

СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ ПО ИЕРАРХИЧЕСКИМ ГРЕБЕШКОВЫМ СТРУКТУРАМ

В. Е. Архинчеев*

Бурятский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук
670047, Улан-Удэ, Россия

Поступила в редакцию 2 июня 1998 г.

Рассмотрено случайное блуждание на точно решаемой гребешковой модели перколяционных кластеров. Показано, что диффузия вдоль оси структуры носит аномальный характер. Выведены обобщенные диффузионные уравнения с временными производными дробного порядка. Проведено обобщение на многомерный случай. Изучена связь с проблемой диффузии в среде с ловушками. Получены уравнения для описания диффузии в среде с ловушками. Рассмотрен переход к обычной диффузии за счет введения конечной длины ребер. Проанализирован случай с N ребрами различной длины. Показано, что при решении этой задачи возникает N -канальное уравнение диффузии. Выведены уравнения, описывающие диффузию взаимодействующих электронов.

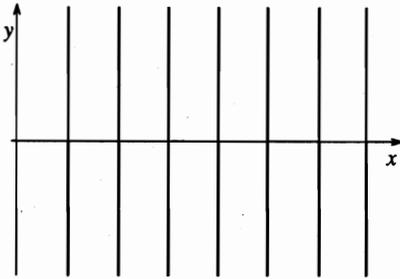
1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к случайному блужданию в сильно неоднородных средах и на фракталах обусловлен как многочисленными приложениями задач диффузии, например, к задаче проводимости сильно неоднородных сред, так и необычным аномальным характером случайных блужданий на фракталах. Аномальность заключается в степенной зависимости среднеквадратичного смещения от времени [1]:

$$\langle X^2(t) \rangle \propto t^{2/(2+\theta)}, \quad \theta \geq 0. \quad (1)$$

Закон (1) был установлен методом ренормгруппы для регулярных фракталов типа паркетов Серпинского [1, 2] и путем численного моделирования для перколяционных кластеров — статистических фракталов [3, 4]. Изменение характера диффузии обусловлено по крайней мере двумя причинами — сильной извилистостью перколяционных путей на всех масштабах и наличием тупиков («мертвых концов») на токонесящих путях. В работе [5] была предложена модель, учитывающая наличие тупиков в перколяционных системах — гребешковая структура (см. рисунок). С помощью техники производящих функций было показано, что зависимость среднеквадратичного смещения вдоль оси структуры от времени имеет аномальный вид (1) с индексом $\theta = 2$. Однако уравнение не было получено, а для функции Грина было предложено неправильное экстраполяционное выражение гауссовского вида. В работах [6, 7] было дано строгое описание диффузии на такой структуре. Было выведено уравнение диффузии, описывающее случайное блуждание вдоль оси структуры. Оно отличается от уравнения непрерывности: вместо первой производной по времени возникает производная дробного порядка $1/2$.

*E-mail: varkhin@bsc.buriatia.ru



Гребешковая структура: к проводящей оси ($y = 0$) прикреплены ребра, уходящие в бесконечность

(Выражение для диффузионного тока J обычное.) Основное внимание в этих работах было уделено влиянию электрического поля на диффузию и установлению связи между диффузией и проводимостью для аномального случая.

Модель гребешковой структуры является одной из немногих точно решаемых моделей с необычным характером диффузии и явно учитывает влияние тупиков на характер диффузии. Поэтому представляет интерес дальнейшее исследование случайного блуждания на гребешковой структуре. (Можно надеяться, что полученные результаты будут отражать особенности диффузионных процессов в реальных средах перколяционного типа.) В настоящей работе рассмотрены различные иерархические структуры данной модели и проведено обобщение на многомерный случай. Кроме того, рассмотрен переход к обычной диффузии при конечной длине ребер, и получено уравнение, описывающее случайное блуждание по гребешковой модели при конечной длине ребер. Наиболее интересной представляется диффузия по гребешковой структуре, когда N ребер структуры имеют различную длину. В этом случае блуждание существенно зависит от того, по каким ребрам прошла частица и какую длину имеют эти ребра. При решении этой проблемы возникает N -канальное уравнение диффузии, связывающее между собой все N ребер. Получены асимптотические решения этого уравнения. В работе изучена также связь с задачей диффузии в средах с ловушками (continuous time random walk). Выведены системы уравнений, описывающие эту проблему. Для системы взаимодействующих электронов также получены уравнения, описывающие их диффузию, и найдены решения этих уравнений. В Заключении обсуждаются полученные результаты.

2. ДИФФУЗИЯ НА ГРЕБЕШКОВОЙ СТРУКТУРЕ

Напомним кратко результаты работы [6]. Особенность диффузии в рассматриваемой модели заключается в том, что смещение в направлении x возможно только вдоль оси структуры при $y = 0$. Другими словами, коэффициент диффузии D_{xx} отличен от нуля только при $y = 0$:

$$D_{xx} = D_1 \delta(y) \quad (J_x = -D_1 \delta(y) \partial^2 \rho / \partial x^2). \quad (2)$$

Здесь ρ — плотность диффундирующих частиц. Диффузия вдоль ребер считается обычной: $D_{yy} = D_2$. Таким образом, случайное блуждание на гребешковой структуре описывается тензором диффузии:

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D_1 \delta(y) & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Соответственно, получим следующее диффузионное уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_1 \delta(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G(x, y, t) = \delta(x) \delta(y) \delta(t). \quad (4)$$

Здесь $G(x, y, t)$ — функция Грина диффузионной задачи. Используя преобразования Лапласа по времени и Фурье по координате, перейдем к смешанному (s, k, y) -представлению:

$$(s + D_1 k^2 \delta(y) - D_2 \partial^2 / \partial y^2) G(s, k, y) = \delta(y). \quad (5)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$G(s, k, y) = \frac{\exp(-\sqrt{s/D_2} |y|)}{2\sqrt{s D_2} + D_1 k^2}. \quad (6)$$

Рассмотрим диффузию вдоль оси структуры, т.е. при $y = 0$. Соответствующая функция Грина имеет вид

$$G(x, 0, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_1 t^3}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{4D_1 \tau} - \frac{D_2 \tau^2}{4t}\right) \sqrt{D_2 \tau} d\tau. \quad (7)$$

При получении выражения (7) было использовано тождество

$$\int \exp(-\alpha \tau) d\tau = \frac{1}{\alpha}.$$

Полное число частиц на оси структуры убывает со временем:

$$\langle G \rangle = \int G(x, 0, t) dx = \frac{1}{\sqrt{2D_2 t}}.$$

Таким образом, функция Грина $G(x, 0, t)$ описывает диффузию с несохраняющимся числом частиц. Это связано с уходом частиц в ребра бесконечной длины. С учетом этого вычислим смещение вдоль оси структуры:

$$\langle X^2(t) \rangle = \frac{\langle X^2 G \rangle}{\langle G \rangle} = D_1 \sqrt{\frac{t}{D_2}}. \quad (8)$$

Обсудим уравнение для величины $G(x, 0, t)$. Как следует из (6), в (s, k) -представлении оно имеет вид

$$\left[2(s D_2)^{1/2} + D_1 k^2 \right] \rho(s, k) = 0. \quad (9)$$

Используя определение дробной производной по времени [8], получим уравнение диффузии для плотности частиц на оси структуры:

$$\left[\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} + \frac{D_1}{D_2^{1/2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \rho(x, t) = 0, \quad (10)$$

где оператор дробного дифференцирования по времени равен

$$\frac{\partial^{1/2} f}{\partial t^{1/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{|t - \tau|^{1/2}}.$$

Интегродифференциальный вид уравнения диффузии (10) является следствием случайного исчезновения и последующего рождения (уход с оси и возвращение на нее) при блуждании вдоль оси структуры. Нашей целью является дальнейшее обобщение этих результатов.

3. МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим сначала трехмерную гребешковую структуру. Она образуется путем присоединения к ребрам дополнительных перпендикулярных ребер в направлении оси z . Следовательно, в трехмерном случае смещение в x -направлении возможно только вдоль пересечения плоскостей $y = 0$ и $z = 0$. Иначе говоря, коэффициент диффузии D_{xx} отличен от нуля только при $y = 0$ и $z = 0$: $D_{xx} = D_1 \delta(y) \delta(z)$. Соответственно, смещение в y -направлении возможно только при $z = 0$, смещение по z обычное. Таким образом, получим тензор диффузии

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D_1 \delta(y) \delta(z) & 0 & 0 \\ 0 & D_2 \delta(z) & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

и соответствующее уравнение диффузии с коэффициентом (11) в смешанном (s, k, y, z) -представлении:

$$\left[s - D_1 k^2 \delta(y) \delta(z) - D_2 \delta(z) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - D_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \rho(s, k, y, z) = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) будем искать в виде

$$\rho(s, k, y, z) = g(s, k) \exp(-\lambda_2 |y| - \lambda_3 |z|). \quad (13)$$

Подставив (13) в (12), определим параметры λ_2 и λ_3 и функцию $g(s, k)$:

$$\lambda_3^2 = \frac{s}{D_3}, \quad \lambda_2^2 = \frac{2\lambda_3 D_3}{D_2} = \frac{2(s D_3)^{1/2}}{D_2}, \quad (14)$$

$$g(s, k) = \frac{1}{2\lambda_2 D_2 + D_1 k^2}. \quad (15)$$

Отсюда для среднеквадратичного смещения вдоль осей x и y получаем

$$\langle X^2(t) \rangle \propto t^{1/4}, \quad (16)$$

$$\langle Y^2(t) \rangle \propto t^{1/2}. \quad (17)$$

Следовательно, в N -мерном случае тензор диффузии описывается матрицей:

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D_1\delta(x_2)\dots\delta(x_N) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_2\delta(x_3)\dots\delta(x_N) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & D_{N-1}\delta(x_N) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_N \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Соответственно, решение N -мерной диффузионной задачи будем искать в виде

$$\rho(s, k, x_2, x_3, \dots, x_N) = g(s, k) \exp(-\lambda_2|x_2| - \lambda_3|x_3| - \dots - \lambda_N|x_N|). \quad (19)$$

При этом параметры λ_n связаны соотношениями

$$2\lambda_N = \frac{s}{D_N}, \quad \lambda_{N-1}^2 = \frac{2\lambda_N D_N}{D_{N-1}}, \dots, \quad \lambda_2^2 = \frac{2\lambda_3 D_3}{D_2}, \quad (20)$$

а функция $g(s, k)$ определена в (15). Выражения (19) и (20) дают полное решение задачи. Например, легко вычислить среднеквадратичное смещение вдоль основной оси структуры:

$$\langle X_N^2(t) \rangle \propto t^{1/2(N-1)}. \quad (21)$$

Квадрат смещения для следующего бокового ребра, которое совместно с прикрепленными ребрами образует $(N-1)$ -мерную гребешковую структуру, равен

$$\langle X_{N-1}^2(t) \rangle \propto t^{1/2(N-2)} \quad (22)$$

и т.д. На предпоследней оси, от которой отходят только ребра бесконечной длины, получим

$$\langle X_2^2(t) \rangle \propto t^{1/2}. \quad (23)$$

Таким образом, случайное блуждание на многомерной гребешковой структуре носит иерархический характер, и возникает множество вариантов поведения среднеквадратичного смещения вдоль осей структуры. При этом уравнения, описывающие случайное блуждание вдоль m -ой оси N -мерной структуры, можно представить в виде системы уравнений с заменой первой производной по времени на дробную производную соответствующего порядка:

$$(s^\alpha + \partial^2/\partial x_m^2)\rho(s, x) = 0, \quad (24)$$

где $\alpha = 1/2(N-m)$.

4. ГРЕБЕШКОВАЯ СТРУКТУРА С КОНЕЧНЫМИ ДЛИНАМИ РЕБЕР

До сих пор рассматривались гребешковые структуры с бесконечной длиной ребер. Ниже изучается диффузия по двумерной структуре с конечной длиной ребер L и отражающими границами. Для решения этой проблемы воспользуемся следующим методом.

Представим уравнение (4) в виде обычного уравнения диффузии с неоднородной правой частью,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - D_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = D_1 \delta(y) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (25)$$

и граничными условиями

$$J(y = \pm L) = 0. \quad (26)$$

Функция Грина уравнения (25) с граничными условиями (26) хорошо известна:

$$G(y, t) = \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left(-D_2 t \frac{m^2 \pi^2}{L^2}\right) \cos \frac{m \pi y}{L}. \quad (27)$$

Таким образом, получаем интегральное уравнение для концентрации:

$$\rho(x, y, t) = \int G(y - y', t - t') D_1 \delta(y') \frac{\partial^2 \rho(x, y', t')}{\partial x^2} dy' dt'.$$

Оно имеет наиболее простой вид в (s, k, y) -представлении:

$$\rho(s, k, y) = -\frac{D_1 k^2}{L} \sum \frac{\cos(m \pi y / L)}{s + m^2 \pi^2 / L^2} \rho(s, k, 0). \quad (28)$$

При $y = 0$ получается замкнутое уравнение для $\rho(s, k, 0)$:

$$K(s, L) \rho(s, k) = -D_1 k^2 \rho(s, k). \quad (29)$$

Здесь обратный оператор равен

$$K^{-1} = \frac{1}{sL} + \frac{\text{cth} [L(sD_2)^{1/2}]}{2(sD_2)^{1/2}}. \quad (30)$$

При бесконечной длине ребер ($L = \infty$) получаем известное выражение:

$$K(s, \infty) = 2(sD_2)^{1/2}.$$

На больших временах получим асимптотическое обычное уравнение диффузии с коэффициентом диффузии, зависящим от длины ребра:

$$[s + \text{const} \cdot D_1 k^2 / L] \rho(s, k) = 0. \quad (31)$$

Выше рассматривался случай структуры с одинаковой длиной ребер L . Теперь будем предполагать, что N ребер имеют различные длины L_1, L_2, \dots, L_N с дальнейшим периодическим повторением. Расстояние между узлами на оси структуры равно a . Чтобы понять, как описывать случайное блуждание по такой структуре, проанализируем случай с двумя длинами L_1 и L_2 . Представим вторую производную по координате x в конечно-разностном виде и введем обозначения $K(s, L = L_1) = K_1$ и $K(s, L = L_2) = K_2$.

Кроме того, обозначим через F_1 концентрацию частиц в точке на оси, к которой прикрепляется ребро длиной L_1 , аналогичным образом вводится F_2 . Тогда для описания частиц на оси получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} K_1 F_1(x) &= D_1 \frac{F_2(x+a) + F_2(x-a) - 2F_1(x)}{a^2}, \\ K_2 F_2(x) &= D_1 \frac{F_1(x+a) + F_1(x-a) - 2F_2(x)}{a^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

или в k -представлении

$$\begin{pmatrix} K_1(s) - 2\frac{D_1}{a^2} & 2D_1 \cos(ka) \\ 2D_1 \cos(ka) & K_2(s) - 2\frac{D_1}{a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(k) \\ F_2(k) \end{pmatrix} = 0. \quad (33)$$

Равенство нулю детерминанта уравнения определяет связь между параметрами s и k или, иначе говоря, аналог уравнения диффузии в (s, k) -представлении:

$$T_1(s)T_2(s) - C^2 \cos^2(ka) = 0, \quad (34)$$

где $T(s) = K(s) - C$, $C = 2D_1/a^2$. Из (34) при равных длинах ребер и при $a \rightarrow 0$, получаем уравнение (9), как и должно быть.

Таким образом, для описания случайного блуждания по N ребрам различной длины необходимо составить систему из N уравнений. Эта система уравнений возникает, потому что диффузия существенно зависит от того, по каким ребрам и какой длины блуждает частица. Как показывает предшествующий анализ, в случае гребешковой структуры с N ребрами детерминант системы уравнений будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} T_1 & \exp(ika) & 0 & 0 & \dots & 0 & \exp(-ika) \\ \exp(-ika) & T_2 & \exp(ika) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-ika) & T_3 & \exp(ika) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-ika) & T_4 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \exp(ika) & 0 & 0 & \dots & \dots & \exp(-ika) & T_N \end{pmatrix} = 0. \quad (35)$$

Таким образом, вместо обычного уравнения диффузии возникает N -канальное уравнение диффузии, т. е. взамен достаточно простого дисперсионного соотношения $s = k^2$, справедливого при обычной диффузии, получается уравнение N -го порядка, имеющее N решений. Кроме того, вид оператора K согласно (30) зависит от соотношения параметра s и времени диффузии по ребру $t_i = D/L_i^2$. Проанализируем решения уравнений (35) с помощью качественных рассуждений. Пусть длины ребер существенно различаются между собой, тогда в задаче возникает иерархия времен, связанная с диффузией по этим ребрам: $t_1 \ll t_2 \ll t_3 \ll \dots \ll t_N$. На малых временах, меньших любых характерных времен задачи, диффузия будет носить аномальный характер, как и в структуре с бесконечными длинами ребер. С увеличением времени аномальная диффузия сменяется на обычную с коэффициентом диффузии, зависящим от длины соответствующего ребра. На временах $t_1 \ll t \ll t_2$ $D \sim D_1/L_1$, при $t_2 \ll t \ll t_3$ $D \sim D_1/L_2$ и т. д.:

$$\langle X^2(t) \rangle \propto t^{1/2}, \quad t \ll t_1 \ll \dots \ll t_N,$$

$$\langle X^2(t) \rangle \propto D_1 t / L_m, \quad t_m \ll t \ll t_{m+1}.$$

Более подробное решение этой системы составляет предмет отдельного рассмотрения.

5. ДИФФУЗИЯ В СРЕДЕ С ЛОВУШКАМИ

Изученная выше проблема случайного блуждания по N -мерной гребешковой структуре связана с проблемой диффузии в среде с ловушками. Отличие заключается в том, что при диффузии в среде с ловушками частицы не исчезают, а с некоторой вероятностью задерживаются на каждом узле. Полное число диффундирующих частиц сохраняется [9, 10]. Для гребешковой структуры постановка задачи с непрерывным распределением по временам задержки в двумерном случае эквивалентна исследованию величины

$$\tilde{G}(x, t) = \int G(x, y, t) dy. \quad (36)$$

Согласно (5) функция $\tilde{G}(x, t)$ описывается уравнением

$$\left[s + \frac{D_1 k^2 s^{1/2}}{D_2} \right] \tilde{G} = 1. \quad (37)$$

Следовательно, в случае среды с ловушками уравнение диффузии имеет вид уравнения непрерывности для среды с временной дисперсией:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad (38)$$

где

$$J = -\frac{D_1}{2D_2} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial \rho(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{|t - \tau|^{1/2}}. \quad (39)$$

Диффузия по-прежнему носит аномальный характер с тем же индексом $\theta = 2$.

Перейдем к трехмерному случаю. Рассмотрим усредненную по осям y и z функцию $\tilde{G}(s, k) = \int G(s, k, y, z) dy dz$. Согласно (13) она описывается уравнением

$$\left[s D_2 + D_1 k^2 \left(\frac{4s D_3}{D_2} \right)^{3/4} \right] \tilde{G} = 1. \quad (40)$$

Следовательно, уравнение диффузии имеет вид уравнения непрерывности с диффузионным током

$$J(x, t) \propto -\frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial \rho(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{|t - \tau|^{3/4}}. \quad (41)$$

Рассмотрим функцию Грина, усредненную только по одной координате z :

$$\tilde{G}(k, y, t) = \exp(-\lambda_2 |y|) / \lambda_3 (2\lambda_2 D_2 + D_1 k^2). \quad (42)$$

Соответственно, движение вдоль оси $y = 0$ будет описываться уравнением

$$\left[s^{3/4} + A s^{1/2} k^2 \right] \tilde{G}_1(s, k) = 0, \quad A = \text{const.} \quad (43)$$

Число частиц на оси $y = 0$ не сохраняется, поскольку они уходят в тупики вдоль оси $y = 0$. Диффузионный ток содержит также временную производную порядка $1/2$.

Нетрудно видеть, что в N -мерном случае уравнение для функции \tilde{G}_m , усредненной по m координатам, будет иметь вид

$$(s^\beta + s^\nu k^2) \tilde{G}_m(s, k) = 0, \quad (44)$$

где $\beta = (N - m + 1)/4$, $\nu = (N - m - 1)/4$.

6. ДИФФУЗИЯ ПО ГРЕБЕШКОВОЙ СТРУКТУРЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЕКТРОНОВ

В общем случае ток имеет как диффузионную, так и полевую компоненты

$$\mathbf{j} = -D\nabla\rho + \sigma\mathbf{E}. \quad (45)$$

Здесь коэффициент диффузии D и проводимость σ имеют тензорный вид (3), а электрическое поле удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (46)$$

Следовательно, распределение электрического потенциала на гребешковой структуре описывается уравнением 4-потенциала с сингулярными коэффициентами:

$$\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} - D_1\delta(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \sigma_1\delta(y) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right\} \varphi = 0. \quad (47)$$

После преобразования Фурье по координате x и преобразования Лапласа по времени получим уравнение для потенциала в смешанном (s, k, y) -представлении:

$$\left\{ \left[s + D_1k^2\delta(y) - D_2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left(-k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 4\pi\sigma_1\delta(y)k^2 - 4\pi\sigma_2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} \varphi = 0. \quad (48)$$

Чтобы выяснить общий вид решения уравнения (48), вначале рассмотрим чисто диффузионную задачу ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) и найдем потенциал в этом случае. Такой подход укажет и на способ решения уравнения (48) в общем случае. Согласно формуле (6) плотность диффундирующих частиц на структуре описывается выражением

$$\rho(s, k, y) = \rho(s, k) \exp(-\lambda|y|), \quad (49)$$

т. е. в (s, k, y) -представлении получим

$$\rho(s, k, y) = \rho(s, k) \int \exp(-\lambda|y| + iqy) dy = \rho(s, k) \frac{2\lambda}{\lambda^2 + q^2}. \quad (50)$$

Таким образом, согласно уравнению Пуассона электрический потенциал φ равен

$$\varphi(s, k, q) = \frac{A(s, k)}{(\lambda^2 + q^2)(k^2 + q^2)}. \tag{51}$$

Переходя опять к смешанному (s, k, y) -представлению, получим

$$\varphi(s, k, y) = \phi(s, k) \left[\frac{\exp(-k|y|)}{k} + \frac{\exp(-\lambda|y|)}{\lambda} \right]. \tag{52}$$

Обратим внимание на тот факт, что после двойного дифференцирования по координате y сингулярные части взаимно уничтожаются. Следовательно, и решение уравнения (48) будем искать в аналогичном виде:

$$\varphi(s, k, y) = \phi(s, k) \left[\frac{\exp(-\mu|y|)}{\mu} + \frac{\exp(-\lambda|y|)}{\lambda} \right]. \tag{53}$$

Параметры μ и λ находятся путем подстановки решения (53) в уравнение (48):

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \frac{s + 4\pi\sigma + D_2k^2 - [(s + 4\pi\sigma + D_2k^2)^2 + 4D_2sk^2]^{1/2}}{2D_2}, \\ \lambda^2 &= \frac{s + 4\pi\sigma + D_2k^2 + [(s + 4\pi\sigma + D_2k^2)^2 + 4D_2sk^2]^{1/2}}{2D_2}. \end{aligned} \tag{54}$$

Знаки в выражениях (54) определяются из условия, чтобы при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ решение (53) переходило в (52), т.е.

$$\lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow 0 \\ \sigma_2 \rightarrow 0}} \mu^2 = k^2, \quad \lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow 0 \\ \sigma_2 \rightarrow 0}} \lambda^2 = \frac{s}{D_2}. \tag{55}$$

Соответственно, получим выражение для функции $\phi(s, k)$:

$$\phi(s, k) = \left[\frac{(2\mu D_2 + D_1k^2)(\mu^2 - k^2) - \sigma_1k^2}{\mu} - \frac{(2\lambda D_2 + D_1k^2)(\lambda^2 - k^2) - \sigma_1k^2}{\lambda} \right]^{-1}. \tag{56}$$

Формулы (53)–(56) дают полное решение задачи о диффузии взаимодействующих частиц в гребешковой модели. До сих пор диффузия взаимодействующих частиц в неоднородных средах исследовалась путем численного моделирования.

Покажем также, каким образом общее решение задачи (56) переходит в решение задачи релаксации при $D_1 = D_2 = 0$. Для этого заметим, что при таком предельном переходе остаются конечными величины

$$\begin{aligned} \lim_{D_2 \rightarrow 0} \mu^2 &= k^2 \frac{s}{s + 4\pi\sigma_2}, \\ \lim_{D_2 \rightarrow 0} D_2(\lambda^2 - k^2) &= s + 4\pi\sigma_2, \end{aligned} \tag{57}$$

а параметр λ обращается в бесконечность как $1/D_2^{1/2}$. С учетом этого замечания из формул (53)–(56) легко получить выражение для электрического потенциала в задаче о растекании заряда на гребешковой структуре:

$$\varphi(s, k, y) = \frac{\exp\{-k|y| [s/(s + 4\pi\sigma_2)]\}}{2k [s(s + 4\pi\sigma_2)]^{1/2} + 4\pi\sigma_1k^2}. \tag{58}$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено случайное блуждание в модели гребешковой структуры. Показано, что наличие тупиков на токонесущих путях — ребер на гребешковой структуре — приводит к аномальному характеру случайного блуждания. Установлено, что для диффузионных задач с несохраняющимся числом частиц обобщенное уравнение диффузии должно иметь интегродифференциальный вид: вместо первой производной по времени уравнение должно содержать производную дробного порядка (см. (24)). Дробные производные по времени возникают вследствие случайного исчезновения и рождения (уход с оси структуры и возвращение) диффундирующих частиц.

В случае ребер конечной длины диффузия на больших временах становится обычной, но с коэффициентом, явно зависящим от длины ребер L . Показано, что случайное блуждание на многомерных гребешковых структурах и при различных длинах ребер носит иерархический характер и возможны различные степенные зависимости среднеквадратичного смещения от времени. Таким образом, для явного учета влияния тупиков на путях протекания в неоднородных средах необходимо использовать обобщенные уравнения с временными производными дробного порядка.

Совершенно иная ситуация возникает при описании случайного блуждания в среде с непрерывным распределением времен задержки на ловушках. Как отмечалось выше, задача с ловушками отличается от задачи диффузии вдоль оси гребешковой структуры с уходом в тупики. Отличие состоит в том, что частица не исчезает, а лишь с некоторой вероятностью задерживается на каждом узле. Полное число частиц сохраняется. Поэтому имеет место закон сохранения массы — уравнение непрерывности. Однако аномальный характер диффузии, обусловленный захватом частиц на ловушки, приводит к необычному виду для диффузионного тока (см. (39)). Подчеркнем, что уравнения (24) и (38) с током (39) математически различны. Несмотря на то что в обеих задачах диффузия носит аномальный характер с одним и тем же индексом $\theta = 2$ и решения уравнений различаются не столь существенно, эти уравнения описывают разные физические ситуации. Во-первых, при диффузии вдоль оси гребешковой структуры число частиц не сохраняется. Во-вторых, различными оказываются диффузионные потоки.

Уравнения в дробных временных производных, аналогичные рассмотренным, возникают при описании диффузии на канторовских множествах [11]. В обзоре [12] приводятся обсуждение этих результатов и интерпретация уравнений с временными производными дробного порядка. Согласно [12] дробная степень производной по времени соответствует относительной доле механических (обратимых по времени) и диссипационных диффузионных (необратимых) процессов. При этом не делается существенного различия между уравнениями (24) и (38) с учетом (39), т. е. между собственно временными производными дробного порядка и выражением для тока в дробных производных. Однако, как показано на примере гребешковой структуры, дробные временные производные могут возникнуть при рассмотрении только диссипативных диффузионных процессов, и различные уравнения описывают различные физические ситуации. Наличие тупиков приводит к изменению степени производной по времени, а захват частиц ловушками в конечном счете видоизменяет выражение для диффузионного тока.

Автор выражает благодарность профессору Д. Е. Хмельницкому за поддержку настоящей работы.

Литература

1. Y. Gefen, A. Aharony et al., Phys. Rev. Lett. **47**, 1771 (1981).
2. R. Alexander and R. Orbach, J. de Phys. Lett. **43**, L625 (1982).
3. R. Pandey and D. Stauffer, Phys. Rev. Lett. **51**, 527 (1983).
4. Y. Gefen, A. Aharony, and S. Alexander, Phys. Rev. Lett. **50**, 77 (1983).
5. G. Weiss and S. Havlin, Physica A **134**, 474 (1986).
6. В. Е. Архинчеев, Э. М. Баскин, ЖЭТФ **100**, 292 (1991).
7. В. Е. Архинчеев, AMSE Press: Modelling, Measurement and Control. **49**, 11 (1993).
8. М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости*, Наука, Москва (1966).
9. E. Montroll and G. Weiss, J. Math. Phys. **6**, 167 (1965).
10. M. Shlesinger, J. Stat. Phys. **10**, 421 (1974).
11. Р. Р. Нигматуллин, ТМФ **90**, 354 (1992).
12. А. И. Олемской, А. Я. Флат, УФН **163**, 1 (1993).