

ПОПРАВКИ ПОРЯДКА  $(Z\alpha)^6 m_e^2/m_\mu$  К ТОНКОЙ СТРУКТУРЕ МЮОНИЯА. П. Мартыненко<sup>а\*</sup>, Р. Н. Фаустов<sup>б</sup><sup>а</sup> Самарский государственный университет  
443011, Самара, Россия<sup>б</sup> Научный совет по кибернетике Российской академии наук  
101000, Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 августа 1998 г.

В рамках квазипотенциального метода получена полная величина вклада порядка  $(Z\alpha)^6 m_e^2/m_\mu$  в спектре энергии состояний  $n^3S_1$  мюония. Численное значение вычисленной поправки для интервала  $2^3S_1-1^3S_1$  тонкой структуры мюония составляет 0.19 МГц.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование тонкой структуры мюония и позитрония представляет собой одну из основных проверок квантовой электродинамики, чувствительную к радиационным поправкам высокого порядка по  $\alpha$  [1]. Вычислению различных вкладов в тонкую структуру уровней энергии водородоподобной системы посвящены многочисленные работы [2–5], и интерес к этой задаче не ослабевает [6–9]. Достигнутый в последние годы прогресс в вычислении логарифмических вкладов вида  $\alpha^6 \ln \alpha$  в интервалах тонкой структуры позитрония ( $2^3S_1-1^3S_1$ ,  $2^3S_1-2^3P_J$ ) [10–12] не снимает, тем не менее, необходимость расчета поправок более высокого порядка  $O(\alpha^6)$  [13]. Поправки вида  $(Z\alpha)^6 m_e^2/m_2$  к  $S$ -уровням энергии атома водорода исследовались в ряде работ [6–8] в рамках различных подходов к проблеме связанных состояний, но, как было отмечено в [9], некоторое расхождение в результатах расчета поправок указанного порядка в тонкой структуре водородоподобного атома пока сохраняется. Развитие экспериментальных методов, основанных на бездоплеровской двухфотонной спектроскопии, позволило измерить интервалы «большой» структуры в мюонии и позитронии [14–16]:

$$\Delta E_{Ps}^{exp}(2^3S_1-1^3S_1) = \begin{cases} 1233607218.9 \pm 10.7 \text{ МГц,} \\ 1233607216.4 \pm 3.2 \text{ МГц,} \end{cases} \quad (1)$$

$$\Delta E_{Mu}^{exp}(2^3S_1-1^3S_1) = 2455527936 \pm 120 \pm 140 \text{ МГц.} \quad (2)$$

Частота двухфотонного бездоплеровского перехода  $1S-2S$  в атоме водорода, так же как и сверхтонкое расщепление основного состояния атома водорода, представляет собой величину, измеренную экспериментально с высокой степенью точности [13]. Поскольку  $\alpha^{-1} = 137.0359979$  (32), отношение масс мюона и электрона  $m_\mu/m_e =$

\*E-mail: mart@info.ssu.samara.ru

= 206.768259 (62), и вклад вида  $(Z\alpha)^6 m_e^2/m_\mu$  в случае мюония может достигать величины порядка 1 МГц. Поэтому уменьшение экспериментальной погрешности измерения тонкой структуры мюония до нескольких МГц (также как и для позитрония), планируемое в ближайшее время<sup>1)</sup>, делает расчеты поправок указанного порядка по  $\alpha$  и  $m_e/m_\mu$  весьма актуальными. В данной работе мы провели исследование поправок, связанных с отдачей ядра, имеющих порядок  $(Z\alpha)^6 m_1/m_2$ , в тонкой структуре мюония. В работе [17] были вычислены аналогичные вклады в сверхтонком расщеплении мюония. Существует много подходов для описания релятивистских спектров энергии двухчастичных связанных состояний в квантовой электродинамике [2, 3, 13, 18–20]. Все эти подходы отличаются организацией вычислений: уравнением для описания двухчастичной системы, способом построения оператора взаимодействия частиц, степенью сложности в получении поправок определенной точности в уровнях энергии. Но все методы описания спектров энергии дают эквивалентные результаты в фиксированном порядке теории возмущений по малым параметрам  $\alpha$ ,  $m_1/m_2$ . Наши вычисления основаны на локальном квазипотенциальном уравнении шредингеровского типа [21]

$$\left(\frac{b^2}{2\mu_R} - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_R}\right)\psi_M(\mathbf{p}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)\psi(\mathbf{q}), \quad (3)$$

где  $b^2 = E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2$ ,  $\mu_R = E_1 E_2 / M$  — релятивистская приведенная масса,  $M = E_1 + E_2$  — масса связанного состояния,  $m_1, m_2$  — массы электрона и мюона. В качестве исходного приближения квазипотенциала  $V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)$  для связанной системы  $(e^- \mu^+)$  мы выбираем обычный кулоновский потенциал. На основе уравнения (3) в [22] были определены релятивистские поправки  $m\alpha^6$  в тонкой структуре спектра позитрония, обусловленные однофотонным взаимодействием с учетом вершинных поправок и поправок в фотонном пропагаторе, двухфотонным обменным взаимодействием и вторым порядком теории возмущений.

Прежде всего, вклад

$$\Delta B_1 = \frac{5m_1^2(Z\alpha)^6}{2m_2 n^6}, \quad (4)$$

имеющий порядок  $(Z\alpha)^6 m_1/m_2$ , возникает из условия квантования уровней энергии для кулоновского взаимодействия

$$\frac{b^2}{\mu_R^2} = -\frac{\alpha^2}{n^2}, \quad (5)$$

преобразованного для энергии связи  $B$  данной системы.

## 2. ВКЛАД ОДНОФОТОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ТОНКУЮ СТРУКТУРУ

Основной вклад в энергетический спектр двухчастичного связанного состояния дает однофотонное взаимодействие. Построение квазипотенциала однофотонного взаимодействия в системе двух спинорных частиц подробно исследовалось в работах [22, 23].

<sup>1)</sup> Мы благодарны С. Н. Багаеву за обсуждение данного вопроса.

Отметим, что при этом удобно использовать релятивистский проекционный оператор на состояние  ${}^3S_1$

$$\hat{\Pi} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(\hat{p}_1 + m_1)(1 + \gamma_0)\hat{\epsilon}(-\hat{p}_2 + m_2)}{\sqrt{\epsilon_1 + m_1}\sqrt{\epsilon_2 + m_2}}, \quad (6)$$

где  $p_1, p_2$  — 4-импульсы электрона и мюона в начальном состоянии,  $\epsilon^\mu$  — вектор поляризации мюония. Проводя разложение всех релятивистских множителей по двум малым параметрам  $|\mathbf{p}|/m_{1,2}$  ( $|\mathbf{p}| \sim Z\alpha$  — импульс относительного движения частиц) и  $m_1/m_2$  (отношение масс электрона и мюона) с целью выделить вклад шестого порядка по  $Z\alpha$  и первого порядка по  $m_1/m_2$ , мы можем записать выражение для оператора взаимодействия частиц в координатном представлении в виде

$$V_1(r) = -\frac{Z\alpha}{r} - \frac{\mu_R(Z\alpha)^2}{2m_1^2 r^2} \left(1 + \frac{2m_1}{m_2}\right) - \frac{Z\alpha}{4m_1^2 r^3} (\mathbf{r}\nabla) \left(1 + \frac{4m_1}{m_2}\right) - \\ - \frac{\pi Z\alpha}{3m_1 m_2} \delta\mathbf{r} - \frac{Z\alpha b^2}{m_1 m_2 r} = V_c(r) + \Delta V_1(r). \quad (7)$$

Необходимо отметить, что часть квазипотенциала (7)  $\Delta V_1$  вместе с условием квантования (5) правильно воспроизводит известный энергетический спектр  $S$ -состояний мюония с точностью  $O(\alpha^4)$  [13, 20]. В нашем подходе члены квазипотенциала  $\Delta V_1$  дают также поправки  $O(\alpha^6)$  в спектре энергии. Это связано с зависимостью релятивистской приведенной массы  $\mu_R$ , а также  $b^2$  от  $\alpha$ . Усредняя (7) по кулоновским волновым функциям [24] и выделяя необходимые слагаемые, мы получаем

$$\Delta B_2 = -\frac{3m_1^2(Z\alpha)^6}{4m_2 n^5} \left(5 + \frac{2}{n}\right). \quad (8)$$

Квазипотенциал однофотонного взаимодействия содержит также ряд других членов, которые приводят к поправкам  $\sim (Z\alpha)^6$  в спектре энергии. Они получаются при построении  $V_{1\gamma}$  с точностью до членов  $|\mathbf{p}|^4/m_{1,2}^4$ ,  $|\mathbf{q}|^4/m_{1,2}^4$  и имеют вид

$$\Delta V_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) = -\frac{4\pi Z\alpha}{k^2} \left\{ \frac{b^4}{16m_1^4} \left(3 - \frac{2m_1}{m_2}\right) + \frac{\mathbf{p}^4 + \mathbf{q}^4}{96m_1^4} \left(3 + \frac{m_1}{m_2}\right) - \right. \\ \left. - \frac{(\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2)(\mathbf{p}\mathbf{q})}{96m_1^4} \left(6 + \frac{13m_1}{m_2}\right) - \frac{(\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2)b^2}{96m_1^4} \left(3 - \frac{m_1}{m_2}\right) - \frac{(\mathbf{p}\mathbf{q})b^2}{48m_1^4} \left(3 + \frac{7m_1}{m_2}\right) \right\}. \quad (9)$$

Переходя к расчету поправок  $\sim (Z\alpha)^6$  от членов квазипотенциала  $\Delta V_2$ , заметим, что ряд слагаемых  $\Delta V_2$  приводит к расходящимся интегралам в спектре энергии. Причина этой расходимости заключается в использованном выше разложении по  $|\mathbf{p}|/m_{1,2}$  при построении  $\Delta V_2$ . Типичный расходящийся интеграл имеет вид

$$\int \mathbf{p}^2 d\mathbf{p} \psi_{nS}(\mathbf{p}).$$

Релятивистская поправка порядка  $\alpha^6$  в этом случае определяется вычетом подынтегральной функции в полюсе волновой функции  $\psi_{nS}(\mathbf{p})$  [18]. Результат вычисления этого интеграла для произвольного главного квантового числа  $n$  имеет вид

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}^2}{\mu_R^2} \psi_{nS}(\mathbf{p}) = -\frac{[3 + 2(n-1)(n+1)]}{n^2} \alpha^2 \psi_{nS}(\mathbf{r} = 0). \quad (10)$$

Используя (10) при усреднении  $\Delta V_2$ , мы вычислили релятивистские поправки требуемого порядка для уровней с произвольным значением главного квантового числа  $n$ :

$$\Delta B_3 = \frac{m_1^2 (Z\alpha)^6}{m_2} \left( -\frac{139}{72n^3} + \frac{17}{12} \frac{\ln 2}{n^3} + \frac{73}{72} \frac{1}{n^5} + \frac{43}{96} \frac{1}{n^6} + \frac{17}{12} (-1)^n \frac{1}{n^3} [C + \psi(n) - 1] \right), \quad (11)$$

где  $\psi(z) = d \ln \Gamma(z) / dz$ ,  $C = 0.5772156649\dots$  — константа Эйлера.

### 3. ВТОРОЙ ПОРЯДОК ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Поправка второго порядка теории возмущений в спектре энергии мюония определяется в нашем случае суммой двух членов [25]:

$$\Delta B^{(2)} = \langle \psi_n^c | \Delta V_1 | \psi_n^c \rangle \langle \psi_n^c | \frac{\partial \Delta V_1}{\partial B} | \psi_n^c \rangle + \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{\langle \psi_n^c | \Delta V_1 | \psi_k^c \rangle \langle \psi_k^c | \Delta V_1 | \psi_n^c \rangle}{B_n^c - B_k^c}. \quad (12)$$

Квазипотенциал (7) явно зависит от энергии связи  $B$  (множители  $b^2$  и  $\mu_R$ ). Имея в виду, что с нужной точностью  $\partial b^2 / \partial B = 2\mu$ , представим вклад первого слагаемого (12) в спектр энергии в виде

$$\Delta B_4 = \langle \psi_n^c | \Delta V_1 | \psi_n^c \rangle \langle \psi_n^c | \frac{\partial \Delta V_1}{\partial B} | \psi_n^c \rangle = \frac{m_1^2}{m_2} (Z\alpha)^6 \frac{1}{n^5}. \quad (13)$$

Второй член в (12) определяется редуцированной нерелятивистской кулоновской функцией Грина [19, 26–31], частичное разложение которой имеет вид

$$\bar{G}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}', B) = \sum_{l,m} \bar{g}_{nl}(r, r', B) Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}'). \quad (14)$$

Радиальная функция  $\bar{g}_{nl}(r, r', B_n)$  была получена в [31] в виде штурмовского разложения по полиномам Лагерра. Приведем ее выражение для  $S$ -состояния:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{n0}(r, r', B_n) = & -\frac{4Z\alpha\mu^2}{n} \left[ e^{-(x+x')/2} \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} \frac{L_{m-1}^1(x) L_{m-1}^1(x')}{m(m-n)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{n^2} \left( \frac{5}{2} + x \frac{\partial}{\partial x} + x' \frac{\partial}{\partial x'} \right) e^{-(x+x')/2} L_{n-1}^1(x) L_{n-1}^1(x') \right], \quad (15) \end{aligned}$$

где  $x = 2\mu Z\alpha r / n$ ,  $L_n^m$  — обычные полиномы Лагерра, определяемые формулой

$$L_n^m(x) = \frac{e^x x^{-m}}{n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x} x^{n+m}). \quad (16)$$

Редуцированная кулоновская функция Грина (РКФГ) (15) зависит от двух переменных  $r$  и  $r'$ , но при расчете поправок в (12) с  $\delta$ -потенциалом необходимо знать РКФГ при  $\mathbf{r} = 0$ .

Выражение для РКФГ в этом случае может быть получено с помощью представления Хостлера для кулоновской функции Грина в [32] в результате вычитания полюсного члена:

$$\tilde{G}_n(r, 0, B_n) = -\frac{Z\alpha\mu^2}{n\pi x} e^{-x/2} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-x)^{n-s}}{s!} \frac{n!}{[(n-s)!]^2} \times \left\{ (n-s) \left[ \psi(n+1) - 2\psi(n-s+1) - \frac{2(n-s)+3-x}{2n} + \ln x \right] + 1 \right\}. \quad (17)$$

В отличие от [32], формула (17) не содержит свободной двухчастичной функции Грина  $G^f(r) = -\mu_R e^{-Z\alpha\mu r} / 2\pi r$ , определяющей итерационную часть квазипотенциала. Ее вклад в спектр энергии будет получен отдельно. Рассмотрим в качестве примера расчет энергетической поправки во втором порядке теории возмущений, определяемой  $\delta$ -потенциалом и членом  $\Delta V_1 \propto 1/r^2$ . Этот вклад можно представить в виде

$$\delta B = -\frac{\mu^5 (Z\alpha)^6}{3m_1 m_2 n^4} \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!(k!)^2} \times \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} L_{n-1}^1(x) dx \left\{ k \left[ \psi(n+1) - 2\psi(k+1) - \frac{2k+3-x}{2n} + \ln x \right] + 1 \right\}. \quad (18)$$

Выражение (18) содержит интегралы двух типов со степенной и логарифмической функциями соответственно. Вычисляя первый интеграл по переменной  $x$ ,

$$I_1 = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} L_{n-1}^1(x) dx = \frac{(k-1)! \Gamma(n+1-k)}{(n-1)! \Gamma(2-k)}, \quad (19)$$

видим, что в сумме по  $k$  остается только одно слагаемое с  $k = 1$ . Второй интеграл в (18)

$$I_2 = \int_0^\infty x^{k-1} \ln x e^{-x} L_{n-1}^1(x) dx = \frac{(2-k)_{n-1} \Gamma(k)}{(n-1)!} [\psi(k) + \psi(2-k) - \psi(n+1-k)] \quad (20)$$

приводит к сумме следующего вида:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\psi(2-k)(2-k)_{n-1}}{(n-k)! k!} = -\frac{n-1}{n} + C, \quad (21)$$

где

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\ln n + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \right] = 0.57721566\dots$$

— постоянная Эйлера. Учитывая также, что

$$\lim_{k \rightarrow n} \frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(1-k)} = (-1)^{n-1} (n-1)!, \quad (22)$$

мы окончательно получаем следующее выражение для поправки (18):

$$\delta B = -\frac{m_1^2}{6m_2} (Z\alpha)^6 \frac{1}{n^4} (4n+9). \quad (23)$$

Таблица 1

Вклады второго порядка теории возмущений, определяемые РКФГ и квазипотенциалом (7), в единицах  $(Z\alpha)^6 m_1^2/m_2$

$\Delta V_1$	$-\frac{Z\alpha b^2}{m_1 m_2 r}$	$-\frac{(Z\alpha)^2 \mu_R}{2r^2 m_1^2} \left(1 + \frac{2m_1}{m_2}\right)$	$-\frac{Z\alpha(r\nabla)}{4m_1^2 r^3} \left(1 + \frac{4m_1}{m_2}\right)$	$-\frac{\pi Z\alpha}{3m_1 m_2} \delta(\mathbf{r})$
$-\frac{Z\alpha b^2}{m_1 m_2 r}$	-	$\frac{2-n}{n^3}$	$\frac{2n^2 - 5n + 1}{4n^6}$	-
$-\frac{(Z\alpha)^2 \mu_R}{2m_1^2 r^2} \left(1 + \frac{2m_1}{m_2}\right)$	$\frac{2-n}{n^5}$	$\frac{2n+3}{2n^4}$	$-\frac{n^2+3n-1}{4n^5}$	$-\frac{4n+9}{6n^4}$
$-\frac{Z\alpha(r\nabla)}{4m_1^2 r^3} \left(1 + \frac{4m_1}{m_2}\right)$	$\frac{2n^2-5n+1}{4n^6}$	$-\frac{n^2+3n-1}{4n^5}$	$-\frac{n(n-1)(n+1)}{24n^6}$	$-\frac{n^2-6n+8}{12n^5}$
$-\frac{\pi Z\alpha}{3m_1 m_2} \delta(\mathbf{r})$	-	$-\frac{4n+9}{6n^4}$	$-\frac{n^2-6n+8}{12n^5}$	-

Аналогично проводятся вычисления вкладов других членов квазипотенциала (7) во втором порядке теории возмущений с помощью (12), (15), (17). Результаты этих расчетов представлены в табл. 1. Слагаемые квазипотенциала  $\Delta V_1$  выписаны здесь в первой строке и в первом столбце. Величина второго интеграла в (12) с различными членами  $\Delta V_1$  в единицах  $(Z\alpha)^6 m_1^2/m_2$  представлена на пересечении соответствующих строк и столбцов. Полный вклад редуцированной кулоновской функции Грина без учета  $G^f$  в спектр энергии равен

$$\Delta B_5 = \left( -\frac{25}{24} - \frac{3}{n} - \frac{49}{24n^2} + \frac{3}{2n^3} \right) \frac{m_1^2 (Z\alpha)^6}{m_2 n^3}, \tag{24}$$

Рассмотрим теперь опущенный в РКФГ (17) вклад свободного двухчастичного пропагатора в поправку  $\Delta B^{(2)}$ . Расчет соответствующей поправки в спектре энергии удобнее выполнить в импульсном представлении. Имея ввиду, что

$$G^f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) = \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})}{b^2/2\mu_R - \mathbf{p}^2/2\mu_R}, \tag{25}$$

а  $\delta$ -член квазипотенциала (7) уже содержит массу мюона в знаменателе, мы можем представить необходимую поправку итерационного типа следующим образом:

$$\Delta B_6 = \frac{2\mu(Z\alpha)^2 \pi^2 \psi_{nS}(0)}{3m_2 m_1^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \psi_{nS}(\mathbf{p}) \left[ \frac{\mathbf{p}\mathbf{k}}{k^2} - \frac{\mathbf{p}^2 + W^2}{k^2} \right] \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3 (q^2 + W^2)}, \tag{26}$$

где  $W^2 = \mu_R^2 (Z\alpha)^2/n^2$ . Расходимость этого интеграла такая же, что и в (10). Используя фейнмановскую параметризацию и подстановку (10) при вычислении (26), мы получаем

$$\Delta B_6 = -\frac{m_1^2 (Z\alpha)^6}{12m_2} \left( \frac{1}{n^3} - \frac{2 \ln 2}{n^3} - \frac{2}{n^4} - \frac{2}{n^3} (-1)^n [C + \psi(n) - 1] \right). \tag{27}$$

#### 4. ДВУХФОТОННОЕ ОБМЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Амплитуда двухфотонного обменного взаимодействия представлена на двух диаграммах на рис. 1. Соответствующие этим диаграммам операторы взаимодействия частиц имеют вид

$$V_{2\gamma}^{(a)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{i(Z\alpha)^2}{\pi^2} \int \frac{f_1(k, m_1, m_2) d^4k}{[(k-p)^2 + i\epsilon][(k-q)^2 + i\epsilon] D_e(k) D_\mu(-k)}, \quad (28)$$

$$f_1(k, m_1, m_2) = m_2(4m_1 + 2k_0) - 2m_1k_0 - 2k_0^2 + \frac{2}{3}k^2,$$

$$D_\mu(-k) = k^2 - 2E_2k_0 + b^2 + i\epsilon \approx -2m_2k_0 + i\epsilon,$$

$$V_{2\gamma}^{(b)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{i(Z\alpha)^2}{\pi^2} \int \frac{f_2(k, m_1, m_2) d^4k}{[(k-p)^2 + i\epsilon][(k-q)^2 + i\epsilon] D_e(k) D_\mu(p-q-k)}, \quad (29)$$

$$f_2(k, m_1, m_2) = m_2(4m_1 + 2k_0) - 2m_1k_0 - 6k_0^2 + \frac{10}{3}\mathbf{p}\mathbf{k} + \frac{10}{3}\mathbf{q}\mathbf{k} + \frac{10}{3}k^2,$$

$$D_\mu(p-q-k) = k^2 + 2E_2k_0 + 2\mathbf{k}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 + b^2 + i\epsilon \approx 2m_2k_0 + i\epsilon.$$

Основной вклад  $V_{2\gamma}$  в спектр энергии  $\propto \alpha^5$ . Поправки порядка  $(Z\alpha)^6$  также могут появляться в уровнях энергии, если учесть, например, вклад фотонных полюсов, когда  $k_0 \sim \alpha$ ,  $|\mathbf{p}| \sim \alpha$ ,  $|\mathbf{q}| \sim \alpha$ ,  $|\mathbf{k}| \sim \alpha$ . Чтобы выделить эти члены, преобразуем произведение электронного и мюонного знаменателей в прямой двухфотонной диаграмме следующим образом:

$$\frac{1}{D_e(k) D_\mu(-k)} = \frac{-2\pi i \delta(k_0)}{-2E(\mathbf{k}^2 - b^2)} - \frac{1}{2E} \left[ \frac{1}{(k_0 + i\epsilon) D_e(k)} + \frac{1}{(-k_0 + i\epsilon) D_\mu(-k)} \right], \quad (30)$$

где слагаемое  $\sim \delta(k_0)$  в правой части (30) сокращается с итерационным членом квазипотенциала. Первое слагаемое в квадратных скобках имеет такую же структуру в главном

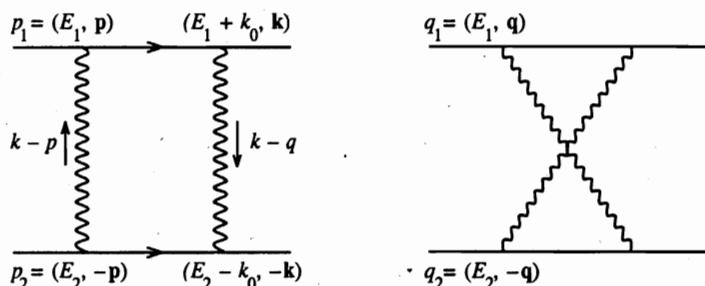


Рис. 1. Прямая и перекрестная диаграммы двухфотонного обменного взаимодействия

порядке по  $1/m_2$ , что и перекрестная амплитуда. В результате квазипотенциал двухфотонного взаимодействия, приводящий к необходимой поправке  $(Z\alpha)^6 m_1^2/m_2$ , будет иметь вид

$$V_{2\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2i(Z\alpha)^2}{3\pi^2} \int \frac{d^4k[4\mathbf{k}^2 + 5\mathbf{k}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - 6k_0^2]}{[(k-p)^2 + i\epsilon][(k-q)^2 + i\epsilon]D_e(k)(2m_2k_0 + i\epsilon)}. \quad (31)$$

Вклад  $V_{2\gamma}$  в спектр энергии был получен отдельно для  $n = 1$  и  $n = 2$  с помощью системы аналитических вычислений «Mathematica» [33] (пакет feynfrag.m), и соответствующие результаты имеют вид

$$\Delta B_{2\gamma} = \begin{cases} -\frac{7m_1^2}{2m_2}(Z\alpha)^6, & n = 1, \\ -\frac{31m_1^2}{16m_2}(Z\alpha)^6, & n = 2. \end{cases} \quad (32)$$

### 5. ТРЕХФОТОННОЕ ОБМЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Всего имеется шесть диаграмм, показанных на рис. 2, которые определяют амплитуду трехфотонного обменного взаимодействия в мюонии.

Рассмотрим первую из диаграмм на рис. 2. Соответствующая ей амплитуда имеет фактор  $\alpha^6$ , который возникает благодаря вершинам электромагнитного взаимодействия и кулоновским волновым функциям. Поэтому на первом этапе вычислений мы пренебрежем векторными импульсами относительного движения электрона и мюона в начальном и конечном состояниях, имея ввиду, что необходимая точность вычислений уже обеспечена. Тогда амплитуда первой из диаграмм рис. 2 имеет вид

$$T_1^{2\gamma} = -\frac{(Z\alpha)^3}{4\pi^5} \int d^4p \int d^4p' \frac{\langle \gamma_1^\lambda (\hat{q}_1 - \hat{p}' + m_1) \gamma_1^\nu (\hat{p}_1 - \hat{p} + m_1) \gamma_1^\mu \rangle \times \langle \gamma_2^\mu (\hat{p}_2 + \hat{p} + m_2) \gamma_2^\nu (\hat{q}_2 + \hat{p}' + m_2) \gamma_2^\lambda \rangle}{D_e(p)D_e(p')D_\mu(-p)D_\mu(-p')}, \quad (33)$$

где  $D_{e,\mu}(p)$  — знаменатели пропагаторов электрона и мюона:

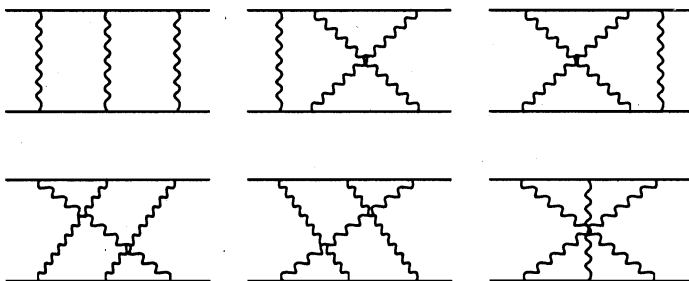


Рис. 2. Диаграммы Фейнмана, определяющие трехфотонное обменное взаимодействие в системе  $(e^- \mu^+)$



$$D(\pm p) = p^2 - w^2 \pm 2mp^0 + i\epsilon, \quad w^2 = -b^2, \quad (34)$$

а угловые скобки обозначают усреднение по дираковским биспинорам;  $p_1, p_2$  — 4-импульсы частиц в начальном состоянии,  $q_1, q_2$  — в конечном состоянии. Множитель  $Z\alpha$ , как всегда, подчеркивает обменный характер фотонного взаимодействия между частицами. Пропагаторы обменных фотонов выбирались в ковариантной калибровке Фейнмана. Использование кулоновской калибровки, как известно, является наиболее естественным для обменных фотонов, так как кулоновское взаимодействие доминирует в системе  $(e^- \mu^+)$ . Тем не менее, в работе [17] была показана эквивалентность кулоновской и фейнмановской калибровок для расчетов трехфотонных диаграмм в приближении рассеяния. Для построения квазипотенциала по амплитуде  $T_1^{3\gamma}$ , описывающего взаимодействие в системе  $(e^- \mu^+)$  с  $L = 0$  и  $J = 1$ , введем в начальном и конечном состояниях проекционный оператор (6), положив, кроме того,  $\mathbf{p} = \mathbf{q} = 0$ . Использование (6) позволяет избежать громоздкого перемножения матриц в биспинорных свертках и сразу перейти к вычислению общего следа в (33). В результате квазипотенциал первой обменной диаграммы можно представить в виде

$$V_1^{3\gamma} = -\frac{(Z\alpha)^3}{\pi^5} \int d^4 p \int d^4 p' \frac{F_1(p, p')}{D_\gamma(p)D_\gamma(p')D_\gamma(p-p')D_e(p)D_e(p')D_\mu(-p)D_\mu(-p')}, \quad (35)$$

$$D_\gamma(p) = p^2 - w^2 + i\epsilon,$$

$$F_1(p, p') = f_{12}(p, p')m_2^2 + \frac{1}{3}f_{11}m_2, \quad f_{12} = pp' - 4m_1^2 - 2m_1p_0 - 2m_1p'_0 - 2p_0p'_0, \quad (36)$$

$$f_{11}(p, p') = 2m_1p'^2 + p_0p'^2 + 10m_1pp' + 2p_0pp' + 2p'_0pp' + 2m_1p^2 + p'_0p^2 + 6m_1^2p_0 + 6m_1^2p'_0 + 4m_1p_0^2 + 4m_1p'_0^2 - 4m_1p_0p'_0.$$

В (36) мы оставили только члены, пропорциональные  $m_2^2$  и  $m_2$ , имея ввиду получение вклада в тонкую структуру мюония в лидирующем порядке по параметру  $m_1/m_2$ . Как станет ясно из дальнейшего, мы не можем ограничиться в  $F(p, p')$  лишь членами  $\propto m_2^2$ . Квазипотенциалы остальных пяти амплитуд строятся аналогично. Они отличаются друг от друга зависимостью от импульсных аргументов в мюонных знаменателях и видом функций  $f_{i1}$  ( $i = 1, \dots, 6$ ). Слагаемые  $F_i(p, p')$ , пропорциональные  $m_2^2$ , во всех шести амплитудах совпадают. Заметим, что при замене  $\hat{\epsilon} \rightarrow \gamma_5$  в проекционном операторе (6) (состояние  $^1S_0$ ) мы получаем такую же функцию  $f_{12}(p, p')$ , что и для  $^3S_1$ -мюония. Это означает, что сверхтонкое расщепление в мюонии возникает как эффект более высокого порядка по  $m_1/m_2$ . Функции  $f_{i1}$  равны

$$f_{21} = -10m_1p'^2 - 5p_0p'^2 + 10m_1pp' + 4p_0pp' - 4p'_0pp' + 2m_1p^2 + 4p'_0p^2 + 12p_0m_1^2 - 6m_1^2p'_0 + 4m_1p_0^2 + 8m_1p_0p'_0 - 8m_1p'_0^2 + 4p'_0p_0^2, \quad (37)$$

$$f_{31} = 2m_1^2p'^2 + 4p_0p'^2 + 10m_1pp' - 4p_0pp' + 4p'_0pp' - 10m_1p^2 - 5p'_0p^2 - 6m_1^2p_0 + 12m_1^2p'_0 - 8m_1p_0^2 + 8m_1p_0p'_0 + 4m_1p'_0^2 + 4p_0p'_0^2, \quad (38)$$

$$f_{41} = 2m_1p'^2 + p_0p'^2 - 2m_1pp' + 4p_0pp' + 2p'_0pp' - 10m_1p^2 - 8p'_0p^2 - 12m_1^2p_0 + 6m_1^2p'_0 + 4m_1p_0^2 - 4m_1p_0p'_0 + 4m_1p'_0^2 - 8p'_0p_0^2, \quad (39)$$

$$f_{51} = -10m_1p'^2 - 8p_0p'^2 - 2m_1pp' + 2p_0pp' + 4p'_0pp' + 2m_1p^2 + p'_0p^2 + 6m_1^2p_0 - 12m_1^2p'_0 + 4m_1p_0^2 - 4m_1p_0p'_0 + 4m_1p_0'^2 - 8p_0'^2p_0, \quad (40)$$

$$f_{61} = -10m_1p'^2 - 5p_0p'^2 - 2m_1pp' - 4p_0pp' - 4p'_0pp' - 10m_1p^2 - 5p'_0p^2 - 6m_1^2p'_0 - 8m_1p_0^2 - 4m_1p_0p'_0 - 8m_1p_0'^2. \quad (41)$$

Подынтегральное выражение в (33) имеет простые полюсы по переменным  $p_0, p'_0$  в электронных, мюонных и фотонных пропагаторах. Поэтому наиболее естественный способ интегрирования в (31) состоит в вычислении интегралов по энергиям  $p_0, p'_0$  на начальном этапе с помощью теории вычетов. Такой способ расчета ведет, тем не менее, к довольно сложным промежуточным выражениям, что делает их дальнейшее аналитическое интегрирование по пространственным импульсам  $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$  весьма проблематичным. Поэтому мы использовали другой подход для интегрирования в (33), связанный с преобразованием знаменателей мюонных пропагаторов, имея в виду необходимую точность расчета по  $m_1/m_2$ . Считая, что пространственный импульс движения мюона в промежуточном состоянии  $|\mathbf{p}| < m_2$ , получим

$$D_\mu(p) = p^2 - w^2 + 2m_2p_0 \approx 2m_2 \left( p_0 - \frac{\mathbf{p}^2 + w^2}{2m_2} + i\epsilon \right) \approx 2m_2(p_0 + i\epsilon), \quad (42)$$

где второе приближенное равенство означает, что мы пренебрегаем кинетической энергией мюона в промежуточном состоянии. При этом предполагается, что контур интегрирования по  $p_0$  замыкается в нижней полуплоскости. Рассматривая в числителях шести амплитуд члены, пропорциональные  $m_2^2$  (функция  $f_{12}(p, p')$ ), мы приходим к необходимости преобразования суммы членов с мюонными знаменателями (30). Используя при этом второе приближенное равенство из (42), мы получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D_\mu(-p)D_\mu(-p')} + \frac{1}{D_\mu(-p)D_\mu(p' - p)} + \frac{1}{D_\mu(-p')D_\mu(p - p')} + \\ & + \frac{1}{D_\mu(p)D_\mu(p - p')} + \frac{1}{D_\mu(p')D_\mu(p' - p)} + \frac{1}{D_\mu(p')D_\mu(p)} \approx \\ & \approx \frac{(-2\pi i)\delta(p_0)}{2m_2} \frac{(-2\pi i)\delta(p'_0)}{2m_2}. \end{aligned} \quad (43)$$

В спектре энергии эти слагаемые приводят к поправкам порядка  $\alpha^4$ , которые сокращаются с аналогичными членами из итерационных слагаемых квазипотенциала. Следовательно, для расчета интересующих нас вкладов порядка  $\alpha^6$  необходимо использовать первое приближенное равенство в (42). Рассматривая разность

$$\frac{1}{2m_2(p_0 - (\mathbf{p}^2 + w^2)/2m_2 + i\epsilon)} - \frac{1}{2m_2(p_0 + i\epsilon)} \approx \frac{(\mathbf{p}^2 + w^2)}{4m_2^2(p_0 + i\epsilon)^2}, \quad (44)$$

представим величину  $1/D_\mu(p)$  в виде

$$\frac{1}{D_\mu(p)} \approx \frac{1}{2m_2(p_0 + i\epsilon)} + \frac{(\mathbf{p}^2 + w^2)}{4m_2^2(p_0 + i\epsilon)^2}. \quad (45)$$

Второе слагаемое в (41) имеет более высокий порядок по  $m_1/m_2$  по сравнению с первым, но дает поправку необходимого порядка по  $\alpha$ . Используя представление (45), выделим из суммы членов (43) слагаемые необходимого порядка по  $\alpha$ . Они имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{(\mathbf{p}'^2 + w^2)}{8m_2^3} \left[ \frac{2\pi i \delta(p'_0)}{(p_0 + i\epsilon)^2} - \frac{2\pi i \delta(p'_0 - p_0)}{(p_0 + i\epsilon)^2} - \frac{2\pi i \delta(p_0)}{(p'_0 + i\epsilon)^2} \right] + \\ & + \frac{(\mathbf{p}^2 + w^2)}{8m_2^3} \left[ \frac{-2\pi i \delta(p'_0)}{(p_0 + i\epsilon)^2} - \frac{2\pi i \delta(p'_0 - p_0)}{(p_0 + i\epsilon)^2} + \frac{2\pi i \delta(p_0)}{(p'_0 + i\epsilon)^2} \right] + \\ & + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 + w^2}{8m_2^3} \left[ -\frac{2\pi i \delta(p'_0)}{(p_0 + i\epsilon)^2} + \frac{2\pi i \delta(p'_0 - p_0)}{(p_0 + i\epsilon)^2} - \frac{2\pi i \delta(p_0)}{(p'_0 + i\epsilon)^2} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Из явного вида амплитуд трехфотонного взаимодействия типа (33) следует, что члены (46) дают в спектре энергии поправки необходимого порядка по  $\alpha$ . Поправки того же порядка по  $m_1/m_2$ , что и (46), возникают от членов квазипотенциала, содержащих функции  $f_{i1}(p, p')$ , если при этом для мюонных знаменателей использовать второе приближенное равенство в (42). Чтобы сделать заключение о порядке вкладов в спектре энергии, определяемых этими членами квазипотенциала, полезно выполнить с ними ряд преобразований. Для определенности рассмотрим в функциях  $f_{i1}(p, p')$  безмассовые слагаемые  $\propto p^2, p'^2, pp'$ :

$$\begin{aligned} & 3p^2 \left[ \frac{1}{D_\mu(p)} + \frac{1}{D_\mu(-p)} - \frac{1}{D_\mu(p-p')} - \frac{1}{D_\mu(p'-p)} \right] + \\ & + 3p'^2 \left[ \frac{1}{D_\mu(-p')} + \frac{1}{D_\mu(p')} - \frac{1}{D_\mu(p'-p)} - \frac{1}{D_\mu(p-p')} \right] - \\ & - 6pp' \left[ \frac{1}{D_\mu(-p')} + \frac{1}{D_\mu(p')} + \frac{1}{D_\mu(-p)} + \frac{1}{D_\mu(p)} - \frac{1}{D_\mu(p'-p)} - \frac{1}{D_\mu(p-p')} \right] \approx \\ & \approx \frac{3p^2}{2m_2} [-2\pi i \delta(p_0) + 2\pi i \delta(p_0 - p'_0)] + \frac{3p'^2}{2m_2} [-2\pi i \delta(p'_0) + 2\pi i \delta(p_0 - p'_0)] - \\ & - \frac{6pp'}{2m_2} [-2\pi i \delta(p_0) - 2\pi i \delta(p'_0) + 2\pi i \delta(p_0 - p'_0)]. \end{aligned} \quad (47)$$

Аналогично выполняются преобразования и других членов из функций  $f_{i1}(p, p')$ . Следующий этап вычислений заключается в интегрировании выражений типа (46), (47). Типичный двухпетлевой интеграл, возникающий при этом, имеет следующую структуру [17]:

$$K_i = (4\pi)^2 \int \frac{d^4 p d^4 p'}{-(2\pi)^8} \frac{G_i(p'_0, p_0, m_1) P(\mathbf{p}, \mathbf{p}', w)}{(p'^2 - w^2 + i\epsilon)[(p-p')^2 + i\epsilon](p^2 - w^2 + i\epsilon) D_e(p') D_e(p)}, \quad (48)$$

где  $G_i(p'_0, p_0, m_1)$  обязательно содержит одну  $\delta$ -функцию, а  $P(\mathbf{p}, \mathbf{p}', w)$  — полином. При расчете (48) мы использовали фейнмановскую параметризацию для объединения знаменателей пропагаторов частиц и свойства симметрии интеграла при замене  $p \leftrightarrow p'$ . В настоящей работе возникает следующий набор функций  $G_i(p'_0, p_0, m_1)$ :

$$\begin{aligned} G_1 &= -\frac{2\pi i \delta(p_0 - p'_0) 2m_1}{(p_0 + i\epsilon)^2}, & G_2 &= -\frac{2\pi i \delta(p_0) 2m_1}{(p'_0 + i\epsilon)^2}, & G_3 &= -2\pi i \delta(p_0) 2m_1, \\ G_4 &= -2\pi i \delta(p'_0) 2m_1, & G_5 &= -2\pi i \delta(p_0 - p'_0) 2m_1. \end{aligned} \quad (49)$$

Таблица 2

Двухпетлевые интегралы  $K_i$  (48) трехфотонных обменных диаграмм, возникающих при расчете тонкой структуры мюония

	$p^2(pp')$	$(pp')^2$	$p'^2(pp')$	$w^2(pp')$
$K_1$	$2 \ln 2 - \frac{1}{2}$	$2 \ln 2 - \frac{1}{2}$	$2 \ln 2 - \frac{1}{2}$	0
	$p^2(p'^2 - pp')$	$pp'(p'^2 - pp')$	$w^2(p'^2 - pp')$	$w^2 p^2$
$K_2$	$\frac{1}{2} \ln \frac{m_1}{2w} - \frac{1}{32}$	$\frac{1}{4} \ln \frac{m_1}{2w} - \frac{13}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{2}{3}$
	$p'^2$	$pp'$	$p^2$	$w^2$
$K_3$	—	$\frac{1}{4} \ln \frac{m_1}{2w} - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \ln \frac{m_1}{2w} - \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$K_4$	$\frac{1}{2} \ln \frac{m_1}{2w} - \frac{1}{8}$	$\frac{1}{4} \ln \frac{m_1}{2w} - \frac{1}{4}$	—	$\frac{1}{8}$
$K_5$	$\ln 2$	$\ln 2 - \frac{1}{2}$	$\ln 2$	0

Расчет интегралов типа (48) с рядом функций  $G_i$  и  $P$  проведен в [17]. Результаты вычислений базисных интегралов (48), которые возникают в данной работе при расчете тонкой структуры, представлены в табл. 2. Тогда вклады, определяемые выражениями (37)–(41), (46) будут соответственно равны:

$$\delta B_1^{3\gamma} = -\frac{1}{2}(Z\alpha)^6 \frac{m_1^2}{m_2}, \tag{50}$$

$$\delta B_2^{3\gamma} = (Z\alpha)^6 \frac{m_1^2}{m_2} \left( 6 \ln 2 - \frac{11}{48} \right). \tag{51}$$

«Инфракрасные» логарифмы  $\ln w$ , содержащие массу фотона (см. таблицу интегралов  $K_i$ ), введенную в (48), которые возникают в промежуточных выражениях, взаимно сокращаются в поправках  $\delta B_1^{3\gamma}$ ,  $\delta B_2^{3\gamma}$ .

Рассмотрим теперь слагаемые квазипотенциала, содержащие импульсы относительного движения частиц в начальном и конечном состояниях, которые обозначим  $r_1$  и  $r_2$ . Их учет приводит к следующим добавкам в функции  $f_{i1}$ :

$$\Delta f_{21} = 10m_1 p' r_2 + 5p_0 p' r_2 + m_1 p r_2 + 3p'_0 p r_2, \tag{52}$$

$$\Delta f_{31} = -m_1 p' r_1 - 3p_0 p' r_1 - 10m_1 p r_1 - 5p'_0 p r_1, \quad (53)$$

$$\Delta f_{41} = m_1(7p' r_1 + 5p' r_2 + 10p r_1 + 5p r_2) + 6p_0 p' r_1 + 5p_0 p' r_2 + 8p'_0 p r_1 + 5p'_0 p r_2, \quad (54)$$

$$\Delta f_{51} = m_1(-5p' r_1 - 10p' r_2 - 5p r_1 - 7p r_2) - 5p_0 p' r_1 - 8p_0 p' r_2 - 5p'_0 p r_1 - 6p'_0 p r_2, \quad (55)$$

$$\Delta f_{61} = m_1(-11p' r_1 - 11p' r_2 - 11p r_1 - 11p r_2) - 8p_0 p' r_1 - 8p_0 p' r_2 - 8p'_0 p r_1 - 8p'_0 p r_2. \quad (56)$$

Учитывая свойства симметрии возникающих интегралов при одновременной замене переменных  $p \leftrightarrow p'$ ,  $r_1 \leftrightarrow r_2$ , получаем, что интегралы выражений (52)–(56) взаимно сокращаются. Поэтому вклад относительного движения частиц в тонкую структуру в рассматриваемом порядке по  $m_1/m_2$  равен нулю. Таким образом, полная величина поправки  $(Z\alpha)^6 m_1^2/m_2$  от трехфотонных обменных диаграмм для  $S$ -состояний водородоподобной системы равна сумме выражений (50) и (51):

$$\Delta B_8 = \delta B_1^{3\gamma} + \delta B_2^{3\gamma} = (Z\alpha)^6 \frac{1}{n^3} \frac{\mu^3}{m_1 m_2} \left( 6 \ln 2 - \frac{35}{48} \right). \quad (57)$$

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данной работе в рамках диаграммного квазипотенциального подхода мы провели расчет всех возможных поправок порядка  $(Z\alpha)^6 m_1^2/m_2$  для  $n^3 S_1$ -уровней энергии водородоподобной системы, необходимых для сравнения с экспериментально измеряемым интервалом  $2^3 S_1 - 1^3 S_1$  (2). Подчеркнем, что эти поправки отличаются от поправок соответствующего порядка в лэмбовском сдвиге атома водорода [13]. Наш полный результат, определяемый суммой членов  $\Delta B_i$  (4), (8), (11), (13), (24), (27), (32) и (57), равен

$$\Delta B_{tot} = \left( \frac{91}{12} \ln 2 - \frac{545}{144} - \frac{17}{6n} - \frac{37}{36n^2} + \frac{187}{96n^3} \right) \frac{m_1^2 (Z\alpha)^6}{m_2 n^3} + \varepsilon_n, \quad (58)$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} -\frac{23m_1^2 (Z\alpha)^6}{12m_2}, & n = 1, \\ -\frac{31m_1^2 (Z\alpha)^6}{128m_2}, & n = 2. \end{cases}$$

Численное значение полученного вклада (58) для интервала «большой» тонкой структуры мюония  $2^3 S_1 - 1^3 S_1$  составляет 0.19 МГц. Ранее расчет поправок  $(Z\alpha)^6 m_1^2/m_2$ , связанных с отдачей ядра, для  $S$ -уровней атома водорода был выполнен в [6–9]. Полученный с помощью формулы Брауна в работе [8] полный вклад необходимого порядка в энергетический спектр  $S$ -состояний имеет вид

$$\Delta E_{tot} = \left( \frac{1}{8} + \frac{3}{8n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^3} \right) \frac{(Z\alpha)^6 m_1^2}{m_2 n^3} + \left( 4 \ln 2 - \frac{7}{2} \right) \frac{(Z\alpha)^6 m_1^2}{m_2 n^3}. \quad (59)$$

Первое слагаемое в этой формуле, которое содержит нетривиальную зависимость от главного квантового числа, было получено разными авторами на основе разных подходов [6–9]. В подходе, основанном на формуле Брауна, этот вклад выделен и определяется однофотонным кулоновским обменом. В нашем подходе, использующем локальное квазипотенциальное уравнение (3), поправки такого типа возникают как из квазипотенциала однофотонного обмена, так и из квазипотенциала двухфотонного обмена, а также во втором порядке теории возмущений. Сравнивая формулы (58) и (59), мы видим, что аналитическое выражение полученного нами вклада (58) несколько отличается от (59). Квазипотенциал  $S$ -состояний водородоподобного атома имеет следующую структуру:

$$V(r) = V_1(r) + (\sigma_1\sigma_2)V_2(r).$$

В наших расчетах учитывался как вклад первого слагаемого  $V(r)$  в спектр энергии, так и второй спин-зависимой части  $V(r)$ . В работах [8, 9] исследовался только вклад слагаемого  $V_1(r)$ , поэтому различие (58) и (59) вполне естественно, и наши результаты не противоречат [8, 9]. В определенной степени полезно сопоставить численные значения поправок (58) и (59) для уровней мюония с  $n = 1$  и  $n = 2$ . Они составляют соответственно для  $n = 1$ :  $-0.212$  МГц,  $-0.065$  МГц; для  $n = 2$ :  $-0.021$  МГц,  $-0.006$  МГц. Вклад поправки (58) в интервал  $2S-1S$  атома водорода составляет  $21.5$  кГц, а значения аналогичных вкладов, полученных в работах [8, 9], равны соответственно  $6.6$  кГц [8];  $14.5$  кГц [9].

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А. С. Елховскому и М. И. Эйдесу за критические замечания и интерес к работе. Мы благодарны также С. Г. Каршенбойму, Э. А. Кураеву, П. Лабеллу, В. А. Салееву, Р. А. Сенькову, И. Б. Хриповичу за полезные обсуждения, Гротчу Х., приславшему отпечаток работы [6], Р. Мертигу за описание пакета FeynCalc. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-02-16185) и программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (грант № 2759).

## Литература

1. T. Kinoshita and J. Sapirstein, in *Proc. of the IX Int. Conf. on Atomic Physics* (1984), p. 38.
2. E. E. Salpeter, *Phys. Rev.* **87**, 328 (1952).
3. H. Grotch and D. R. Yennie, *Rev. Mod. Phys.* **41**, 350 (1969).
4. T. Fulton, *Phys. Rev. A* **26**, 1794 (1982).
5. M. I. Eides and H. Grotch, *Phys. Rev. A* **52**, 1757 (1995).
6. K. Pachucki and H. Grotch, *Phys. Rev. A* **51**, 1854 (1995).
7. А. С. Елховский, *ЖЭТФ* **110**, 431 (1996).
8. M. I. Eides and H. Grotch, *Phys. Rev. A* **55**, 3351 (1997).
9. А. С. Елховский, *ЖЭТФ* **113**, 865 (1998).
10. I. B. Khriplovich, A. I. Milstein, and A. S. Yelkhovsky, *Phys. Lett. B* **282**, 237 (1992).
11. R. N. Fell, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 25 (1992).
12. R. N. Fell, I. B. Khriplovich, A. I. Milstein, and A. S. Yelkhovsky, *Phys. Lett. A* **181**, 172 (1993).
13. В. В. Двоглазов, Ю. Н. Тюхтяев, Р. Н. Фаустов, *ЭЧАЯ* **25**, 144 (1994).
14. S. Chu, A. P. Mills, A. G. Yodh et al., *Phys. Rev. Lett.* **60**, 101 (1988).
15. S. Chu, A. P. Mills, and J. L. Hall, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1689 (1984).

16. M. S. Fee, S. Chu, A. P. Mills et al., *Phys. Rev. A* **48**, 192 (1993).
17. G. T. Bodwin, D. R. Yennie, and M. A. Gregorio, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 723 (1985).
18. А. И. Мильштейн, И. Б. Хриплович, *ЖЭТФ* **106**, 689 (1994).
19. W. E. Caswell and G. P. Lepage, *Phys. Rev. A* **18**, 810 (1978).
20. В. А. Ризов, И. Т. Тодоров, *ФЭЧАЯ* **6**, 669 (1975).
21. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЯФ* **45**, 770 (1987).
22. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЯФ* **60**, 1407 (1997).
23. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ТМФ* **66**, 399 (1986).
24. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
25. А. Мессиа, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1979), т. 2.
26. J. Schwinger, *J. Math. Phys.* **5**, 1606 (1964).
27. W. Buchmuller and E. Remiddi, *Nuovo Cimento A* **60**, 109 (1980).
28. R. Hostler, *J. Math. Phys.* **5**, 591 (1964).
29. М. Б. Волошин, *ЯФ* **36**, 247 (1982).
30. С. Г. Каршенбойм, *ЖЭТФ* **103**, 1105 (1993).
31. С. А. Запрягаев, Н. Л. Манаков, В. Г. Пальчиков, *Теория многозарядных ионов с одним и двумя электронами*, Энергоатомиздат, Москва (1985).
32. В. Г. Иванов, С. Г. Каршенбойм, *ЖЭТФ* **109**, 1219 (1996).
33. S. Wolfram, *Mathematica — A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley, Reading, MA (1988).