мы имеем право игнорировать любое развитие атомных состояний, связанное с лазерным полем. В то же самое время для наших специфических целей субпуассоновской генерации будем предполагать, что лазерное поле насыщает атомный переход и потому

$$\Omega^{-1} \ll \gamma_1^{-1}. \quad (4)$$

Подводя итог, можем написать следующие неравенства:

$$T_p, t_p \ll \Omega^{-1} \ll \gamma_1^{-1} \ll T \ll \kappa^{-1}. \quad (5)$$

3. ОСНОВНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Согласно выбранным физическим условиям, выражаемым неравенствами (5), развитие атомных переменных происходит значительно быстрее, чем развитие поля. Как уже было сказано, это достигается выбором достаточно высокой добротности оптического резонатора. В таких условиях кинетическое приближение оказывается выполненным, и мы в принципе имеем возможность записать уравнение для матрицы плотности ρ поля генерации. В самом общем виде оно может быть представлено следующим образом:

$$\dot{\rho} = (\hat{L} + \kappa \hat{R}) \rho. \quad (6)$$

Оператор $\kappa \hat{R}$ описывает затухание полевого осциллятора со скоростью κ . В представлении Глаубера, которое будем использовать в нашей теории, можем записать хорошо известное выражение:

$$\hat{R} = \frac{\partial}{\partial u} u, \quad \alpha = \sqrt{u} e^{i\varphi}. \quad (7)$$

Здесь α является собственным числом оператора уничтожения лазерного фотона:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad [a, a^\dagger] = 1. \quad (8)$$

Оператор \hat{L} определяет лазерную эволюцию, связанную со взаимодействием лазерного осциллятора с активной средой, т.е. с одиночным атомом в нашем случае. В установившейся генерации после прекращения всех переходных процессов, строго говоря, этот оператор является периодической функцией времени: $\hat{L}(t) = \hat{L}(t+T)$. Так как мы условились, что длительность импульса накачки очень небольшая, то можно игнорировать любое развитие поля в эти моменты и записать выражение

$$\hat{L} = \sum_k \mu(t - t_k) \hat{S}(t - t_k), \quad (9)$$

где t_k и $t_k + T_p$ ($k = \dots, 0, 1, 2, \dots$) — начало и конец k -го импульса накачки (рис. 3), функция μ определена следующим образом:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & T_p < t < T \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases} \quad (10)$$

Будем изучать физическую ситуацию со многими лазерными фотонами, при этом пренебрегаем любыми изменениями поля, происходящими за период накачки, поскольку за это время в поле добавляется только один фотон. Это даст нам право написать

$$\bar{\rho} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \rho(t') dt' = \rho(t). \quad (11)$$

Таким образом, после усреднения уравнения (6) по периоду T оно приобретает вид

$$\dot{\rho} = \left(\hat{S} + \kappa \hat{R} \right) \rho, \quad (12)$$

поскольку

$$\hat{L} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \hat{L}(t') dt' = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{S}(t') dt' = \hat{S}. \quad (13)$$

Ниже оператор \hat{S} конструируется в явном виде.

4. УРАВНЕНИЕ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГЛАУБЕРА

Перечислим те формальные шаги, которые будут нами сделаны для конструирования оператора \hat{S} . В качестве первого шага мы должны написать, используя общепринятые рецепты, исходное уравнение для матрицы плотности \hat{F} атома и квантованного поля генерации. В этом уравнении должно, кроме того, учитываться взаимодействие атома с полем накачки и все актуальные спонтанные релаксации (см. рис. 2).

Затем перепишем уравнение в диагональном представлении Глаубера. При этом матрица плотности \hat{F} , оставаясь оператором по отношению к атомным переменным, превращается в c -числовую функцию относительно комплексной амплитуды α поля генерации (а также поля накачки, α_p): $\hat{F} = \hat{F}(\alpha_p, \alpha, t)$.

Далее факторизуем матрицу плотности в форме $\hat{F} = \hat{\sigma} \rho + \hat{\pi}$, где $\hat{\sigma}$ — матрица плотности атома, взаимодействующего с «классическими» полями накачки и генерации соответственно с амплитудами α_p и α , ρ — искомая матрица поля генерации, $\hat{\pi}$ — слагаемое, описывающее атомно-полевую корреляцию. Для атомной матрицы $\hat{\sigma}$ предполагается наличие стандартного кинетического уравнения. Все это дает возможность записать замкнутую систему уравнений для матриц ρ и $\hat{\pi}$, которая будет параметрически зависеть от $\hat{\sigma}$.

На следующем шаге возникает необходимость принять кинетическое приближение с учетом того, что атомное движение в наших условиях значительно более быстрое, чем полевое. Кроме того, в приближении большого числа фотонов мы можем также пренебречь и периодической зависимостью, связанной с импульсной накачкой среды. Воспользовавшись адиабатичностью и пренебрегая на первом шаге зависимостью $\rho(t)$, мы сможем получить из уравнения для $\hat{\pi}$ явную зависимость $\hat{\pi} = \hat{\pi}(\rho)$. Подставляя

это адиабатическое решение в уравнение для ρ и усредняя полученное по периоду T , получим искомую величину \hat{S} .

Теперь обсудим каждый из этих шагов более детально. Основное уравнение, учитывающее наличие двух полей (классического и квантованного) и спонтанных распадов, записывается на основе самых общих соображений:

$$\dot{\hat{F}} = -i [\hat{V}, \hat{F}] - \hat{R}_{at} \hat{F}. \quad (14)$$

Здесь гамильтониан

$$\hat{V} = ig (a|1\rangle\langle 2| - a^+|2\rangle\langle 1|) + ig_p (\alpha_p|0\rangle\langle 3| - \alpha_p^*|3\rangle\langle 0|) \quad (15)$$

учитывает взаимодействие атома с классическим полем накачки с амплитудой α_p и квантованным полем генерации, представленным здесь своими фотонными операторами a, a^+ (8); $|i\rangle\langle k|$ — стандартные атомные проекторы; оператор \hat{R}_{at} обеспечивает атомную релаксацию со скоростями γ_1, γ_3 (см. рис. 2).

Мы будем проводить наши теоретические построения в рамках представления Глаубера. Тогда уравнение (14) может быть переписано в виде

$$\dot{\hat{F}} = -i [\hat{V}_0, \hat{F}] - \hat{R}_{at} \hat{F} + g \hat{D} \hat{F}. \quad (16)$$

Теперь первое слагаемое справа описывает взаимодействие атома только с «классическими» полями, поскольку гамильтониан

$$\hat{V}_0 = ig (\alpha|1\rangle\langle 2| - \alpha^*|2\rangle\langle 1|) + ig_p (\alpha_p|0\rangle\langle 3| - \alpha_p^*|3\rangle\langle 0|) \quad (17)$$

содержит вместо фотонных операторов a, a^+ комплексную амплитуду генерации α, α^* . Слагаемое

$$\hat{D} \hat{F} = \frac{\partial}{\partial \alpha} |1\rangle\langle 2| \hat{F} + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \hat{F} |2\rangle\langle 1| \quad (18)$$

ответственно за формирование статистических свойств лазерной генерации.

5. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

Представим теперь матрицу плотности атома и поля генерации в форме

$$\hat{F} = \hat{\sigma} \rho + \hat{\pi}. \quad (19)$$

Здесь $\hat{\sigma}$ — атомная матрица плотности, описывающая поведение атома в двух «классических» полях с амплитудами α_p и α с учетом актуальных спонтанных релаксаций:

$$\dot{\hat{\sigma}} = -i [\hat{V}_0, \hat{\sigma}] - \hat{R}_{at} \hat{\sigma}, \quad (20)$$

$\rho = \text{Sp}_{at} \hat{F}$ — матрица плотности поля генерации в диагональном представлении, которая возникает вследствие взятия следа от полной матрицы. Поскольку $\text{Sp}_{at} \hat{\sigma} = 1$, то согласно (19) имеем

$$\text{Sp}_{at} \hat{\pi} = 0. \quad (21)$$

Принимая во внимание все эти формулы и начальное уравнение (16), можем получить

$$\dot{\rho} = g \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sigma_{21} \rho + \pi_{21}) + \text{с.с.} \quad (22)$$

Выражение справа содержит два основных вида слагаемых: слагаемые, не зависящие от $\hat{\pi}$ и описывающие полуклассическое «бесшумовое» развитие лазерной генерации, и слагаемые с $\hat{\pi}$, ответственные за статистический аспект проблемы. Разделяя эти члены, можно переписать уравнение (22) в виде

$$\dot{\rho} = g \bar{D} \rho + g \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \pi_{21} + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \pi_{12} \right). \quad (23)$$

Здесь $\bar{D} = \text{Sp}_{at}(D\sigma)$ и с учетом определения (18)

$$\bar{D} \rho = \hat{\delta}_+ \frac{\sigma_{21}}{\alpha} \rho. \quad (24)$$

Оператор $\hat{\delta}_+$ определен в виде

$$\hat{\delta}_+ = \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* = 2 \frac{\partial}{\partial u}. \quad (25)$$

При записи (23) мы приняли во внимание, что в наших условиях $\sigma_{21}/\alpha = \sigma_{12}/\alpha^*$. Точно так же, как и уравнение (23), может быть получено уравнение для $\hat{\pi}$:

$$\dot{\hat{\pi}} = -i [\hat{V}_0, \hat{\pi}] - \hat{R}_{at} \hat{\pi} + g (\hat{D} - \bar{D}) \hat{\sigma} \rho + g [\hat{D} \hat{\pi} - \text{Sp}_{at}(\hat{D} \hat{\pi}) \hat{\sigma}]. \quad (26)$$

6. ИТЕРАЦИОННЫЙ РЯД ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ $\hat{\pi}$

Чтобы выразить $\hat{\pi}$ через ρ , мы должны воспользоваться уравнением (26). Поскольку напрямую это уравнение не решается, мы применим некоторую итерационную процедуру. Для этого будем предполагать, что в уравнении (26) главными являются те слагаемые, которые не содержат производных по комплексным амплитудам поля генерации. Слагаемые, содержащие эти производные, являются малыми по сравнению с главными. Имея в виду эту малость, можем представить $\hat{\pi}$ в виде ряда по степеням этой малости:

$$\hat{\pi} = \hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 + \dots \quad (27)$$

Нулевое приближение $\hat{\pi}_0$ подчиняется уравнению

$$\dot{\hat{\pi}}_0 = -i [\hat{V}_0, \hat{\pi}_0] - \hat{R}_{at} \hat{\pi}_0. \quad (28)$$

Мы всегда можем потребовать, чтобы в начальный момент времени корреляция между атомом и полем генерации отсутствовала. Но тогда в силу однородности дифференциального уравнения (28) корреляционная матрица $\hat{\pi}_0(t) = 0$, если $\hat{\pi}_0(0) = 0$.

Учитывая это, уравнение для первой итерации π_1 запишем в виде

$$\dot{\hat{\pi}}_1 = -i \left[\hat{V}_0, \hat{\pi}_1 \right] - \hat{R}_{at} \hat{\pi}_1 + g \left(\hat{D} - \bar{D} \right) \sigma \rho. \quad (29)$$

Аналогичные уравнения могли бы быть получены для всех последующих итераций, и, более того, у нас нет на данном этапе никаких оснований пренебрегать ими. Такие основания могли бы быть, если бы мы знали, что речь будет идти о классических электромагнитных полях, статистические свойства которых хорошо описываются даже в рамках феноменологических уравнений Максвелла со стохастическими источниками. Однако в нашем случае мы собираемся, в частности, обсуждать и те ситуации, когда лазерная генерация становится субпуассоновской. При этом мы обязаны удерживать не только первую итерацию, содержащую первые производные по комплексным амплитудам поля генерации, но и итерации всех других порядков, учитывая, в принципе, тем самым производные по комплексным амплитудам всех порядков. Позднее будет продемонстрировано, что, тем не менее, даже для неклассических полей итерации высоких порядков не вносят вклада в спектр флуктуаций фототока, который будет исследоваться в этой работе.

Займемся анализом уравнения (29). Учитывая то, что нас реально интересует решение только на интервале между возбуждающими активной средой импульсами, $t_i + T_p < t < t_i + T$, поскольку в наших условиях

$$\pi_{ik} = \sum_i \mu(t - t_i) \pi(t - t_i - T_p), \quad (30)$$

запишем (29) в терминах матричных элементов:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_{22} &= g(\alpha\pi_{12} + \pi_{21}\alpha^*) + gS_{22}, \\ \dot{\pi}_{11} &= -\gamma_1\pi_{11} - g(\alpha\pi_{12} + \pi_{21}\alpha^*) + gS_{11}, \\ \dot{\pi}_{12} &= -\frac{\gamma_1}{2}\pi_{12} - g(\alpha^*\pi_{22} - \pi_{11}\alpha^*) + gS_{12}, \\ \dot{\pi}_{21} &= -\frac{\gamma_1}{2}\pi_{21} - g(\alpha\pi_{22} - \pi_{11}\alpha) + gS_{21}. \end{aligned} \quad (31)$$

Сюда надо добавить условие нормировки (21):

$$\pi_{00} + \pi_{11} + \pi_{22} + \pi_{33} = 0. \quad (32)$$

Неоднородные члены

$$S_{ik} = [(D\sigma)_{ik} - \bar{D}\sigma_{ik}] \rho \quad (33)$$

записываются в явном виде следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{00} &= -\hat{\delta}_+ \frac{\sigma_{00}\sigma_{21}}{\alpha} \rho, & S_{11} &= \hat{\delta}_+ \frac{(1 - \sigma_{11})\sigma_{21}}{\alpha} \rho, \\ S_{22} &= -\hat{\delta}_+ \frac{\sigma_{22}\sigma_{21}}{\alpha} \rho, & S_{33} &= -\hat{\delta}_+ \frac{\sigma_{33}\sigma_{21}}{\alpha} \rho, \end{aligned} \quad (34)$$

$$S_{03} = -\hat{\delta}_+ \frac{\sigma_{03}\sigma_{21}}{\alpha} \rho, \quad S_{12} = -\hat{\delta}_+ \frac{\sigma_{12}\sigma_{21}}{\alpha} \rho + \frac{\partial}{\partial \alpha} \sigma_{22} \rho. \quad (35)$$

Мы видим, что для окончательной записи необходимо знать явные выражения для матричных элементов атомной матрицы плотности σ_{ik} тоже во временном интервале между импульсами накачки. В Приложении А эти элементы отыскиваются и имеют следующую явную зависимость:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(t - t_i - T_p) &= \sigma_0 \frac{4\Omega^2}{\omega^2} \sin^2 \left[\frac{\omega}{2}(t - t_i - T_p) \right] \exp \left[-\frac{\gamma_1}{2}(t - t_i - T_p) \right], \\ \sigma_{22}(t - t_i - T_p) &= \sigma_0 \left\{ \frac{4\Omega^2}{\omega^2} \cos^2 \frac{\omega}{2}(t - t_i - T_p) \exp \left[-\frac{\gamma_1}{2}(t - t_i - T_p) \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\gamma_1}{2\omega} \sin \omega(t - t_i - T_p) - \frac{\gamma_1^2}{4\omega^2} \cos \omega(t - t_i - T_p) \right\} \exp \left[-\frac{\gamma_1}{2}(t - t_i - T_p) \right], \\ \sigma_{12}(t - t_i - T_p) &= -\sigma_0 \frac{g\alpha^*}{\omega} \left[\frac{\gamma_1}{\omega} \sin^2 \frac{\omega}{2}(t - t_i - T_p) + \sin \omega(t - t_i - T_p) \right] \times \\ &\exp \left[-\frac{\gamma_1}{2}(t - t_i - T_p) \right].\end{aligned}\quad (36)$$

Величина

$$\sigma_0 \equiv \sigma_{22}(T_p - t_i) = 1 - \exp(-T_p/t_p) \quad (37)$$

равна заселенности верхнего лазерного уровня к моменту окончания импульса накачки.

Как видим, колебания Раби происходят с частотой

$$\omega = \frac{\gamma_1}{2} \sqrt{1 + I}, \quad I = \frac{16\Omega^2}{\gamma_1^2}. \quad (38)$$

В Приложении В матричные элементы π_{ik} вычисляются в явной форме в предположении, что периодической зависимостью $\rho(t)$ можно пренебрегать. Интересующий нас матричный элемент π_{12} имеет вид

$$\pi_{12} = \hat{\delta}_+ \frac{1}{\alpha} F_1(t) \rho + \hat{\delta}_- \frac{1}{\alpha} F_2 \rho. \quad (39)$$

Здесь наряду с оператором $\hat{\delta}_+$ введен еще один тоже дифференциальный оператор

$$\hat{\delta}_- = \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (40)$$

и обозначения:

$$\begin{aligned}F_1(t) &= \frac{\Omega}{2} \left\{ \frac{(1 - \sigma_{11})\sigma_{21}}{\alpha} \right\} \otimes \left\{ \left(\sin \omega t - \frac{1}{\sqrt{I}} \sin^2 \frac{\omega t}{2} \right) \exp \left(-\frac{\gamma_1 t}{2} \right) \right\} + \\ &+ \frac{\Omega}{2} \left\{ \frac{\sigma_{22}\sigma_{21}}{\alpha} \right\} \otimes \left\{ \left(\sin \omega t + \frac{1}{\sqrt{I}} \sin^2 \frac{\omega t}{2} \right) \exp \left(-\frac{\gamma_1 t}{2} \right) \right\},\end{aligned}\quad (41)$$

$$F_2(t) = \frac{g}{2} \{ \sigma_{22} \} \otimes \left\{ \exp \left(-\frac{\gamma_1 t}{2} \right) \right\}, \quad (42)$$

а свертка двух функций определена следующим образом:

$$\{g_1(t)\} \otimes \{g_2(t)\} = \int_0^t g_1(t') g_2(t - t') dt'. \quad (43)$$

7. УСРЕДНЕННОЕ ПО ПЕРИОДУ ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Теперь мы имеем возможность записать уравнение (23) в явном виде:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & \frac{\partial}{\partial u} u \left[\kappa + \sum_i \mu(t-t_i) g \sigma_{21}(t-t_i) / \alpha \right] \rho + \\ & + \sum_i \mu(t-t_i) \left[- \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2 2u F_1(t-t_i-T_p) + \frac{1}{u} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} F_2(t-t_i-T_p) \right] \rho + \{ \dots \}. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь обозначение $\{ \dots \}$ представляет члены с высшими порядками производных по u, φ , которые являются следствием итерационного ряда (27).

Как видим, коэффициенты уравнения (44) являются функциями времени в соответствии с тем, что функцией времени является и накачка резонансной среды. Напомним, что мы ограничиваемся приближением большого числа фотонов в моде генерации и поэтому можем пренебрегать любыми изменениями поля на периоде накачки, поскольку в лучшем случае за это время в поле может добавиться только один фотон. Это означает, что уравнение (44) может быть усреднено по периоду накачки, вследствие чего оно приобретает следующий вид:

$$\dot{\rho} = \frac{\partial}{\partial u} u \left(\kappa + \frac{g \bar{\sigma}_{21}}{\alpha} \right) \rho - \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2 2u \bar{F}_1(u) \rho + \frac{1}{u} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \bar{F}_2(u) \rho + \{ \dots \}. \quad (45)$$

В случае сильной генерации ($\Omega \gg \gamma_1$) имеем

$$\bar{F}_1(u) = - \frac{\sigma_0}{2gT} \frac{1}{u} \left(\frac{n_s}{u} + \frac{\sigma_0}{2} \right), \quad n_s = \frac{\gamma_1^2}{4g^2}, \quad (46)$$

$$\bar{F}_2(u) = \frac{g\sigma_0}{\gamma_1^2 T}. \quad (47)$$

Чтобы вычислить функции

$$\bar{F}_i(u) = \frac{1}{T} \int_0^T F_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \quad (48)$$

мы должны использовать явные выражения (41), (42). Кроме того, мы можем сделать математическую ситуацию более простой, если примем во внимание, что период T гораздо больше, чем атомные времена. Тогда при усреднении интегрирование по времени в пределах $[0, T]$ можно будет заменить на интегрирование в пределах $[0, \infty]$, что даст следующую формулу:

$$\overline{\{g_1(t)\} \otimes \{g_2(t)\}} = T \bar{g}_1 \bar{g}_2. \quad (49)$$

Делая все необходимые интегрирования, получим

$$\begin{aligned}
 \overline{\sigma_{21}} &= -\frac{2g\alpha\sigma_0}{\omega^2 T} \left(1 - \frac{\gamma_1^2}{8\omega^2}\right) \xrightarrow{\Omega \gg \gamma_1} -\frac{g\alpha\sigma_0}{2\Omega^2 T}, \\
 \overline{(1 - \sigma_{11})\sigma_{21}} &= -\frac{2g\sigma_0}{\omega^2 T} \left[1 - \frac{\gamma_1^2}{8\omega^2} - \sigma_0 \frac{3\Omega^2}{2\omega^2} \left(1 - \frac{5\gamma_1^2}{8\omega^2}\right)\right] \xrightarrow{\Omega \gg \gamma_1} -\frac{g\sigma_0}{2\Omega^2 T} \left(1 - \frac{3}{8}\sigma_0\right), \\
 \overline{\sigma_{22}\sigma_{21}} &= -\frac{g\sigma_0^2}{\omega^2 T} \left[\frac{1}{4} + \frac{3\Omega^2}{\omega^2} + \frac{\gamma_1}{16\omega} \left(1 + \frac{\gamma_1}{\omega} - \frac{2\Omega^2}{\omega^2} \frac{\gamma_1}{\omega} - \frac{7\gamma_1^2}{\omega^2}\right)\right] \xrightarrow{\Omega \gg \gamma_1} -\frac{g\sigma_0^2}{4\Omega^2 T}, \\
 \overline{\sigma_{22}} &= \frac{\sigma_0}{\gamma_1 T} \left[\frac{4\Omega^2}{\omega^2} + \frac{\gamma_1^2}{\omega^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\gamma_1^2}{8\omega^2}\right)\right] \xrightarrow{\Omega \gg \gamma_1} \sigma_0 \frac{1}{\gamma_1 T}.
 \end{aligned} \tag{50}$$

8. ПРИБЛИЖЕНИЕ МАЛЫХ ФОТОННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

Теперь, чтобы еще более упростить уравнение, примем условие малых фотонных флуктуаций:

$$u = n + \varepsilon, \quad n \gg \varepsilon, \tag{51}$$

где n — полуклассическое стационарное решение лазерной задачи для числа фотонов. Понятно, это условие может быть выполнено только для $n \gg 1$.

Полуклассическое укороченное уравнение для n может быть записано следующим образом. В основном уравнении (45) отбрасываем все производные по полевым переменным, кроме первых. Затем это уравнение умножаем на u , интегрируем полученное по всем значениям u и φ и в результате получаем

$$\dot{n} = -(\kappa + g\overline{\sigma_{21}}/\alpha)n = 0. \tag{52}$$

Таким образом, условие стационарной генерации имеет форму

$$\kappa = \frac{2g^2\sigma_0}{\omega^2 T} \left(1 - \frac{\gamma_1^2}{8\omega^2}\right). \tag{53}$$

В случае лазеров полезным бывает также пороговое условие

$$\frac{4g^2\sigma_0}{\gamma_1^2 T} = \kappa. \tag{54}$$

Теперь мы имеем возможность применить условие (51) и, удерживая главные члены, записать основное кинетическое уравнение в насыщающем лазерном поле ($\Omega \gg \gamma_1$) в форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon \rho + \kappa n \xi \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\kappa}{4n_s} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} + \{\dots\}, \tag{55}$$

где

$$\xi = -\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_1^2}{2\Omega^2} + \sigma_0 \right) \tag{56}$$

— статистический параметр Манделя, характеризующий внутрирезонаторные фотонные флуктуации: $\Delta n^2 = n(1 + \xi)$.

9. СПЕКТР ФОТОТОКА ПРИ ДЕТЕКТИРОВАНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ МИКРОЛАЗЕРА

При фоторегистрации одномодовой лазерной генерации для спектра фототока в представлении Глаубера в приближении малых фотонных флуктуаций может быть записана следующая формула:

$$i_{\omega}^{(2)} = i_{shot}^{(2)} \left[1 + \frac{2\kappa}{n} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \overline{\varepsilon\varepsilon(t)} e^{i\omega t} dt \right]. \quad (57)$$

Применяя стандартные математические методы, мы можем на основе основного уравнения (55) получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\overline{\dot{\varepsilon\varepsilon(t)}} = -\kappa \overline{\varepsilon\varepsilon(t)}. \quad (58)$$

Его решение

$$\overline{\varepsilon\varepsilon(t)} = \overline{\varepsilon^2} e^{-\kappa t} \quad (59)$$

содержит неизвестную величину $\overline{\varepsilon^2}$, уравнение для которой тоже следует из (55):

$$\overline{\dot{\varepsilon^2}} = -2\kappa \overline{\varepsilon^2} + 2\kappa \xi n = 0. \quad (60)$$

Необходимо подчеркнуть, что при записи выражений (58), (60) слагаемые в уравнении (55), обозначенные через $\{.. \}$ и содержащие производные по комплексным переменным поля высоких порядков, не вносят сюда вклада, причем это не связано с какими-либо математическими приближениями.

Проведя необходимые математические действия, нетрудно получить

$$i_{\omega}^{(2)} = i_{shot}^{(2)} \left(1 - 2|\xi| \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \omega^2} \right). \quad (61)$$

Качественно понятно, что здесь на фоне дробового шума, не зависящего от частоты, имеется провал на околонулевых частотах. Как известно, этот провал свидетельствует о квантовой природе света, проявляемой в конкретной физической ситуации. Глубина провала определяется параметром Мандела ξ , величина которого (56) зависит от эффективности возбуждения атома на верхний лазерный уровень в течение длительности одного импульса накачки. Эта эффективность дается, как помним, величиной σ_0 (37). Нетрудно видеть, что если $T_p \gg t_p$, то $\sigma_0 \approx 1$ и $\xi = -1/2$. Таким образом, если параметры импульса накачки подобраны так, чтобы атом к концу импульса достоверно оказывался бы на верхнем лазерном уровне, то тем самым обеспечиваются регулярная накачка лазерной среды и, как результат, субпуассоновская лазерная генерация с максимально возможным подавлением (вплоть до нуля) дробового шума на нулевой частоте. В противоположном случае ($T_p \ll t_p$) накачка перестает быть достоверной и генерация становится пуассоновской, поскольку подавлением околонулевых частот дробового шума при этом можно пренебречь. Эти физические результаты сходны с полученными в работе [4] для лазера. Таким образом, мы подтвердили выдвинутое во Введении предположение, что подобный микролазер способен быть источником субпуассоновского света с предельно выраженными квантовыми свойствами.

Одновременно мы видим (даже на уровне основного кинетического уравнения), что эта система совершенно непохожа на мазер [5], что, вообще говоря, непонятно, если рассуждать в рамках чисто корпускулярной феноменологии света. Действительно, и микролазер с периодическим возбуждением атома, и мазер с периодическим приходом активного атома внутрь резонатора делают одно и то же, а именно, периодически возбуждают лазерную моду, добавляя туда ровно один квант света. С точки зрения корпускулярной феноменологии, различий в статистике генерации быть не должно. Однако видим, что это не так. И связано это с тем, что фотоны — это не просто «шарики», но квантовомеханические частицы, описываемые, например, волновыми функциями. И эти волновые функции в случае лазера, когда имеется возможность пренебречь процессами релаксации с лазерных уровней и применять математическую модель Джейнса—Каммингса [9], совершенно другие, чем в случае одиночного атома, когда процессы релаксации принципиально важны. Как видим, в формировании корреляционных свойств лазерной генерации важную роль играет не только факт регулярности появления новых фотонов внутри резонатора, но и их квантовомеханические состояния.

Для того чтобы иметь возможность оценить адекватность полученных результатов, мы должны понять, при каких физических параметрах возможно выполнение соотношений (5). Нетрудно убедиться, что набор $\kappa \sim 10^5 \text{ с}^{-1}$, $g \sim 10^8 \text{ с}^{-1}$, $T \sim 10^{-7} \text{ с}$, $\gamma_1 \sim 10 \text{ с}^{-1}$ обеспечивает выполнение неравенств. При оценках необходимо принять во внимание, что в режиме насыщения ($g\sqrt{n} \gg \gamma_1$), согласно (53), имеет место равенство $n \sim (\kappa T)^{-1}$. Представленная физическая ситуация является улучшенной в смысле добротности резонатора и эффективности взаимодействия лазерной волны со средой по сравнению с рассмотренной, например, в работе [10]: там было положено $\kappa \sim 10^6 \text{ с}^{-1}$ и $g \sim 10^7 \text{ с}^{-1}$.

Работа частично поддержана грантами INTAS-RFBR (95-0656), Российского фонда фундаментальных исследований (98-02-18129) и Госкомвуза (95-0-5.4-66).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Поведение четырехуровневого атома в двух внешних классических полях — в импульсном поле накачки и поле генерации

Пусть имеется четырехуровневый атом, схематически представленный на рис. 2. На переходе 0–3 действует импульсная когерентная накачка с комплексной амплитудой α_p , на переходе 1–2 — поле генерации с комплексной амплитудой α , что определяется гамильтонианом взаимодействия, записанным в дипольном приближении:

$$V_0 = ig (\alpha|1\rangle\langle 2| - \alpha^*|2\rangle\langle 1|) + ig_p (\alpha_p|0\rangle\langle 3| - \alpha_p^*|3\rangle\langle 0|). \quad (62)$$

Здесь $|i\rangle\langle k|$ — стандартные проекционные операторы.

Принимая во внимание спонтанные релаксации на переходах 3–2 и 1–0, можем записать следующую систему уравнений для матричных элементов атомной матрицы плотности:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{00} &= -g_p (\alpha_p^* \sigma_{30} + \alpha_p \sigma_{03}) + \gamma_1 \sigma_{11}, \\
\dot{\sigma}_{33} &= g_p (\alpha_p^* \sigma_{30} + \alpha_p \sigma_{03}) - \gamma_3 \sigma_{33}, \\
\dot{\sigma}_{03} &= -g_p \alpha_p^* (\sigma_{33} - \sigma_{00}) - \frac{\gamma_3}{2} \sigma_{03}, \\
\dot{\sigma}_{30} &= -g_p \alpha_p (\sigma_{33} - \sigma_{00}) - \frac{\gamma_3}{2} \sigma_{30}, \\
\dot{\sigma}_{11} &= -g (\alpha^* \sigma_{21} + \alpha \sigma_{12}) - \gamma_1 \sigma_{11}, \\
\dot{\sigma}_{22} &= g (\alpha^* \sigma_{21} + \alpha \sigma_{12}) + \gamma_3 \sigma_{33}, \\
\dot{\sigma}_{12} &= -g \alpha^* (\sigma_{22} - \sigma_{11}) - \frac{\gamma_1}{2} \sigma_{12}, \\
\dot{\sigma}_{21} &= -g \alpha (\sigma_{22} - \sigma_{11}) - \frac{\gamma_1}{2} \sigma_{21}.
\end{aligned} \tag{63}$$

Поскольку накачку мы выбрали импульсной с периодом T , установившееся решение этой системы уравнений тоже будет периодической функцией времени с тем же самым периодом. Поэтому можно найти отдельно решение на любом выделенном временном интервале, в котором действует импульс накачки, и на любом временном интервале между импульсами накачки. Полное решение задачи может быть тогда записано в форме

$$\sigma_{ik} = \sum_i [(1 - \mu(t - t_i)) \sigma_{ik}(t - t_i) + \mu(t - t_i) \sigma_{ik}(t - t_i - T_p)]. \tag{64}$$

Здесь обозначено:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & T_p < t < T, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases} \tag{65}$$

А.1. Эволюция атомных состояний во время действия импульса накачки ($0 < t < T_p$)

Принимая во внимание исходные неравенства (5), мы можем переписать систему уравнений (63) в виде

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{00} &= -g_p (\alpha_p^* \sigma_{30} + \alpha_p \sigma_{03}), \\
\dot{\sigma}_{33} &= g_p (\alpha_p^* \sigma_{30} + \alpha_p \sigma_{03}) - \gamma_3 \sigma_{33}, \\
\dot{\sigma}_{03} &= -g_p \alpha_p^* (\sigma_{33} - \sigma_{00}) - \frac{\gamma_3}{2} \sigma_{03}, \\
\dot{\sigma}_{30} &= -g_p \alpha_p (\sigma_{33} - \sigma_{00}) - \frac{\gamma_3}{2} \sigma_{30}, \\
\dot{\sigma}_{11} &= 0, \\
\dot{\sigma}_{22} &= \gamma_3 \sigma_{33}, \\
\dot{\sigma}_{12} &= 0, \\
\dot{\sigma}_{21} &= 0.
\end{aligned} \tag{66}$$

Полагаем, что во время действия импульса накачки происходит только переход (частичный или полный) атома из основного состояния в верхнее лазерное. Поскольку наши требования (5) обеспечивают то, что атом перед каждым новым импульсом оказывается в основном состоянии, то имеется единственное ненулевое начальное условие:

$$\sigma_{00}(0) = 1. \quad (67)$$

В нашем приближении достаточно слабого и достаточно короткого импульса накачки мы можем написать ненулевые решения:

$$\sigma_{00}(t) = e^{-t/t_p}, \quad \sigma_{22}(t) = 1 - e^{-t/t_p}, \quad (68)$$

где

$$t_p = \gamma_3 / \Omega_p^2 \quad (69)$$

— характерное время, в течение которого атом под влиянием импульса накачки переходит из основного состояния в верхнее лазерное.

А.2. Эволюция атомной матрицы плотности во временном интервале между импульсами накачки ($T_p < t < T$)

Теперь система уравнений для матричных элементов атомной матрицы плотности принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} &= -g(\alpha^* \sigma_{21} + \alpha \sigma_{12}) - \gamma_1 \sigma_{11}, \\ \dot{\sigma}_{22} &= g(\alpha^* \sigma_{21} + \alpha \sigma_{12}), \\ \dot{\sigma}_{12} &= -g\alpha^*(\sigma_{22} - \sigma_{11}) - \frac{\gamma_1}{2} \sigma_{12}, \\ \dot{\sigma}_{21} &= -g\alpha(\sigma_{22} - \sigma_{11}) - \frac{\gamma_1}{2} \sigma_{21} \end{aligned} \quad (70)$$

с ненулевым начальным условием

$$\sigma_{22}(T_p) = \sigma_0. \quad (71)$$

Перейдем к представлению Лапласа:

$$x_{ik}(p) = \int_0^{\infty} dt \sigma_{ik}(t) e^{-pt}. \quad (72)$$

Для величин $x_{ik}(p)$ теперь сможем записать алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (\gamma_1 + p)x_{11} &= -g(\alpha^* x_{21} + \alpha x_{12}), \\ -\sigma_0 + px_{22} &= g(\alpha^* x_{21} + \alpha x_{12}), \\ (\gamma_1/2 + p)x_{12} &= -g\alpha^*(x_{22} - x_{11}), \\ (\gamma_1/2 + p)x_{21} &= -g\alpha(x_{22} - x_{11}), \end{aligned} \quad (73)$$

которая относительно легко может быть решена:

$$\begin{aligned} x_{11}(p) &= \sigma_0 \frac{2\Omega^2}{(p + \gamma_1/2)(p + \gamma_1/2 - i\omega)(p + \gamma_1/2 + i\omega)}, \\ x_{22}(p) &= \sigma_0 \frac{2\Omega^2 + (p + \gamma_1)(p + \gamma_1/2)}{(p + \gamma_1/2)(p + \gamma_1/2 - i\omega)(p + \gamma_1/2 + i\omega)}, \\ x_{12}(p) = x_{21}^*(p) &= -\sigma_0 \frac{g\alpha^*(p + \gamma_1)}{(p + \gamma_1/2)(p + \gamma_1/2 - i\omega)(p + \gamma_1/2 + i\omega)}. \end{aligned} \quad (74)$$

Через величину

$$\omega = \sqrt{4\Omega^2 - \gamma_1^2/4} \quad (75)$$

здесь обозначена, как будет видно дальше, частота Раби, с которой матричные элементы колеблются в сильном поле при $4\Omega > \gamma_1$.

Используя обратное преобразование Лапласа, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(t) &= \sigma_0 \frac{4\Omega^2}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} \exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2}\right), \\ \sigma_{22}(t) &= \sigma_0 \left[\frac{4\Omega^2}{\omega^2} \cos^2 \frac{\omega t}{2} \exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2}\right) + \frac{\gamma_1}{2\omega} \sin \omega t \frac{\gamma_1^2}{4\omega^2} \cos \omega t \right] \exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2}\right), \\ \sigma_{12}(t) = \sigma_{21}^*(t) &= -\sigma_0 \frac{g\alpha^*}{\omega} \left(\frac{\gamma_1}{\omega} \sin^2 \frac{\omega t}{2} + \sin \omega t \right) \exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2}\right). \end{aligned} \quad (76)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Аналитическое решение для корреляционной матрицы $\hat{\pi}$

Решение системы уравнений (31) будем искать с помощью преобразования Лапласа:

$$x_{ik}(p) = \int_0^{\infty} \pi_{ik}(t) e^{-pt} dt. \quad (77)$$

Учитывая, что все начальные условия являются нулевыми, в лапласовском представлении получим алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned} px_{22} &= g(\alpha x_{12} + x_{21}\alpha^*) + gS_{22}(p), \\ (\gamma_1 + p)x_{11} &= -g(\alpha x_{12} + x_{21}\alpha^*) + gS_{11}(p), \\ \left(\frac{\gamma_1}{2} + p\right)x_{12} &= -g\alpha^*(x_{22} - x_{11}) + gS_{12}(p), \\ \left(\frac{\gamma_1}{2} + p\right)x_{21} &= -g\alpha(x_{22} - x_{11}) + gS_{21}(p). \end{aligned} \quad (78)$$

Напоминаем, что здесь мы принимаем адиабатическое приближение и пренебрегаем зависимостью $\rho(t)$. Здесь

$$S_{ik}(p) = \int_0^{\infty} S_{ik}(t)e^{-pt} dt. \quad (79)$$

Для наших целей нам интересен только матричный элемент

$$x_{12}(p) = S_{12}(p) \frac{g}{p + \gamma_1/2} + g^2 \alpha^* \{ S_{11}(p)p - S_{22}(p)(p + \gamma_1) - 2 [\alpha S_{12}(p) + S_{21}(p)\alpha^*] \} Q^{-1}(p). \quad (80)$$

Здесь

$$Q(p) = \left(p + \frac{\gamma_1}{2} \right) \left(p + \frac{\gamma_1}{2} - i\omega \right) \left(p + \frac{\gamma_1}{2} + i\omega \right). \quad (81)$$

После обратного преобразования Лапласа получаем искомую временную зависимость в виде (39).

Литература

1. D. Meschede, H. Walther, and G. Müller, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 551 (1985).
2. G. M. Meyer, H. J. Briegel, and H. Walther, *Europhys. Lett.* **37**, 317 (1997).
3. M. O. Scully and W. E. Lamb, *Phys. Rev. A* **159**, 208 (1967).
4. Ю. М. Голубев, Н. В. Соколов, *ЖЭТФ* **87**, 408 (1984).
5. P. Filipowicz, J. Javanainen, and P. Meystre, *Opt. Comm.* **58**, 327 (1986); *Phys. Rev. A* **34**, 3077 (1986); *J. Opt. Amer. B* **3**, 906 (1986); L. A. Lugiato, M. O. Scully, and H. Walther, *Phys. Rev. A* **36**, 740 (1987).
6. H.-J. Briegel and B.-G. Englert, *Phys. Rev. A* **52**, 2361 (1995).
7. B.-G. Englert, T. Gantsog, A. Schenzle, Ch. Wagner, and H. Walther, *Phys. Rev. A* **53**, 4386 (1996).
8. Y. Yamamoto, S. Machida, and O. Nilson, *Phys. Rev. A* **34**, 4025 (1986); W. H. Richardson, Y. Yamamoto, and S. Machida, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2867 (1991).
9. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
10. Mu Yi and C. M. Savage, *Phys. Rev. A* **46**, 5944 (1992).