

ЭЛЕКТРОННАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ В КВАНТОВЫХ ЯМАХ В СИЛЬНОМ ПЕРЕМЕННОМ ПОЛЕ

*В. А. Бурдов**

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603600, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 19 октября 1998 г.

Найдена волновая функция электрона, находящегося в симметричной двойной квантовой яме в сильном периодическом по времени электрическом поле. Получены выражения для квазиэнергетических функций, и проанализирована зависимость дипольного момента от величины среднего значения электрического поля в случае, когда среднее поле остается величиной постоянной. В случае медленного монотонного изменения «постоянной» составляющей электрического поля уравнение Шредингера решено методом ВКБ. Показано, что зависимость дипольного момента от величины среднего поля носит ярко выраженный нелинейный почти периодический характер, а при адиабатическом монотонном изменении среднего поля имеет место периодическая передислокация электронной плотности из ямы в яму с малой частотой, пропорциональной скорости изменения среднего поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование электронной динамики в квантовых ямах под действием переменных внешних полей представляет несомненный интерес с точки зрения выявления новых функциональных возможностей современных наноструктур и построенных на их основе электронных приборов. При этом открывается непосредственный доступ к воздействию на волновую функцию электронов в квантовых ямах путем изменения параметров внешнего классического электромагнитного поля [1]. В данной работе будут рассмотрены эффекты электронной поляризации в симметричной двойной квантовой яме под действием сильного периодического по времени внешнего поля с отличным от нуля средним значением.

Ранее применительно к гетероструктурам на основе двойной квантовой ямы обсуждалось явление динамической локализации электронной волновой функции в области одной из ям синусоидальным внешним полем [2-4], а в работах [5-7] вычислялся дипольный момент системы и исследовалась возможность низкочастотного дипольного излучения такой структурой. В [8] было показано, что как явление динамической локализации, так и связанное с ним низкочастотное дипольное излучение возможны в любом периодическом поле (не обязательно синусоидальном) при условии, что поле является достаточно сильным. Осцилляции электронного волнового пакета и порождаемое этими осцилляциями электромагнитное излучение наблюдались экспериментально [9-11]. Наконец, в работах [1, 12] изучалась зависимость распределения электронной плотности в ямах от характера включения внешнего периодического воздействия.

*E-mail: burdov@phys.unn.runnet.ru

В упомянутых выше работах основное внимание было уделено выявлению условий, налагаемых на амплитуду и частоту внешнего поля, необходимых для осуществления режима «запирания» волнового пакета в области одной из ям, или режима низкочастотной генерации электромагнитного излучения. В то же время остается пока открытым круг вопросов, связанных с влиянием постоянного напряжения, прикладываемого к структуре, на квантовую динамику системы при облучении ее мощным лазерным периодическим полем. В [1, 6] была рассмотрена динамика заселенностей ям в присутствии постоянной составляющей внешнего воздействия, а в [8] было показано, что постоянная составляющая играет стабилизирующую роль в существовании состояний, локализованных в области одной из ям. Однако в целом анализ зависимостей указанных эффектов от величины внешнего постоянного поля в настоящее время отсутствует. Данная работа представляет собой, по всей видимости, первую попытку подобного анализа.

2. УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ СИСТЕМЫ

Будем рассматривать электронную динамику в симметричной структуре двух квантовых ям, разделенных почти непроницаемым барьером, в присутствии сильного периодического по времени электрического поля \mathcal{E} , направленного по оси структуры. Допустим, что ниже высоты барьера лежат только два уровня энергии невозмущенной системы $E_{0,1} = \pm \hbar\Delta/2$ (уровень отсчета энергии выбран посередине между уровнями), расстояние $\hbar\Delta$ между которыми определяется туннельным интегралом через разделительный барьер и является величиной экспоненциально малой. Соответствующие этим энергиям симметричную и антисимметричную волновые функции $\chi_{0,1}(x)$ определим так, чтобы $\chi_0(x)$ была положительной всегда, а $\chi_1(x)$ — при $x > 0$.

Поскольку расстояние от нижних уровней энергии до следующего уровня E_2 существенно превышает саму величину энергетического расщепления $\hbar\Delta$, будем в дальнейшем использовать двухуровневое приближение, естественно полагая при этом, что внешнее поле не подмешивает более высоколежащие энергетические состояния. Таким образом, на величину внешнего поля, очевидно, должно быть наложено следующее условие:

$$\hbar\Delta \ll V_{01} \ll E_2,$$

где $V_{01} = e\mathcal{E}x_{01}$ — матричный элемент возмущения в дипольном приближении, $-e$ — заряд электрона, а x_{01} — матричный элемент координаты. Данное неравенство конкретизирует понятие сильного поля — оно должно быть сильным настолько, чтобы матричный элемент возмущения существенно превышал расстояние между уровнями $\hbar\Delta$.

Наконец, потребуем, чтобы частота внешнего поля ω была много меньше E_2/\hbar . Это также позволит нам исключить резонансные переходы на более высокие уровни энергии.

В условиях применимости двухуровневого приближения волновую функцию частицы можно искать в виде разложения по базису двух стационарных состояний невозмущенной задачи. Однако такое разложение вряд ли будет удобно при наличии сильного переменного поля. С учетом того, что нас в дальнейшем будет интересовать простран-

ственное распределение заряда, более подходящим здесь оказывается базис

$$\Psi_L(x) = \frac{\chi_0(x) - \chi_1(x)}{\sqrt{2}}, \quad \Psi_R(x) = \frac{\chi_0(x) + \chi_1(x)}{\sqrt{2}},$$

где функции $\Psi_{L,R}(x)$ фактически локализованы в левой и правой ямах в соответствии с определением функций стационарных состояний $\chi_{0,1}(x)$.

Волновую функцию системы можно теперь представить в виде суперпозиции ортонормированных векторов $\Psi_{L,R}(x)$ с некоторыми коэффициентами, зависящими от времени и подлежащими дальнейшему определению:

$$\Psi(x, \tau) = C_L(\tau) \exp \left\{ i \int \varepsilon(\tau) d\tau \right\} \Psi_L(x) + C_R(\tau) \exp \left\{ -i \int \varepsilon(\tau) d\tau \right\} \Psi_R(x). \quad (1)$$

Здесь введено безразмерное время $\tau = t\Delta$, а функция $\varepsilon(\tau)$, представляющая собой отношение матричного элемента возмущения к величине энергии перехода $\hbar\Delta$, является периодической с безразмерным периодом $T = 2\pi\Delta/\omega$. Сразу подчеркнем, что функция $\varepsilon(\tau)$ состоит из двух частей: постоянной составляющей $\bar{\varepsilon}$, которая представляет собой среднее по периоду значение $\varepsilon(\tau)$, и переменной $\tilde{\varepsilon}(\tau)$, среднее значение которой уже равно нулю. Экспоненциальные фазовые множители в (1), зависящие от времени, выделены в коэффициентах разложения для удобства.

Несмотря на то что функции $\Psi_L(x)$ и $\Psi_R(x)$ не являются собственными функциями оператора какой-либо физической величины, коэффициентам $C_{L,R}(\tau)$ (точнее, квадратам их модулей) может быть приписан вполне конкретный физический смысл. Если определить вероятности нахождения электрона в левой и правой ямах следующим интегралом:

$$W_{L(R)} = \int_{-\infty(0)}^{0(\infty)} dx |\Psi(x, \tau)|^2,$$

можно без труда показать, что с точностью до слагаемых, порядок величины которых определяется интегралом перекрытия $\int \Psi_L(x)\Psi_R(x)dx$, вероятности $W_{L,R}(\tau)$ совпадают с квадратами модулей коэффициентов $C_{L,R}(\tau)$. Величина же интегралов типа интеграла перекрытия задается разностью функций $\chi_0^2(x) - \chi_1^2(x)$, которая, как показано в [13], является малой по параметру $(\hbar\Delta/E_2)^{1/2}$, и в соответствии с исходными предположениями такое отношение — наименьшее из всех параметров задачи. Везде далее при расчетах величинами такого порядка будем пренебрегать.

Подстановка (1) в уравнение Шредингера дает пару уравнений, описывающих временную эволюцию коэффициентов $C_{L,R}(\tau)$:

$$\begin{cases} i \frac{dC_L}{d\tau} = -\frac{C_R}{2} \exp \left(-2i \int \varepsilon(\tau) d\tau \right), \\ i \frac{dC_R}{d\tau} = -\frac{C_L}{2} \exp \left(2i \int \varepsilon(\tau) d\tau \right). \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку $\tilde{\varepsilon}(\tau)$ — периодическая функция, можно разложить экспоненты в (2) в ряд Фурье:

$$\exp \left\{ 2i \int \varepsilon(\tau) d\tau \right\} = \exp \left\{ 2i \int \bar{\varepsilon} d\tau \right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n \exp \{ i\psi_n \} \exp \{ -in\Omega\tau \},$$

где $\Omega = 2\pi/T$, а μ_n и ψ_n — амплитуда и фаза фурье-разложения, определяемые согласно

$$\mu_n \exp\{i\psi_n\} = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \exp \left\{ i \left(n\Omega\tau + 2 \int \tilde{\varepsilon}(\tau) d\tau \right) \right\}.$$

В работе [8] были получены явные выражения для фурье-амплитуд μ_n с помощью метода стационарной фазы. Здесь мы не будем приводить все вычисления, выполненные в [8], а скажем лишь вкратце об основных результатах.

В соответствии с определением коэффициенты μ_n зависят только от амплитуды переменной части возмущения (обозначим ее ε_0) и не зависят от $\tilde{\varepsilon}$. В условиях, когда амплитуда ε_0 велика, что и имеет место в нашей задаче, коэффициенты μ_n всегда убывают с ростом ε_0 либо степенным образом (как $\varepsilon_0^{-1/3}$ или $\varepsilon_0^{-1/2}$), либо экспоненциально. И в том, и в другом случаях фурье-амплитуды μ_n оказываются малыми, и это обстоятельство существенным образом облегчит в дальнейшем решение задачи.

Представив экспоненты в системе (2) рядами Фурье, получаем в правой части этих уравнений набор слагаемых с фазами вида $\psi_n + \int (2\tilde{\varepsilon} - n\Omega) d\tau$. Совершенно очевидно, что в случае, когда разность $2\tilde{\varepsilon} - n\Omega$ будет величиной порядка Ω , все гармоники в уравнениях (2) окажутся быстроосциллирующими и их усредненное эффективное воздействие на систему будет практически нулевым. Если же при каком-то $n = l$ разность $|2\tilde{\varepsilon} - n\Omega|$ будет много меньше Ω , в слагаемом с номером l появится «медленная» фаза и действие этой l -ой гармоники окажется резонансным (см. например, [14, с. 180]). Случай резонансного возбуждения двухуровневой системы наиболее интересен, поэтому обсудим его подробнее.

Условие резонанса

$$2\tilde{\varepsilon} = l\Omega \quad (3)$$

имеет достаточно простой физический смысл. Постоянная составляющая возмущения разводит уровни энергии стационарных состояний на величину приблизительно равную $2\tilde{\varepsilon}$ при условии, что $2\tilde{\varepsilon} \gg 1$. Поэтому, для того чтобы резонансным образом связать эти уровни, требуется точно такая же энергия кванта (или квантов) внешнего поля. Гармоника фурье-разложения с номером l отвечает этому требованию, и именно она связывает два уровня энергии в системе.

Следует, однако, подчеркнуть, что речь идет не об l -ой гармонике возмущения, а об l -ой гармонике экспоненты $\exp(2i \int \tilde{\varepsilon}(\tau) d\tau)$. В условиях, когда амплитуда функции $\tilde{\varepsilon}(\tau)$ является величиной, сравнимой с расстоянием между уровнями энергии $2\tilde{\varepsilon}$ или даже большей этого расстояния, вклад в резонансные переходы дают не только однофотонные процессы с частотой $l\Omega$, но и всевозможные многофотонные процессы с конечной разностью энергий излученных и поглощенных фотонов равной $l\Omega$. Коэффициент μ_l представляет собой, таким образом, как бы амплитуду всех этих резонансных процессов. При этом нетрудно убедиться непосредственно, что в случае малых значений ε_0 коэффициент μ_l описывает однофотонный процесс на l -ой гармонике возмущения.

Очевидно, что система (2) легко может быть решена в условиях, когда среднее значение возмущения является резонансным и равенство (3) выполняется строго или, по крайней мере, близко к выполнению, т. е. $|2\tilde{\varepsilon} - l\Omega| \ll \Omega$. В этом случае в правой части уравнений (2) достаточно удержать только «медленное» резонансное слагаемое (l -ую гармонику фурье-разложения), которое и даст основной вклад в эволюцию коэффициентов $C_{L,R}(\tau)$.

Однако знания коэффициентов разложения $C_{L,R}(\tau)$, а следовательно, и волновой функции в области одного лишь l -го резонанса явно недостаточно для анализа их зависимости от $\bar{\varepsilon}$ в целом — на всем промежутке изменения постоянной составляющей возмущения. Для этого, как минимум, нужно иметь представление о закономерностях перехода от одного резонанса к другому через нерезонансную область, чего однорезонансное приближение дать не может.

Конечно, можно было бы решить систему (2) в области l -го и $l+1$ -го резонансов, а также и в нерезонансной области. Однако при этом возникает задача объединения этих выражений в одно, применимое на всем исследуемом интервале, что с математической точки зрения, по всей видимости, просто невозможно.

По этой причине здесь будет предложен принципиально иной метод решения, который можно было бы назвать двухрезонансным приближением. Суть его заключается в том, чтобы сохранить в системе (2) не одну, а две соседние гармоники, частоты которых ближе всех остальных к частоте перехода между уровнями энергии. Так, если $l\Omega \lesssim 2\bar{\varepsilon} \lesssim (l+1)\Omega$, следует сохранить l -ую и $l+1$ -ую гармоники. При этом уравнения (2) приобретают вид

$$\begin{aligned} i \frac{dC_L}{d\tau} &= -\frac{C_R}{2} \left(\mu_l \exp \left\{ -i\psi_l - i \int (2\bar{\varepsilon} - l\Omega) d\tau \right\} + \mu_{l+1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ -i\psi_{l+1} - i \int (2\bar{\varepsilon} - (l+1)\Omega) d\tau \right\} \right), \\ i \frac{dC_R}{d\tau} &= -\frac{C_L}{2} \left(\mu_l \exp \left\{ i\psi_l + i \int (2\bar{\varepsilon} - l\Omega) d\tau \right\} + \mu_{l+1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ i\psi_{l+1} + i \int (2\bar{\varepsilon} - (l+1)\Omega) d\tau \right\} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Ясно, что решение такой системы, если оно будет получено, должно обладать всеми необходимыми свойствами. При значениях $2\bar{\varepsilon}$ близких к $l\Omega$ оно должно переходить в решение, полученное с помощью однорезонансного приближения, о котором говорилось выше. При значениях $2\bar{\varepsilon}$ близких к $(l+1)\Omega$ оно также должно перейти в однорезонансное решение, но полученное уже в окрестности $l+1$ -го резонанса. Ясно также, что подобное более общее решение автоматически дает единые квазиэнергетические функции системы во всей области между резонансами и полную картину зависимости квазиэнергий от $\bar{\varepsilon}$.

Нетрудно видеть, что погрешность двухрезонансного приближения имеет тот же порядок малости, что и погрешность обычного резонансного приближения. Так же, как и в однорезонансном приближении, при получении уравнений (4) из (2) были отброшены нерезонансные гармоники с малыми амплитудами $\mu_n \ll 1$, что и определяет порядок малости погрешности.

Следует отметить, что учет $l+1$ -ой гармоники в окрестности l -го резонанса (или l -ой гармоники в окрестности $l+1$ -го) является в определенном смысле излишним, так как эти гармоники оказываются нерезонансными и могут быть отброшены, как и все остальные нерезонансные гармоники. Сохранение их в уравнениях (4) служит единственной цели — получить решения, описывающие динамику системы на всем интервале между двумя соседними резонансами, а то обстоятельство, что эти гармоники поочередно становятся нерезонансными, гарантирует нам, что при вычислениях

не будет накоплена сколь-нибудь существенная ошибка, порядок которой превышает величину коэффициентов μ_n .

3. КВАЗИЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ В ДВУХРЕЗОНАНСНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Будем вначале решать уравнения (4) в предположении, что среднее значение возмущения остается неизменным и, следовательно, гамильтониан системы строго периодичен по времени с периодом внешнего поля $T = 2\pi/\Omega$. В этом случае, как хорошо известно [15], удобно использовать формализм квазиэнергий и квазиэнергетических функций, обладающих следующим свойством:

$$U_\nu(x, \tau + T) = U_\nu(x, \tau)e^{-i\nu T},$$

где величина ν , определенная с точностью до частоты внешнего поля Ω , называется квазиэнергией. Квазиэнергетические функции, отвечающие разным квазиэнергиям, представляют собой ортонормированный базис, по которому также можно вести разложение волновой функции частицы. Поскольку для двухуровневой системы число квазиэнергий равно двум — обозначим их в дальнейшем ν_\pm , — базис квазиэнергетических функций также будет двумерным. В результате приходим к разложению вида

$$\Psi(x, \tau) = A_+U_+(x, \tau) + A_-U_-(x, \tau), \quad (5)$$

где A_\pm — коэффициенты разложения.

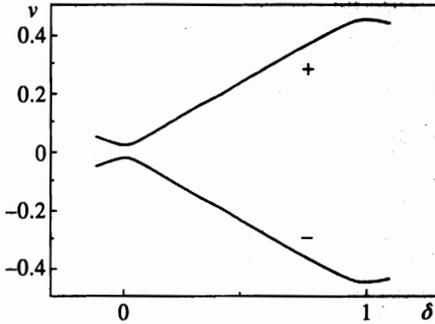
Поскольку как сама волновая функция $\Psi(x, \tau)$, так и квазиэнергетические функции $U_\pm(x, \tau)$ предполагаются нормированными, сумма квадратов модулей коэффициентов A_\pm должна равняться единице. Кроме того, коэффициенты разложения по базису квазиэнергетических функций не зависят от времени [15], в отличие от разложения по любому другому базису, как, например, это имеет место в (1). В соответствии с обычными правилами квантовой механики, квадратам модулей коэффициентов A_\pm может быть приписан вполне конкретный смысл: они задают вероятность нахождения системы в данном квазиэнергетическом состоянии с соответствующей квазиэнергией.

Перейдем к непосредственному вычислению квазиэнергетических функций и квазиэнергий. Квазиэнергетическая функция $U_\nu(x, \tau)$ должна являться решением уравнения Шредингера и иметь блоховский вид. В соответствии с этими требованиями и с учетом структуры разложения (1) коэффициенты $C_{L,R}(\tau)$ будем искать в виде

$$C_L(\tau) = f(\tau)e^{-i(\nu+\delta/2)\tau}, \quad C_R(\tau) = g(\tau)e^{-i(\nu-\delta/2)\tau}, \quad (6)$$

где $\delta = 2\bar{\epsilon} - l\Omega$. Будем для определенности полагать, что номер резонанса l является числом четным. В этом случае функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$, подлежащие дальнейшему определению, в соответствии с теорией Флоке должны быть периодическими с периодом внешнего поля T и могут быть разложены в ряд Фурье:

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\Omega\tau}, \quad g(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-in\Omega\tau}.$$



Зависимость квазиэнергий от величины среднего поля в пределах первой зоны Бриллюэна для состояний «+» и «-» при $\mu_l/\Omega = 0.05$, $\mu_{l+1}/\Omega = 0.1$

Подставляя $f(\tau)$ и $g(\tau)$ в (4), приходим к следующей системе алгебраических уравнений бесконечной размерности для определения фурье-коэффициентов f_n и g_n :

$$\begin{cases} (\nu + \frac{\delta}{2} + n\Omega)f_n + \frac{\mu_l e^{-i\psi_l}}{2} g_n + \frac{\mu_{l+1} e^{-i\psi_{l+1}}}{2} g_{n+1} = 0, \\ (\nu - \frac{\delta}{2} + n\Omega)g_n + \frac{\mu_l e^{i\psi_l}}{2} f_n + \frac{\mu_{l+1} e^{i\psi_{l+1}}}{2} f_{n-1} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Вообще говоря, точное решение системы (7) представляет серьезные трудности, поскольку реальный вклад в функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$ дает большое число гармоник. Если же потребовать, чтобы параметры μ_l и μ_{l+1} были малы, что и имеет место в сильном переменном поле, последовательности коэффициентов f_n и g_n оказываются быстро убывающими относительно одного из коэффициентов, являющегося наибольшим, как в сторону увеличения номера n , так и в сторону его уменьшения. При этом, как правило, достаточно ограничиться одним, максимум двумя коэффициентами разложения, отбросив все остальные.

В результате решения системы (7) (см. Приложение), находим два значения квазиэнергии $\nu_{\pm} = \pm\nu$, принадлежащих первой зоне Бриллюэна, где

$$\nu = \frac{\delta^2 - \sqrt{\delta^2(\Omega - \delta)^2 + (2\delta - \Omega)(\mu_l^2(\delta - \Omega) + \mu_{l+1}^2\delta)}}{2(2\delta - \Omega)} \quad (8)$$

Не представляет особого труда убедиться, что при значениях $|\delta| \ll \Omega$ и $|\delta - \Omega| \ll \Omega$, квазиэнергии (8) переходят в обычные выражения для квазиэнергий однорезонансного приближения (аналог частоты Раби)

$$\nu_{\pm} = \begin{cases} \pm \sqrt{\delta^2 + \mu_l^2/2}, & |\delta| \ll \Omega, \\ \pm \left(\Omega - \sqrt{(\delta - \Omega)^2 + \mu_{l+1}^2} \right) / 2, & |\delta - \Omega| \ll \Omega. \end{cases} \quad (9)$$

Полная же картина зависимости квазиэнергий ν_{\pm} от величины $2\bar{\epsilon}/\Omega$, соответствующая общему выражению (8), представлена на рисунке.

Видно, что ветви квазиэнергий максимально сближаются в точке l -го резонанса (3) и максимально расходятся внутри первой зоны Бриллюэна при значениях $\bar{\epsilon}$, отвечающих следующему $l + 1$ -му резонансу. Однако подобное «отталкивание» квазиэнергетических уровней в пределах одной зоны автоматически приводит к их сближению

с уровнями квазиэнергий из соседних зон, которые получаются трансляциями первой зоны Бриллюэна вверх или вниз по оси квазиэнергий на величину Ω . Очевидно, минимальное расстояние между ветвями квазиэнергий достигается в точках резонанса и равно μ_l или μ_{l+1} .

Заметим, что изображенный на рисунке фрагмент зависимости $\nu_{\pm}(2\bar{\epsilon})$ легко может быть продолжен за пределы того интервала значений $\bar{\epsilon}$, в котором проводились расчеты, поскольку данная зависимость является почти периодической по $2\bar{\epsilon}$ с периодом 2Ω . Так, чтобы продолжить зависимость $\nu_{\pm}(2\bar{\epsilon})$ на вторую половину «периода», в область $(l-1)\Omega \leq 2\bar{\epsilon} \leq l\Omega$, достаточно в формуле (8) провести замены: $\mu_{l+1} \rightarrow \mu_{l-1}$, $\delta \rightarrow -\delta$. Далее можно распространить весь полученный таким образом «период» на любой интервал оси $2\bar{\epsilon}$.

Небольшие отклонения от периодичности будут наблюдаться в малой окрестности точек резонанса $2\bar{\epsilon} = n\Omega$, где ветви квазиэнергий максимально сближаются друг с другом или с границами зоны. В этих окрестностях характер зависимости определяется главным образом величинами коэффициентов μ_n и, поскольку в общем случае все коэффициенты μ_n различны, строгая периодичность невозможна.

Теперь получим выражения для самих квазиэнергетических функций $U_{\pm}(x, \tau)$. Для этого нужно найти коэффициенты f_0, f_{-1}, g_0 и g_1 из системы (П.1) и условие нормировки, которое можно представить в виде $|f_0|^2 + |f_{-1}|^2 + |g_0|^2 + |g_1|^2 = 1$. С учетом малости коэффициентов g_1 и f_{-1} соответственно для ветвей «+» и «-», будем иметь для $\nu_+ = \nu$:

$$g_0^{(+)} = \left(1 + \frac{\mu_l^2}{(2\nu + \delta)^2} + \frac{\mu_{l+1}^2}{(2\nu + \delta - 2\Omega)^2} \right)^{-1/2} \equiv G, \tag{10}$$

$$f_0^{(+)} = -G \frac{\mu_l e^{-i\psi_l}}{2\nu + \delta}, \quad f_{-1}^{(+)} = -G \frac{\mu_{l+1} e^{-i\psi_{l+1}}}{2\nu + \delta - 2\Omega}.$$

В соответствии с (10) на рассматриваемом интервале значений $\bar{\epsilon}$ коэффициент g_0 существен всегда — почти на всем интервале он близок к единице и только на краях интервала резко убывает практически до нулевых значений. Коэффициент f_0 играет роль только в окрестности l -го резонанса, а коэффициент f_{-1} — в окрестности $l+1$ -го резонанса.

Аналогичным образом для квазиэнергии $\nu_- = -\nu$ находим

$$f_0^{(-)} = G, \quad g_0^{(-)} = -f_0^{(+)*}, \quad g_1^{(-)} = -f_{-1}^{(+)*}. \tag{11}$$

Здесь звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения. Теперь уже коэффициент f_0 существен во всей области изменения $\bar{\epsilon}$, в то время как коэффициенты g_0 и g_1 важны лишь на краях интервала.

Запишем теперь квазиэнергетические волновые функции $U_{\pm}(x, \tau)$, подставив найденные выражения для коэффициентов (10), (11) в (6), а затем в (1):

$$U_+(x, \tau) = e^{-i\nu\tau} \left\{ (f_0^{(+)} + f_{-1}^{(+)} e^{i\Omega\tau}) e^{i\phi_l(\tau)} \Psi_L(x) + g_0^{(+)} e^{-i\phi_l(\tau)} \Psi_R(x) \right\}, \tag{12}$$

$$U_-(x, \tau) = e^{i\nu\tau} \left\{ (g_0^{(-)} + g_1^{(-)} e^{-i\Omega\tau}) e^{-i\phi_l(\tau)} \Psi_R(x) + f_0^{(-)} e^{i\phi_l(\tau)} \Psi_L(x) \right\},$$

где $\phi_l(\tau) = \int (\bar{\epsilon}(\tau) + l\Omega/2) d\tau$.

Знание квазиэнергетических функций (12) позволит нам в дальнейшем определить дипольный момент электрона в квазиэнергетических состояниях и проследить зависимость степени поляризации системы от величины постоянного внешнего поля.

4. ЭЛЕКТРОННАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ В КВАЗИЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЯХ

Рассчитаем дипольный момент системы в квазиэнергетических состояниях. Воспользовавшись определением дипольного момента

$$d^{(\pm)} = -e \langle U_{\pm}(x, \tau) | \hat{x} | U_{\pm}(x, \tau) \rangle ,$$

а также полученными выражениями для квазиэнергетических функций и условием нормировки, придем к следующим выражениям для дипольного момента соответственно в состояниях «+» и «-»:

$$d^{(\pm)} = \pm D = \pm e x_{01} (1 - 2G^2) . \quad (13)$$

В соответствии с (13), зависимость дипольного момента D от удвоенного значения постоянной составляющей внешнего поля $2\bar{\varepsilon}$ является немонотонной и, более того, почти периодической (строгая периодичность, как уже отмечалось ранее, имеет место лишь в случае равенства всех коэффициентов μ_n), причем «период» определяется частотой Ω переменной составляющей внешнего поля. При этом на одном «полупериоде» дипольный момент направлен по постоянному полю, а на другом «полупериоде» — против него, достигая в обоих случаях своих максимальных значений. Таким образом, на одном из «полупериодов» возникает как бы антиполяризационный эффект, обусловленный дополнительным действием на электрон сильного переменного поля.

Обсудим более детально зависимость $D(2\bar{\varepsilon})$ с использованием квазиэнергетических функций (12). С этой целью проследим за степенью локализации одной из квазиэнергетических функций, например $U_+(x, \tau)$, в зависимости от величины $\bar{\varepsilon}$. В окрестности l -го резонанса существенный вклад в функцию $U_+(x, \tau)$ дают коэффициенты f_0 и g_0 . При этом по мере удаления от резонанса в область меньших значений $2\bar{\varepsilon}$ коэффициент g_0 очень быстро убывает до нуля на масштабах $\delta \sim \mu_l$, а коэффициент f_0 так же быстро становится практически равным единице. Таким образом, при отрицательных значениях δ , таких что $|\delta| \gg \mu_l$, функция $U_+(x, \tau)$ полностью локализуется в левой яме.

По мере приближения к точному равенству $\delta = 0$ степень локализации квазиэнергетической функции в левой яме уменьшается и часть волновой функции переходит в правую яму. При строгом выполнении условия резонанса квазиэнергетическая функция $U_+(x, \tau)$ в равной степени заполняет обе ямы. Последующее увеличение $2\bar{\varepsilon}$ ведет к дальнейшему заполнению правой ямы и опустошению левой. При $\delta \gg \mu_l$ вся волновая функция уже полностью сосредотачивается в правой яме.

Во всей области значений $2\bar{\varepsilon}$ между двумя соседними резонансами сколь-нибудь существенных изменений с функцией $U_+(x, \tau)$ происходить не будет, до тех пор пока величина $2\bar{\varepsilon}$ не приблизится к следующему своему резонансному значению $(l + 1)\Omega$. Здесь уже оказываются важны коэффициенты g_0 и f_{-1} , и по мере приближения к резонансу первый уменьшается, а второй растет. Таким образом, вес функций $\Psi_R(x)$ и $\Psi_L(x)$ в выражении для $U_+(x, \tau)$ соответственно уменьшается и увеличивается. В резонансе обе ямы снова заполнены одинаково, а при увеличении $2\bar{\varepsilon}$ квазиэнергетическая функция уже полностью локализуется в левой яме.

Функция $U_-(x, \tau)$, как несложно убедиться с помощью выражений (12) и (11), ведет себя полностью противоположно функции $U_+(x, \tau)$: когда одна из них локализована в левой яме, другая — в правой, и наоборот. По этой причине дипольные моменты в состояниях «+» и «-» различаются знаком.

Очевидно, что всякий раз при переходе через очередной резонанс, функции $U_{\pm}(x, \tau)$ будут изменять свою локализацию, полностью меняя поляризацию данного квазиэнергетического состояния.

Таким образом, приходим к выводу, что почти при всех значениях $\bar{\epsilon}$ квазиэнергетические функции с точностью до несущественных фазовых множителей совпадают с функциями $\Psi_{L,R}(x)$, локализованными, соответственно, в левой и правой ямах. Исключение составляют узкие резонансные области $|2\bar{\epsilon} - n\Omega| \sim \mu_n \ll \Omega$, в которых это совпадение нарушается и квазиэнергетические функции делокализуются.

С другой стороны, как уже говорилось ранее, коэффициенты разложения волновой функции по базису квазиэнергетических функций (5) остаются всегда постоянными. Поэтому, создав в начальный момент времени волновую функцию, совпадающую с одной из квазиэнергетических функций (положив один из коэффициентов разложения в (5) равным нулю, а второй — единице), получим, что такое разложение сохранится в любой последующий момент времени и волновая функция системы всегда будет отвечать выбранному квазиэнергетическому состоянию. Если при этом значение постоянного внешнего поля таково, что система оказывается далека от резонанса, волновая функция частицы локализуется в одной из ям и остается там сколь угодно долго.

Если же значение $2\bar{\epsilon}$ попадает в узкую резонансную область вблизи произвольного n -ого резонанса, пространственное распределение заряда в чистых квазиэнергетических состояниях претерпевает существенные изменения. Как уже было отмечено, резонансные значения $2\bar{\epsilon}$ характерны тем, что в этих точках две ветви квазиэнергии максимально сближаются друг с другом, как показано на рисунке. В нулевом приближении, если коэффициент μ_n в окрестности n -го резонанса положить равным нулю, ветви квазиэнергий пересекаются в точках $2\bar{\epsilon} = n\Omega$, что соответствует вырождению квазиэнергий — в этом случае говорят о квазиэнергетическом резонансе. Учет конечности коэффициентов μ_n ведет к снятию вырождения: происходит как бы расщепление квазиэнергетических уровней с образованием щели величиной μ_n между ветвями квазиэнергии.

Волновые функции в этом случае представляют собой симметричную и антисимметричную линейные комбинации двух исходных волновых функций нулевого приближения, подобно тому как это имеет место для вырожденных стационарных состояний. В нашем случае нулевое приближение соответствует удалению от резонанса, когда есть две квазиэнергетические функции, практически полностью локализованные в левой и правой ямах. Поэтому их суперпозиция с равными по абсолютной величине коэффициентами обязательно даст волновую функцию, в равной степени заселяющую как левую, так и правую ямы, в чем можно непосредственно убедиться с помощью выражений (12), например, в случае $\delta = 0$. Очевидно, что дипольный момент системы в точках резонанса должен обращаться в нуль, что и дает выражение (13).

Говоря об антиполяризационном эффекте, когда структура поляризуется в направлении, противоположном приложенному внешнему электрическому полю, следует обратить внимание на аналогию между указанным явлением и обнаруженным недавно теоретически [16, 17] и экспериментально [17, 18] эффектом, названным авторами «абсолютным отрицательным сопротивлением», когда ток через двухъямную (трехбарьерную) [16, 17] или многоямную [18] гетероструктуру оказывался отрицательным при

облучении структуры переменным лазерным полем, в то время как подаваемое постоянное напряжение было положительным. Очевидно, оба эффекта близки по своей природе и имеют чисто квантовое происхождение, связанное с особенностями электронной динамики в потенциальных ямах в периодических полях.

Наконец, обсудим вкратце случай, когда ни один из коэффициентов разложения в (5) не обращается в нуль и волновая функция системы является суперпозицией двух квазиэнергетических состояний. Дипольный момент является в этом случае функцией времени и может быть представлен в виде

$$d = \bar{d} - 4ex_{01}a_+a_-G^2 \left\{ \frac{\mu_l}{2\nu+\delta} \cos(\bar{\psi}_l + 2\nu\tau) + \frac{\mu_{l+1}}{2\nu+\delta-2\Omega} \cos(\bar{\psi}_{l+1} + (2\nu-\Omega)\tau) \right\}, \quad (14)$$

где $\bar{\psi}_n = \psi_n - \alpha$, параметры a_+ , a_- и α — соответственно, модули и разность фаз коэффициентов A_+ и A_- , а \bar{d} — среднее по времени значение дипольного момента,

$$\bar{d} = (a_+^2 - a_-^2)D, \quad (15)$$

определяемое разностью заселенностей квазиэнергетических уровней.

Анализ выражения (14) говорит о том, что зависимость дипольного момента от времени проявляется далеко не всегда, а только в непосредственной близости к резонансу. Так, в окрестности l -ого резонанса дипольный момент будет медленноосциллирующей функцией времени с малой частотой $2\nu = \sqrt{\delta^2 + \mu_l^2}$, поскольку коэффициент $G^2\mu_l/(2\nu + \delta)$, определяющий амплитуду первой гармоники в (14), порядка единицы, в то время как амплитуда другой гармоники с частотой $\Omega - 2\nu$ оказывается незначительной ввиду малости отношения $G^2\mu_{l+1}/(2\nu + \delta - \Omega) \sim \mu_l/\Omega \ll 1$.

Аналогично, в окрестности $l + 1$ -го резонанса, наоборот, первая гармоника, которая становится быстроосциллирующей ($2\nu \approx \Omega$), имеет малую амплитуду порядка $\mu_l/\Omega \ll 1$, в то время как вторая гармоника превращается в медленную с частотой $\sqrt{\mu_{l+1}^2 + (\delta - \Omega)^2} \ll \Omega$ и амплитудой порядка единицы.

В нерезонансной области обе гармоники малы и дипольный момент полностью определяется своим средним значением. При этом двойная квантовая яма всегда оказывается поляризованной, если уровни энергии заселены неодинаково, причем максимальная поляризация достигается в случае заселения лишь одного из двух уровней. Если же имеет место равное заселение уровней квазиэнергии, дипольный момент обращается в нуль.

5. АДИАБАТИЧЕСКОЕ ИЗМЕНЕНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

В разделах 3 и 4 предполагалось, что среднее значение внешнего поля является величиной постоянной и, следовательно, само внешнее поле — строго периодическим. Это позволило развить квазиэнергетический формализм при описании временной эволюции волновой функции и проанализировать зависимость дипольного момента системы от величины постоянной составляющей внешнего поля.

В частности, было показано, что возможно состояние с максимальным статическим дипольным моментом, соответствующее локализации волновой функции электрона в области одной из ям. Следует, однако, иметь в виду, что образование такого состояния оказывается возможным не только благодаря действию внешнего поля определенного

вида, но и в силу выбора вполне конкретного начального условия. Именно совпадение волновой функции в начальный момент времени с одной из квазиэнергетических функций позволяет осуществить режим «запирания» электрона сильным переменным полем в области одной ямы. Любые отклонения от данного начального условия ведут к нарушению режима локализации и периодическому перетеканию заряда из ямы в яму в соответствии с выражением (14).

Попытаемся теперь понять, нельзя ли управлять локализацией волновой функции, например менять заселенности ям на противоположные, причем делать это именно за счет изменения параметров внешнего поля. В качестве примера рассмотрим режим медленного монотонного изменения величины среднего поля и проследим за временной эволюцией электронной плотности в ямах и дипольного момента системы.

Будем для определенности полагать, что среднее значение возмущения адиабатически нарастает, и выберем в качестве начала отсчета времени момент, когда значение $2\bar{\epsilon}$ равно $l\Omega$. Считая коэффициент μ_l малым настолько, чтобы можно было получить значение параметра δ , существенно превышающее μ_l , но остающееся малым по сравнению с Ω , получим решение уравнений (2) в резонансном приближении вблизи l -го резонанса (3). Отбрасывая в уравнениях (4) слагаемые, соответствующие $l + 1$ -му резонансу, и разлагая медленную функцию $\bar{\epsilon}(\tau)$ до линейных членов по τ , приходим к следующей системе уравнений для коэффициентов $C_{L,R}(\tau)$:

$$\begin{cases} i \frac{dC_L}{d\tau} = -\frac{C_R}{2} \mu_l \exp \{-i(\psi_l - \gamma\tau^2)\}, \\ i \frac{dC_R}{d\tau} = -\frac{C_L}{2} \mu_l \exp \{i(\psi_l + \gamma\tau^2)\}, \end{cases} \quad (16)$$

где через γ обозначена производная по времени τ от $\bar{\epsilon}(\tau)$, вычисленная в начальный момент времени.

Параметр γ будем считать самым малым параметром задачи. В частности, он должен быть много меньше характерного частотного масштаба μ_l , равного минимальному расстоянию между ветвями квазиэнергий в точке $2\bar{\epsilon} = l\Omega$.

Поскольку теперь оператор Гамильтона не является строго периодической функцией времени, понятия квазиэнергий и квазиэнергетических волновых функций ввести невозможно, и, следовательно, для решения системы (16) необходимо использовать иные методы и приемы. Сведем систему двух дифференциальных уравнений первого порядка (16) к одному уравнению второго порядка, например для коэффициента C_L :

$$\ddot{C}_L + 2i\gamma\tau\dot{C}_L + \frac{\mu_l^2}{4}C_L = 0, \quad (17)$$

где точка обозначает производную по времени. Учитывая, что коэффициент перед первой производной — медленная функция времени, применим метод ВКБ для решения этого уравнения.

Представив $C_L(\tau)$ в виде

$$C_L(\tau) = \rho(\tau) \exp \left\{ i \int \sigma(\tau) d\tau \right\},$$

получим следующую систему уравнений для ρ и σ :

$$\begin{aligned} 2\sigma\dot{\rho} + \rho\dot{\sigma} + 2\gamma\tau\dot{\rho} &= 0, \\ \ddot{\rho} - \rho\sigma^2 + \frac{\mu_1^2}{4}\rho - 2\gamma\tau\rho\sigma &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В предельном случае $\gamma = 0$ решением этих уравнений являются постоянные $\rho(\tau)$ и $\sigma(\tau) = \text{const}$. Учитывая малость γ , будем считать функции $\rho(\tau)$ и $\sigma(\tau)$ медленными, их первые производные — величинами первого порядка малости, а вторую производную $\ddot{\rho}$ — бесконечно малой второго порядка.

Пренебрегая $\ddot{\rho}$ во втором уравнении системы (18), находим два решения

$$\sigma^{(\pm)}(\tau) = -\gamma\tau \pm \sqrt{\gamma^2\tau^2 + \mu_1^2/4}. \quad (19)$$

Подстановка (19) в первое уравнение системы (18) дает

$$\rho^{(\pm)}(\tau) = \sqrt{\frac{\sqrt{\mu_1^2 + 4\gamma^2\tau^2} \pm 2\gamma\tau}{2\sqrt{\mu_1^2 + 4\gamma^2\tau^2}}}. \quad (20)$$

Как показывают оценки, в дальнейшем уточнении решений уравнений (18) нет необходимости, поскольку получающиеся при этом поправки определяются целыми положительными степенями параметра γ и, следовательно, могут быть отброшены.

Общее решение уравнения (17) и, соответственно, исходной системы (16), представляющее собой суперпозицию частных решений (19), (20), есть

$$\begin{aligned} C_L(\tau) &= (C_1\rho^{(-)}e^{-i\varphi} + C_2\rho^{(+)}e^{i\varphi}) \exp\{-i(\psi_l/2 + \gamma\tau^2/2)\}, \\ C_R(\tau) &= (C_2\rho^{(-)}e^{i\varphi} - C_1\rho^{(+)}e^{-i\varphi}) \exp\{i(\psi_l/2 + \gamma\tau^2/2)\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые начальным условием, а фаза φ является функцией времени

$$\varphi(\tau) = \frac{\tau}{2} \sqrt{\gamma^2\tau^2 + \frac{\mu_1^2}{4}} + \frac{\mu_1^2}{8\gamma} \ln \left(\frac{\sqrt{\mu_1^2 + 4\gamma^2\tau^2} + 2\gamma\tau}{\mu_1} \right).$$

Выражения (21) для коэффициентов $C_{L,R}(\tau)$ полностью определяют волновую функцию системы (1) и позволяют исследовать степень заселенности ям в зависимости от времени при произвольных начальных условиях. В качестве «начального» момента времени здесь естественно выбрать момент $\tau \rightarrow -\infty$, когда функции $\rho^{(\pm)}(\tau)$ выходят на свои стационарные значения.

Говоря более строго, следует взять такие значения $\tau < 0$, чтобы значение $|\tau|$ было достаточно большим по сравнению с $\mu_1/2\gamma$, но вместе с тем, система была бы далека от $l - 1$ -го резонанса, т. е. $\mu_1 \ll 2\gamma|\tau| \ll \Omega$. Аналогично, под бесконечно большим положительным τ также следует понимать такие τ , при которых система уже вышла из области l -го резонанса, но еще далека от $l + 1$ -го, что обеспечивается тем же самым неравенством. В дальнейшем в целях упрощения записей для больших в указанном смысле положительных или отрицательных значений τ будем применять обозначения $\tau \rightarrow \pm\infty$.

Допустим, что при $\tau \rightarrow -\infty$ одна из ям, например левая, полностью заселена, т. е. $|C_L(-\infty)| = 1$, а $C_R(-\infty) = 0$. Тогда коэффициент $C_2 = 0$, а коэффициент C_1 с точностью до несущественного фазового множителя равен единице. Как уже было замечено, вероятность заполнения левой или правой ямы есть не что иное как квадрат модуля коэффициента $C_L(\tau)$ или $C_R(\tau)$. Поэтому для $W_L(\tau)$ в данном случае будем иметь

$$W_L(\tau) = \frac{\sqrt{\mu_l^2 + 4\gamma^2\tau^2} - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\mu_l^2 + 4\gamma^2\tau^2}}. \quad (22)$$

Из выражения (22) видно, что по мере приближения к точному выполнению резонансного условия (3), что соответствует $\tau = 0$, вероятность заполнения левой ямы монотонно убывает, оставаясь при этом всегда больше одной второй. При $\tau = 0$ ямы оказываются одинаково заселенными, а при дальнейшем росте $\bar{\varepsilon}$ степень заселенности правой ямы уже превышает степень заселенности левой и нарастает далее до стопроцентной. Вероятность W_L при $\tau \rightarrow +\infty$ становится равной нулю, и такое установившееся распределение электронной плотности сохраняется сколь угодно долго (реально оно сохранится до тех пор, пока величина $2\bar{\varepsilon}$ не приблизится к своему следующему резонансному значению $(l+1)\Omega$, после чего весь заряд вновь медленно перетечет в левую яму).

Подобное поведение электронной плотности можно понять, если построить с помощью (21) и (1) волновую функцию частицы $\Psi_1(x, \tau)$ в этом случае. При этом, как оказывается, нет необходимости выписывать выражение для волновой функции явно. Оно в точности совпадает с уже полученным выражением для квазиэнергетической функции $U_+(x, \tau)$ в (12), если постоянный параметр δ в нем заменить на функцию времени $\delta(\tau) = 2\gamma\tau$, а $\nu\tau$ на $\varphi(\tau)$ и отбросить коэффициент $f_{-1}^{(+)}$, который в окрестности l -го резонанса пренебрежимо мал.

Аналогично, в случае когда волновой пакет полностью сосредоточен в правой яме при $\tau \rightarrow -\infty$, волновая функция $\Psi_2(x, \tau)$ с точностью до тех же переобозначений будет совпадать с квазиэнергетической функцией $U_-(x, \tau)$. Зависимость волновой функции $\Psi_2(x, \tau)$ от времени качественно будет повторять зависимость функции $U_-(x, \tau)$ от величины среднего значения внешнего поля, и, следовательно, переход через точку резонанса при медленном увеличении $\bar{\varepsilon}$ приведет к перетеканию заряда из правой ямы в левую.

Дальнейший рост $\bar{\varepsilon}$ может привести к попаданию в область $l+1$ -го резонанса, где динамика двухуровневой системы также будет описываться уравнениями вида (16), но уже с другим значением γ , вычисленным в тот момент времени, когда $2\bar{\varepsilon} = (l+1)\Omega$. Очевидно, решение этих уравнений будет точно таким же, как и в окрестности l -го резонанса, и переход через точку $l+1$ -го резонанса также приведет к передислокации волнового пакета из одной ямы в другую. Следовательно, если при $2\bar{\varepsilon} < l\Omega$ волновой пакет находился в левой яме, увеличение $\bar{\varepsilon}$ приведет вначале к его переходу в правую яму (после того как значение $2\bar{\varepsilon}$ превысит $l\Omega$), а затем к обратному переходу в левую, после прохождения следующего $l+1$ -го резонанса.

Вообще говоря, для подобного утверждения следовало бы удостовериться, что волновой пакет остается в правой яме все то время, пока значение $\bar{\varepsilon}$ принадлежит нерезонансной области. Для этого нужно было решить уравнения двухрезонансного приближения (4) с $\bar{\varepsilon}$, зависящим от времени, что не было сделано ввиду сложности подобного рода вычислений. Ясно, однако, что в нерезонансной области все гармоники в (2), и

в том числе оставленные в (4), окажутся «быстрыми» и при медленных изменениях $\bar{\epsilon}$ и их эффективное усредненное воздействие будет практически нулевым. Это значит, что коэффициенты $C_{L,R}(\tau)$, а следовательно, и вероятности $W_{L,R}(\tau)$ будут, фактически, сохранять свои значения во всей области изменения $\bar{\epsilon}$ между двумя соседними резонансами.

Таким образом, медленное изменение среднего поля в совокупности с периодическим воздействием большой амплитуды приводят к передислокации электронного волнового пакета из одной ямы в другую при очередном переходе через точку резонанса, подобно тому как в слабых полях имеет место переход с одного энергетического уровня на другой при медленном изменении частоты внешнего поля [19].

Наконец, если начальное условие соответствует произвольному распределению электронной плотности в ямах, волновая функция будет представлять собой суперпозицию функций $\Psi_1(x, \tau)$ и $\Psi_2(x, \tau)$ с коэффициентами C_1, C_2 из (21):

$$\Psi(x, \tau) = C_1 \Psi_1(x, \tau) + C_2 \Psi_2(x, \tau).$$

Сумма квадратов модулей коэффициентов C_1, C_2 в соответствии с условием нормировки всегда равна единице. Функции $\Psi_{1,2}(x, \tau)$ можно назвать адиабатическими квазиэнергетическими функциями, а величину $\nu(\tau) = \sqrt{\gamma^2 \tau^2 + \mu_l^2}/4$ — адиабатической квазиэнергией в окрестности l -го резонанса.

Хорошо известно, что адиабатическое возмущение практически не приводит к переходам между стационарными состояниями квантовой системы. Ландау [14, с. 237] была получена оценка для вероятности перехода из одного стационарного состояния в другое под действием медленноменяющегося возмущения, которая оказывается экспоненциально малой. В нашем случае из-за действия сильного периодического поля стационарные состояния в системе вообще не существуют. Квантовые состояния здесь — квазиэнергетические, и квантовым числом, характеризующим данное состояние, является квазиэнергия.

Полученные здесь выражения для волновых функций частицы, практически совпадающие с выражениями для квазиэнергетических функций, говорят о том, что вывод о неизменности квантового состояния системы под действием адиабатического возмущения справедлив не только для стационарных состояний, но может быть обобщен и на квазиэнергетические состояния, которые эффективно заменяют состояния с определенной энергией при наличии периодического внешнего поля.

Очевидно, что и дипольный момент системы будет описываться теми же приведенными выше выражениями (13)–(15), в которых величину $\bar{\epsilon}$ следует теперь считать медленной функцией времени. Соответственно, ввиду предполагаемой монотонной зависимости $\bar{\epsilon}$ от τ (для простоты и определенности можно считать ее строго линейной), зависимость дипольного момента от времени в данном адиабатическом квазиэнергетическом состоянии будет повторять зависимость от величины среднего поля, но с учетом малого коэффициента пропорциональности γ окажется сильно «растянутой» по оси времени.

Как уже было отмечено ранее, зависимость $D(2\bar{\epsilon})$ является почти периодической. Фактически, непериодичность этой функции сказывается только в окрестностях резонансных значений $\bar{\epsilon}$ и выражается в том, что функция $D(2\bar{\epsilon})$ в окрестности каждой из точек $2\bar{\epsilon} = n\Omega$ имеет свою характерную ширину перепада равную μ_n . Все числа μ_n — малы, поэтому все перепады на зависимости $D(2\bar{\epsilon})$ очень резкие. По этой причине

можно считать, что отклонения от периодичности также имеют место лишь в узких интервалах оси $2\bar{\varepsilon}$ вблизи резонансов.

Представим функцию $D(2\bar{\varepsilon})$ суммой двух слагаемых

$$D(2\bar{\varepsilon}) = D_0(2\bar{\varepsilon}) + \tilde{D}(2\bar{\varepsilon}),$$

одно из которых $D_0(2\bar{\varepsilon})$ — строго периодическая функция с периодом 2Ω . Ее можно определить стандартным выражением для дипольного момента (13), заменив в нем различные коэффициенты μ_n на некое среднее значение μ , одинаковое для всех резонансов. Второе слагаемое, $\tilde{D}(2\bar{\varepsilon})$, представляет собой величину отклонения зависимости $D(2\bar{\varepsilon})$ от строго периодической, и, поскольку это отклонение существенно только в узкой области вблизи точки резонанса, функция $\tilde{D}(2\bar{\varepsilon})$ будет иметь вид последовательности эквидистантных всплесков, каждый из которых имеет свою амплитуду и характерную ширину, определяемую малым фурье-коэффициентом μ_n .

Если теперь учесть временную зависимость среднего поля, дипольный момент становится функцией времени. При этом в силу линейной зависимости $\bar{\varepsilon}(\tau)$ функция $D_0(\tau)$ будет по-прежнему периодической, но со значительно большим, чем прежде, периодом равным $\Omega/\gamma \gg 1$, что соответствует частоте

$$\lambda = 2\pi\gamma/\Omega. \quad (23)$$

Непериодическая часть дипольного момента в силу своей нерегулярности даст сплошной спектр, в котором будут присутствовать все возможные частоты. Всплески функции $\tilde{D}(\tau)$ будут теперь иметь характерную ширину на временной оси равную μ_i/γ и, следовательно, окажутся достаточно плавными (напомним, что γ — самый малый параметр задачи), однако их ширина по-прежнему будет существенно меньше расстояния между самими всплесками $\Omega/2\gamma$. По этой причине амплитуды гармоник из непрерывной части спектра можно считать пренебрежимо малыми в сравнении с гармониками периодической составляющей.

Таким образом, медленное линейное нарастание среднего значения внешнего поля при неизменном переменном периодическом воздействии ведет к плавному и почти периодическому перетеканию электронной плотности из одной ямы в другую. Очевидно, такая двухъямная структура, с периодически перетекающим зарядом, представляет собой классический диполь, способный излучать электромагнитную энергию на собственной частоте. В данном случае излучение возможно на частотах, кратных основной частоте осцилляций заряда в ямах (23), поскольку закон изменения дипольного момента $D_0(\tau)$ в зависимости от времени носит хотя и периодический, но не гармонический характер.

В заключение отметим два момента. Во-первых, как следует из выражения (23), основная частота осцилляций λ является малой величиной гораздо меньшей частоты внешнего поля Ω или частоты перехода между уровнями энергии невозмущенной системы, равной в наших обозначениях единице. Как было показано в предыдущем разделе (формула (14)), медленные колебания диполя можно получить и при неизменном среднем значении внешнего поля. При этом, однако, минимально возможная частота есть μ_n . В нашем же случае, когда среднее значение возмущения является линейной функцией времени, частота определяется скоростью изменения среднего поля γ и по условиям задачи имеет значение гораздо меньшее μ_n .

Во-вторых, несомненно важным обстоятельством является то, что значение частоты генерируемого излучения можно легко контролировать, т. е. варьировать при необходимости в достаточно широких пределах, изменяя скорость роста среднего значения внешнего поля γ .

Следовательно, действие на систему переменного поля с частотой Ω при медленном монотонном изменении среднего поля может вызвать низкочастотную генерацию электромагнитного дипольного излучения, одним из основных параметров которого — частотой — можно управлять с помощью самого внешнего поля.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируя все сказанное, перечислим вкратце основные результаты, полученные в работе.

Для частицы в сильном периодическом внешнем поле с отличным от нуля средним значением при вычислении квазиэнергий и квазиэнергетических функций был применен новый метод двухрезонансного приближения, основанный на учете влияния на квантовую динамику системы не одного, как обычно, а сразу двух ближайших соседних резонансов. Двухрезонансное приближение позволило получить и проанализировать зависимость электронного дипольного момента от величины среднего значения внешнего поля практически во всей области его возможных значений, в отличие от обычного резонансного приближения, справедливого лишь в малой окрестности данного резонанса.

Дипольный момент системы в чистых квазиэнергетических состояниях представляет собой почти периодическую функцию приложенного к структуре постоянного напряжения. При этом в точках резонанса $2\bar{\epsilon} = n\Omega$ он оказывается равным нулю, а в нерезонансных областях достигает своих максимально возможных положительных и отрицательных значений благодаря полной локализации электронной волновой функции в области одной из ям. В случае, когда наложенное на систему постоянное внешнее поле положительно, двухъямная структура может оказаться поляризованной против внешнего поля — возникает антиполяризационный эффект.

В режиме адиабатического изменения среднего поля при помощи метода ВКБ было получено выражение для электронной волновой функции и установлено полное соответствие задачи о возбуждении системы, находящейся в определенном квазиэнергетическом состоянии, задаче о возбуждении системы, находящейся в состояниях с определенной энергией [14]. В частности, было показано, что адиабатическое увеличение среднего поля не выводит систему из того квазиэнергетического состояния, в котором она изначально находилась, а лишь плавно меняет структуру волновой функции данного состояния. При этом оказывается, что увеличение $\bar{\epsilon}$ с медленным переходом через точку резонанса «перемещает» область локализации квазиэнергетической волновой функции из левой ямы в правую или наоборот, благодаря чему можно осуществлять периодический перевод электронной плотности из ямы в яму, если при $\tau \rightarrow -\infty$ задать волновую функцию частицы в виде одной из квазиэнергетических функций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Получим выражение для квазиэнергии на участке $l\Omega \lesssim 2\bar{\epsilon} \lesssim (l+1)\Omega$. Рассмотрим значения $\delta \ll \Omega$, что соответствует l -му резонансу. Несложно убедиться с помощью (7),

что в этой области главными будут коэффициенты f_0 и g_0 , их величины оказываются порядка единицы. Коэффициенты f_{-1} и g_1 пропорциональны μ_{l+1} — это величины первого порядка малости, коэффициенты f_1 и g_{-1} определяются произведением $\mu_l \mu_{l+1}$ (второй порядок) и т. д. В области $l+1$ -го резонанса главными оказываются коэффициенты f_0 и g_1 либо g_0 и f_{-1} (в зависимости от выбора ветви квазиэнергии), в то время как остальные коэффициенты будут, как минимум, величинами первого порядка малости. В промежуточной области между резонансами основными коэффициентами будут либо f_0 , либо g_0 .

Следовательно, в интересующем нас интервале изменения $\bar{\varepsilon}$ между l -ым и $l+1$ -ым резонансами и в окрестности самих резонансов все коэффициенты, кроме четырех: f_0 , f_{-1} , g_0 и g_1 , всегда оказываются малыми величинами, которыми можно пренебречь. По этой причине, отбросив в уравнениях (7) все коэффициенты за исключением указанных четырех, получаем замкнутую систему уравнений

$$\begin{aligned} \left(\nu + \frac{\delta}{2} - \Omega\right) f_{-1} + \frac{\mu_{l+1} e^{-i\psi_{l+1}}}{2} g_0 &= 0, \\ \left(\nu + \frac{\delta}{2}\right) f_0 + \frac{\mu_l e^{-i\psi_l}}{2} g_0 + \frac{\mu_{l+1} e^{-i\psi_{l+1}}}{2} g_1 &= 0, \\ \frac{\mu_{l+1} e^{i\psi_{l+1}}}{2} f_{-1} + \frac{\mu_l e^{i\psi_l}}{2} f_0 + \left(\nu - \frac{\delta}{2}\right) g_0 &= 0, \\ \frac{\mu_{l+1} e^{i\psi_{l+1}}}{2} f_0 + \left(\nu - \frac{\delta}{2} + \Omega\right) g_1 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Равенство нулю определителя системы (П.1) дает два значения квазиэнергии, различающихся знаком, каждое из которых отвечает своему квазиэнергетическому состоянию:

$$\nu_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\Omega - \frac{\delta}{2}\right)^2 + \frac{\mu_{l+1}^2}{2} + \frac{\mu_l^2 + \delta^2}{4} - \sqrt{\left[\left(\Omega - \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{\mu_l^2 + \delta^2}{4}\right]^2 + \Omega^2 \mu_{l+1}^2}}. \quad (\text{П.2})$$

Подставляя квазиэнергии (П.2) в уравнения (П.1), находим, что для состояния «+» коэффициент g_1 является малым на всем интервале $l\Omega \lesssim 2\bar{\varepsilon} \lesssim (l+1)\Omega$, а для состояния «-» всегда мал коэффициент f_{-1} . Используем это для упрощения выражения (П.2), поскольку в своем настоящем виде оно довольно громоздко.

Рассмотрим состояние «+». Пренебрегая коэффициентом g_1 и опуская последнее уравнение в (П.1), приходим к следующему уравнению:

$$\nu^3 + \nu^2 \left(\frac{\delta}{2} - \Omega\right) - \frac{\nu}{4} (\delta^2 + \mu_l^2 + \mu_{l+1}^2) - \left(\frac{\delta}{2} - \Omega\right) \frac{\delta^2 + \mu_l^2}{4} - \frac{\mu_{l+1}^2 \delta}{8} = 0. \quad (\text{П.3})$$

Несложный анализ выражения (П.2) показывает, что отклонения зависимости $\nu_+(\delta)$ от линейной, $\nu_+ = \delta/2$, всегда невелики и достигают наибольших значений в резонансных областях, где они составляют величины, соответственно, порядка μ_l и μ_{l+1} .

Поэтому, полагая в (П.3) $\nu = \delta/2 + \eta$, где $\eta \ll 1$ (порядка μ_l или μ_{l+1}), и пренебрегая величинами третьего порядка малости, $\eta^3 \sim \eta \mu_l^2 \sim \eta \mu_{l+1}^2$, получим для η обычное квадратное уравнение:

$$\eta^2 (\Omega - 2\delta) + \eta \delta (\Omega - \delta) + \frac{\mu_l^2}{4} (\delta - \Omega) + \frac{\mu_{l+1}^2}{4} \delta = 0.$$

Решая его и учитывая, что для состояния «-» квазиэнергия отличается лишь знаком, приходим к выражению (8).

Литература

1. А. А. Горбачевич, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, ЖЭТФ **107**, 1320 (1995).
2. F. Grossmann, T. Dittrich, P. Jung, and P. Hanggi, Phys. Rev. Lett. **67**, 516 (1991); Z. Phys. B. **84**, 315 (1991); F. Grossmann, T. Dittrich, and P. Hanggi, Physica B **175**, 293 (1991); F. Grossmann and P. Hanggi, Europhys. Lett. **18**, 571 (1992).
3. J. M. Gomez Llorente and J. Plata, Phys. Rev. A **45**, R6958 (1992).
4. Y. Kayanuma, Phys. Rev. A **50**, 843 (1994).
5. Y. Dakhnovskii and R. Bavli, Phys. Rev. B **48**, 11020 (1993).
6. Y. Dakhnovskii and R. Bavli, Phys. Rev. B **48**, 11010 (1993); Y. Dakhnovskii, R. Bavli, and H. Metiu, Phys. Rev. B **53**, 4657 (1996).
7. F. I. Gauthey, C. H. Keitel, P. L. Knight, and A. Maquet, Phys. Rev. A **55**, 615 (1997).
8. В. А. Бурдов, ЖЭТФ **112**, 1209 (1997).
9. K. Leo, J. Shah, E. O. Gobel et al., Phys. Rev. Lett. **66**, 201 (1991).
10. I. Brener, P. C. M. Planken, M. C. Nuss, L. Pfeiffer, D. E. Leaird, and A. M. Weiner, Appl. Phys. Lett. **63**, 2213 (1993).
11. M. S. C. Luo, S. L. Chuang, P. C. M. Planken, I. Brener, and M. C. Nuss, Phys. Rev. B **48**, 11043 (1993).
12. R. Bavli and H. Metiu, Phys. Rev. A **47**, 3299 (1993).
13. В. А. Бурдов, ТМФ **108**, 69 (1996).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
15. J. H. Shirley, Phys. Rev. B **138**, 979 (1965); Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ **51**, 1492 (1966); В. И. Ригус, ЖЭТФ **51**, 1544 (1966).
16. Y. Dakhnovskii and H. Metiu, Phys. Rev. B **51**, 4193 (1995).
17. R. Aguado and G. Platero, Phys. Rev. B **55**, 12860 (1997).
18. B. J. Keay, S. Zeuner, S. J. Allen, Jr., K. D. Maranowski, A. C. Gossard, U. Bhattacharya, and M. J. W. Rodwell, Phys. Rev. Lett. **75**, 4102 (1995).
19. M. E. Crenshaw, Phys. Rev. A **54**, 3559 (1996).