

СПЕКТР ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ АЛЬФА-РАСПАДЕ И КВАНТОВОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ

Е. В. Ткаля*

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына
119899, Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 марта 1999 г.

В рамках квантово-механического подхода рассчитаны спектры электромагнитного излучения, возникающего при α -распаде атомных ядер вследствие движения α -частицы через кулоновский потенциальный барьер и в кулоновском поле дочернего ядра. Вычислены вклады $E1$ - и $E2$ -мультиполей. Рассмотрены модельные задачи излучения при движении заряженной частицы через сферически-симметричный прямоугольный потенциальный барьер и «обрезанный» кулоновский барьер. Выполнены численные расчеты для ядер $^{210,214}\text{Po}$ и ^{226}Ra . Приводятся спектры излучения при движении α -частицы по классическим траекториям в указанных выше потенциалах.

PACS: 23.60.+e, 41.60.-m.

1. ВВЕДЕНИЕ

Туннелирование через потенциальный барьер является одним из немногих чисто квантовых явлений, не имеющих аналога в классической физике. В эксперименте процесс туннелирования наблюдают путем регистрации частиц, уже прошедших через барьер. Существует, однако, принципиальная возможность исследовать движение частицы и внутри потенциального барьера. Она связана с тем, что, проходя через область пространства с отличным от нуля градиентом потенциала, заряженная частица излучает фотоны. Для последних барьера нет. Регистрируя спектр излучения, можно судить о свойствах потенциального барьера. Этот дополнительный канал диагностики может быть полезен при изучении самых разных физических явлений, в которых имеет место туннелирование заряженных частиц (например, при работе с туннельным микроскопом).

Одним из хорошо известных процессов туннелирования является α -распад атомных ядер. Он часто сопровождается γ -излучением с дискретным спектром, соответствующим переходам с возбужденных уровней дочерних ядер, заселяемых при α -распаде. Помимо этого существует также излучение с непрерывным спектром, получившее в литературе название тормозного [1-5]. Его природа и связь с процессом туннелирования через потенциальный барьер и являются предметом исследования в настоящей работе.

На сегодняшний день опубликованы экспериментальные данные по спектрам тормозного излучения при α -распаде ядер $^{210,214}\text{Po}$, ^{226}Ra и ^{244}Cm двух исследовательских

* E-mail: tkalya@ibrae.ac.ru

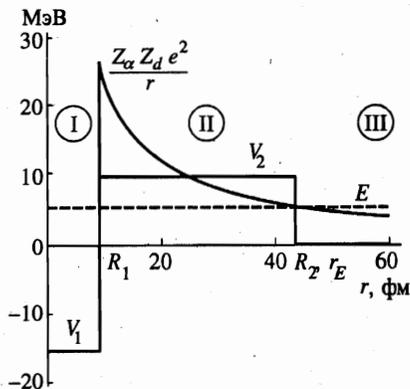


Рис. 1. Кулоновский потенциальный барьер для ^{210}Po , сферически-симметричная потенциальная ступенька и обрезанный в точке $r = R_2 = r_E$ кулоновский барьер

групп: российско-итальянской [1] и японской [2, 3]. Указанные группы работали с разными нуклидами. Несмотря на это, считается, что результаты экспериментов [1] и [2, 3] не согласуются друг с другом [2].

Попытка объяснить спектр тормозного излучения при α -распаде ^{210}Po выполнена в работе [2] на основе квазиклассического приближения, развитого в [4] для туннелирующего заряда. Однако квантово-механический расчет [5] электродипольного излучения с оператором $E1$ -перехода, взятом в упрощенном виде, не воспроизвел полностью ни форму экспериментального спектра из [2], ни полученную там же квазиклассическую кривую.

В настоящей работе в рамках квазистационарного приближения в квантовой механике рассмотрены модельная задача излучения при движении через сферически-симметричный прямоугольный потенциальный барьер (решается аналитически и дает верхнюю границу спектра) и задачи излучения при движении как через обычный кулоновский барьер, так и кулоновский барьер, обрезанный в некоторой точке R_2 (см. рис. 1). Для этих же случаев рассмотрена задача излучения при классическом подходе. Вычислены спектры электрического дипольного и квадрупольного γ -излучения α -частицы для нескольких конкретных ядер.

Принята система единиц $\hbar = c = 1$.

2. ВЕРОЯТНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ

Излучение «под барьером» является частным случаем излучения из области, запрещенной для классического движения. Такого рода процессы хорошо известны. Пример — излучение света в атомных переходах. Волновые функции электронов связанных состояний в кулоновском поле притяжения имеют отличные от нуля амплитуды, в том числе и в областях, недоступных для классического движения. Несмотря на быстрое затухание волновой функции в указанных областях, вклад последних в вероятность излучения фотонов вполне реален и легко поддается оценке. При таком расчете энергии и волновые функции атомных состояний находятся с помощью стационарного уравнения Шредингера, а вероятность излучения — по теории возмущений. Альфа-распад тоже может быть описан в рамках одночастичной модели со стационарными волновыми функциями [6]. Соответственно, излучение тормозного фотона можно попытаться

ся рассмотреть по аналогии с атомными переходами в рамках теории возмущений [5]. Очевидно, что при таком подходе нельзя определить место, где произошло излучение фотона — под барьером или вне его. О вкладе той или иной области в вероятность излучения можно говорить лишь в смысле набора полного интеграла.

Расчеты проведем в системе центра масс α -частицы и дочернего ядра. Для краткости будем говорить о волновых функциях и координатах α -частицы, но подразумевать при этом волновые функции и координаты относительного движения α -частицы и дочернего ядра.

Спектр излученных γ -квантов при переходе α -частицы из начального состояния ψ_i в конечное ψ_f описывается формулой (см., например, [7])

$$\frac{dW_\gamma}{d\omega} = 2\pi |\langle \psi_f | \hat{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \rho_f, \tag{1}$$

где ρ_f — плотность конечных состояний α -частицы и γ -кванта, \hat{H}_{int} — гамильтониан взаимодействия тока α -частицы с электромагнитным полем.

Если ω — энергия излучаемых тормозных фотонов, K' — импульс α -частицы на бесконечности в конечном состоянии, а m — ее масса, то

$$\rho_f = \frac{mK'}{(2\pi)^3} d\Omega_\alpha \frac{\omega^2}{(2\pi)^3} d\Omega_\gamma.$$

Взаимодействие тока α -частицы \mathbf{j}_i с фотоном, имеющим волновую функцию A_λ (плоская волна с поляризацией λ и импульсом \mathbf{q}), записывается следующим образом:

$$\langle \psi_f | \hat{H}_{int} | \psi_i \rangle = \int d^3r \mathbf{j}_i(\mathbf{r}) A_\lambda(\mathbf{r}). \tag{2}$$

Стандартная форма тока перехода имеет вид

$$\mathbf{j}_i(\mathbf{r}) = \frac{Z_{eff}e}{2mi} \left(\psi_f^*(\mathbf{r}) \nabla \psi_i(\mathbf{r}) - (\nabla \psi_f^*(\mathbf{r})) \psi_i(\mathbf{r}) \right), \tag{3}$$

где e — заряд протона, а эффективный заряд Z_{eff} в системе центра масс зависит от мультипольности перехода. Он может быть приближенно выражен через атомный номер A и заряд Z распадающегося ядра. Для электродипольного перехода

$$Z_{eff}^{E1} \approx (2(A - 4) - 4(Z - 2))/A,$$

а для электрического квадрупольного

$$Z_{eff}^{E2} \approx Z_\alpha = 2$$

(см. [7]).

Волновую функцию фотона разложим по электрическим A_{Lm}^E и магнитным A_{Lm}^M мультиполям [7]:

$$A_\lambda(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \lambda \sum_{L,m} \sqrt{2\pi(2L+1)} i^L D_{m,\lambda}^L(\varphi_q, \theta_q, 0) (i\lambda A_{Lm}^E(\mathbf{r}) + A_{Lm}^M(\mathbf{r})). \tag{4}$$

Здесь $D_{m,\lambda}^L$ — D-функции Вигнера. Векторные электромагнитные потенциалы выбраны в кулоновской калибровке

$$A_{Lm}^E(\mathbf{r}; \omega) = \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} j_{L-1}(\omega r) Y_{LL-1;m}(\mathbf{n}) - \sqrt{\frac{L}{2L+1}} j_{L+1}(\omega r) Y_{LL+1;m}(\mathbf{n}), \quad (5)$$

$$A_{Lm}^M(\mathbf{r}; \omega) = j_L(\omega r) Y_{LL;m}(\mathbf{n}),$$

где $j_L(x)$ — сферическая функция Бесселя, $Y_{LJm}(\mathbf{n})$ — векторные сферические гармоники

$$Y_{LJm}(\mathbf{n}) = \sum_{m_1, m_2} (Lm_1 m_2 | Jm) Y_{Lm_1}(\mathbf{n}) \xi_{m_2},$$

$(Lm_1 m_2 | Jm)$ — коэффициенты Клебша—Гордана, $Y_{Lm_1}(\mathbf{n})$ — сферические функции, ξ_{m_2} ($m_2 = \pm 1, 0$) — компоненты спинового вектора фотона в циклическом базисе.

Так как в рассматриваемой задаче возможно излучение только фотонов электрического типа [8], ниже будем работать с потенциалом A_{Lm}^E . Причем, помимо электродипольного, здесь будут получены формулы и для спектра электрического квадрупольного излучения. Связано это со следующими причинами. Во-первых, эффективный заряд при $E1$ -переходе существенно меньше эффективного заряда при $E2$ -переходе. Поэтому, в частности, при делении тяжелых ядер, когда ядра — осколки деления — имеют близкие значения отношений заряда к массе, электродипольное излучение может оказаться подавленным и существенный вклад в спектр будет давать $E2$ -излучение. (Полученные в настоящей работе формулы применимы и к этому случаю.) Во-вторых, область, в которой волновые функции отличны от нуля и, соответственно, дают вклад в излучение, гораздо больше размеров ядра. В-третьих, энергии α -частиц при распаде ядер с малыми временами жизни весьма велики. Для таких ядер в измерениях спектра становится доступной область энергий фотонов существенно превышающих 1 МэВ. При этих энергиях может проявиться не только эффект запаздывания, но и вклад $E2$ -излучения.

Что касается волновых функций α -частицы, то мы построим их для нескольких потенциалов, изображенных на рис. 1, а именно, для сферически-симметричной потенциальной ступеньки, кулоновского потенциального барьера, а также для случая кулоновского потенциала, обрезанного в некоторой точке R_2 .

3. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ СТУПЕНЬКА

Наиболее удобными объектами для изучения тормозного излучения при α -распаде являются четно-четные ядра. При их распаде довольно часто наблюдается монолиния перехода из основного состояния 0^+ материнского ядра в основное состояние 0^+ дочернего ядра. При этом α -частица вылетает из материнского ядра только в S -волне.

Рассмотрим сначала модельную задачу, в которой роль потенциального кулоновского барьера играет сферически-симметричная потенциальная прямоугольная ступенька, показанная на рис. 1. Учитывая, что в сферически-симметричном поле угловые и радиальная переменные разделяются, волновую функцию начального состояния возьмем в виде

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \phi_i(r) Y_{00}(\mathbf{n}_r).$$

Радиальная часть волновой функции $\phi_i(r)$ является решением уравнения Шредингера

$$\rho^2 \frac{d^2 \phi_L(\rho)}{d\rho^2} + 2\rho \frac{d\phi_L(\rho)}{d\rho} + (\rho^2 - L(L+1))\phi_L(\rho) = 0 \quad (6)$$

при $L = 0$. Переменная ρ в обозначенных на рис. 1 областях есть: $\rho = kr$ в области I, где $k = \sqrt{2m(E - V_1)}$; $\rho = \kappa r$ в области II, где $\kappa = \sqrt{2m(V_2 - E)}$; $\rho = Kr$ в области III, где $K = \sqrt{2mE}$. Потенциалы V_1 и V_2 — это, соответственно, глубина ямы и высота барьера, E — энергия α -частицы.

Решение уравнения (6) при $L = 0$, регулярное в нуле и удовлетворяющее условию на бесконечности (расходящаяся сферическая волна), очевидно:

$$\phi_i(r) = \begin{cases} a_0 \frac{\sin(kr)}{r}, & 0 \leq r < R_1, \\ b_0^{(1)} \frac{e^{-\kappa(r-R_1)}}{r} + b_0^{(2)} \frac{e^{\kappa(r-R_1)}}{r}, & R_1 \leq r < R_2, \\ c_0 \frac{e^{iK(r-R_2)}}{r}, & R_2 \leq r. \end{cases} \quad (7)$$

Коэффициент c_0 определим из нормировки на ток прошедшей волны, т. е. когда ток частиц

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2mi} (\psi_i^*(\mathbf{r}) \nabla \psi_i(\mathbf{r}) - (\nabla \psi_i^*(\mathbf{r})) \psi_i(\mathbf{r}))$$

через поверхность сферы большого радиуса равен 1:

$$\oint \mathbf{j} ds = 4\pi r^2 j_r = 1.$$

Учитывая, что радиальная компонента тока частиц с волновой функцией (7) в области III есть $|c_0|^2 v_\alpha 4\pi r^2$, где $v_\alpha = K/m$ — скорость α -частиц, для нормировочной константы c_0 сразу получаем $c_0 = 1/\sqrt{v_\alpha}$.

Уравнения шивки волновых функций и их производных в точках R_1 и R_2 дают значения коэффициентов a_0 , $b_0^{(1)}$, $b_0^{(2)}$ и энергии E в зависимости от величины потенциалов и размеров областей.

Волновая функция конечного состояния должна иметь асимптотику «плоская + сходящаяся сферическая волна» [10]. Поэтому начнем ее построение с области III. Используя известное разложение плоской волны

$$e^{i\mathbf{K}'\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{m=-L}^L i^L Y_{Lm}^*(\mathbf{n}_{\mathbf{K}'}) Y_{Lm}(\mathbf{n}_{\mathbf{r}}) j_L(K'r),$$

можно записать искомую волновую функцию в виде

$$4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{m=-L}^L i^L Y_{Lm}^*(\mathbf{n}_{\mathbf{K}'}) Y_{Lm}(\mathbf{n}_{\mathbf{r}}) (j_L(K'r) + C_L h_L^{(2)}(K'r)),$$

где C_L — константа, $h_L^{(2)}$ — функция Ханкеля второго рода [11], определяемая из общего соотношения $h_L^{(1)}(x) = j_L(x) \pm in_L(x)$, в котором n_L — сферическая функция Неймана.

Радиальные части волновой функции конечного состояния в областях I и II записываются аналогично волновой функции начального состояния. В результате получаем волновую функцию конечного состояния, удовлетворяющую требуемым условиям в нуле и на бесконечности:

$$\psi_f(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{m=-L}^L i^L Y_{Lm}^*(\mathbf{n}_k) Y_{Lm}(\mathbf{n}_r) \phi_{fL}(r), \tag{8}$$

$$\phi_{fL}(r) = \begin{cases} A_L j_L(k'r), & 0 \leq r < R_1, \\ (B_L^{(1)} h_L^{(1)}(\kappa'r) + B_L^{(2)} h_L^{(2)}(\kappa'r)), & R_1 \leq r < R_2, \\ (j_L(K'r) + C_L h_L^{(2)}(K'r)), & R_2 \leq r. \end{cases} \tag{9}$$

Если энергия α -частицы в конечном состоянии равна E' , то импульсы в уравнениях (8), (9) есть

$$k' = \sqrt{2m(E' - V_1)}, \quad \kappa' = \sqrt{2m(V_2 - E')}, \quad K' = \sqrt{2mE'}.$$

Четыре уравнения сшивки для волновых функций и их производных в точках $r = R_1$ и $r = R_2$ для P - и D -волн решаются аналитически. Таким образом, функция конечного состояния α -частицы оказывается определенной во всем пространстве.

Вернемся к спектру излучения. При его вычислении ключевым является расчет матричного элемента из (2) или, принимая во внимание разложение (4), расчет матричного элемента

$$\int d^3r \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) \mathbf{A}_{Lm}^E(\mathbf{r}). \tag{10}$$

При подстановке в это выражение тока перехода из (3) в явном виде оно упрощается. Интегрирование по частям второго из слагаемых, составляющих ток (3), с учетом кулоновской калибровки электрического мультиполя

$$\nabla \mathbf{A}_{Lm}^E = 0$$

и обращения в нуль обеих волновых функций в нуле и волновой функции начального состояния на бесконечности получаем, что

$$\int d^3r \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) \mathbf{A}_{Lm}^E(\mathbf{r}) = \frac{Z_{eff} e}{mi} \int d^3r \mathbf{A}_{Lm}^E(\mathbf{r}) \psi_f^*(\mathbf{r}) \nabla \psi_i(\mathbf{r}). \tag{11}$$

Далее можно действовать несколькими способами. Рассмотрим некоторые из них.

3.1. Спектр в «форме скорости»

Первый способ состоит в прямом расчете величины $\nabla \psi_i(\mathbf{r})$ по градиентной формуле (см., например, в [7]), согласно которой

$$\nabla \psi_i(\mathbf{r}) = \nabla \phi_i(r) Y_{00}(\mathbf{n}_r) = -\frac{d\phi_i(r)}{dr} Y_{01;0}(\mathbf{n}_r). \tag{12}$$

Подставим этот результат в (11). Используя далее формулы (4), (5) и проводя интегрирование по всем угловым переменным, находим по формуле (1) для спектра излучаемых $E1$ -фотонов следующее выражение:

$$\frac{dW_{\gamma}^{(E1)}}{d\omega} = \frac{8(Z_{eff}^{E1} e)^2 K' \omega}{3\pi m} \left(|R_0(\omega)|^2 + \frac{1}{5}(R_0(\omega)R_2^*(\omega) + R_0^*(\omega)R_2(\omega)) + \frac{3}{25}|R_2(\omega)|^2 \right). \quad (13)$$

Спектр излучения (13) — это спектр неполяризованных фотонов, для чего проведено соответствующее суммирование по поляризациям излучаемого кванта. Радиальные интегралы в (13) определены как

$$R_{0,2}(\omega) = \int_0^{\infty} dr r^2 \phi_{f_1}^*(r) j_{0,2}(\omega r) \frac{d\phi_i(r)}{dr}. \quad (14)$$

Для большинства физических задач справедливо приближение $\omega r \ll 1$, позволяющее пренебречь матричным элементом $R_2(\omega)$ по сравнению с $R_0(\omega)$ и заменить $j_0(\omega r)$ на 1. В этом случае соотношения (13), (14) существенно упрощаются:

$$\frac{dW_{\gamma}^{(E1)}}{d\omega} = \frac{8(Z_{eff}^{E1} e)^2 K' \omega}{3\pi m} |R_{\nabla}(\omega)|^2, \quad (15)$$

$$R_{\nabla}(\omega) = \int_0^{\infty} dr r^2 \phi_{f_1}^*(r) \frac{d\phi_i(r)}{dr} \quad (16)$$

(радиальный матричный элемент R_{∇} по-прежнему зависит от энергии излучаемого фотона, так как ω входит в волновую функцию конечного состояния (9) через импульсы k' , κ' и K').

Формулы (13)–(16) дают спектр тормозного $E1$ -излучения в так называемой «форме скорости» [12]. (Следуя работе [12], мы подчеркнули этот факт значком ∇ в обозначении матричного элемента R_{∇} в (16).)

3.2. Спектр в «форме длины»

Спектр, который в теории тормозного излучения иногда называют спектром в «форме длины» [12] (ниже соответствующий матричный элемент будет обозначен R_r), получается из (11) с помощью хорошо известного в квантовой механике соотношения [9]

$$\langle \psi_f | \nabla | \psi_i \rangle = m\omega \langle \psi_f | \mathbf{r} | \psi_i \rangle.$$

Подставив его в (11) и проведя выкладки, аналогичные описанным выше, получим вместо (15), (16) для спектра и радиального матричного элемента приближенные выражения

$$\frac{dW_{\gamma}^{(E1)}}{d\omega} = \frac{8(Z_{eff}^{E1} e)^2}{3\pi} K' m \omega^3 |R_r(\omega)|^2, \quad (17)$$

$$R_r(\omega) = \int_0^{\infty} dr r^2 \phi_{f_1}^*(r) r \phi_i(r). \quad (18)$$

Для такого быстро уменьшающегося потенциала, как прямоугольная потенциальная ступенька, расчет можно делать по любой из приведенных выше формул. Речь идет лишь о больших или меньших сложностях при вычислении интегралов в радиальных матричных элементах. Однако для кулоновского потенциала необходимо применять другой метод.

3.3. Расчет с градиентом потенциала

Наиболее универсальный способ расчета матричного элемента (11) был использован в работе [5]. Учитывая определение $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ и коммутацию оператора импульса $\hat{\mathbf{p}}$ с гамильтонианом свободного движения \hat{H}_0 , из уравнения движения для компонент импульса в представлении Гайзенберга

$$\dot{\hat{p}}_j = -i[\hat{p}_j, \hat{H}]$$

(полный гамильтониан $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, где \hat{V} — взаимодействие) сразу находим

$$\psi_f^*(\mathbf{r})\nabla\psi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega}\psi_f^*(\mathbf{r})(\nabla V(\mathbf{r}))\psi_i(\mathbf{r}). \quad (19)$$

Подставив последний результат в (11), можно легко рассчитать искомый матричный элемент перехода.

Воспользуемся сферической симметрией потенциала и представим его в виде

$$V(\mathbf{r}) = V(r)\sqrt{4\pi}Y_{00}(\mathbf{n}_r).$$

По градиентной формуле получаем

$$\nabla V(\mathbf{r}) = -\sqrt{4\pi}\frac{dV(r)}{dr}Y_{01;0}(\mathbf{n}_r).$$

С другой стороны, волновая функция начального состояния — S -волна — $\psi_i(\mathbf{r}) = \phi_i(r)Y_{00}(\mathbf{n}_r) = 1/\sqrt{4\pi}\phi_i(r)$. Используя этот факт, соотношение (19) можно переписать как

$$\psi_f^*(\mathbf{r})(\nabla V(\mathbf{r}))\psi_i(\mathbf{r}) = \psi_f^*(\mathbf{r})\left(-\frac{dV(r)}{dr}\right)\phi_i(r)Y_{01;0}(\mathbf{n}_r). \quad (20)$$

Сравнение формул (20) и (12) показывает, что они очень похожи. Если в (12) провести замену $d\phi_i(r)/dr \rightarrow \phi_i(r)dV(r)/dr$, то, повторяя вывод формул (13), (14) с учетом множителя $1/\omega$ в (19), для спектра излучения можно получить

$$\frac{dW_\gamma^{(E1)}}{d\omega} = \frac{8(Z_{eff}^{E1}e)^2}{3\pi} \frac{K'}{m} \frac{1}{\omega} \times \\ \times \left(|\tilde{R}_0(\omega)|^2 + \frac{1}{5} \left(\tilde{R}_0(\omega)\tilde{R}_2^*(\omega) + \tilde{R}_0^*(\omega)\tilde{R}_2(\omega) \right) + \frac{3}{25} |\tilde{R}_2(\omega)|^2 \right), \quad (21)$$

где

$$\tilde{R}_{0,2}(\omega) = \int_0^\infty dr r^2 \phi_f^*(r) j_{0,2}(\omega r) \frac{dV(r)}{dr} \phi_i(r). \quad (22)$$

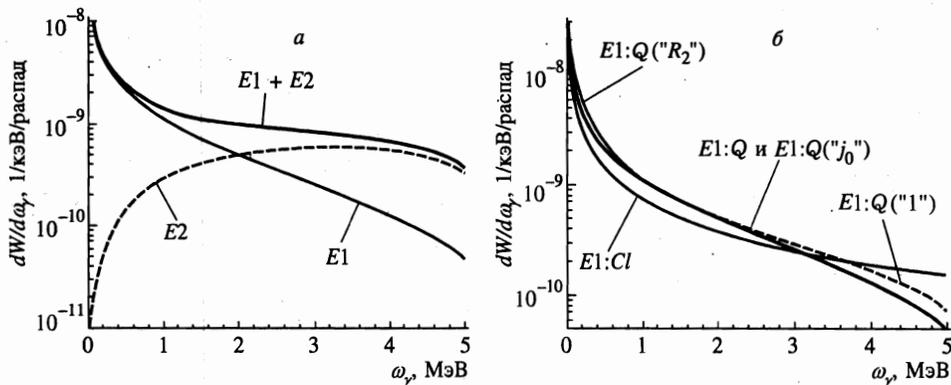


Рис. 2. Спектры излучений для сферически-симметричной потенциальной ступеньки, имитирующей α -распад ^{210}Po . *a* — Квантовые $E1$ - и $E2$ -спектры; *б* — $E1$ -спектры: Cl — классический (формула (45)), Q — квантовый (точная формула (21)), $Q(\llcorner j_0 \llcorner)$ — приближение, когда в формуле (21) оставлен один радиальный матричный элемент $\tilde{R}_0(\omega)$, $Q(\llcorner 1 \llcorner)$ — приближение, использовавшееся в работе [5], $Q(\llcorner R_2 \llcorner)$ — квантовый спектр из формулы (21) с матричными элементами (23), в которых пренебрегли вкладом первого слагаемого, т. е. матричными элементами в точке R_1

Формулы (21), (22) позволяют вычислить спектр излучения наиболее рациональным образом. Если радиальная часть потенциала имеет вид сферически-симметричной потенциальной ступеньки, т. е.

$$V(r) = V_1\theta(R_1 - r) + V_2\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r),$$

где $\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда, то

$$\frac{dV(r)}{dr} = (-V_1 + V_2)\delta(r - R_1) - V_2\delta(r - R_2).$$

Поэтому интегралы (22) сразу вычисляются с помощью дельта-функций и матричные элементы упрощаются:

$$\tilde{R}_{0,2}(\omega) = (-V_1 + V_2)R_1^2\phi_{f_1}^*(R_1)j_{0,2}(\omega R_1)\phi_i(R_1) - V_2R_2^2\phi_{f_1}^*(R_2)j_{0,2}(\omega R_2)\phi_i(R_2). \quad (23)$$

Спектры электродипольного излучения, рассчитанные по формуле (21) как с обоими матричными элементами $\tilde{R}_0(\omega)$ и $\tilde{R}_2(\omega)$ из (23), так и с упрощенным, когда в (21) пренебрегли вкладом слагаемых, содержащих $\tilde{R}_2(\omega)$, представлены на рис. 2. Параметры барьера подобраны так, чтобы смоделировать α -распад ^{210}Po (т. е. приближенно воспроизвести время жизни ядра и точно — энергию вылетающей α -частицы; подробнее см. ниже в разд. 5). Видно, в частности, что учет второго (пропорционального $j_2(\omega r)$) слагаемого в выражении для электрического $E1$ -мультиполя (5) в данном случае необязателен: графики спектров с точным и приближенным $E1$ -операторами совпали. Что касается приближения, реализованного в [5], то оно хорошо работает при относительно низких энергиях и несколько хуже — при больших энергиях. (Использовавшаяся в [5] схема эквивалентна отбрасыванию слагаемых с $\tilde{R}_2(\omega)$ в формуле для вероятности излучения (21) с одновременным переходом $j_0(\omega r) \rightarrow 1$ в матричном элементе $\tilde{R}_0(\omega)$)

в (22).) Следует еще отметить заметный вклад в радиальный интеграл $\tilde{R}_0(\omega)$ в формулах (22) и (23) и, соответственно, в вероятность излучения при низких энергиях левого края потенциальной ступеньки, а именно, точки $r = R_1$ (см. рис. 2).

Перейдем к оценке электрического квадрупольного излучения. Расчет аналогичен расчету спектра $E1$ -излучения. Волновую функцию фотона (5) следует брать с угловым моментом $L = 2$. В результате радиальная волновая функция конечного состояния (9) входит в матричные элементы с $L = 2$. Окончательное выражение для $E2$ -спектра имеет вид

$$\frac{dW_\gamma^{(E2)}}{d\omega} = \frac{8(Z_{eff}^2 e)^2 K'}{3\pi} \frac{1}{m} \frac{1}{\omega} \frac{9}{5} (|\tilde{R}_1(\omega)|^2), \quad (24)$$

где

$$\tilde{R}_1(\omega) = \int_0^\infty dr r^2 \phi_{f_i}^*(r) j_1(\omega r) \frac{dV(r)}{dr} \phi_i(r). \quad (25)$$

Мы ограничились здесь первым слагаемым в выражении для электрического мультиполя с $L = 2$ из формулы (5). Фактически это эквивалентно использованию теоремы Зигерта (см., например, [7]) в том случае, когда расчет вероятности излучения делается в «форме длины» через электрический квадрупольный момент перехода системы. Вклад второго слагаемого, как это было видно на примере $E1$ -спектра, существенно меньше.

Спектр $E2$ -излучения для прямоугольной потенциальной ступеньки приведен на рис. 2. Как и ожидалось, $E2$ -излучение при относительно больших энергиях γ -квантов становится сначала существенным, а потом и доминирующим в спектре.

3.4. «Форма длины» и теорема Зигерта

Рассмотрим подробнее подход, основанный на теореме Зигерта. Для этого воспользуемся известным выражением для продольного потенциала [7]

$$A_{Lm}^Y(\mathbf{r}; \omega) = \sqrt{\frac{L}{2L+1}} j_{L-1}(\omega r) Y_{LL-1;m}(\mathbf{n}) + \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} j_{L+1}(\omega r) Y_{LL+1;m}(\mathbf{n}). \quad (26)$$

Сравнение (26) с формулой (5) для электрического потенциала A_{Lm}^E позволяет установить приближенное равенство

$$A_{Lm}^E(\mathbf{r}; \omega) \approx \sqrt{\frac{L+1}{L}} A_{Lm}^Y(\mathbf{r}; \omega), \quad (27)$$

справедливое при условии

$$\frac{j_{L+1}(\omega r)}{j_{L-1}(\omega r)} \ll 1. \quad (28)$$

Условие (28) выполняется в гораздо более широком диапазоне энергий, нежели использовавшееся при выводе формул (15)–(18) условие $\omega r \ll 1$. В самом деле, даже при $x \equiv \omega r = 1$ справедливы соотношения

$$j_2(x)/j_0(x) < 1/10, \quad j_3(x)/j_1(x) < 1/30$$

(см. [11]). Поэтому полученные с помощью выражения (27) формулы будут работать несколько лучше, чем полученные при $\omega r \ll 1$.

Продольный потенциал A_{Lm}^Y в виде (26) выводится (см. в [7]) с помощью градиентной формулы из выражения

$$A_{Lm}^Y(\mathbf{r}; \omega) = \frac{1}{\omega} \nabla j_L(\omega r) Y_{Lm}(\mathbf{n}).$$

Используя это свойство A_{Lm}^Y , а также соотношение (27), для электрического мультиполя получаем приближенное выражение

$$A_{Lm}^E(\mathbf{r}; \omega) \approx \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{L+1}{L}} \nabla j_L(\omega r) Y_{Lm}(\mathbf{n}). \quad (29)$$

Далее для расчета нам понадобится уравнение непрерывности для тока перехода (3). Оно выводится стандартно. Уравнения Шредингера для волновой функции начального состояния и комплексно-сопряженной волновой функции конечного состояния умножаются: первое уравнение — слева на комплексно-сопряженную волновую функцию конечного состояния, а второе уравнение — справа на волновую функцию начального состояния. Затем уравнения вычитаются одно из другого, и получается искомое уравнение непрерывности

$$\nabla \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) = i Z_{eff} e \omega \psi_f^*(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}). \quad (30)$$

Интегрированием по частям в (10) с учетом (29) и (30) находим для матричного элемента взаимодействия тока перехода с полем излучения соотношение

$$\int d^3 r \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) A_{Lm}^E(\mathbf{r}; \omega) \approx -i Z_{eff} e \sqrt{\frac{L+1}{L}} \int d^3 r \psi_f^*(\mathbf{r}) j_L(\omega r) Y_{Lm}(\mathbf{n}) \psi_i(\mathbf{r}).$$

Теперь спектр излучения рассчитывается так, как это уже делалось выше. В итоге имеем

$$\frac{dW_{\gamma}^{(EL)}}{d\omega} = \frac{4(2L+1)(L+1)}{L\pi} (Z_{eff}^{E1} e)^2 K' m \omega |R_{j_L}(\omega)|^2,$$

где

$$R_{j_L}(\omega) = \int_0^{\infty} dr r^2 \phi_{fL}^*(r) j_L(\omega r) \phi_i(r).$$

Из этих формул при $\omega r \ll 1$ с помощью разложения

$$j_L(\omega r) \approx (\omega r)^L / (2L + 1)!!$$

легко получатся формулы в «форме длины» для излучения любой мультипольности, в том числе и полученные выше соотношения (17), (18).

В зависимости от цели поставленной задачи, формы потенциала, вида волновой функции и т. п. можно использовать ту или иную формулу из полученных в настоящем разделе для расчетов спектров тормозного излучения.

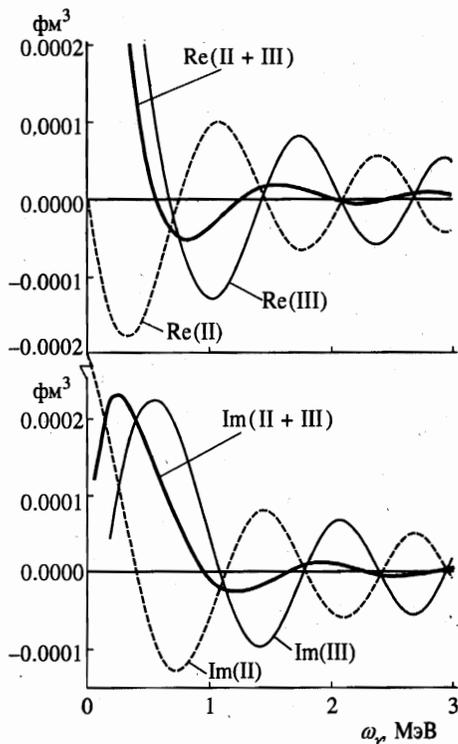


Рис. 3. *a* — реальная часть, *b* — мнимая часть радиального интеграла дипольного момента перехода (31) для сферически-симметричной потенциальной ступеньки в областях II (под барьером) и III (области свободного движения)

Рассмотрим, например, область формирования спектра тормозного $E1$ -излучения в «форме длины», исходя из формулы (18). Если бы речь шла о переходе между двумя состояниями дискретного спектра, то выражение

$$Z_{eff}^{E1} e \int_0^{\infty} dr r^2 \phi_{f_1}^*(r) r \phi_i(r) \quad (31)$$

имело бы смысл дипольного момента перехода системы. В нашем случае размерность выражения (31) — фм^3 . Тем не менее, учитывая отмеченное соответствие, будем и здесь для простоты говорить о дипольном моменте перехода. На рис. 3 показано, как ведут себя реальная и мнимая части радиального интеграла из (31) отдельно в областях II и III. Видно, что в целом доминирует область III. Однако вклады обеих областей близки по величине, но имеют разные знаки. Таким образом, дипольные моменты перехода в области II и области III существенно компенсируют друг друга в заданной геометрии задачи.

4. КУЛОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР

Рассмотрим теперь спектр излучения α -частицы при прохождении кулоновского потенциального барьера. Потенциал, действующий на α -частицу, записывается в виде

$$V(r) = V_1\theta(R_1 - r) + \frac{Z_d Z_\alpha e^2}{r}\theta(r - R_1), \tag{32}$$

где Z_d — заряд дочернего ядра. Волновые функции α -частицы в области I такие же, как и в предыдущем случае, а именно, сферические функции Бесселя $j_L(kr)$. В области действия кулоновского потенциала отталкивания при $r \geq R_1$ радиальные волновые функции α -частицы являются решением стационарного уравнения Шредингера

$$\frac{d^2\phi_L(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi_L(r)}{dr} + \left(2mE - 2m\frac{Z_d Z_\alpha e^2}{r} - \frac{L(L+1)}{r^2}\right)\phi_L(r) = 0,$$

которое заменим

$$\phi_L(r) = \frac{u_L(r)}{r}, \quad K = \sqrt{2mE}, \quad \rho = Kr, \quad \eta = \frac{Z_d Z_\alpha e^2}{K/m}$$

сводится к волновому уравнению Кулона [11]

$$\frac{d^2u_L(\rho)}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{2\eta}{\rho} - \frac{L(L+1)}{\rho^2}\right)u_L(\rho) = 0. \tag{33}$$

Решением уравнения (33) являются регулярная $F_L(\eta, \rho)$ и иррегулярная $G_L(\eta, \rho)$ волновые функции Кулона [11]. Эти функции имеют асимптотику

$$\begin{aligned} F_L(\eta, \rho) &\stackrel{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \sin(\rho - \eta \ln 2\rho - L\pi/2 + \sigma_L), \\ G_L(\eta, \rho) &\stackrel{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \cos(\rho - \eta \ln 2\rho - L\pi/2 + \sigma_L), \end{aligned}$$

где

$$\sigma_L = \arg \Gamma(L + 1 + i\eta)$$

(см. [11]). Поэтому в начальном состоянии асимптотику расходящейся сферической волны, нормированную на единичный ток частиц, будет иметь комбинация функций

$$\sqrt{\frac{1}{K/m}} \frac{G_0(\eta, \rho) + iF_0(\eta, \rho)}{r}$$

Используя последнее соотношение, радиальную волновую функцию начального состояния запишем в виде

$$\phi_i^C(r) = \begin{cases} a_0 \frac{\sin(kr)}{r}, & 0 \leq r < R_1, \\ \sqrt{\frac{1}{K/m}} \frac{G_0(\eta, \rho) + iF_0(\eta, \rho)}{r}, & R_1 \leq r. \end{cases} \tag{34}$$

Величина коэффициента a_0 определяется из условий сшивки в точке R_1 . Уравнение для энергии квазистационарного состояния имеет вид

$$\operatorname{ctg}(kR_1) = \frac{K}{k} \frac{G_0'(KR_1) + iF_0'(KR_1)}{G_0(KR_1) + iF_0(KR_1)}$$

Волновые функции конечного состояния строим аналогично функциям (8), (9). Легко видеть, что функция

$$4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{m=-L}^L i^L e^{i\sigma_L} Y_{Lm}^*(\mathbf{n}_{K'}) Y_{Lm}(\mathbf{n}_r) \frac{F_L(\eta, K'r)}{K'r}$$

при выключении кулоновского взаимодействия, т.е. когда $\eta = 0$ и, соответственно, $\sigma_L = 0$, переходит в разложение плоской волны по сферическим функциям Бесселя. Асимптотику «сходящаяся сферическая волна» имеет комбинация функций

$$\frac{G_L(\eta, K'r) - iF_L(\eta, K'r)}{K'r}$$

Таким образом, волновые функции конечного состояния можно определить как

$$\psi_f^C(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{m=-L}^L i^L e^{i\sigma_L} Y_{Lm}^*(\mathbf{n}_{K'}) Y_{Lm}(\mathbf{n}_r) \phi_{fL}^C(r),$$

$$\phi_{fL}^C(r) = \begin{cases} A_L j_L(k'r), & 0 \leq r < R_1, \\ \frac{F_L(\eta, K'r)}{K'r} + C_L \frac{G_L(\eta, K'r) - iF_L(\eta, K'r)}{K'r}, & R_1 \leq r. \end{cases} \quad (35)$$

Два уравнения шивки для волновых функций и их производных в точке R_1 позволяют легко найти коэффициенты A_L и C_L , и, тем самым, определить волновые функции конечного состояния во всем пространстве.

Спектр излучения рассчитывается по формулам (21), (22) с функциями (34), (35). При этом в формулы для радиальных матричных элементов подставляется производная потенциала (32)

$$\frac{dV(r)}{dr} = \left(-V_1 + \frac{Z_d Z_\alpha e^2}{r} \right) \delta(r - R_1) - \frac{Z_d Z_\alpha e^2}{r^2} \theta(r - R_1),$$

что приводит к следующим выражениям для матричных элементов, которые следует подставлять в (21) взамен формул (22):

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{0,2}(\omega) = & (-V_1 R_1 + Z_\alpha Z_d e^2) R_1 \phi_{f_1}^{C*}(R_1) j_{0,2}(\omega R_1) \phi_i^C(R_1) - \\ & - Z_\alpha Z_d e^2 \int_{R_1}^{\infty} dr \phi_{f_1}^{C*}(r) j_{0,2}(\omega r) \phi_i^C(r). \end{aligned} \quad (36)$$

Интеграл в (36) с волновой функцией (34) и (35) сходится и может быть рассчитан численно.

5. ОБРЕЗАННЫЙ КУЛОНОВСКИЙ БАРЬЕР

Чтобы проверить, как влияет форма барьера на спектр тормозного излучения, рассмотрим потенциал вида

$$V(r) = V_1\theta(R_1 - r) + \frac{Z_d Z_\alpha e^2}{r}\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r), \quad (37)$$

представляющий собой кулоновский потенциальный барьер, обрезанный в точке $r = R_2$. С учетом результатов двух предыдущих разделов волновые функции α -частицы в указанном потенциале имеют следующий вид:

волновая функция начального состояния $\psi_i^{\hat{C}}(\mathbf{r}) = \phi_i^{\hat{C}}(r)Y_{00}(\mathbf{n}_r)$, где

$$\phi_i^{\hat{C}}(r) = \begin{cases} a_0 \frac{\sin(kr)}{r}, & 0 \leq r < R_1, \\ b_0^{(1)} \frac{F_0(\eta, Kr)}{r} + b_0^{(2)} \frac{G_0(\eta, Kr)}{r}, & R_1 \leq r < R_2, \\ \sqrt{\frac{1}{K/m}} \frac{e^{iK(r-R_2)}}{r}, & R_2 \leq r, \end{cases} \quad (38)$$

волновая функция конечного состояния

$$\psi_f^{\hat{C}}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{m=-L}^L i^L Y_{Lm}^*(\mathbf{n}_{K'}) Y_{Lm}(\mathbf{n}_r) \phi_{fL}^{\hat{C}}(r),$$

$$\phi_{fL}^{\hat{C}}(r) = \begin{cases} A_L j_L(k'r), & 0 \leq r < R_1, \\ B_L^{(1)} \frac{F_L(\eta, K'r)}{K'r} + B_L^{(2)} \frac{G_L(\eta, K'r)}{K'r}, & R_1 \leq r < R_2, \\ (j_L(K'r) + C_L h_L^{(2)}(K'r)), & R_2 \leq r. \end{cases} \quad (39)$$

Подставляя производную потенциала (37)

$$\frac{dV(r)}{dr} = \left(-V_1 + \frac{Z_d Z_\alpha e^2}{r}\right) \delta(r - R_1) - \frac{Z_d Z_\alpha e^2}{r^2} \theta(r - R_1) \theta(R_2 - r) - \frac{Z_d Z_\alpha e^2}{r} \delta(r - R_2)$$

вместе с волновыми функциями (38) и (39) в формулу (22), для матричных элементов получаем выражение

$$\begin{aligned} \bar{R}_{0,2}(\omega) = & (-V_1 R_1 + Z_d Z_\alpha e^2) R_1 \phi_{f_1}^{\hat{C}*}(R_1) j_{0,2}(\omega R_1) \phi_i^{\hat{C}}(R_1) - \\ & - Z_d Z_\alpha e^2 \int_{R_1}^{R_2} dr \phi_{f_1}^{\hat{C}*}(r) j_{0,2}(\omega r) \phi_i^{\hat{C}}(r) - Z_d Z_\alpha e^2 R_2 \phi_{f_1}^{\hat{C}*}(R_2) j_{0,2}(\omega R_2) \phi_i^{\hat{C}}(R_2). \end{aligned} \quad (40)$$

Спектр излучения, рассчитанный по формуле (21) с матричным элементом (40), показан на рис. 4. Кулоновский барьер, потенциальная ступенька и обрезанный кулоновский барьер, для которых сделаны расчеты изображенных здесь спектров, моделируют α -распад ядра ^{214}Po . Кулоновский барьер обрезан в точке $R_2 = r_E$. Там же находится правый край сферически-симметричной потенциальной ступеньки. Ее высота V_2 определялась из равенства квазиклассических коэффициентов проницаемости кулоновского барьера и потенциальной ступеньки, т. е. фактически из равенства показателей экспонент

$$\int_{R_1}^{r_E} dr \sqrt{2m(V_2 - E)} = \int_{R_1}^{r_E} dr \sqrt{2m\left(\frac{Z_d Z_\alpha e^2}{r} - E\right)}.$$

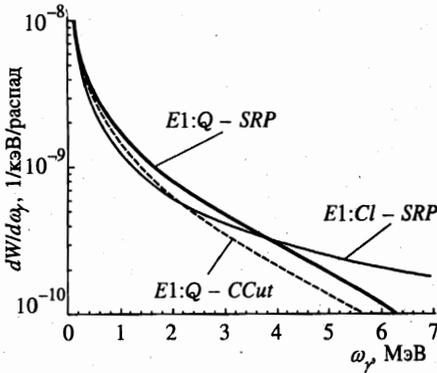


Рис. 4. Квантовый (Q) и классический (Cl) спектры E1-излучений для сферически-симметричной потенциальной ступеньки (SRP), имитирующей α-распад ²¹⁴Po, и кулоновского барьера, обрезанного в точке $r = R_2 = r_E$

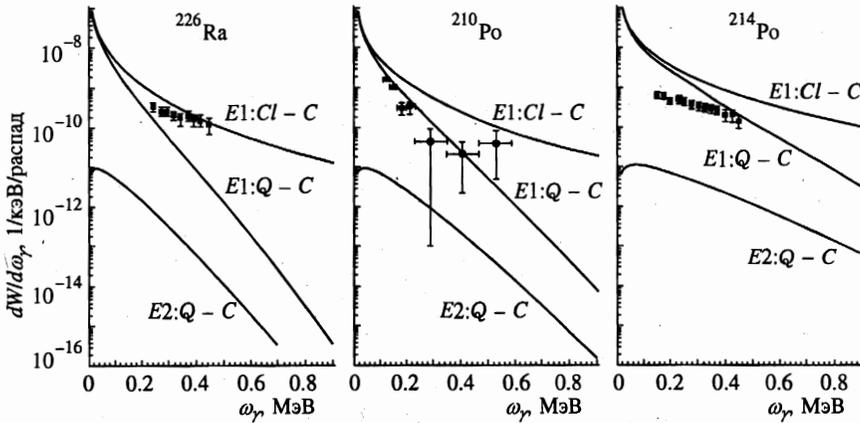


Рис. 5. Экспериментальные данные для ²¹⁴Po, ²²⁶Ra (скорректированные данные работы [1]) и ²¹⁰Po (из [2, 3]). Графики E1 : Q - C и E2 : Q - C — квантовый расчет спектров E1- и E2-излучений при туннелировании через кулоновский барьер; графики E1 : Cl - C — классический расчет E1-излучения при движении в кулоновском поле ядра от точки наименьшего сближения r_E до бесконечности

Для величины V_2 это дает

$$V_2 = E \left(1 + \left(\frac{\arccos \sqrt{R_1/r_E} - \sqrt{R_1/r_E} \sqrt{1 - R_1/r_E}}{1 - R_1/r_E} \right)^2 \right)$$

Из рис. 4 видно, что квантовые спектры излучения для сферически-симметричной потенциальной ступеньки и для обрезанного кулоновского барьера при энергиях $\omega \leq 1$ МэВ очень близки, т. е. при низких энергиях спектр излучения для этих потенциалов формируется в основном в области III. Данное утверждение согласуется с поведением радиальных матричных элементов на рис. 3. Это вполне естественно для $\omega \leq 1$ МэВ. Область $r \sim 1/\omega \sim 40$ фм (где оба рассматриваемых потенциальных барьера уже заканчиваются) будет наиболее эффективно работать лишь при предельных энергиях γ-квантов с $\omega \approx 1/r \approx 5-7$ МэВ.

6. ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ

Рассмотрим спектр излучения α -частицы, движущейся в кулоновском потенциале по классической траектории от точки наименьшего сближения r_E , где начальная кинетическая энергия α -частицы равна нулю, до бесконечности, где кинетическая энергия равна E .

Спектр тормозного электродипольного излучения описывается хорошо известным выражением [8]

$$\frac{dW_\gamma^{(E1)}}{d\omega} = \frac{2(Z_{eff}^{E1} e)^2}{3\pi} \frac{1}{\omega} |\mathbf{w}_\omega|^2, \tag{41}$$

в котором \mathbf{w}_ω — фурье-образ ускорения $\mathbf{w}(t)$:

$$\mathbf{w}_\omega = \int_0^\infty dt \mathbf{w}(t) e^{i\omega t}.$$

Ускорение определяется из уравнения движения

$$w(t) = \frac{Z_\alpha Z_d e^2}{m r(t)^2} \tag{42}$$

с начальными условиями

$$r(t=0) = r_E, \quad v(t=0) = 0.$$

Интегрируя (42), находим уравнение траектории

$$\sqrt{\frac{r(t)}{r_E}} \sqrt{\frac{r(t)}{r_E} - 1} + \ln \left(\sqrt{\frac{r(t)}{r_E}} + \sqrt{\frac{r(t)}{r_E} - 1} \right) = \frac{v_\alpha t}{r_E}, \tag{43}$$

где $v_\alpha = \sqrt{2E/m}$. Найденное $r(t)$ используется для вычисления фурье-образа ускорения из (42) и, соответственно, спектра излучения.

В случае потенциальной ступеньки тоже можно найти «классический» спектр электродипольного излучения. Для этого представим себе, что из точки «выхода» α -частицы из прямоугольного потенциального барьера (это есть точка пересечения линии энергии E и внешней вертикальной стенки барьера, расположенной на рис. 1 при $r = R_2$) проведена наклонная линия до пересечения с осью r в точке $r = R_3$, где $R_3 > R_2$. (То есть α -частица не «падает» отвесно вниз, появляясь на внешней стенке прямоугольного барьера, а «скатывается» по наклонной плоскости.) Уравнения движения имеют в этом случае вид

$$\begin{aligned} m\mathbf{w}(t) &= E/\Delta R, & R_2 \leq r \leq R_3, \\ m\mathbf{w}(t) &= 0, & R_3 < r, \end{aligned} \tag{44}$$

где $\Delta R = R_3 - R_2$, а начальные условия аналогичны рассмотренным выше: $r(t=0) = R_2$, $v(t=0) = 0$. Интегрируя (44), находим уравнение траектории

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{E}{2m\Delta R} t^2 + R_2, & 0 \leq t \leq T, \\ r(t) &= v_\alpha t + R_3, & T < t, \end{aligned}$$

где $T = 2\Delta R/v_\alpha$ — время движения от точки R_2 до точки R_3 .

Фурье-образ ускорения

$$w_\omega = \int_0^T dt \frac{E}{m\Delta R} e^{i\omega t} = v_\alpha e^{i\omega\Delta R/v_\alpha} \frac{\sin(\omega\Delta R/v_\alpha)}{\omega\Delta R/v_\alpha}$$

в пределе $\Delta R \rightarrow 0$ есть v_α . Поэтому для классического $E1$ -спектра излучения частицы, «падающей» в поле вертикальной потенциальной стенки, получим

$$\frac{dW_\gamma^{(E1)}}{d\omega} = \frac{2(Z_{eff}^{E1} e)^2}{3\pi} \frac{1}{\omega} v_\alpha^2. \quad (45)$$

Спектры, соответствующие формулам (41) для различных ядер, приведены на рис. 5. Что касается спектра классического излучения для вертикальной потенциальной стенки (45), то он показан на рис. 2 и рис. 4. Заметим, что в отличие от обычного кулоновского случая, для потенциальной ступеньки в области низких энергий квантовый $E1$ -спектр лежит выше классического.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ДЛЯ $^{210,214}\text{Po}$ И ^{226}Ra

Последовательность расчетов спектров излучения при α -распаде конкретных ядер продемонстрируем для задачи с кулоновским барьером. Размер ямы для α -распада ядра с атомным номером A выберем согласно формуле

$$R_1 = 1.2((A - 4)^{1/3} + 4^{1/3}) \text{ фм}$$

(спектр тормозного излучения практически не меняется при изменении величины R_1 в разумных пределах). Далее, исходя из экспериментального значения энергии α -частицы в системе центра масс E , вычисляем значения кулоновских функций и их производных в начальном состоянии в точке $r = R_1$. Из уравнения для энергии квазистационарного состояния при фиксированном E находим набор значений для потенциала V_1 . От величины последнего зависит главным образом время жизни квазистационарного состояния. Спектр тормозного излучения, как отмечено в [5], мало чувствителен к величине V_1 . Однако это справедливо лишь в случае отсутствия связанных состояний с $L = 1, 2$ в потенциальной яме глубины V_1 . Уровни с $L = 1$ могут лежать довольно низко. К тому же $E1$ -резонанс в спектре тормозного излучения на этих уровнях узкий. Поэтому для расчета $E1$ -спектра вплоть до энергий фотонов $\omega \approx 1$ МэВ подходят несколько значений потенциала V_1 . Другое дело — спектр $E2$ -излучения. $E2$ -резонансы очень широкие. Уровень с $L = 2$ присутствует и находится довольно близко к уровню с $L = 0$ для всех значений V_1 , кроме одного, при котором яма имеет наименьшую глубину. Для рассмотренных здесь ядер это значение потенциала V_1 положительное. Большинство из приведенных графиков спектра фотонов рассчитывались именно для таких потенциальных ям с наименьшей глубиной. При этом, очевидно, возможна ситуация, когда энергия конечного состояния оказывается меньше V_1 , а импульс k' становится мнимым. В этом случае в области I удобнее работать с комбинацией функций Ханкеля, воспользовавшись тем, что $j_L(x) = h_L^{(1)}(x) + h_L^{(2)}(x)$. В остальном расчет аналогичен случаю $V_1 < 0$.

В настоящее время наиболее надежные экспериментальные данные имеются для ядра ^{210}Po [2, 3]. На рис. 5 помимо указанных экспериментальных значений представлены рассчитанные в квантовомеханическом подходе по формулам (21) и (36), а так-

же (24), (25) кривые спектров $E1$ - и $E2$ -излучений при прохождении α -частицей кулоновского барьера. Здесь же даны кривые, соответствующие $E1$ -излучению (41), возникающему при движении по классической траектории в кулоновском поле ядра от точки наименьшего сближения, где кинетическая энергия равна нулю, до бесконечности, где кинетическая энергия равна E (43). Наш результат по квантовому спектру электродипольного излучения в кулоновском потенциале находится в превосходном согласии с расчетом [5]. В настоящее время, по-видимому, нет оснований говорить о расхождении экспериментальных данных [2, 3] с теоретическими расчетами, полученными здесь и в [5].

Экспериментальные данные для ядер ^{210}Po и ^{226}Ra были получены в работе [1]. Впоследствии эти результаты подверглись критике авторами [2, 3]. Недоразумение отчасти произошло из-за того, что в [1] приводятся данные по спектру γ -излучения под углом 90° к направлению движения α -частиц (об этом говорится в тексте статьи). Усреднения по углам не проводилось. Однако на графиках этот факт никак не отражен. Скорректированные, т. е. усредненные по углам вылета γ -кванта значения для ^{210}Po и ^{226}Ra были предоставлены для этой публикации Н. В. Ереминым¹⁾, выполнившим в свое время все измерения для работы [1]. Теперь экспериментальные точки для ^{226}Ra лежат (см. рис. 5) систематически выше кривой вероятности квантового $E1$ -излучения при туннелировании через кулоновский барьер и оказываются очень близки к линии, соответствующей классическому $E1$ -излучению в кулоновском поле. Однако экспериментальные значения для ^{214}Po относительно аналогичных расчетных кривых ведут себя совершенно иначе. Они оказались систематически ниже квантовомеханического спектра $E1$ -излучения для кулоновского потенциала. Такое принципиально разное поведение экспериментальных данных кажется довольно странным. Еще более загадочным представляется то, что экспериментальные значения для столь разных α -распадчиков, как ядра ^{210}Po и ^{226}Ra (энергии α -частиц, соответственно, 7.687 МэВ и 4.785 МэВ в лабораторной системе) практически совпали. Из рис. 5 можно предположить, что помимо обсуждаемого здесь тормозного излучения в эксперименте с ^{226}Ra измерялось еще и тормозное излучение, возникающее при рассеянии α -частиц на соседних ядрах. Однако данные по ^{214}Po говорят о другом. Из них следует, что процесса излучения в том виде, как он рассматривается здесь, просто нет. Измеряется же некий процесс, вероятность которого практически не зависит от энергии α -частиц. Ясно, что это не может быть исследуемое в настоящей работе тормозное излучение хотя бы потому, что для ^{214}Po спектр в области $\omega_\gamma \approx 100\text{--}200$ кэВ уже должен быть близок к предельному классическому случаю. Вопрос, по-видимому, остается открытым, и необходимо провести новые эксперименты с повышением точности измерений и отстройки от процессов типа рассеяния на соседних ядрах.

В заключение остановимся кратко еще на одном вопросе, затронутом, в частности, в работе [3]. Это — проблема так называемой «деструктивной интерференции амплитуд в подбарьерной и внешней областях». Согласно [3], тот факт, что квантовая кривая $E1$ -спектра для кулоновского поля лежит ниже классической (рис. 5), можно объяснить некоей деструктивной интерференцией амплитуд в указанных областях пространства. Отметим, что речь в [3] идет об одной и той же амплитуде, величину которой предлагается оценивать отдельно в области под барьером и вне его. В рамках модели

¹⁾ Скорректированные значения спектров для ^{210}Po и ^{226}Ra будут опубликованы авторами работы [1] в Phys. Rev. C в 1999 г.

процесса излучения, использованной в настоящей работе, такую интерференцию областей следует понимать как вклады интегралов по разным областям пространства при расчете матричных элементов перехода в полный радиальный интеграл. В этом смысле показателен пример со сферически-симметричной потенциальной ступенькой. (Этот барьер удобен тем, что в отличие от кулоновского случая, граница барьера находится в одной и той же точке $r = R_2$ и для начального, и для конечного состояний, а «переходная» область отсутствует.) Для потенциальной ступеньки квантовая кривая лежит выше классической вплоть до энергий в несколько МэВ (рис. 2б). Казалось бы, должна иметь место «конструктивная интерференция областей». Рассмотрим спектр в «форме длины», формируемый дипольным моментом перехода (31). Действительно, на рис. 3 есть такие энергии излучаемых фотонов, при которых дипольные моменты перехода имеют одинаковые знаки и складываются. Однако для основной части энергий знаки дипольных моментов в подбарьерной и внешней областях разные, и имеет место существенная компенсация вкладов в полный радиальный интеграл, т. е. «деструктивная интерференция», если следовать логике [3]. Перейдем теперь к анализу формул для матричных элементов от градиента потенциала (23). Здесь вообще непонятно, как с точки зрения интерференции областей трактовать радиальные матричные элементы. В отличие от r , оператор dV/dr оказался локализованным в точке $r = R_2$, т. е. точно на границе двух областей. Ситуация, таким образом, зависит от способа расчета спектра, от того, матричный элемент какого оператора мы рассматриваем. Ничего подобного нет в случае разных диаграмм или амплитуд. Поэтому, если говорить об «интерференции областей», то, во-первых, требуется четко определить, о пространственном распределении какого оператора перехода идет речь, а во-вторых, иметь в виду явную ограниченность самого обсуждаемого понятия.

Автор благодарит А. М. Дыхне, Н. В. Еремина и Н. П. Юдина за полезные обсуждения ряда вопросов, затронутых в данной статье.

Настоящая работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № № 98-02-16070а, 98-02-16529а) и грантом поддержки Ведущих научных школ № 96-15-96481.

Литература

1. A. D. Arrigo, N. V. Eremin, G. Fazio et al., Phys. Lett. B 332, 25 (1994).
2. J. Kasagi, H. Yamazaki, N. Kasajima et al., Phys. Rev. Lett. 79, 371 (1997).
3. J. Kasagi, H. Yamazaki, N. Kasajima et al., J. Phys. G 23, 1451 (1997).
4. M. I. Dyakonov and I. V. Gornyi, Phys. Rev. Lett. 76, 3542 (1996).
5. T. Papenbrock and G. F. Bertch, Phys. Rev. Lett. 80, 4141 (1998).
6. М. Престон, *Физика ядра*, Мир, Москва (1964).
7. И. Айзенберг, В. Грайнер, *Механизмы возбуждения ядра. Электромагнитное и слабое взаимодействия*, Атомиздат, Москва (1973).
8. Л. А. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973).
9. Л. А. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1974).
10. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1969).
11. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, Наука, Москва (1979).
12. М. Я. Амуся, *Тормозное излучение*, Энергоатомиздат, Москва (1990).