

ЖУРНАЛ  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ  
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА  
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД  
МОСКВА

ТОМ 115, ВЫПУСК 5  
МАЙ, 1999  
«НАУКА»

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРОЙ

© 1999

И. Б. Хриплович\*†

*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера  
Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 23 декабря 1998 г.

Вероятность рождения заряженной частицы электрическим полем заряженной черной дыры существенно зависит от энергии частицы. Эта вероятность найдена в нерелятивистском и ультрарелятивистском предельных случаях. Указаны области значений массы и заряда черной дыры, где данный механизм излучения доминирует над хокинговским.

1. Задача о рождении частиц электрическим полем заряженной черной дыры неоднократно обсуждалась в литературе [1–6]. Для оценки вероятности этого процесса в указанных работах так или иначе использовался результат, полученный ранее [7–9] для случая электрического поля, постоянного во всем пространстве. Это приближение выглядит, казалось бы, совершенно естественным, если речь идет о не слишком малых черных дырах, гравитационный радиус которых намного превышает комптоновскую длину волны частицы  $\lambda = 1/m$ . (В настоящей работе используется система единиц, где  $\hbar = 1$ ,  $c = 1$ ; ньютоновская гравитационная постоянная  $k$  выписывается въявь.) Однако на самом деле, как будет показано ниже, приближение постоянного поля, вообще говоря, неадекватно настоящей задаче, не отражает ряд ее существенных особенностей.

Удобно начать обсуждение вопроса как раз с задачи о рождении частиц постоянным электрическим полем. Здесь и в дальнейшем ограничимся рассмотрением рождения электронов и позитронов прежде всего потому, что вероятность излучения этих самых легких заряженных частиц максимальна. Кроме того, представление о дираковском

\*E-mail: khriplovich@inp.nsk.su

†Новосибирский государственный университет.

© Российская академия наук, Отделение общей физики и астрономии,  
Институт физических проблем им. П. Л. Капицы, 1999 г.

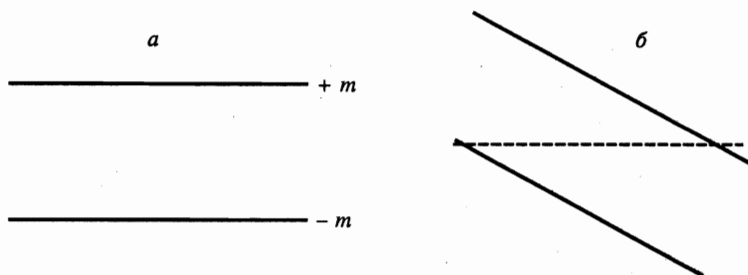


Рис. 1

море позволяет в случае фермионов обойтись без формализма вторичного квантования, сделав рассмотрение максимально наглядным.

Для вычисления главной экспоненциальной зависимости эффекта достаточно ограничиться простым подходом, восходящим к [7] (см. также учебник [10]). В потенциале  $-eEz$  постоянного электрического поля  $E$  обычная дираковская щель (рис. 1а) перекашивается (рис. 1б). В результате частица, которая имела отрицательную энергию в отсутствие поля, теперь может протуннелировать сквозь щель (см. штриховую линию на рис. 1б) и уйти на бесконечность, как обычная частица. Образовавшаяся при этом дырка — это не что иное, как античастица. Элементарное вычисление приводит к хорошо известному результату для вероятности рождения пары:

$$W \sim \exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}\right). \quad (1)$$

Этот простой вывод наглядно объясняет важные свойства явления. Прежде всего подбарьерное действие не меняется при сдвиге штриховой линии на рис. 1б вверх или вниз. Именно поэтому выражение (1) не зависит от энергии родившихся частиц. Далее, чтобы внешнее поле можно было считать постоянным, оно должно слабо меняться на подбарьерном пути. Однако длина этого пути не имеет прямого отношения к комптоновской длине волны частицы. В частности, при сколь угодно слабом поле подбарьерный путь становится сколь угодно большим.

Таким образом, можно ожидать, что приближение постоянного электрического поля, вообще говоря, неприменимо к задаче об излучении заряженной черной дыры и что вероятность рождения частицы в этой задаче существенно зависит от энергии. Явный вид этой зависимости будет найден ниже. Мы ограничиваемся в данной работе случаем невращающейся черной дыры.

2. Начнем решение задачи с вычисления подбарьерного действия. Метрика заряженной черной дыры хорошо известна:

$$ds^2 = f dt^2 - f^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2)$$

где

$$f = 1 - \frac{2kM}{r} + \frac{kQ^2}{r^2}, \quad (3)$$

а  $M$  и  $Q$  — соответственно масса и заряд черной дыры. Уравнение для четырехмерного импульса частицы в этих координатах выглядит так:

$$f^{-1} \left( \epsilon - \frac{eQ}{r} \right)^2 - fp^2 - \frac{l^2}{r^2} = m^2. \tag{4}$$

Здесь  $\epsilon$  и  $p$  — соответственно энергия и радиальный импульс частицы. Примем, что заряд  $e$  частицы имеет тот же знак, что и заряд  $Q$  дыры, приписывая заряд  $-e$  античастице.

Ясно, что подборьерное действие минимально при нулевом орбитальном моменте  $l$ . Достаточно очевидно поэтому (и в следующем разделе будет показано вьявь), что в результате суммирования по  $l$  именно  $s$ -состояние определяет экспоненциальный фактор в полной вероятности процесса. Итак, ограничимся пока случаем чисто радиального движения. Уравнение для дираковской щели при  $l = 0$  таково:

$$\epsilon_{\pm}(r) = \frac{eQ}{r} \pm m\sqrt{f}. \tag{5}$$

Ее вид представлен на рис. 2. Как известно [11], на горизонте черной дыры, т. е. при  $r = r_+ = kM + \sqrt{k^2M^2 - kQ^2}$ , щель обращается в нуль. Затем с ростом  $r$  нижняя граница щели  $\epsilon_-(r)$  монотонно убывает, стремясь асимптотически к  $-m$ . Верхняя же ветвь  $\epsilon_+(r)$  сначала, вообще говоря, растет, а затем убывает, асимптотически стремясь к  $m$ .

Из рис. 2 ясно, что те частицы дираковского моря, координата  $r$  которых превышает гравитационный радиус  $r_+$ , а энергия  $\epsilon$  лежит в интервале  $\epsilon_-(r) > \epsilon > m$ , туннелируют сквозь щель на бесконечность. Иными словами, черная дыра теряет свой заряд за счет обсуждаемого эффекта, испуская частицы с тем же знаком заряда  $e$ , что и  $Q$ . Ясно также, что это явление имеет место лишь при условии

$$\frac{eQ}{r_+} > m. \tag{6}$$

Для предельной черной дыры, у которой  $Q^2 = kM^2$ , дираковская щель выглядит несколько иначе (рис. 3): при стремлении  $Q^2$  к  $kM^2$  положение максимума кривой  $\epsilon_+(r)$  стремится к  $r_+$ , а значение максимума стремится к  $eQ/r_+$ . Вполне очевидно, однако, что качественно ситуация от этого не меняется. Таким образом, предельная черная дыра, которая, как известно, имеет нулевую хокинговскую температуру и, соответственно, не дает теплового излучения, рождает заряженные частицы за счет обсуждаемого эффекта.

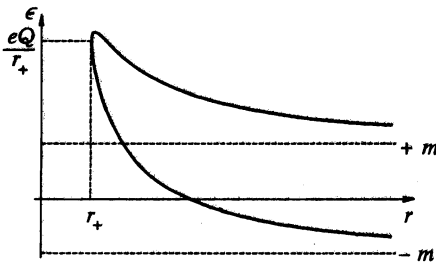


Рис. 2

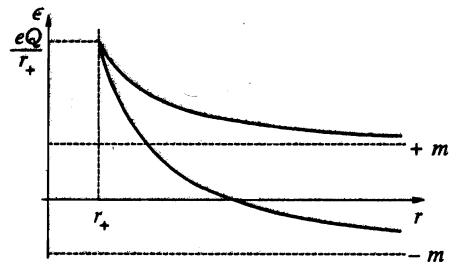


Рис. 3

В общем случае  $Q^2 \leq kM^2$  удвоенное подбарьерное действие, стоящее в показателе экспоненты для вероятности излучения, имеет следующий вид:

$$2S = 2 \int_{r_1}^{r_2} dr |p(r, \epsilon)| = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr r}{r^2 - 2kMr + kQ^2} \sqrt{-p_0^2 r^2 + 2(\epsilon e Q - km^2 M)r - (e^2 - km^2)Q^2}. \quad (7)$$

Здесь  $p_0 = \sqrt{\epsilon^2 - m^2}$  — импульс излученной частицы на бесконечности, а точки поворота  $r_{1,2}$  — как обычно, корни квадратного трехчлена под радикалом; интересующий нас интервал энергий  $m \leq \epsilon \leq eQ/r_+$ . Разумеется, этот интеграл находится въявь, хотя и требует несколько громоздких вычислений. Однако результат оказывается достаточно простым:

$$2S = 2\pi \frac{m^2}{(\epsilon + p_0)p_0} [eQ - (\epsilon - p_0)kM]. \quad (8)$$

Разумеется, это выражение, в отличие от показателя экспоненты в формуле (1), зависит от энергии и при этом весьма существенно.

Заметим, что подбарьерное действие не обращается в нуль даже для предельного значения энергии  $\epsilon_m = eQ/r_+$ . Для непрелдельной черной дыры это ясно уже из рассмотрения рис. 2. Для предельной черной дыры это обстоятельство не столь очевидно. Однако, благодаря сингулярности  $|p(r, \epsilon)|$ , подбарьерное действие оказывается конечным при  $\epsilon = \epsilon_m = eQ/r_+$  и для предельной черной дыры. При этом экспоненциальный фактор в вероятности выглядит так:

$$\exp\left(-\pi \frac{\sqrt{km}}{e} kmM\right). \quad (9)$$

В силу крайней малости отношения

$$\frac{\sqrt{km}}{e} \sim 10^{-21} \quad (10)$$

показатель этой экспоненты велик лишь для очень тяжелой черной дыры, масса  $M$  которой превышает массу Солнца более, чем на пять порядков величины. А поскольку в полной вероятности, проинтегрированной по энергии, область энергий  $\epsilon \sim \epsilon_m$  доминирует, используемый в работе квазиклассический подход применим в случае предельных черных дыр лишь для этих очень тяжелых объектов. Заметим, наконец, что для частиц, испущенных предельной черной дырой, характерные значения отношения  $\epsilon/m$  очень велики:

$$\frac{\epsilon}{m} \sim \frac{\epsilon_m}{m} = \frac{eQ}{kmM} = \frac{e}{\sqrt{km}} \sim 10^{21}.$$

Иными словами, предельная черная дыра в любом случае излучает в основном крайне ультрарелятивистские частицы.

Вернемся к неопределенным дырам. В нерелятивистском случае, когда  $eQ/r_+ \rightarrow m$  и, соответственно, скорость частицы  $v \rightarrow 0$ , экспоненциальный фактор, естественно, очень мал:

$$\exp\left(-\frac{2\pi kmM}{v}\right). \quad (11)$$

Поэтому мы будем рассматривать в основном обратный, т.е. ультрарелятивистский, предел, где экспоненциальный фактор таков:

$$\exp\left(-\pi \frac{m^2}{\epsilon^2} eQ\right). \quad (12)$$

И здесь, разумеется, существенны энергии  $\epsilon \sim \epsilon_m \sim eQ/kM$ , так что ультрарелятивистский предел соответствует условию

$$eQ \gg kmM. \quad (13)$$

Но тогда квазиклассический результат (12) применим (т.е. подбарьерное действие велико) лишь при условии

$$kmM \gg 1. \quad (14)$$

Заметим, что это последнее условие означает, что гравитационный радиус черной дыры ( $r_+ \sim kM$ ) много больше комптоновской длины волны электрона  $1/m$ . Иными словами, результат (12) относится к макроскопическим черным дырам. Комбинация (13) и (14) дает еще одно условие применимости формулы (12):

$$eQ \gg 1. \quad (15)$$

Ниже мы еще вернемся к этому соотношению.

Заметим, что в работе [4] подбарьерное действие вычисляется в тех же предположениях, что и формула (12). Однако приведенный в [4] ответ,  $2S = \pi m^2 r_+^2 / eQ$ , вообще не зависит от энергии (и соответствует формуле (1), которая относится к случаю постоянного электрического поля). Я не понимаю, каким образом мог быть получен такой ответ для обсуждаемого интеграла в общем случае  $\epsilon \neq \epsilon_m$ .

3. Полученная экспонента дает вероятность того, что частица, подошедшая слева к точке поворота  $r_1$  (см. рис. 2 и 3), пройдет сквозь потенциальный барьер. Вспомним, что в общем случае положение этой точки поворота зависит не только от энергии  $\epsilon$  частицы, но и от ее орбитального момента  $l$ . Полное число частиц с заданными  $\epsilon$  и  $l$ , подошедших в единицу времени к поверхности радиуса  $r_1$ , равно произведению площади этой поверхности

$$S = 4\pi r_1^2(\epsilon, l) \quad (16)$$

на плотность тока приходящих частиц

$$j^r(\epsilon, l) = \frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dr}{dt} \quad (17)$$

(см., например, [12, § 90]). Скорость частиц равна, как обычно,

$$v^r = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \quad (18)$$

(нижний индекс  $r$  у радиального импульса  $p$  по-прежнему опускаем). Чтобы получить явное выражение для плотности частиц  $\rho$ , используем квазиклассическое приближение (условия его применимости для области  $r_+ \leq r \leq r_1$  обсудим позднее). Заметим, что элемент фазового объема

$$2 \frac{dp_x dp_y dp_z dx dy dz}{(2\pi)^3} \quad (19)$$

— скаляр. (Множитель 2 здесь отражает, как обычно, две возможные ориентации спина электрона.) С другой стороны, число частиц в элементарной ячейке  $dx dy dz$  равняется [12, §90]

$$\rho \sqrt{\gamma} dx dy dz, \quad (20)$$

где  $\gamma$  — определитель пространственного метрического тензора. Поскольку все состояния дираковского моря заняты, то, сравнивая формулы (19) и (20), находим, что в выражение (17) для плотности тока следует подставить

$$\frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{2}{\sqrt{g_{00}\gamma}} \sum \frac{dp_x dp_y dp_z}{(2\pi)^3} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \sum \frac{dp_x dp_y dp_z}{(2\pi)^3}$$

(суммирование здесь и ниже проводится при фиксированных  $\epsilon$  и  $l$ , см. (17)). В нашем случае определитель  $g$  четырехмерного метрического тензора не отличается от плоского, так что плотность радиального тока частиц дираковского моря равна

$$j^r(\epsilon, l) = 2 \sum \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \quad (21)$$

Суммирование в правой части фактически сводится к умножению на число  $2l + 1$  возможных проекций орбитального момента  $l$  на ось  $z$  и к интегрированию по азимутальному углу вектора  $l$ , дающему  $2\pi$ . С учетом тождества

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial p_r} dp_r = d\epsilon$$

получаем в результате

$$j^r(\epsilon, l) = 2 \frac{2\pi(2l+1)}{(2\pi)^3 r_1^2(\epsilon, l)} \quad (22)$$

Окончательно, искомая предэкспонента в вероятности, дифференциальной по энергии и орбитальному моменту, равна

$$\cdot \frac{2(2l+1)}{\pi} \quad (23)$$

Соответственно, число частиц, излученных в единицу времени, составляет

$$\frac{dN}{dt} = \frac{2}{\pi} \int d\epsilon \sum_l (2l+1) \exp[-2S(\epsilon, l)]. \quad (24)$$

В ультрарелятивистском случае, который является наиболее интересным,  $dN/dt$  находится вьвь. Рассмотрим выражение для импульса в подбарьерной области при  $l \neq 0$ :

$$|p(\epsilon, l, r)| = f^{-1} \sqrt{\left(m^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) f - \left(\epsilon - \frac{eQ}{r}\right)^2}. \quad (25)$$

Основной вклад в интеграл по энергии в формуле (24) дает область  $\epsilon \rightarrow \epsilon_m$ . В этой области функции  $f(r)$  и  $\epsilon - eQ/r$ , входящие в выражение (25), малы и быстро меняются. Что же касается величины

$$\mu^2(r, l) = m^2 + \frac{l^2}{r^2}, \quad (26)$$

то в ней можно заменить  $r$  его средним значением, лежащим между точками поворота  $r_1$  и  $r_2$ . Очевидно, в обсуждаемом пределе  $\epsilon \rightarrow \epsilon_m$  ближняя точка поворота совпадает с радиусом горизонта,  $r_1 = r_+$ . А выражение для дальней точки поворота в этом пределе выглядит так:

$$r_2 = r_+ \left[ 1 + \frac{2\mu^2}{\epsilon_m^2 - \mu^2} \frac{\sqrt{k^2 M^2 - kQ^2}}{r_+} \right]. \quad (27)$$

Приняв, что для оценки в формуле (26) можно положить  $r \sim r_+$ , нетрудно показать, что поправка к единице в квадратных скобках ограничена отношением  $l^2/(eQ)^2$ . Предположив, что это отношение мало (ниже мы увидим, что сделанное допущение самосогласованно), приходим к выводу, что  $r_2 \approx r_+$  и, следовательно,  $\mu^2$  можно считать не зависящим от  $r$ :  $\mu^2(r, l) = m^2 + l^2/r_+^2$ . В итоге получаем

$$2S(\epsilon, l) \approx \pi eQ \left( \frac{m^2}{\epsilon^2} + \frac{l^2}{r_+^2 \epsilon^2} \right). \quad (28)$$

Теперь без труда находим

$$\frac{dN}{dt} = m \left( \frac{eQ}{\pi m r_+} \right)^3 \exp \left( - \frac{\pi m^2 r_+^2}{eQ} \right). \quad (29)$$

Заметим, что область значений орбитального момента, дающих вклад в полную вероятность (29), эффективно ограничена условием  $l^2 \leq eQ$ . Поскольку  $eQ \gg 1$ , это условие позволяет перейти в (24) от суммирования по  $l$  к интегрированию. С другой стороны, это условие оправдывает используемое приближение  $\mu^2(r, l) = m^2 + l^2/r_+^2$ .

Однако до сих пор не было рассмотрено еще одно условие, необходимое для вывода окончательной формулы (29). Речь идет о применимости квазиклассического приближения слева от барьера при  $r_+ \leq r \leq r_1$ . Это условие имеет обычный вид:

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{p(r)} < 1. \quad (30)$$

Иначе говоря, минимальный размер начального волнового пакета внутри барьера не должен превышать расстояние от горизонта до точки поворота. Используя оценку

$$p(r) \sim \frac{r_+(eQ - \epsilon r_+)}{(r - r_+)(r - r_-)}$$

для импульса в наиболее существенной области, можно убедиться в том, что для предельной черной дыры критерий (30) выполнен в силу условия  $eQ \gg 1$ . В непредельном случае, при  $r_+ - r_- \sim r_+$ , ситуация иная: условие (30) сводится к

$$\epsilon < \frac{eQ - 1}{r_+} \sim \frac{eQ}{r_+}. \quad (31)$$

Таким образом, для непредельной черной дыры в наиболее существенной области  $\epsilon \rightarrow \epsilon_m$  условие квазиклассичности не выполнено. Тем не менее квазиклассический ответ (24) остается правильным качественно с точностью до численного коэффициента в предэкспоненте.

В заключение этого раздела несколько слов относительно излучения заряженных легких черных дыр, для которых  $kmM < 1$ , т. е. гравитационный радиус которых меньше комптоновской длины волны электрона. В этом случае первая часть,

$$\epsilon < \frac{eQ - 1}{r_+},$$

неравенства (31), обеспечивающего локализацию начального волнового пакета в области сильного поля, означает, в частности, что

$$eQ = Z\alpha > 1 \quad (32)$$

(мы перешли здесь к  $Z = Q/e$ ). Хорошо известно (см., например, [13, 14]), что вакуум вокруг точечного заряда, для которого  $Z\alpha > 1$ , неустойчив, так что такой объект теряет свой заряд, испуская заряженные частицы. Вполне естественно, что для черной дыры, у которой гравитационный радиус меньше комптоновской длины волны электрона, условие излучения заряда выглядит так же, как в чистой квантовой электродинамике. (Заметим, что единицу во всех этих условиях не следует понимать слишком буквально: даже в квантовой электродинамике, где условие неустойчивости вакуума частиц со спином  $1/2$  выглядит в случае точечного ядра именно как  $Z\alpha > 1$ , для ядра конечных размеров оно переходит [13, 14] в  $Z\alpha > 1.24$ . С другой стороны, для вакуума скалярных частиц в поле точечного ядра условие неустойчивости таково [15, 16]:  $Z\alpha > 1/2$ .) Как уже отмечалось выше, для легкой черной дыры, при  $kmM < 1$ , обсуждаемое условие  $eQ > 1$  приводит к малости подбарьерного действия и к неприменимости используемого в данной статье квазиклассического приближения. Задача об излучении заряженной черной дыры при  $kmM < 1$  исследовалась численно в [17].

#### 4. Экспоненциальный фактор

$$\exp\left(-\frac{\pi m^2 r_+^2}{eQ}\right)$$

в нашей формуле (29) совпадает с выражением, которое возникает из формулы (1), относящейся к постоянному электрическому полю  $E$ , при подстановке в качестве этого поля его значения  $Q/r_+^2$  на горизонте черной дыры. Как уже отмечалось, подход, основанный на формулах для постоянного внешнего поля, использовался ранее в работах [1–6]. Таким образом, наш результат для основной, экспоненциальной, зависимости интегральной по энергии вероятности совпадает с соответствующим результатом



этих статей. Более того, наша окончательная формула (29) согласуется с соответствующим результатом работы [6] с точностью до общего множителя  $1/2$ . (Это различие само по себе интереса не представляет: как было отмечено выше, для неопредельной черной дыры квазиклассическое приближение вообще не может претендовать на точное значение общего численного коэффициента.)

Тем не менее проведенный в настоящей работе анализ явления, демонстрирующий его существенные отличия от рождения частиц постоянным внешним полем, представляется полезным. Из него прежде всего следует, что вероятность рождения частицы заряженной черной дырой имеет совершенно нетривиальный энергетический спектр. Далее, реальные частицы рождаются заряженной черной дырой отнюдь не во всем пространстве: при заданной энергии  $\epsilon$  они излучаются сферической поверхностью радиуса  $r_2(\epsilon)$ , которая для максимально возможной энергии  $eQ/r_+$  близка к горизонту. (Отсюда видно, например, что вывод упомянутого результата работы [6] для  $dN/dt$  физически необоснован: он сводится к подстановке  $E = Q/r_+$  в известную формулу Швингера [9], полученную для постоянного поля, и к последующему интегрированию по всему пространству вне горизонта.)

Сравним теперь интенсивность излучения  $I$  за счет обсуждаемого механизма с интенсивностью  $I_H$  хокинговского температурного излучения. Вводя дополнительный вес  $\epsilon$  в подынтегральное выражение формулы (24), получаем

$$I = \pi m^2 \left( \frac{eQ}{\pi m r_+} \right)^4 \exp \left( - \frac{\pi m^2 r_+^2}{eQ} \right). \quad (33)$$

Что же касается хокинговской интенсивности, то ее проще всего оценить из соображений размерности, разделив хокинговскую температуру

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_+}$$

на характерное классическое время задачи  $r_+$  (напомним, что у нас  $c = 1$ ). Итак,

$$I_H \sim \frac{1}{4\pi r_+^2}. \quad (34)$$

Более точный ответ для  $I_H$  отличается от этой оценки малым численным коэффициентом  $\simeq 2 \cdot 10^{-2}$ , но для качественных оценок этим отличием можно пренебречь. Интенсивности (33) и (34) сравниваются при

$$eQ \sim \frac{\pi}{6} \frac{(m r_+)^2}{\ln(m r_+)} \sim \frac{\pi}{6} \frac{(k m M)^2}{\ln(k m M)}. \quad (35)$$

(Нельзя согласиться с условием  $eQ \sim 1/(4\pi)$  для равенства этих интенсивностей, полученным в [6] из сравнения  $\epsilon_m = eQ/r_+$  с  $T_H = 1/(4\pi r_+)$ .)

Рассмотрим в заключение, как меняется за счет обсуждаемого нетемпературного излучения поверхность горизонта, а следовательно, и энтропия заряженной черной дыры. Для этого удобно ввести, следуя [18], так называемую неприводимую массу черной дыры  $M_0$ :

$$2M_0 = M + \sqrt{M^2 - Q^2}; \quad (36)$$

здесь и ниже полагаем  $k = 1$ . Это же соотношение удобно переписать так:

$$M = M_0 + \frac{Q^2}{4M_0}. \quad (37)$$

Очевидно,  $r_+ = 2M_0$ , так что поверхность горизонта и энтропия черной дыры пропорциональны  $M_0^2$ .

При излучении заряженной частицы изменение заряда черной дыры составляет  $\Delta Q = -e$ , а изменение массы равно  $\Delta M = -eQ/r_+ + \xi$ , где  $\xi$  — отклонение энергии частицы от максимальной. Используя соотношение (37), нетрудно убедиться в том, что в результате излучения неприводимая масса  $M_0$ , а вместе с ней поверхность горизонта и энтропия непрелюдной черной дыры не изменяются, если энергия частицы равна максимальной  $eQ/r_+$ . Иными словами, такой процесс, а он наиболее вероятен, является адиабатическим. При  $\xi > 0$  неприводимая масса, поверхность горизонта и энтропия растут.

Как обычно, предельная черная дыра, где  $M = Q = 2M_0$ , — это особый случай. Здесь при максимальной энергии излученной частицы  $\epsilon_m = e$  получаем  $\Delta M = \Delta Q = -e$ , так что черная дыра после излучения остается предельной. При этом  $\Delta M_0 = -e/2$ , так что неприводимая масса и поверхность горизонта убывают. В более общем случае,  $\Delta M = -e + \xi$ , неприводимая масса изменяется так:

$$\Delta M_0 = -\frac{e - \xi}{2} + \sqrt{\left(M_0 - \frac{e}{2} + \frac{\xi}{4}\right) \xi}. \quad (38)$$

Ясно, что в случае предельной дыры с большой массой уже при малом отклонении  $\xi$  излученной энергии от максимальной радикал в этом выражении доминирует, так что поверхность горизонта растет.

Я благодарен О. В. Жирову, И. В. Колоколову, А. И. Мильштейну и В. В. Соколову за интерес к работе и полезные замечания. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-02-17797), Министерства образования РФ (грант 3Н-224-98) и Федеральной программы Интеграция-1998 (проект № 274).

### Литература

1. М. А. Марков, В. П. Фролов, ТМФ 3, 3 (1970).
2. W. T. Zaumen, Nature 247, 531 (1974).
3. B. Carter, Phys. Rev. Lett. 33, 558 (1974).
4. G. W. Gibbons, Comm. Math. Phys. 44, 245 (1975).
5. T. Damour and R. Ruffini, Phys. Rev. Lett. 35, 463 (1975).
6. И. Д. Новиков, А. А. Старобинский, ЖЭТФ 78, 3 (1980).
7. F. Sauter, Z. Phys. 69, 742 (1931).
8. W. Heisenberg and H. Euler, Z. Phys. 98, 714 (1936).
9. J. Schwinger, Phys. Rev. 82, 664 (1951).
10. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Квантовая электродинамика, Наука, Москва (1989).
11. N. Deruelle and R. Ruffini, Phys. Lett. B 52, 437 (1974).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Наука, Москва (1988).
13. Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, УФН 105, 403 (1971).
14. А. Б. Мигдал, УФН 123, 369 (1977).
15. A. Sommerfeld, Wave Mechanics, Dutton, New York (1930).
16. H. Bethe, Intermediate Quantum Mechanics, Benjamin, New York (1964).
17. D. N. Page, Phys. Rev. D 16, 2402 (1977).
18. D. Christodoulou, Phys. Rev. Lett. 25, 1596 (1970); D. Christodoulou and R. Ruffini, Phys. Rev. D 4, 3552 (1971).