

КРУПНОМАСШТАБНОЕ УСИЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ФЛУКТУАЦИЯМИ ТУРБУЛЕНТНОЙ СПИРАЛЬНОСТИ

Н. А. Силантьев*

*Instituto Nacional de Astrofisica, Optica y Electronica
Apartado Postal 51 y 216 C. P. 72000 Puebla, Pue. Mexico
Главная астрономическая обсерватория Российской академии наук
196140, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 21 октября 1998 г.,
после переработки 15 февраля 1999 г.

С использованием процедуры крупномасштабного усреднения уравнения диффузии магнитного поля с альфа-членом $\text{rot } \alpha(\mathbf{r}, t)\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ показано, что неоднородное распределение флуктуаций турбулентной спиральности (точнее, флуктуаций коэффициента α) с нулевым средним значением приводит к крупномасштабному усилению исходного магнитного поля. Подробно изучена зависимость полученного крупномасштабного α -эффекта от характеристик коррелятора $\langle\langle \alpha(\mathbf{r}, t)\alpha(\mathbf{r}', t') \rangle\rangle$ во вращающейся среде с неоднородным распределением угловой скорости $\omega = \omega(\rho, z)$ (ρ — расстояние от оси вращения z). Рассмотрено также влияние флуктуаций спиральности и коэффициента диффузии на процесс турбулентной диффузии.

PACS: 47.65.+a; 03.50.De; 91.25.Cw

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что для усиления исходного магнитного поля в турбулентной среде необходимо присутствие спиральности, т.е. коррелятор спиральности $h(1, 2) \equiv \langle \mathbf{u}(1) \text{rot } \mathbf{u}(2) \rangle \neq 0$. Случай $h > 0$ соответствует правовинтовым движениям, а $h < 0$ — левовинтовым. Такая среда может быть изотропной, но обязательно должна быть зеркально-несимметричной. Сам механизм усиления разработан в основном Паркером [1], Штеенбеком, Краузе и Рэдлером [2] и подробно описан в монографиях [3–5]. Четкое качественное объяснение турбулентного магнитного динамо дано в [6]. Основой его является тот факт, что хаотические спиральные движения приводят к возникновению средней электродвижущей силы $\langle \mathbf{E} \rangle$, направленной вдоль или против среднего магнитного поля: $\langle \mathbf{E} \rangle = \alpha \langle \mathbf{V} \rangle$. Согласно этому общепринятому обозначению само явление получило название α -эффекта. Отметим, что $\alpha \propto (-h)$, т.е. левовинтовые движения приводят к индукции тока $\langle \mathbf{j} \rangle$ вдоль среднего поля $\langle \mathbf{V} \rangle$, а правовинтовые — против поля. Возникновение этого тока и приводит к усилению среднего магнитного поля $\langle \mathbf{V} \rangle$. Существование α -эффекта было доказано в лабораторных экспериментах [7].

Исходным уравнением, описывающим эволюцию магнитного поля, является урав-

*E-mail: silant@inaoep.mx

нение индукции:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_m \nabla^2\right) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot} [\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)], \quad (1)$$

где $D_m = c^2/4\pi\sigma$ — коэффициент молекулярной (омической) диффузии, σ — коэффициент электропроводности плазмы, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — эйлерова скорость движения вещества. Уравнение Навье—Стокса, которое мы здесь не приводим, связывает величины $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, так что фактически скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ является функционалом от $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ и наоборот. Обычно для слабых магнитных полей ($B^2/8\pi \ll \rho u^2/2$) пренебрегают влиянием поля \mathbf{B} на турбулентность и рассматривают уравнение (1) в кинематическом приближении, когда ансамбль турбулентных скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{U} = \langle \mathbf{u} \rangle$, $\langle \mathbf{u}' \rangle = 0$) считается заданным. Величины $u_0^2 = \langle u'^2(\mathbf{r}, t) \rangle$, τ_0 и R_0 характеризуют среднюю амплитуду турбулентной скорости, среднее время существования корреляций эйлеровых скоростей и среднюю их протяженность. Иногда используется вспомогательный параметр $t_0 = R_0/u_0$, называемый временем обращения турбулентных вихрей. Среднее магнитное поле $\langle \mathbf{B} \rangle$ определяется как среднее значение по объему $\approx L^3$ и времени усреднения T , которые много больше рассматриваемых в задаче характерных длины R_0 и времени жизни τ_0 корреляций турбулентных движений (если для времени обращения турбулентных вихрей выполняется условие $t_0 = R_0/u_0 \ll \tau_0$, то достаточно требовать $T \gg t_0$).

Усредняя уравнение (1) и считая, что среднее поле $\langle \mathbf{B} \rangle$ является гладкой функцией на расстояниях $\approx R_0$ и временах $\approx \tau_0$ (или $\approx t_0$ при $t_0 \ll \tau_0$), получают [3–5] уравнение диффузии среднего магнитного поля:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_m \nabla^2\right) \langle \mathbf{B} \rangle + \text{rot} D(\mathbf{r}, t) \text{rot} \langle \mathbf{B} \rangle - \text{rot} \alpha(\mathbf{r}, t) \langle \mathbf{B} \rangle - \text{rot} [\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \langle \mathbf{B} \rangle] = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ — скорость регулярного движения жидкости или газа. Следует подчеркнуть, что в этом уравнении коэффициенты турбулентной диффузии $D(\mathbf{r}, t)$ и α -эффекта $\alpha(\mathbf{r}, t)$ могут параметрически зависеть от $\langle \mathbf{B} \rangle$, так как само поле турбулентных скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ зависит от \mathbf{B} . В ряде работ [8, 9] используют функциональную зависимость $D(\mathbf{r}, t)$ и $\alpha(\mathbf{r}, t)$ от $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, но учитывают при решении уравнения Навье—Стокса, что поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ само зависит от \mathbf{B} . Вывод уравнения (2) из (1) требует только достаточной гладкости среднего поля $\langle \mathbf{B} \rangle$, чтобы вынести $\langle \mathbf{B} \rangle$ из под знака интеграла, где имеется другой член пикообразного вида (см., например, [10, 11]). Отметим также, что мы приняли здесь для простоты, что $D(\mathbf{r}, t)$ и $\alpha(\mathbf{r}, t)$ являются скалярными величинами, хотя в неизотропной турбулентной среде они являются псевдотензорами третьего и второго порядков соответственно (см. [3]). При пренебрежении величиной D_m в уравнении (1) существует точное решение этого уравнения в лагранжевых переменных. Вывод уравнения (2) из этого решения особенно прост [12, 13], но в нем также используется только свойство гладкости среднего магнитного поля $\langle \mathbf{B} \rangle$. Точные формальные выражения коэффициентов $D(\mathbf{r}, t)$ и $\alpha(\mathbf{r}, t)$ через поле эйлеровых скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ или лагранжевых скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ даны в работах [10–13]. Используя эти выражения, а также задавая статистические свойства ансамбля начальных скоростей, можно, в принципе, полностью описать эволюцию среднего магнитного поля в турбулентной среде, решая уравнение (2) и уравнение Навье—Стокса. В последнее время все чаще делаются попытки численного моделирования эволюции магнитного поля исходя непосредственно из уравнения (1) и уравнений Навье—Стокса. Однако нам для изучения влияния флуктуаций спиральности на крупномасштабный α -эффект удобно исходить из уравнения диффузии (2).

Процедура крупномасштабного усреднения

Если под усреднением $\langle \dots \rangle$ в (2) понимать усреднение по сравнительно мелкомасштабным турбулентным движениям, то коэффициенты $D(\mathbf{r}, t)$ и $\alpha(\mathbf{r}, t)$ все еще будут случайными функциями, но относительно крупномасштабного усреднения. Обозначим процедуру крупномасштабного усреднения двойными скобками $\langle\langle \dots \rangle\rangle$. В этих обозначениях имеют место соотношения

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}, t) &= D_0 + D'(\mathbf{r}, t), & \langle\langle D(\mathbf{r}, t) \rangle\rangle &\equiv D_0, & \langle\langle D'(\mathbf{r}, t) \rangle\rangle &\equiv 0, \\ \alpha(\mathbf{r}, t) &= \alpha_0 + \alpha'(\mathbf{r}, t), & \langle\langle \alpha(\mathbf{r}, t) \rangle\rangle &\equiv \alpha_0, & \langle\langle \alpha'(\mathbf{r}, t) \rangle\rangle &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее мы принимаем, что крупномасштабные средние значения D_0 и α_0 являются постоянными величинами. Отметим, что процедура мелкомасштабного и крупномасштабного усреднений давно используется в статистической физике (см., например, [14]).

Подставляя выражения (3) в (2), получаем основное стохастическое уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - (D_m + D_0) \nabla^2 \right) \langle \mathbf{B} \rangle - \alpha_0 \text{rot} \langle \mathbf{B} \rangle - \text{rot} [U \langle \mathbf{B} \rangle] = \text{rot} \alpha'(\mathbf{r}, t) \langle \mathbf{B} \rangle - \text{rot} D'(\mathbf{r}, t) \text{rot} \langle \mathbf{B} \rangle. \quad (4)$$

Правая часть (4) является стохастической функцией координат \mathbf{r} и времени t . Еще раз напомним, что мелкомасштабное среднее поле $\langle \mathbf{B} \rangle$ является стохастическим относительно крупномасштабного усреднения.

Уравнение (4) можно записать в кратком символическом виде:

$$\hat{L}_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}, t) \langle B_j(\mathbf{r}, t) \rangle = \hat{L}_{ij}(\mathbf{r}, t) \langle B_j(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (5)$$

где нестохастический оператор $\hat{L}^{(0)}$ и стохастический оператор \hat{L} представляют соответственно левую и правую части уравнения (4).

Впервые это уравнение для случая $U = 0$, $D' = 0$, $\alpha_0 = 0$ и бесконечной изотропной среды было рассмотрено в работах [13, 3]. Проведя в (4) процедуру крупномасштабного усреднения в квазилинейном приближении, авторы этих работ получили для $\langle\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle\rangle$ в диффузионном приближении опять уравнение (2), но с перенормированным коэффициентом турбулентной диффузии $D_m + D_0 + D$. При этом оказалось, что добавка D отрицательна, т. е. флуктуации спиральности (точнее, флуктуации коэффициента α , пропорциональные спиральности) приводят к уменьшению диффузии магнитного поля.

В работе [15] уравнение (4) было использовано при численном моделировании эволюции среднего магнитного поля в аккреционном диске. Авторы рассмотрели и случай, когда в диске имеется хаотическое распределение флуктуаций спиральности α' с нулевым средним значением $\alpha_0 = 0$. Численно было обнаружено, что это приводит к крупномасштабному распределению магнитного поля, т. е. α' -флуктуации действовали как крупномасштабный α -эффект.

В работе [16] было показано, что, действительно, наличие флуктуаций спиральности, даже при нулевой средней спиральности, приводит к усилению крупномасштабного магнитного поля. При этом предполагалось наличие двух ансамблей усреднения — по собственно турбулентной скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и по ансамблю распределения спиральности $h(1, 2) \equiv \langle \mathbf{u}(1) \text{rot} \mathbf{u}(2) \rangle$. С физической точки зрения трудно представить раздельное существование этих ансамблей, так как знание поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, очевидно, означает

знание и коррелятора спиральности $h(1, 2) \equiv \langle \mathbf{u}(1) \text{ rot } \mathbf{u}(2) \rangle$, а также вообще всех корреляторов. Поэтому идея существования двух ансамблей усреднения фактически может быть реализована как использование двух усреднений — сравнительно мелкомасштабного и крупномасштабного.

Крупномасштабного усреднения уравнения (4) в общем виде во всех упомянутых работах не было проведено. В данной работе мы получим общие формулы для перенормированных коэффициентов турбулентной диффузии и α -эффекта, обязанные своим возникновением действию корреляций спиральности в турбулентной среде. На примере среды с дифференциальным вращением покажем количественно и качественно причину возникновения крупномасштабного α -эффекта. При этом мы используем общую теорию, изложенную в работах [10, 11], где процедура усреднения по ансамблю реализации флуктуирующих величин проведена с использованием стохастического тензора Грина $G_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$, вывода перенормированного уравнения для него и получения иерархии нелинейных уравнений для усредненного тензора $\langle G_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \rangle$. Сама процедура усреднения описана в этих работах в общем виде для уравнения типа (5), вполне пригодном и для нашего исходного стохастического уравнения (4).

Спиральность турбулентной среды $h(1, 2) \equiv \langle \mathbf{u}(1) \text{ rot } \mathbf{u}(2) \rangle$ описывается двухточечным коррелятором скорости (здесь и далее мы будем использовать удобные обозначения: $f(\mathbf{r}_n, t_n) \equiv f(n)$, $d\mathbf{r}_n dt_n \equiv dn$, $d\mathbf{r}' dt' \equiv d2$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\tau = t - t'$ и т.п.). Это означает, что флуктуации спиральности описываются корреляторами скорости четвертого и выше порядков. Прямое рассмотрение динамики корреляторов такого высокого порядка весьма затруднительно. Отметим, что в классической работе Казанцева [17] и ряде последующих работ [18, 19] динамика флуктуаций магнитного поля изучалась для турбулентности без спиральности, при этом было достаточно знания корреляторов скорости второго порядка $\langle u_i(1)u_j(2) \rangle$. Достоинством этих работ является то, что их авторы исходят непосредственно из основного уравнения индукции (1), не привлекая процедуру второго, крупномасштабного, усреднения. Используемая в данной работе процедура двойного усреднения позволяет изучать влияние флуктуаций спиральности (как флуктуаций α -коэффициента) довольно простым образом. В настоящее время такой подход, по-видимому, является единственным практически реализуемым способом рассмотрения флуктуаций спиральности.

Для практических приложений излагаемой далее теории важно понимать, что корреляторы флуктуаций спиральности являются такой же фундаментальной величиной для турбулентности, как и обычный двухточечный коррелятор скорости $\langle u_i(1)u_j(2) \rangle$. Более того, при заданном корреляторе $\langle u_i(1)u_j(2) \rangle$ коррелятор флуктуаций спиральности для негауссовых ансамблей, в принципе, может быть каким угодно. Обычно коррелятор $\langle u_i(1)u_j(2) \rangle$ находят из экспериментов, наблюдений или просто задают в правдоподобном виде при проведении численных расчетов. Тем более это верно в отношении коррелятора флуктуации спиральности, который еще чувствительнее к конкретному виду ансамбля начальных скоростей, граничных условий и действующих сил.

Отметим, что практически второе усреднение может быть реализовано либо как усреднение по большим объемам, либо как усреднение по большим временным интервалам.

2. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Общая теория, изложенная в работах [10, 11], позволяет получить из (4) формально точное интегродифференциальное уравнение для крупномасштабно усредненного магнитного поля $\langle\langle \mathbf{B} \rangle\rangle$. Используя запись уравнения (4) в символическом виде (5), для случая гауссова ансамбля получаем

$$\hat{L}_{ij}^{(0)}(1)\langle\langle B_j(1) \rangle\rangle = \text{неприводимая часть} \int d2 \langle\langle \hat{L}_{in}(1) G_{nm}(1; 2) \hat{L}_{mj}(2) \rangle\rangle \langle\langle B_j(2) \rangle\rangle. \quad (6)$$

Если снова использовать гладкость поля $\langle\langle \mathbf{B} \rangle\rangle$, то это уравнение в диффузионном приближении приобретает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - (D_m + D_0) \nabla^2 \right) \langle\langle \mathbf{B} \rangle\rangle - \alpha_0 \text{rot} \langle\langle \mathbf{B} \rangle\rangle - \text{rot}[\mathbf{U} \langle\langle \mathbf{B} \rangle\rangle] = \text{rot} \mathbf{E}, \quad (7)$$

$$E_i = \alpha_{ij}(\mathbf{r}, t) \langle\langle B_j(\mathbf{r}, t) \rangle\rangle + D_{ijk}(\mathbf{r}, t) \nabla_k \langle\langle B_j(\mathbf{r}, t) \rangle\rangle. \quad (8)$$

Левая часть уравнения (7) совпадает с левой частью (4). Уравнения (7) и (8) являются уравнениями турбулентного магнитного динамо в диффузионном приближении. Псевдотензоры $\alpha_{ij}(\mathbf{r}, t)$ и $D_{ijk}(\mathbf{r}, t)$ представляют собой обобщения псевдоскалярного коэффициента α и коэффициента турбулентной диффузии D и описывают влияние флуктуаций спиральности $\alpha'(\mathbf{r}, t)$ и флуктуаций турбулентного коэффициента диффузии $D'(\mathbf{r}, t)$ на эволюцию среднего магнитного поля $\langle\langle \mathbf{B} \rangle\rangle$. Их точные выражения даются формулами:

$$\alpha_{ij}(1) = \text{неприводимая часть} \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' [e_{jnm} \langle\langle \alpha'(\mathbf{r}, t) G_{in}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \nabla'_m \alpha'(\mathbf{r}', t') \rangle\rangle - e_{its} e_{rnj} \langle\langle D'(\mathbf{r}, t) \nabla_t G_{sr}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \nabla'_n \alpha'(\mathbf{r}', t') \rangle\rangle] \quad (9)$$

Здесь e_{ijk} — единичный антисимметричный псевдотензор ($e_{xyz} = -e_{yxz}$ и т.д.), $G_{ij}(1; 2)$ — стохастический тензор Грина исходного уравнения (4), т.е. решение этого уравнения с источником $S_{ij} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$. Обозначим через $G_{ij}^{(0)}(1; 2)$ тензор Грина уравнения (4) без правой части. Этот тензор не является стохастическим. Взятие неприводимой части в выражениях означает, что приводимые члены типа

$$\int d2 \langle\langle F_{is}(1) \rangle\rangle G_{sn}^{(0)}(1; 2) \langle\langle K_{nm}(2) \rangle\rangle \quad (10)$$

должны быть опущены.

Формула для $D_{ijk}(\mathbf{r}, t)$ более громоздкая, чем выражение (9), и мы используем упомянутые ранее удобные обозначения:

$$D_{ijk}(1) = -\text{неприводимая часть} \int d2 \left[e_{jrn} \langle\langle \alpha'(1) G_{ir}(1; 2) (\nabla_n^{(2)} \alpha'(2) R_k) \rangle\rangle + \langle\langle \alpha'(1) G_{ik}(1; 2) \nabla_j^{(2)} D'(2) \rangle\rangle - \langle\langle \alpha'(1) G_{ij}(1; 2) \nabla_k^{(2)} D'(2) \rangle\rangle - e_{its} e_{jrn} \langle\langle D'(1) (\nabla_t^{(1)} G_{sr}(1; 2)) (\nabla_n^{(2)} \alpha'(2) R_k) \rangle\rangle - e_{its} \langle\langle D'(1) \nabla_t^{(1)} G_{sk}(1; 2) \nabla_j^{(2)} D'(2) \rangle\rangle + e_{its} \langle\langle D'(1) \nabla_t^{(1)} G_{sj}(1; 2) \nabla_k^{(2)} D'(2) \rangle\rangle \right]. \quad (11)$$

Функция $D'(\mathbf{r}, t)$ четна по спиральности h , а функция $\alpha'(\mathbf{r}, t)$ нечетна. Это означает, что коррелятор $\langle\langle D'(1)\alpha'(2)\rangle\rangle$ равен нулю, если средняя спиральность $\alpha_0 = 0$. Все формулы для этого случая сильно упрощаются. Так как, согласно [20], турбулентный коэффициент диффузии практически не зависит от спиральности при степени спиральности $a \leq 0.5$, то, по-видимому, вклад перекрестных членов типа $\langle\langle D'(1)\alpha'(2)\rangle\rangle$ мал даже при $\alpha_0 \neq 0$. Даже при 100% спиральности уменьшение коэффициента диффузии незначительно — около 30%. Поэтому далее мы не будем учитывать перекрестные члены.

Существует несколько способов получить ряд приближений для стохастического тензора Грина $G_{ij}(1; 2)$ (см. [10, 11]). Подстановка такого ряда в формулы (9) и (11) приводит к соответствующему ряду приближений для кинетических коэффициентов $\alpha_{ij}(\mathbf{r}, t)$ и $D_{ijk}(\mathbf{r}, t)$.

Для случая стохастического уравнения (1) с $D_m \rightarrow 0$ подстановка в формулы для D_0 и α_0 итераций обычного интегрального уравнения для $G_{ij}(1; 2)$ приводит к ряду по степеням параметра $\xi_0 = u_0\tau_0/R_0$, позволяющему вычислить D_0 и α_0 только при $\xi_0 \ll 1$. Этот результат вполне понятен, так как разложение ведется по степеням функции Грина

$$G_m(R, \tau) = (4\pi D_m \tau)^{-3/2} \exp(-R^2/4D_m \tau),$$

которая описывает молекулярную диффузию, а не конвективный перенос путем турбулентных движений. Для получения D_0 и α_0 в этом случае приходится (см. [10, 11]) использовать перенормированное уравнение для $G_{ij}(1; 2)$, где даже в качестве свободного члена используется усредненная функция Грина $\langle G_{ij}(1; 2) \rangle$, для которой имеется иерархия нелинейных уравнений. Тензор $\langle G_{ij}(1; 2) \rangle$ непосредственно описывает конвективный характер переноса примесного поля, и итерации по степеням $\langle G_{ij}(1; 2) \rangle$ приводят к асимптотически сходящемуся ряду для D_0 и α_0 при любых значениях ξ_0 . Практически хороший результат получается при подстановке вместо $G_{ij}(1; 2)$ усредненного тензора $\langle G_{ij}(1; 2) \rangle$, удовлетворяющего первому уравнению иерархии (так называемое *direct interaction approximation equation*).

Стохастическое уравнение (4), исследуемое в данной работе, отличается от (1) тем, что левая его часть описывает турбулентный перенос магнитного поля, правда, в огрубленном, диффузионном приближении, посредством коэффициентов D_0 и α_0 . Это позволяет надеяться, что в данном случае можно обойтись без сложной техники итераций перенормированного уравнения для $G_{ij}(1; 2)$ и решения нелинейного уравнения для $\langle G_{ij}(1; 2) \rangle$. В этом случае итерации обычного интегрального уравнения для $G_{ij}(1; 2)$

$$G_{ij}(1; 2) = G_{ij}^{(0)}(1; 2) + \int d3 G_{in}^{(0)}(1; 3) \hat{L}_{nm}(3) G_{mj}(3; 2), \quad (12)$$

по-видимому, позволят получить сравнительно точные значения для $\alpha_{ij}(\mathbf{r}, t)$ и $D_{ijk}(\mathbf{r}, t)$.

В качестве примера, укрепляющего эти надежды, рассмотрим простую задачу о нахождении поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ в бесконечной покоящейся как целое среде, где флуктуация спиральности имеет вид $\alpha(\mathbf{r}, t) = \alpha_0 \exp(-r^2/r_0^2) \exp(-t/\tau_0)$ при $t > 0$. Первоначальное поле \mathbf{V}_0 считаем однородным. Решение уравнения (4) с использованием свободного члена

$$G_{ij}^{(0)}(1; 2) = \delta_{ij} (4\pi D_0 \tau)^{-3/2} \exp(-R^2/4D_0 \tau)$$

и первой итерации уравнения (12) дают следующие выражения:

$$\begin{aligned} \vec{B}^{(0)}(\mathbf{p}, t) &= \alpha_0 V_0 i [\mathbf{p} \mathbf{B}_0] \int_0^t d\tau \alpha(t - \tau) \exp \left[-\frac{p^2}{p_0^2} (1 + D_0 p_0^2 \tau) \right], \\ \vec{B}_i^{(1)} &= (\delta_{ij} p^2 - p_i p_j) B_{0j} \frac{\alpha_0^2 V_0^2 p_0^3}{8\pi\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} d\tau' \frac{\alpha(t - \tau) \alpha(t - \tau - \tau')}{(2 + D_0 p_0^2 \tau')^{5/2}} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{p^2}{p_0^2} \left(D_0 p_0^2 \tau + \frac{1 + D_0 p_0^2 \tau'}{2 + D_0 p_0^2 \tau'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь мы ввели обозначения $V_0 = \pi\sqrt{\pi}\tau_0^3$, $p_0 = 2/\tau_0$, $\alpha(t) = \exp(-t/\tau_0)$; $\vec{B}^{(0)}(\mathbf{p}, t)$ и $\vec{B}^{(1)}(\mathbf{p}, t)$ являются фурье-трансформантами полей $\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ по переменной \mathbf{r} . Найдем, используя эти выражения, полные энергии магнитного поля $A^{(0)}(t)$ и $A^{(1)}(t)$, созданные α -эффектом во всем пространстве за время τ_0 действия флуктуации спиральности (напомним, что турбулентная диффузия в конечном итоге, при $t \rightarrow \infty$, уничтожит эти поля). Рассмотрим предельные случаи малой, $\gamma = D_0 p_0^2 \tau_0 \ll 1$, и большой, $D_0 p_0^2 \tau_0 \gg 1$, турбулентной диффузии. Имеем

$$A^{(0)}(\tau_0) \approx \frac{B_0^2}{8\pi} V_0 \frac{\alpha_0^2 V_0 p_0^5 \tau_0^2}{72\pi\sqrt{2\pi}}, \quad A^{(1)}(\tau_0) \approx A^{(0)}(\tau_0) \frac{5\alpha_0^2 V_0^2 p_0^8 \tau_0^2}{64 \cdot 72\pi^3 \sqrt{2}} \quad (14)$$

для $\gamma \ll 1$ и

$$A^{(0)}(\tau_0) \approx \frac{B_0^2}{8\pi} V_0 \frac{\alpha_0^2 V_0 p_0}{54\pi\sqrt{2\pi} D_0^2}, \quad A^{(1)}(\tau_0) \approx A^{(0)}(\tau_0) \frac{\alpha_0^2 V_0^2 p_0^4}{648 \cdot 81\pi^3 D_0^2} \quad (15)$$

для $\gamma \gg 1$. Оценим отношения $A^{(1)}/A^{(0)}$ для модели флуктуации спиральности в виде отдельной турбулентной области, где происходят вихревые движения одного типа спиральности — с правой или с левой закруткой. Такая модель, по-видимому, является предельным случаем спирального образования. Согласно [20], имеем оценки $D_0 \approx u_0^2 \tau_0 / 3$, $\alpha_0 \approx u_0 \xi_0 / 3$ для $\xi_0 \ll 1$ и $D_0 \approx u_0 / p_0$, $\alpha_0 \approx u_0$ для $\xi_0 \gg 1$. Случай $\gamma \ll 1$ соответствует $\xi_0^2 \ll 1$, а $\gamma \gg 1$ выполняется при $\xi_0 \gg 1$. В результате получим

$$A^{(1)}/A^{(0)}|_{\gamma \ll 1} \approx \xi_0^4 / 45 \ll 1, \quad A^{(1)}/A^{(0)}|_{\gamma \gg 1} \approx 0.002, \quad (16)$$

т. е. ряд итераций по $G_{ij}^{(0)}$ хорошо сходится.

Далее все вычисления будут проводиться в нулевом приближении, когда точное выражение $G_{ij}(1; 2)$ заменяется на $G_{ij}^{(0)}(1; 2)$. В этом приближении в формулах приводимых членов нет и слова «неприводимая часть» могут быть опущены.

Напишем для наглядности явное выражение компонент тензора $\alpha_{ij}(\mathbf{r}, t)$:

$$\alpha_{ij}(1) = \int d2 \begin{pmatrix} G_{xy}^{(0)} T_z - G_{xz}^{(0)} T_y & G_{xz}^{(0)} T_x - G_{xx}^{(0)} T_z & G_{xx}^{(0)} T_y - G_{xy}^{(0)} T_x \\ G_{yy}^{(0)} T_z - G_{yz}^{(0)} T_y & G_{yz}^{(0)} T_x - G_{yx}^{(0)} T_z & G_{yx}^{(0)} T_y - G_{yy}^{(0)} T_x \\ G_{zy}^{(0)} T_z - G_{zz}^{(0)} T_y & G_{zz}^{(0)} T_x - G_{zx}^{(0)} T_z & G_{zx}^{(0)} T_y - G_{zy}^{(0)} T_x \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Здесь для краткости мы использовали обозначение $T_i = \langle \langle \alpha'(1) \nabla_i^{(2)} \alpha'(2) \rangle \rangle$; в индексах $i, j \rightarrow x, y, z$.

В приложениях для простоты обычно используют среднее значение диагональных элементов тензора $\alpha_{ij}(\mathbf{r}, t)$, имеющее смысл коэффициента усиления магнитного поля:

$$\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{3} \alpha_{ii}(\mathbf{r}, t) = e_{inm} \int d2G_{in}^{(0)}(1; 2) \langle \langle \alpha'(1) \nabla_m^{(2)} \alpha'(2) \rangle \rangle. \quad (18)$$

Из этого выражения видно, что для наличия усиления поля необходимо существование антисимметричной части у тензора Грина. Аналогично величина $D = (1/6) e_{ijk} D_{ijk}$ имеет смысл среднего коэффициента диффузии. Напомним, что полные коэффициенты диффузии и α -эффекта равны соответственно $D_m + D_0 + D$ и $\alpha_0 + \alpha$.

Если корреляции флуктуации спиральности короткоживущие, $\langle \langle \alpha'(\mathbf{r}, t) \alpha'(\mathbf{r}', t') \rangle \rangle \propto \delta(t - t')$, то, учитывая свойство $G_{nm}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t) = \delta_{nm} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, получаем $\alpha_{ij} = -e_{ijk} \times \nabla_k \langle \langle \alpha'^2(\mathbf{r}, t) \rangle \rangle$ и $\alpha \equiv 0$, т. е. усиления поля не происходит. Это полностью согласуется с выводом работы [16] о необходимости изучать влияние флуктуаций спиральности, принимая конечное время существования их корреляций.

Случай изотропной турбулентности

Приведем выражения для α и D для часто используемой модели изотропной турбулентной среды со спиральностью. В этом случае

$$G_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}, \tau) = H(\tau) [\delta_{ij} g_0(R, \tau) + e_{ijk} \nabla_k g_1(R, \tau)], \quad (19)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\tau = t - t'$, $H(\tau) = 1$ для $\tau > 0$ и $H(\tau) = 0$ для $\tau < 0$. Фурье-трансформанты функций g_0 и g_1 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_0(p, \tau) &\equiv \int d\mathbf{R} g_0(R, \tau) \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{R}) = \text{ch}(\alpha_0 p \tau) \exp(-D_0 p^2 \tau), \\ \tilde{g}_1(p, \tau) &= -\frac{1}{p} \text{sh}(\alpha_0 p \tau) \exp(-D_0 p^2 \tau). \end{aligned} \quad (20)$$

В отсутствие спиральности $\alpha_0 = 0$ и $g_1 = 0$. Удобно ввести в рассмотрение спектры флуктуаций:

$$\begin{aligned} \langle \langle \alpha'(\mathbf{r}, t) \alpha'(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle \rangle &\equiv \int_0^\infty dp E_\alpha(p, \tau), \quad \langle \langle \alpha'^2(\mathbf{r}, t) \rangle \rangle \equiv \alpha_1^2, \\ \langle \langle D'(\mathbf{r}, t) D'(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle \rangle &\equiv \int_0^\infty dp E_D(p, \tau), \quad \langle \langle D'^2(\mathbf{r}, t) \rangle \rangle \equiv D_1^2. \end{aligned} \quad (21)$$

В этих обозначениях формулы для α и D в изотропной турбулентной среде принимают вид

$$\alpha = -\frac{2}{3} \int_0^\infty dp \int_0^t d\tau p^2 E_\alpha(p, \tau) \tilde{g}_1(p, \tau), \quad (22)$$

$$D = -\frac{1}{3} \int_0^\infty dp \int_0^t d\tau \left[2p^2 E_D(p, \tau) \tilde{g}_0(p, \tau) + E_\alpha(p, \tau) \tilde{g}_0(p, \tau) + p E_\alpha(p, \tau) \frac{\partial}{\partial p} \tilde{g}_0(p, \tau) \right]. \quad (23)$$

Формула (22) показывает, что флуктуации спиральности в изотропной среде приводят к усилению уже имеющегося α -эффекта. Для оценки вклада возьмем $E_\alpha(p, \tau) = \alpha_1^2 \times \delta(p - p_\alpha) \exp(-\tau/\tau_\alpha)$:

$$\alpha = \frac{2}{3} \alpha_0 \frac{\alpha_1^2 p_\alpha^2 \tau_\alpha^2}{(D_0 p_\alpha^2 \tau_\alpha + 1)^2 - \alpha_0^2 p_\alpha^2 \tau_\alpha^2}. \quad (24)$$

Условия выполнимости диффузионного приближения требуют, чтобы знаменатель в (24) был положительным, т. е. знак α совпадал со знаком коэффициента α_0 .

Что касается добавочного вклада (23) в коэффициент турбулентной диффузии, то видно, что флуктуации $D'(r, t)$ (первый член) и $\alpha'(r, t)$ (второй и третий члены) в целом дают отрицательный вклад, т. е. уменьшают исходный коэффициент $D_m + D_0$. То, что флуктуации $D'(r, t)$ уменьшают коэффициент диффузии, становится понятным, если вспомнить, что при нахождении средней длины свободного пробега частицы при двух механизмах рассеяния берется сумма обратных величин: $1/l_{mean} = 1/l_1 + 1/l_2$. В действительности коэффициент турбулентной диффузии пропорционален некоторой длине перемешивания l . Поэтому для ансамбля из двух процессов с $D = D_0 + \Delta D$ и $D = D_0 - \Delta D$ получаем среднее значение $D_{mean} = D_0 [1 - (\Delta D/D_0)^2] < D_0$. Отметим, что Моффат [3], рассматривая влияние $\alpha'(r, t)$ на турбулентную диффузию, получил только второй член в (23). Это является следствием менее точного метода рассмотрения проблемы. На самом деле новый — третий — член в (23) дает положительную добавку, значение которой может достигать 2/3 от второго — отрицательного.

Таким образом, в однородной и изотропной турбулентной среде флуктуации спиральности лишь усиливают уже имеющийся α -эффект. Совсем другая ситуация имеет место в неоднородных и неизотропных турбулентных средах. Там флуктуации спиральности могут привести к крупномасштабному усилению магнитного поля даже при нулевой средней спиральности. Особенно наглядно это видно для среды с дифференциальным вращением.

3. α -ЭФФЕКТ В НЕОДНОРОДНО-ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Важнейшими примерами таких сред являются конвективная оболочка Солнца и движение магмы внутри Земли. Аккреционные диски вокруг звезд и межзвездный газ также участвуют в дифференциальном вращении.

3.1. Интегральное уравнение для тензора Грина

Уравнение для тензора Грина $G_{ij}^{(0)}(r, t; r', t')$, удовлетворяющего уравнению (4) без стохастических членов в правой части, удобно записать в виде интегрального уравнения. Для рассматриваемого здесь случая $\alpha_0 = 0$ и $U(r, t) = \omega(\rho, z)[e_z r] \equiv e_\varphi \rho \omega(\rho, z)$ это уравнение в цилиндрической системе координат ($\alpha, \beta = \rho, \varphi, z$) имеет вид

$$G_{\alpha\beta}^{(0)}(1; 2) = g_{\alpha\beta}^{(0)}(1 - 2) - \int d^3\omega(3) g_{\alpha\gamma}^{(0)}(1 - 3) \frac{\partial}{\partial \varphi_3} G_{\gamma\beta}^{(0)}(3; 2) + \int d^3\rho_3 g_{\alpha\varphi}^{(0)}(1 - 3) \left[(\nabla_\rho^{(3)} \omega(3)) G_{\rho\beta}^{(0)}(3; 2) + (\nabla_z^{(3)} \omega(3)) G_{z\beta}^{(0)}(3; 2) \right]. \quad (25)$$

Здесь ρ — расстояние от точки наблюдения $\mathbf{r}(\rho, \varphi, z)$ до оси вращения z , индекс γ пробегает все значения — ρ, φ, z ; остальные индексы фиксированы. Тензор Грина $g_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{R}, \tau)$ является записанной в цилиндрической системе координат обычной диффузионной функцией Грина $g_{ij}(1-2) = \delta_{ij}g_0(R, \tau)$ ($i, j = x, y, z$), где

$$g_0(R, \tau) = \frac{1}{(4\pi D_0\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4D_0\tau}\right). \quad (26)$$

Напомним, что переход от декартовых координат к цилиндрическим осуществляется с помощью унитарной матрицы $U_{\beta k}(\varphi)$ согласно соотношениям

$$\begin{aligned} A_\beta &= U_{\beta k}(\varphi)A_k, & G_{\alpha\beta}(1; 2) &= U_{\alpha i}(\varphi_1)G_{ij}(1; 2)\tilde{U}_{j\beta}(\varphi_2), \\ \alpha_{\gamma\beta}(\mathbf{r}, t) &= U_{\gamma i}(\varphi)\alpha_{ij}(\mathbf{r}, t)\tilde{U}_{j\beta}(\varphi). \end{aligned} \quad (27)$$

Знак тильда означает транспонирование матрицы: $\tilde{U}_{j\beta} = U_{\beta j}$. По повторяющимся декартовым индексам проводится суммирование. Компоненты матрицы $U_{\alpha i}(\varphi)$ таковы:

$$U_{\beta k}(\varphi) = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Согласно (27) тензор Грина имеет вид $g_{\alpha\beta}^{(0)}(1-2) = U_{\alpha\beta}(\varphi_1 - \varphi_2)g_0(R, \tau)$. Легко проверить, что тензор $G_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ зависит от разности азимутальных углов $\psi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$.

3.2. Тензор Грина для осесимметричных задач

Часто при нахождении магнитного поля из уравнения (4) предполагают, что распределение источников поля или начальное поле имеют осевую симметрию. В этом случае достаточно знать тензор Грина, проинтегрированный по разности азимутальных углов $\psi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$. Обозначим этот тензор как $\langle G_{\alpha\beta}^{(0)} \rangle \equiv \langle G_{\alpha\beta}^{(0)}(\rho_1, z_1; \rho_2, z_2; \tau) \rangle$. Интегрируя уравнение (25) по углу ψ , получаем точные выражения для компонент $\langle G_{\alpha\beta}^{(0)} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle G_{\rho\rho}^{(0)} \rangle &= \langle G_{\varphi\varphi}^{(0)} \rangle \equiv G_\perp = \int_0^{2\pi} d\psi \cos \psi g_0(R, \tau), & \langle G_{zz}^{(0)} \rangle &\equiv G_\parallel = \int_0^{2\pi} d\psi g_0(R, \tau), \\ \langle G_{\varphi\rho}^{(0)} \rangle &\equiv G_{\varphi\rho} = \int_{-\infty}^{\infty} dz_3 \int_0^{\infty} d\rho_3 \rho_3^2 \int_0^\tau d\tau' \times \\ &\times G_\perp(\rho_1, z_1; \rho_3, z_3; \tau - \tau') (\nabla_{\rho_3} \omega(\rho_3, z_3)) G_\perp(\rho_3, z_3; \rho_2, z_2; \tau'), \\ \langle G_{\varphi z}^{(0)} \rangle &\equiv G_{\varphi z} = \int_{-\infty}^{\infty} dz_3 \int_0^{\infty} d\rho_3 \rho_3^2 \int_0^\tau d\tau' \times \\ &\times G_\perp(\rho_1, z_1; \rho_3, z_3; \tau - \tau') (\nabla_{z_3} \omega(\rho_3, z_3)) G_\parallel(\rho_3, z_3; \rho_2, z_2; \tau'). \end{aligned} \quad (29)$$

Остальные компоненты $\langle G_{\alpha\beta}^{(0)} \rangle$ равны нулю. Отметим, что при вычислении G_\perp и G_\parallel интегралы по углу ψ приводят к функциям Бесселя мнимого аргумента, т. е. эти компоненты имеют явный аналитический вид.

При наличии осевой симметрии скалярный коррелятор флуктуаций

$$A(1; 2) \equiv \langle \langle \alpha'(1) \alpha'(2) \rangle \rangle,$$

очевидно, также не изменяется при повороте системы точек 1 и 2 как целого, т. е. может быть представлен в виде $A(1; 2) = A(z_1, z_2, \rho_1, |\mathbf{r}_\perp^{(1)} - \mathbf{r}_\perp^{(2)}|, \tau)$, где вектор $\mathbf{r}_\perp(\rho, \varphi)$ определяет положение точки на плоскости xy . Проинтегрированный по разности азимутальных углов ψ тензор Грина ($G_{\alpha\beta}^{(0)}$), представляет собой ту часть $G_{\alpha\beta}^{(0)}$, которая от угла ψ не зависит. Представляет интерес выяснить, какой вклад дает эта часть в тензор $\alpha_{\gamma\beta}$. Проведя, согласно (27), преобразование от $\langle G_{\alpha\beta}^{(0)} \rangle$ к $\langle G_{ij}^{(0)} \rangle$ и вычислив затем последовательно тензор $\alpha_{ij}(1)$ (см. (17)), а затем $\alpha_{\gamma\beta}(1)$, получим

$$\alpha_{\rho\rho}(\mathbf{r}, t) = \alpha_{\rho z}(\mathbf{r}, t) = \alpha_{z\rho}(\mathbf{r}, t) = \alpha_{zz}(\mathbf{r}) = 0,$$

$$\alpha_{\rho\varphi}(\rho, z, t) = -\alpha_{\varphi\rho}(\rho, z, t) = - \int d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau \cos \psi G_\perp(z - z', \rho, \rho'; \tau) \times \\ \times \nabla'_z A(z, z', \rho, |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|, \tau),$$

$$\alpha_{\varphi z}(\rho, z, t) = - \int d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau G_\perp(z - z', \rho, \rho'; \tau) \nabla'_\rho A(z, z', \rho, |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|, \tau), \quad (30)$$

$$\alpha_{z\varphi}(\rho, z, t) = \int d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau G_\parallel(z - z', \rho, \rho'; \tau) [\cos \psi \nabla'_\rho A + \sin \psi \nabla'_\varphi A],$$

$$\alpha_{\varphi\varphi}(\rho, z, t) = \int d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau \{ -\cos \psi G_{\varphi\rho}(z, \rho; z', \rho'; \tau) \nabla'_z A + \cos \psi G_{\varphi z}(z, \rho; z', \rho'; \tau) \times \\ \times \nabla'_\rho A + \sin \psi G_{\varphi z}(z, \rho; z', \rho'; \tau) \nabla'_\varphi A \}.$$

Для краткости в последних формулах мы не писали аргументы у функции $A(z, z', \rho, |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|, \tau)$.

Из этих формул видно, что если распределение флуктуаций спиральности однородно вдоль оси вращения ($A(z, z', \rho, |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|, \tau) = A(|z - z'|, \rho, |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|, \tau)$), то компоненты $\alpha_{\rho\varphi} = \alpha_{\varphi\rho}$ равны нулю из-за нечетности по $z - z'$. В отсутствие дифференциального вращения по координате z ($\omega(\rho, z) = \omega(\rho)$) компонента $G_{\varphi z}$ равна нулю, а $G_{\varphi\rho}$ зависит от $|z - z'|$, т. е. при однородности распределения флуктуаций в этом случае будет равна нулю главная компонента, $\alpha_{\varphi\varphi}$, которая обуславливает усиление магнитного поля.

Таким образом, для существования α -эффекта ($\alpha_{\varphi\varphi} \neq 0$) необходима зависимость угловой скорости ω от координаты z либо неоднородное распределение флуктуаций спиральности вдоль этой координаты, либо и то, и другое вместе. Причем α -эффект имеет резко анизотропный характер — только азимутальная компонента магнитного поля индуцирует азимутальный же ток, что приводит к усилению полоидальной компоненты среднего поля.

3.3. Качественное объяснение α -эффекта

Рассмотрим качественно картину возникновения электродвижущей силы E_φ вдоль среднего поля $\langle\langle B_\varphi \rangle\rangle$. Сначала рассмотрим вклад первого члена в выражении (30) для компоненты $\alpha_{\varphi\varphi}$. Пусть начальное однородное магнитное поле направлено параллельно азимутальному орту $e_\varphi(1)$ в точке наблюдения 1 (см. рис. 1). В точках 2' и 2'', находящихся на равном расстоянии от плоскости xy , это поле $B_0 e_\varphi(1)$ индуцирует электродвижущие силы $E(2') = \alpha'(2') B_0 e_\varphi(1)$ и $E(2'') = \alpha'(2'') B_0 e_\varphi(1)$. Токи, возникающие под действием этих ЭДС, создадут в точке 2 на плоскости xy магнитные поля B' и B'' , перпендикулярные исходному полю, но противоположно направленные. Суммарное поле $B(2) = B' + B''$ направлено в сторону оси вращения под углом $\psi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ к радиальному орту $e_\rho(2)$, т. е. $B_\rho(2) = -\cos\psi |B' + B''|$. Вследствие радиального дифференциального вращения (ω зависит от ρ) эта радиальная компонента с вероятностью $\propto G_{\varphi\rho}(1; 2)$ превращается в азимутальную в точке 1 и индуцирует здесь азимутальную же ЭДС $E_\varphi \propto [-\cos\psi G_{\varphi\rho}(1; 2) \alpha'(1) \nabla'_z \alpha'(2) B_0 e_\varphi(1)]$. Размеры кружков на рисунке соответствуют относительным величинам функции $\alpha'(r, t)$. Из этого наглядного рассмотрения снова видно, что для существования этой части $\alpha_{\varphi\varphi}$ -эффекта необходима неоднородность по z -координате распределения флуктуаций либо неоднородность самой компоненты тензора Грина $G_{\varphi\rho}$.

При рассмотрении вкладов второго и третьего членов удобно точку наблюдения 1 считать лежащей на оси x , т. е. взять $\varphi = 0$. Тогда сумму этих членов можно представить как $G_{\varphi z}(1; 2) \nabla'_x A$. Как при рассмотрении вклада первого члена (рис. 1), выберем точки 2' и 2'' на равном расстоянии от окружности $\rho = \rho_1$ (см. рис. 2). Среднее магнитное поле $B_0 e_\varphi(1)$ в данном случае параллельно оси y . Индуцированные $\alpha'(r, t)$ -полем электро-

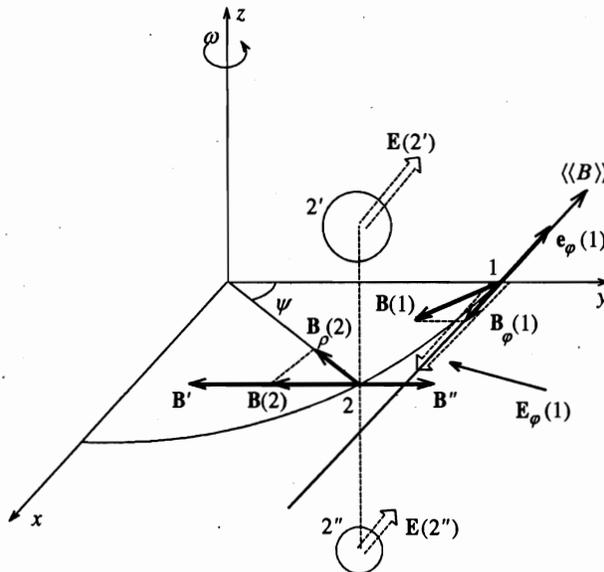


Рис. 1. Механизм возникновения поперечного α -эффекта ($\alpha_{\varphi\varphi}$ -компонента) из-за неоднородного распределения флуктуаций спиральности вдоль оси вращения z и дифференциального вращения в перпендикулярной плоскости $\omega = \omega(\rho)$

дифференциальное вращение с $\omega = \omega(\rho)$ — приводит к добавочному вкладу в $G_{\rho\varphi}^{(0)}$. При $\omega = \omega(\rho)$ z -компонента поля не может трансформироваться в радиальную или азимутальную компоненту, поэтому в этом случае $G_{\varphi z}^{(0)} = G_{\rho z}^{(0)} = 0$. В общем случае вращения с $\omega = \omega(\rho, z)$ ни диффузия, ни дифференциальное вращение не могут горизонтальную (в плоскости вращения) компоненту поля превратить в вертикальную. Поэтому всегда $G_{z\varphi}^{(0)} = G_{z\rho}^{(0)} = 0$. Дифференциальное вращение с $\omega = \omega(z)$ создает из z -компоненты поля азимутальную компоненту ($G_{\varphi z}^{(0)} \neq 0$), которая за счет диффузии создает радиальную компоненту, приводя к $G_{\rho z}^{(0)} \neq 0$.

Все эти наглядные качественные выводы подтверждаются при рассмотрении основного интегрального уравнения (25).

В аксиально-симметричном случае второй член в правой части уравнения (25) не давал вклада, что и позволило найти точное аналитическое выражение для усредненной функции Грина ($G_{\alpha\beta}^{(0)}$). Для вычисления тензора $\alpha_{ij}(\mathbf{r}, t)$, согласно выражению (10), необходимо знать тензор Грина в общем виде, а не только его аксиально-симметричную часть. Для этого общего случая мы дадим выражение тензора Грина $G_{\alpha\beta}^{(0)}(1; 2)$ в виде суммы свободного члена уравнения (25) $g_{\alpha\beta}^{(0)}(1-2)$ и первой итерации уравнения. Структура этого выражения имеет самый общий вид, т. е. только компоненты $G_{z\varphi}^{(0)} = G_{z\rho}^{(0)}$ равны нулю. По-видимому, это выражение достаточно точное, так как оно учитывает первые порядки процессов диффузии и дифференциального вращения, а процессы высших порядков по физическим соображениям должны давать малый вклад. Напомним также, что в задачах теории магнитного динамо используется система координат, вращающаяся вместе со средой с некоторой постоянной угловой скоростью ω_0 , так что $\omega(\rho, z)$ означает остающуюся часть угловой скорости, которая часто (например, для Солнца) много меньше ω_0 . Обычно и градиенты угловой скорости $\nabla_\rho\omega$ и $\nabla_z\omega$ являются гладкими функциями на характерных масштабах задачи. Все это позволяет надеяться, что предлагаемое выражение для $G_{\alpha\beta}^{(0)}(1; 2)$ может использоваться в практических расчетах и оценках. Итак, подставляя $g_{\alpha\beta}^{(0)}(1-2)$ в интегральные члены уравнения (18), получим для $G_{\alpha\beta}^{(0)}(1; 2)$ следующее выражение:

$$G_{\alpha\beta}(1; 2) = U_{\alpha\beta}(\psi)g_0(1-2) - \frac{\partial}{\partial\psi} [U_{\alpha\beta}(\psi)f] + \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \sin \psi - c \cos \psi & c \sin \psi - b \cos \psi & h \sin \psi - g \cos \psi \\ a \cos \psi + c \sin \psi & c \cos \psi + b \sin \psi & h \cos \psi + g \sin \psi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Здесь введены обозначения

$$f(1; 2) = \int d^3\omega(3)g_0(1-3)g_0(3-2),$$

$$\begin{aligned}
 a(1; 2) &= \int d^3\rho_3 (\nabla_\rho \omega(3)) \cos^2 \psi' g_0(1-3)g_0(3-2), \\
 b(1; 2) &= \int d^3\rho_3 (\nabla_\rho \omega(3)) \sin^2 \psi' g_0(1-3)g_0(3-2), \\
 c(1; 2) &= \int d^3\rho_3 (\nabla_\rho \omega(3)) \sin \psi' \cos \psi' g_0(1-3)g_0(3-2), \\
 g(1; 2) &= \int d^3\rho_3 (\nabla_z \omega(3)) \sin \psi' g_0(1-3)g_0(3-2), \\
 h(1; 2) &= \int d^3\rho_3 (\nabla_z \omega(3)) \cos \psi' g_0(1-3)g_0(3-2),
 \end{aligned} \tag{32}$$

$\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\psi' = \varphi_3 - \varphi_2$. Интересно отметить, что интегрирование по ψ выражения (31) приводит к уже известному аксиально-симметричному тензору Грина (29), т. е. это приближение полностью включает в себя предыдущее, осесимметричное приближение.

Используя (31), легко написать в явном виде компоненты тензора $\alpha_{\beta\gamma}(\mathbf{r}, t)$. Мы ограничимся здесь рассмотрением наиболее важных — диагональных — компонент. Для удобства выпишем сначала общие формулы для них:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\rho\rho}(\mathbf{r}, t) &= \int d^2 \{ -\sin \psi G_{\rho\rho}^{(0)}(1; 2) \nabla_z^{(2)} A(1; 2) + \cos \psi G_{\rho\rho}^{(0)}(1; 2) \nabla_z^{(2)} A(1; 2) + \\
 &+ [\sin \psi \nabla_\rho^{(2)} A(1; 2) - \cos \psi \nabla_\varphi^{(2)} A(1; 2)] G_{\rho z}^{(0)}(1; 2) \},
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\varphi\varphi}(\mathbf{r}, t) &= \int d^2 \{ -\cos \psi G_{\varphi\varphi}^{(0)}(1; 2) \nabla_z^{(2)} A(1; 2) - \sin \psi G_{\varphi\varphi}^{(0)}(1; 2) \nabla_z^{(2)} A(1; 2) + \\
 &+ [\cos \psi \nabla_\rho^{(2)} A(1; 2) + \sin \psi \nabla_\varphi^{(2)} A(1; 2)] G_{\varphi z}^{(0)}(1; 2) \},
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\alpha_{zz}(\mathbf{r}, t) = \int d^2 [G_{z\rho}^{(0)}(1; 2) \nabla_\rho^{(2)} A(1; 2) - G_{z\varphi}^{(0)}(1; 2) \nabla_\rho^{(2)} A(1; 2)]. \tag{35}$$

Прежде всего видим, что $\alpha_{zz}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$, так как в среде с дифференциальным вращением $\omega = \omega(\rho, z)$ компоненты $G_{z\rho}^{(0)} = G_{z\varphi}^{(0)}$ равны нулю. Замечаем также, что отличие от соответствующей формулы в случае использования осесимметричного тензора Грина (выражение (29)) очень велико. Там было $\alpha_{\rho\rho}(\mathbf{r}, t) = 0$, так как $\langle G_{\rho\varphi}^{(0)} \rangle = \langle G_{\rho z}^{(0)} \rangle = 0$, а первый член в (33) не давал вклада из-за нечетности по ψ .

Подставляя в (33) и (34) компоненты тензора (31), получим

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\rho\rho}(\rho, z, t) &= \int d^2 \{ -f \nabla_z^{(2)} A(1; 2) - (a \sin^2 \psi + b \cos^2 \psi) \nabla_z^{(2)} A(1; 2) + \\
 &+ h \sin \psi [\sin \psi \nabla_\rho^{(2)} A(1; 2) - \cos \psi \nabla_\varphi^{(2)} A(1; 2)] \},
 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\varphi\varphi}(\rho, z, t) &= \int d^2 \{ -f \nabla_z^{(2)} A(1; 2) - (a \cos^2 \psi + b \sin^2 \psi) \nabla_z^{(2)} A(1; 2) + \\
 &+ h \cos \psi [\cos \psi \nabla_\rho^{(2)} A(1; 2) + \sin \psi \nabla_\varphi^{(2)} A(1; 2)] \}.
 \end{aligned} \tag{37}$$

Из этих выражений видно, что компоненты $\alpha_{\rho\rho}$ и $\alpha_{\varphi\varphi}$ одного порядка. Это означает, что при вычислении кинетических коэффициентов $\alpha_{\beta\gamma}(\mathbf{r}, t)$ необходимо использовать тензор Грина в общем виде. Усредненная по азимутальному углу часть его сильно

искажает структуру $\alpha_{\beta\gamma}(\mathbf{r}, t)$, хотя и оставляет тот же порядок величины для $\alpha_{\varphi\varphi}$. В среде с вращением все компоненты $\alpha_{\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) \equiv \alpha_{\beta\gamma}(\rho, z, t)$ не зависят от азимутального угла, что является следствием однородности по углам коррелятора флуктуаций: $A(1; 2) = \langle\langle \alpha'(1)\alpha'(2) \rangle\rangle = A(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2, \varphi_1 - \varphi_2, \tau)$.

Качественное объяснение возникновения α -эффекта под действием флуктуаций спиральности (см. рис. 1 и 2), которое мы дали раньше, полностью применимо в отношении второго и третьего членов в (36) и (37). Особого пояснения требуют только первые члены в этих формулах, обязанные своим возникновением члену с производной по азимутальному углу в основном интегральном уравнении (25). Начнем это пояснение несколько издалека.

Точное решение уравнения (25) при отсутствии дифференциального вращения, т. е. при однородном вращении с постоянной угловой скоростью ω_0 , имеет следующий вид [5]:

$$G_{\alpha\beta}^{(0)}(1; 2) = U_{\alpha\beta}(\psi - \omega_0\tau)g_0 (|z - z'|, \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\psi - \omega_0\tau), \tau). \quad (38)$$

Физический смысл этого решения очень прост. Оно описывает вращение замороженного магнитного поля и одновременно турбулентную диффузию этого поля в соответствии с изменяющимся расстоянием от движущейся точки 2 до неподвижной точки наблюдения 1. Подстановка этого решения в формулы (33) и (34) приводит к выражению

$$\alpha_{\rho\rho} = \alpha_{\varphi\varphi} = - \int d2 \sin(\omega_0\tau) \nabla_z^{(2)} A(1; 2)g_0. \quad (39)$$

Эта формула описывает возникновение α -эффекта за счет поворота индуцированного магнитного поля. Действительно, пусть среднее поле $\langle\langle \mathbf{B} \rangle\rangle = \text{const}$ направлено вдоль оси y (см. рис. 3). В точках 2' и 2'' в соответствии со значениями функции $\alpha'(\mathbf{r}, t)$ индуцируются электродвижущие силы $\mathbf{E}(2') = \alpha'(2')\langle\langle \mathbf{B} \rangle\rangle$ и $\mathbf{E}(2'') = \alpha'(2'')\langle\langle \mathbf{B} \rangle\rangle$. Электрические токи, соответствующие этим ЭДС, создают в точке 2 результирующее поле $\mathbf{V}' + \mathbf{V}''$, направленное параллельно оси x . Это поле из-за замороженности поворачивается вокруг оси вращения, так что в точке наблюдения 1 появляется компонента $\mathbf{V}_{\parallel}(1) = \sin(\omega_0\tau)|\mathbf{V}' + \mathbf{V}''|$, направленная антипараллельно среднему полю $\langle\langle \mathbf{B} \rangle\rangle$. Эта компонента и создает в точке 1 ЭДС в том же направлении, т. е. осуществляется α -эффект. Однако для рассмотренного однородного вращения в действительности α -эффект не возникает, так как мы неявно подразумевали, что среднее поле $\langle\langle \mathbf{B} \rangle\rangle$ неподвижно относительно неподвижной же точки наблюдения 1. На самом деле $\langle\langle \mathbf{B} \rangle\rangle$ также вращается и никакого относительного поворота на угол $\omega_0\tau$ не происходит. Если задачу рассматривать во вращающейся системе координат, где $\omega_0 = 0$, то это ясно с самого начала.

При наличии дифференциального вращения постоянную составляющую угловой скорости мы уже исключили переходом во вращающуюся систему координат. Здесь уже можно считать, что среднее поле неподвижно относительно точки наблюдения, и механизм, показанный на рис. 3, действительно осуществляется. Функция $f(1; 2)$ соответствует решению (38), если локально считать угловую скорость $\omega(\rho, z)$ постоянной и, кроме того, считать $\omega(\rho, z)\tau \ll 1$ (т. е. $f \rightarrow \omega\tau g_0$). Подстановка в (39) вместо величины $\sin(\omega_0\tau)g_0 \approx \omega_0\tau g_0$ функции $f(1; 2)$ приводит к первым членам в (36) и (37). Таким образом, член с $f(1; 2)$ описывает α -эффект за счет локальных поворотов замороженных индуцируемых магнитных полей.

Иногда в задачах магнитного динамо используют среднее значение $\alpha_{\perp}(\mathbf{r}, t) \equiv$

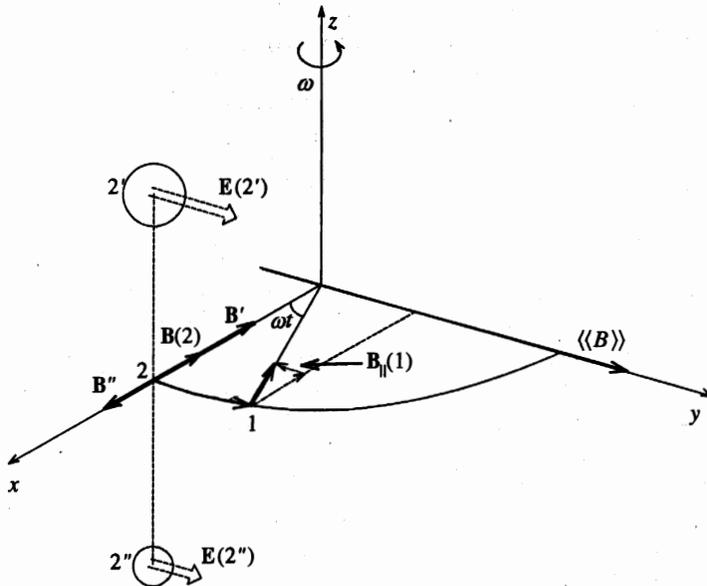


Рис. 3. Механизм возникновения поперечного α -эффекта из-за неоднородного распределения флуктуаций спиральности вдоль оси вращения z и вращения индуцированного магнитного поля

$\equiv (\alpha_{\rho\rho} + \alpha_{\varphi\varphi})/2$. Формулы (36) и (37) дают для этой величины сравнительно простое выражение:

$$\alpha_{\perp}(\rho, z, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\psi \left[\left(f(1; 2) + \frac{a(1; 2) + b(1; 2)}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \nabla'_z A(1; 2) - \frac{h(1; 2)}{2} \nabla'_\rho A(1; 2) \right]. \quad (40)$$

Из всех полученных формул следует, что неоднородное распределение флуктуаций спиральности приводит к существованию крупномасштабного α -эффекта. Что касается продольного, вдоль оси вращения, α -эффекта, то общая формула (35) требует для его существования ненулевых компонент $G_{z\varphi}^{(0)}$ и $G_{z\rho}^{(0)}$. Соображения вмороженности показывают, что такое может осуществляться при добавочных к вращению движениях, выводящих вещество из плоскости вращения. Это прежде всего конвективные движения, сопровождающиеся расширением объема газа.

4. ОЦЕНКИ α -ЭФФЕКТА И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Оценки α -эффекта по полученным формулам ввиду их сложности могут носить скорее качественный, чем количественный характер. Прежде всего мы вынесем из под интегралов (32) величины $\omega(\rho, z) \equiv \omega$ и градиенты $\nabla_\rho \omega$ и $\nabla_z \omega$, считая их сравнительно гладкими функциями. Это даёт $f(1; 2) \approx \omega \tau g_0(1 - 2)$, $a(1; 2) \approx b(1; 2) \approx$

$\approx (\nabla_{\rho}\omega)\tau g_0(1-2)l_{diff}(\tau)$, $h(1;2) \approx (\nabla_z\omega)\tau g_0(1-2)l_{diff}(\tau)$, где $l_{diff}^2(\tau) \approx 6D_0\tau$ определяет длину диффузии за время τ . Как уже говорилось, коэффициенты $\alpha_{\rho\rho}$ и $\alpha_{\varphi\varphi}$ одного порядка, поэтому наши оценки будут относиться к их средней величине α_{\perp} . Используя приведенные выше оценки функций f , a , b и h , из выражения (40) получаем окончательную оценку:

$$\alpha_{\perp} \approx \omega \frac{\tau_{\alpha}^2 \alpha_1^2}{L_z} + \frac{\tau_{\alpha}^2 \alpha_1^2}{L_{\rho}} (\nabla_{\rho}\omega) l_{diff}(\tau_{\alpha}) + \frac{\tau_{\alpha}^2 \alpha_1^2}{L_z} (\nabla_z\omega) l_{diff}(\tau_{\alpha}). \quad (41)$$

Здесь $\alpha_1^2 \approx \langle (\alpha'^2(\mathbf{r}, t)) \rangle$ — уровень флуктуаций, τ_{α} — время жизни корреляций спиральности, L_{ρ} и L_z — характерные длины неоднородности распределения флуктуаций, которые могут быть сравнительно небольшими, так как неоднородность флуктуаций, по-видимому, наиболее сильно выражена вблизи границ области (например, на Солнце это верхняя и нижняя границы конвективной зоны).

Если исходить из представления, что каждый турбулентный вихрь передает в процессе дробления масштабов свой угловой момент более мелким вихрям, то, по-видимому, можно принять для оценок (что обычно и делается) $\alpha_1^2 \approx u_0^2$, где u_0^2 — характерная скорость турбулентных движений. Здесь важно отметить, что флуктуации спиральности внутренне присущи любой турбулентности и никак не связаны с действием кориолисовых сил. Кориолисовы силы, как известно, обуславливают при наличии конвекции и дифференциального вращения существование средней спиральности α_0 , которую мы считали равной нулю при рассмотрении в «чистом виде» нового механизма усиления среднего магнитного поля флуктуациями спиральности. При их относительной слабости можно, очевидно, складывать эти независимые коэффициенты, пренебрегая квадратичными эффектами. Следует также напомнить, что величина u_0^2 может существенно зависеть от магнитного поля. Мы должны принимать поле турбулентных скоростей и распределение флуктуаций спиральности такими, какими они сформировались в результате действия всех факторов — температуры, давления, магнитного поля, граничных условий и т. п. Характерное время существования корреляции флуктуаций, по-видимому, больше времени жизни турбулентного вихря τ_0 , и мы примем для оценок $\tau_{\alpha} \geq \tau_0$. Коэффициент турбулентной диффузии обычно оценивают как $D_0 \approx u_0 R_0$, где R_0 — характерный размер турбулентного вихря (длина перемешивания). Подставляя все эти величины в (41), получаем более детализированную оценку:

$$\alpha_{\perp} \geq \xi_0^2 (\omega R_0) \frac{R_0}{L_z} + \xi_0^{5/2} (R_0^2 \nabla_{\rho}\omega) \frac{R_0}{L_{\rho}} + \xi_0^{5/2} (R_0^2 \nabla_z\omega) \frac{R_0}{L_z}, \quad (42)$$

где $\xi_0 = u_0 \tau_0 / R_0$ — безразмерный параметр (число Струхала), характеризующий турбулентность. Обычно принимают $\xi_0 \simeq 1$. Этот параметр может быть записан также как отношение времени жизни вихря к времени одного оборота $\xi_0 = \tau_0 / t_0$, где $t_0 = R_0 / u_0$. Если вихрь успевает сделать много оборотов, то $\xi_0 \gg 1$.

При оценке α -эффекта, возникающего под действием силы Кориолиса, обычно принимают $\alpha_0 \approx R_0 \omega$ (см., например, [21]). Из оценки (42) видно, что коэффициент α_{\perp} , возникающий из-за неоднородности распределения флуктуаций спиральности, может сравниться с величиной α_0 или даже быть больше ее. Правда, в отличие от механизма действия кориолисовых сил, этот новый механизм может быть существен только вблизи границ рассматриваемой области, где неоднородность распределения флуктуаций наиболее велика.

Во всех рассмотренных случаях (см. рисунки) мы видели, что кроме неоднородного распределения флуктуаций спиральности для возникновения ЭДС вдоль среднего магнитного поля был нужен еще поворот индуцированного тока магнитного поля, т. е. было нужно дифференциальное вращение плазмы. Вообще говоря, для возникновения α -эффекта, как это следует из общей формулы (18), необходимо иметь один вектор — градиент коррелятора флуктуаций спиральности и один псевдовектор $G_i = e_{ijk} G_{jk}^{(0)}$. Со всем не обязательно, чтобы этим псевдовектором была угловая скорость ω . В задачах со сложной геометрией величина \mathbf{G} может быть связана, например, с зеркальной асимметрией самого рассматриваемого объема. Заметим, что в экспериментах [7] проводники жидкого натрия обладали зеркальной асимметрией.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем здесь основные итоги статьи. На основе метода крупномасштабного усреднения уравнения диффузии магнитного поля дана теория открытого в работах [15, 16] нового эффекта — крупномасштабного усиления магнитного поля флуктуациями турбулентной спиральности. Показано, что для турбулентности с нулевой средней спиральностью необходимым условием этого эффекта является неоднородное распределение флуктуаций спиральности в проводящей турбулентной среде. Для изотропной, однородной и зеркально несимметричной турбулентности флуктуации спиральности только усиливают уже имеющийся α -эффект. В среде с дифференциальным вращением неоднородное распределение флуктуаций турбулентной спиральности даже в отсутствие средней спиральности приводит к крупномасштабному усилению среднего магнитного поля. Для этого случая α -эффект носит резко анизотропный характер — средняя электродвижущая сила не направлена вдоль продольной (по оси вращения) компоненты магнитного поля, т. е. $\alpha_{zz} \equiv \alpha_{\parallel} = 0$. Поперечные компоненты тензора $\alpha_{ij}(\mathbf{r}, t)$ имеют одинаковый порядок величины и могут сравниться с коэффициентом α_0 , возникающим из-за действия кориолисовых сил. Показано также, что флуктуации коэффициента диффузии и спиральности уменьшают исходный коэффициент турбулентной диффузии.

Литература

1. E. N. Parker, *Astrophys. J.* **122**, 293 (1955).
2. M. Steenbeck, F. Krause, and K.-H. Radler, *Z. Naturforsch. a* **21**, 369 (1966).
3. H. K. Moffatt, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*, Cambridge University Press, Cambridge (1978).
4. E. N. Parker, *Cosmical magnetic fields*, Clarendon Press, Oxford (1980).
5. F. Krause and K.-H. Radler, *Mean-field Magnetohydrodynamics and dynamo theory*, Pergamon Press, Oxford (1980).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
7. М. Штеенбек, И. М. Кирко, А. Гайлитис, А. П. Клявиня, Ф. Краузе, И. Я. Лауманис, О. А. Лиелаусис, *ДАН СССР* **180**, 326 (1968).
8. L. L. Kichatinov, V. V. Pipin, and G. Rudiger, *Astron. Nachr.* **315**, 157 (1994).
9. G. Rudiger and L. L. Kichatinov, *Astron. Astrophys.* **269**, 581 (1993).

10. A. Z. Dolginov and N. A. Silant'ev, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **63**, 139 (1992).
11. Н. А. Силантьев, *ЖЭТФ* **101**, 1216 (1992).
12. Н. К. Moffatt, *J. Fluid Mech.* **65**, 1 (1974).
13. R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **75**, 657 (1976).
14. Ю. Л. Климонтович, *Турбулентное движение и структура хаоса*, Наука, Москва (1970).
15. E. T. Vishniac and A. Brandenburg, *Astrophys. J.* **475**, 263 (1997).
16. Д. Д. Соколов, *АЖ* **74**, 75 (1997).
17. А. П. Казанцев, *ЖЭТФ* **53**, 1806 (1967).
18. В. Г. Новиков, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *ЖЭТФ* **85**, 909 (1983).
19. А. П. Казанцев, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *ЖЭТФ* **88**, 487 (1985).
20. Н. А. Силантьев, *ЖЭТФ* **112**, 1312 (1997).
21. N. O. Weiss, in *Lectures on solar and planetary dynamos*, ed. by M. R. E. Proctor and A. D. Gilbert, Cambridge University Press, Cambridge (1994).