

**ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД
МОСКВА

ТОМ 115, ВЫПУСК 4
АПРЕЛЬ, 1999
«НАУКА»

**ДВУХФОТОННЫЙ КООПЕРАТИВНЫЙ РАСПАД В РЕЗОНАТОРЕ В
ПРИСУТВИИ ТЕПЛООВОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

© 1999

Н. А. Енаки, М. А. Маковой*

*Институт прикладной физики Академии наук Молдовы
МД-2028, Кишинев, Молдова*

Поступила в редакцию 15 июня 1998 г.

Изучается кооперативный двухфотонный спонтанный распад возбужденной атомной системы в микрорезонаторе, размеры которого порядка нескольких длин волн атомного излучения. Показано, что присутствие термализованного поля в микрорезонаторе значительно меняет двухфотонное кооперативное спонтанное излучение. Увеличение скорости кооперативного спонтанного распада обусловлено присутствием малого числа термализованных фотонов в моде микрорезонатора. При низких температурах наблюдается линейная зависимость вероятности двухфотонного поглощения от двухфотонного потока и имеет место эффект супергруппировки фотонов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что спонтанный распад возбужденного атома имеет место при взаимодействии излучателя с модами вакуума электромагнитного поля. Спонтанный распад одного атома в микрорезонаторе сильно модифицирован по сравнению с распадом в свободном пространстве. Так как микрорезонатор имеет небольшие размеры, превышающие в несколько раз длину волны излучения, спонтанный распад сильно усиливается при резонансе атомного перехода с модой резонатора и существенно замедляется при отходе частоты перехода атома от частоты резонанса [1, 2]. Подобное поведение атома в микрорезонаторе объясняется тем, что скорость спонтанного распада пропорциональна плотности мод электромагнитного поля в окрестности частоты перехода.

*E-mail: enik@usm.md

© Российская академия наук, Отделение общей физики и астрономии,
Институт физических проблем им. П. Л. Капицы, 1999 г.

Изучение двухквантовой генерация света привлекает повышенное внимание исследователей. Экспериментальному наблюдению и теоретическому рассмотрению спонтанного распада относительно дипольно-запрещенного перехода $|2S\rangle \rightarrow |1S\rangle$ в водородоподобных и гелиоподобных атомах посвящены, например, работы [3]. Первое сообщение об экспериментальном наблюдении двухфотонной когерентной генерации света при использовании возбужденных атомов Li появилось в [4]. Недавние эксперименты с ридберговскими атомами демонстрируют реальную возможность осуществления двухквантового микромазера [5]. Также представляют интерес наблюдения спонтанного и термически индуцированного двухфотонных переходов в микроволновой области спектра излучения атома Rb при резонансной флуоресценции [6]. Теоретическое описание кооперативной генерации импульса света при двухфотонном спонтанном распаде атомов относительно дипольно-запрещенных переходов приведено в [7], где показано, что импульс сверхизлучения бифотонов имеет интересное квантовое поведение в процессе поглощения. В работах [8] также уделено внимание свойствам сверхизлучения бифотонов, генерируемых при спонтанном распаде двух атомов. Теоретически двухфотонное излучение и поглощение в присутствии термализованного электромагнитного поля в свободном пространстве было исследовано в работе [9], где получено выражение полноты заселенностей уровней как функции от времени.

Хорошо известно, что для ридберговских атомов скорость спонтанного распада в микрорезонаторах намного выше скорости спонтанного распада в свободном пространстве [10–13]. Так как в микрорезонаторе скорость двухфотонного распада в трехуровневой каскадной системе существенно увеличивается, представляет интерес именно там изучать кооперативную эмиссию ридберговских атомов в микрорезонаторах. В настоящей работе мы изучаем кооперативный распад ансамбля подобных атомов с каскадным расположением уровней, в которых при отличной от нуля температуре промежуточный уровень орбитально отстроен от резонанса с модой микрорезонатора. В этом случае промежуточный уровень практически не заселен, и его расположение между возбужденным и основным состояниями приводит к заметному росту амплитуды двухквантового кооперативного перехода [5]. Получены точные уравнения для двух атомов, расположенных на расстоянии r_{21} друг от друга в микрорезонаторе, которые вовлечены в двухфотонный кооперативный распад, и исследовано временное поведение этих излучателей. Кооперативное поведение сосредоточенного ансамбля излучателей в процессе двухфотонного распада изучалось в пренебрежении квантовыми флуктуациями числа возбужденных атомов. Мы показали, что небольшое число термализованных фотонов в модах микрорезонатора приводит к усилению кооперативного спонтанного распада. Поскольку вероятность двухфотонного поглощения пропорциональна корреляционной функции второго порядка, $w \propto \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle$, эта функция пропорциональна потоку бифотонов (или числу генерируемых бифотонов). Кроме того, в процесс кооперативного двухфотонного спонтанного распада корреляционная функция второго порядка остается много больше квадрата корреляционной функции первого порядка, что соответствует сильной корреляции между парами фотонов. Другими словами, генерируемые фотоны становятся сверхгруппированными. С ростом температуры явление сверхгруппировки пропадает, сохраняется при этом только свойство группировки потока термализованных фотонов.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе получено управляющее уравнение для арбитрного оператора атомной подсистемы. Для случаев одного и двух атомов получены точные уравнения, учитывающие квантовые флуктуации оператора

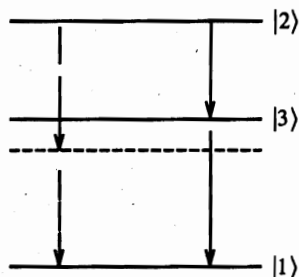


Рис. 1. Схема однофотонных и двухфотонных переходов. Сплошной и штриховой линиями указаны соответственно однофотонные каскадные и дипольно-запрещенные переходы

инверсии. В третьем разделе представлены решения этих дифференциальных уравнений, позволяющие оценить флуктуации электромагнитного поля.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕХУРОВНЕВОЙ ВОЗБУЖДЕННОЙ АТОМНОЙ СИСТЕМЫ С ТЕРМАЛИЗОВАННЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В МИКРОРЕЗОНАТОРЕ

Рассмотрим инвертированную трехуровневую систему каскадной конфигурации, взаимодействующую с модами электромагнитного поля в микрорезонаторе (см. рис. 1). Поскольку микрорезонатор слегка открыт, гамильтониан такой системы имеет следующий вид:

$$H = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hbar \omega b_\omega^\dagger b_\omega + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=1}^N \hbar \omega_\alpha U_{j\alpha}^\alpha + i\hbar \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa(\omega) [b_\omega a_k^\dagger - a_k b_\omega^\dagger] + i \sum_k \sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^2 (d_{3\beta} g_k) (a_k^\dagger e^{-ikr_j} - \text{H.c.}) (U_{j3}^\beta + U_{j\beta}^3). \quad (1)$$

Здесь $\hbar \omega_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) — энергия уровня α , $d_{3\beta}$ — дипольный момент перехода между уровнем $|3\rangle$ и $|\beta\rangle$ ($\beta = 1, 2$), a_k^\dagger (a_k) — бозе-оператор рождения (уничтожения) электромагнитного поля внутри микрорезонатора, b_ω^\dagger (b_ω) — оператор рождения (уничтожения) вне резонатора, $g_k = \sqrt{2\pi\hbar\omega_k/V} e_\lambda$, где e_λ — вектор поляризации фотона ($\lambda = 1, 2$) с частотой ω_k , V — объем микрорезонатора, $\kappa(\omega)$ — константа связи внешних мод с внутренними модами микрорезонатора, N — число атомов в микрорезонаторе, $U_{j\beta}^3 = c_{j3}^\dagger c_{j\beta}$ — соответствующий оператор перехода между уровнями $|3\rangle$ и $|\beta\rangle$ j -го атома. Введенные операторы c_{j3}^\dagger и $c_{j\beta}$ являются ферми-операторами.

В (1) первый и второй члены описывают электромагнитное поле внутри микрорезонатора и вне резонатора, а третий представляет собой гамильтониан свободной атомной системы. Четвертый член учитывает взаимодействие поля внутри резонатора с внешним полем и зависит от коэффициента отражения стенок резонатора. Так как атомы расположены внутри резонатора, четвертый член соответствует взаимодействию излучателей с модами микрорезонатора.

Операторы атомной подсистемы и электромагнитного поля удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[U_{j\beta}^\alpha, U_{\alpha'}^\beta] = \delta_{j,\alpha'} [\delta_{\beta\beta'} U_{j\alpha'}^\alpha - \delta_{\alpha\alpha'} U_{j\beta}^\beta], \quad [a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad [b_\omega, b_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega').$$

Ниже мы изучим временное поведение оператора атомной подсистемы $O(t)$ в процессе спонтанного распада внутри микрорезонатора. Используя гамильтониан (1), получим следующее уравнение Гейзенберга для среднего значения оператора $O(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle O(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=1}^N \hbar \omega_{\alpha} \langle [U_{j\alpha}^{\alpha}(t), O(t)] \rangle - \\ &- \sum_k \sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^2 \frac{(\mathbf{g}_k \mathbf{d}_{3\beta})}{\hbar} \left[\langle a_k^{\dagger} [U_{j\beta}^3(t) + U_{j3}^{\beta}(t), O(t)] \rangle e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} + \text{H.c.} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Формальные решения для операторов a_k , a_k^{\dagger} внутри резонатора могут быть получены из уравнений Гейзенберга для операторов внутри и вне микрорезонатора (см. Приложение):

$$a_k(t) = A_k^f(t) + a_k^s(t), \quad a_k^{\dagger}(t) = [a_k(t)]^{\dagger}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} A_k^f(t) &= a_k(0) \exp(-i[\omega_k - i\Gamma(\omega_k)]t) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa(\omega) b_{\omega}(0) \frac{\exp(-i\omega t) - \exp(-i[\omega_k - i\Gamma(\omega_k)]t)}{\Gamma(\omega_k) + i(\omega_k - \omega)}, \\ a_k^s(t) &= \sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^2 \frac{(\mathbf{d}_{3\beta} \mathbf{g}_k)}{\hbar} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j) \times \\ &\times \int_0^t d\tau \exp(-i[\omega_k - i\Gamma(\omega_k)]\tau) [U_{j\beta}^3(t - \tau) + U_{j\beta}^{\beta}(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно заметить, что после подстановки выражений (3), (4) в уравнение (2) в его правой части появится зависимость (через A_k^f) от свободных операторов электромагнитного поля внутри и вне резонатора. Мы рассматриваем распад инвертированной подсистемы ридберговских атомов при температуре T отличной от нуля, поэтому как моды внутри резонатора, так и моды вне его частично заполнены термализованными фотонами. Следовательно, при изучении динамики инвертированной атомной подсистемы мы можем исключить свободные операторы электромагнитного поля внутри и вне резонатора, используя для этого метод Боголюбова [14]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle O(t) \rangle &= i \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=1}^N \omega_{\alpha} \langle [U_{j\alpha}^{\alpha}(t), O(t)] \rangle - \sum_k \sum_{j,l=1}^N \sum_{\beta,\gamma=1}^2 \frac{(\mathbf{g}_k \mathbf{d}_{3\beta})(\mathbf{g}_k \mathbf{d}_{3\gamma})}{\hbar^2} \left[\exp(-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)) \times \right. \\ &\times \int_0^t d\tau \exp(i[\omega_k + i\Gamma(\omega_k)]\tau) \left([n(k) + 1] \langle (U_{i\gamma}^3(t - \tau) + U_{i3}^{\gamma}(t - \tau)) [U_{j\beta}^3(t) + U_{j3}^{\beta}(t), O(t)] \rangle - \right. \\ &\left. \left. - n(k) \langle (U_{j\beta}^3(t) + U_{j3}^{\beta}(t), O(t)) O(t) [U_{i\gamma}^3(t - \tau) + U_{i3}^{\gamma}(t - \tau)] \rangle \right) \right] + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая уравнения Гейзенберга для атомных операторов, представим решение уравнения для оператора $U_{l\gamma}^3(t - \tau)$ относительно τ в следующем виде:

$$U_{l\gamma}^3(t - \tau) = U_{l\gamma}^3(t) \exp(-i\omega_{3\gamma}\tau) + \sum_k \sum_{\eta=1}^2 \frac{(\mathbf{g}_k \mathbf{d}_{3\eta})}{\hbar} \times \\ \times \int_0^\tau d\theta \exp(-i\omega_{3\gamma}\theta) \left(a_k^\dagger(t - \tau + \theta) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_l) - \text{H.c.} \right) U_{l\gamma}^\eta(t - \tau + \theta). \quad (6)$$

Подставляя решение (6) в уравнение (5), получим

$$\frac{d}{dt} \langle O(t) \rangle = i \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha \langle [U_{j\alpha}^\alpha(t), O(t)] \rangle - \frac{1}{\hbar^2} \sum_k \sum_{j,l=1}^N \left[\exp(-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)) [1 + n(k)] \times \right. \\ \times \left((\mathbf{g}_k \mathbf{d}_{31})^2 \frac{\Gamma(\omega_k) + i[\omega_k - \omega_{31}]}{\Gamma^2(\omega_k) + [\omega_k - \omega_{31}]^2} \langle U_{l1}^3(t) [U_{j3}^1(t), O(t)] \rangle + (\mathbf{g}_k \mathbf{d}_{32})^2 \frac{\Gamma(\omega_k) + i[\omega_k - \omega_{23}]}{\Gamma^2(\omega_k) + [\omega_k - \omega_{23}]^2} \times \right. \\ \times \left. \langle U_{l3}^2(t) [U_{j2}^3(t), O(t)] \rangle \right) - n(k) \exp(-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)) \left((\mathbf{g}_k \mathbf{d}_{31})^2 \frac{\Gamma(\omega_k) + i[\omega_k - \omega_{31}]}{\Gamma^2(\omega_k) + [\omega_k - \omega_{31}]^2} \times \right. \\ \times \left. \langle [U_{j3}^1(t), O(t)] [U_{l1}^3(t)] \rangle + (\mathbf{g}_k \mathbf{d}_{32})^2 \frac{\Gamma(\omega_k) + i[\omega_k - \omega_{23}]}{\Gamma^2(\omega_k) + [\omega_k - \omega_{23}]^2} \langle [U_{j2}^3(t), O(t)] [U_{l3}^2(t)] \rangle \right) + \text{H.c.} \left. \right] + I^{(4)}, \quad (7)$$

где

$$I^{(4)} = - \sum_{k_1, k_2} \sum_{j, l=1}^N \sum_{\gamma, \beta, \eta=1}^2 \frac{(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{3\beta})(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{3\gamma})(\mathbf{g}_{k_2} \mathbf{d}_{3\eta})}{\hbar^3} \left[\exp(-i\mathbf{k}_1(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)) \times \right. \\ \times \int_0^t d\tau \exp(i[\omega_{k_1} + i\Gamma(\omega_{k_1})]\tau) \left([1 + n(k_1)] \left\langle \left\{ \int_0^\tau d\theta \exp(-i\omega_{3\gamma}\theta) \times \right. \right. \right. \\ \times \left. \left. \left[a_{k_2}^\dagger(t - \tau + \theta) \exp(-i\mathbf{k}_2\mathbf{r}_l) - \text{H.c.} \right] U_{l\gamma}^\eta(t - \tau + \theta) + \text{H.c.} \right\} \times \right. \\ \times \left. \left. \left[U_{j\beta}^3(t) + U_{j3}^\beta(t), O(t) \right] \right\rangle - n(k_1) \left\langle \left[U_{j\beta}^3(t) + U_{j3}^\beta(t), O(t) \right] \times \right. \right. \\ \times \left. \left. \left\{ \int_0^\tau d\theta \exp(-i\omega_{3\gamma}\theta) \left[a_{k_2}^\dagger(t - \tau + \theta) \exp(-i\mathbf{k}_2\mathbf{r}_l) - \text{H.c.} \right] \times \right. \right. \\ \times \left. \left. U_{l\gamma}^\eta(t - \tau + \theta) + \text{H.c.} \right\} \right\rangle \right) + \text{H.c.} \left. \right]. \quad (8)$$

Второй член в уравнении (7) учитывает коллективные однофотонные процессы перехода типа $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$, в то время как третий член описывает переходы более высоких порядков.

Поскольку мы заинтересованы только в двухквантовых переходах, однофотонным излучением мы будем пренебрегать, выбирая соответствующим образом отстройки от резонанса промежуточного уровня. А именно, для этого отстройка от резонанса $\Delta = |\omega_k - \omega_{23}|$ ($\Delta = |\omega_k - \omega_{31}|$) должна быть больше, чем затухание микрорезонатора $\Gamma(k)$. Следовательно, единственным способом перехода системы в основное состояние может быть двухфотонный распад. Нетрудно заметить, что в этом случае уровень $|3\rangle$ почти не заселен, и мы можем исключить его из уравнения (8). В качестве примера исключим его из первого члена уравнения (8), тогда получим

$$I_1^{(4)} = \sum_{k_1, k_2} \sum_{j, l=1}^N \sum_{\gamma, \beta, \eta=1}^2 \frac{(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{3\beta})(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{3\gamma})(\mathbf{g}_{k_2} \mathbf{d}_{3\eta})}{\hbar^3} \exp(-i\mathbf{k}_1(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)) \int_0^t d\tau \exp(i[\omega_{k_1} + i\Gamma(\omega_{k_1})]\tau) \times \\ \times [1 + n(k_1)] \int_0^\tau d\theta \exp(-i\omega_{3\gamma}\theta) \langle a_{k_2}(t - \tau + \theta) \exp(i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_1) U_{l\gamma}^\eta(t - \tau + \theta) [U_{j\beta}^3(t), O(t)] \rangle. \quad (9)$$

Так как $U_{j\beta}^3(t) = c_{3j}^\dagger(t) c_{j\beta}(t)$, с помощью решения уравнения Гейзенберга для ферми-оператора $c_{3j}^\dagger(t)$,

$$c_{3j}^\dagger(t) = c_{3j}^\dagger(0) \exp(i\omega_3 t) + \sum_{k_3} \sum_{\xi=1}^2 \frac{(\mathbf{d}_{3\xi} \mathbf{g}_{k_3})}{\hbar} \int_0^t d\tau_1 \exp(i\omega_3 \tau_1) \times \\ \times [a_{k_3}(t - \tau_1) \exp(i\mathbf{k}_3 \mathbf{r}_j) - \text{H.c.}] c_{j\xi}^\dagger(t - \tau_1),$$

мы можем исключить его из (9). Подставляя это решение в (9) и принимая во внимание тот факт, что $\langle 3|c_{j3}^\dagger(0) = 0, c_{j3}(0)|3\rangle = 0$, легко получить следующий результат:

$$I_1^{(4)} = \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum_{j, l=1}^N \sum_{\beta, \gamma, \eta, \xi=1}^2 \frac{(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{3\beta})(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{3\gamma})(\mathbf{g}_{k_2} \mathbf{d}_{3\eta})(\mathbf{g}_{k_3} \mathbf{d}_{3\xi})}{\hbar^4} \exp(-i\mathbf{k}_1(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)) \int_0^t d\tau \times \\ \times \exp(i[\omega_{k_1} + i\Gamma(\omega_{k_1})]\tau) [1 + n(k_1)] \int_0^\tau d\theta \exp(-i\omega_{3\gamma}\theta) \int_0^t d\tau_1 \exp(i\omega_{3\beta}\tau_1) \times \\ \times \exp(i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_l - i\mathbf{k}_3 \mathbf{r}_j) \langle a_{k_2}(t - \tau + \theta) a_{k_3}^\dagger(t - \tau_1) U_{l\gamma}^\eta(t - \tau + \theta) [U_{j\beta}^\xi(t - \tau_1), O(t)] \rangle. \quad (10)$$

Далее мы пренебрежем членами выше четвертого порядка по параметрам $g_k d_{31}/\hbar$ или $g_k d_{32}/\hbar$ и запишем коррелятор в виде

$$\langle a_{k_2}(t - \tau + \theta) a_{k_3}^\dagger(t - \tau_1) \rangle \approx \delta_{k_2, k_3} [1 + n(k_2)] \exp(i\omega_{k_2}(\tau - \theta - \tau_1)) \exp(-\Gamma(\omega_{k_2})|\tau - \theta - \tau_1|).$$

Используем следующее интегральное представление экспонент:

$$\exp(i\omega_{k_2}(\tau - \theta - \tau_1)) \exp(-\Gamma(\omega_{k_2})|\tau - \theta - \tau_1|) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\Gamma(\omega_{k_2}) \exp(i\omega'(\tau - \theta - \tau_1))}{(\omega' - \omega_{k_2})^2 + \Gamma^2(\omega_{k_2})},$$

$$\exp(i[\omega_{k_1} + i\Gamma(k_1)]) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' \frac{\Gamma(\omega_{k_1}) \exp(i\omega''\tau)}{(\omega'' - \omega_{k_1})^2 + \Gamma^2(\omega_{k_1})},$$

тогда уравнение (10) примет вид

$$I_1^{(4)} \approx \sum_{k_1, k_2} \sum_{j, l=1}^N \sum_{\beta, \gamma, \eta, \xi=1}^2 \frac{(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{3\beta})(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{3\gamma})(\mathbf{g}_{k_2} \mathbf{d}_{3\eta})(\mathbf{g}_{k_2} \mathbf{d}_{3\xi})}{\pi^2 \hbar^4} \exp(-i[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2][\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l]) \times \\ \times [1+n(k_1)][1+n(k_2)] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' \frac{\Gamma(\omega_{k_2})}{\Gamma^2(\omega_{k_2}) + (\omega' - \omega_{k_2})^2} \frac{\Gamma(\omega_{k_1})}{\Gamma^2(\omega_{k_1}) + (\omega'' - \omega_{k_1})^2} \times \\ \times \langle U_{1\gamma}^\eta(t) [U_{j\beta}^\xi(t), O(t)] \rangle I_1'(\omega', \omega''). \quad (11)$$

Здесь функция $I_1'(\omega', \omega'')$ выражается через временные интегралы, и при больших временах $t \rightarrow \infty$ ее можно представить в виде

$$I_1'(\omega', \omega'') = \int_0^t d\tau \exp(i(\omega' + \omega'' - \omega_{\eta\gamma})\tau) \int_0^\tau d\theta \exp(-i(\omega' + \omega_{3\eta})\theta) \times \\ \times \int_0^t d\tau_1 \exp(i(\omega_{3\xi} - \omega')\tau_1) \approx \frac{\pi \delta(\omega' + \omega'' - \omega_{\eta\gamma})}{(\omega_{3\eta} + \omega')(\omega_{3\xi} - \omega')}.$$

После интегрирования по времени интегралы по ω' и ω'' в уравнении (11) легко оцениваются:

$$I_1'' = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' I_1'(\omega', \omega'') \frac{\Gamma(\omega_{k_1})}{\Gamma^2(\omega_{k_1}) + (\omega'' - \omega_{k_1})^2} \frac{\Gamma(\omega_{k_2})}{\Gamma^2(\omega_{k_2}) + (\omega' - \omega_{k_2})^2} \approx \\ \approx \frac{1}{(\omega_{31} - \omega_{k_1})(\omega_{32} + \omega_{k_1})} \frac{2\Gamma}{[\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{21}]^2 + [2\Gamma]^2}.$$

В окончательной форме выражение для $I_1^{(4)}$ записывается как

$$I_1^{(4)} \approx \sum_{k_1, k_2} \sum_{j, l=1}^N \frac{(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{31})(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{32})(\mathbf{g}_{k_2} \mathbf{d}_{31})(\mathbf{g}_{k_2} \mathbf{d}_{32})}{\hbar^4 (\omega_{31} - \omega_{k_1})(\omega_{32} - \omega_{k_2})} \exp(-i[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2][\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l]) [1+n(k_1)] \times \\ \times [1+n(k_2)] \langle U_{11}^2(t) [U_{j2}^1(t), O(t)] \rangle \frac{2\Gamma}{[\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{21}]^2 + [2\Gamma]^2}. \quad (12)$$

При получении уравнения (12) мы воспользовались приближением вращающейся волны и предположили, что $\Gamma(\omega_{k_1}) \approx \Gamma(\omega_{k_2}) \equiv \Gamma$, $\omega_{31} - \omega_{k_1}$, $\omega_{32} + \omega_{k_1} \gg \Gamma$. Продолжая таким же образом, можно получить уравнение, описывающее поведение атомов, взаимодействующих с термализованным электромагнитным полем в микрорезонаторе:

$$\frac{d}{dt} \langle O(t) \rangle = i\omega_{21} \sum_{j=1}^N \langle [R_{zj}, O(t)] \rangle + \frac{1}{\hbar^4} \sum_{k_1, k_2} \sum_{j, l=1}^N \left[\frac{(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{31})(\mathbf{g}_{k_2} \mathbf{d}_{32})}{\omega_{23} - \omega_{k_2}} - \frac{(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{32})(\mathbf{g}_{k_2} \mathbf{d}_{31})}{\omega_{31} - \omega_{k_2}} \right]^2 \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[[1 + n(k_1) + n(k_2)] \left(\exp(-i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l]) \frac{\langle R_l^\dagger [R_j^-, O(t)] \rangle}{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{21} + 2i\Gamma)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \exp(i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l]) \frac{\langle [R_j^\dagger, O(t)] R_l^- \rangle}{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{21} - 2i\Gamma)}} \right) + n(k_1)n(k_2) \times \right. \\
 & \times \left(\exp(-i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l]) \frac{\langle R_l^\dagger [R_j^-, O(t)] \rangle}{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{21} + 2i\Gamma)}} + \right. \\
 & \left. \left. + \exp(i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l]) \frac{\langle [[R_l^\dagger, O(t)] R_l^-] \rangle}{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{21} - 2i\Gamma)}} \right) \right], \tag{13}
 \end{aligned}$$

где операторы $R_j^\dagger = U_{j1}^2$, $R_j^- = U_{j2}^1$ и $R_{zj} = (U_{j2}^2 - U_{j1}^1)/2$ удовлетворяют коммутационным соотношениям для спиновых операторов [7].

Для того чтобы исследовать временную зависимость операторов атомной подсистемы, запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle R_{zj} \rangle &= -\frac{2}{\hbar^4} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \sum_{j, l=1}^N \gamma_{eff}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \exp(-i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l]) [1 + n(k_1) + n(k_2)] \times \\
 & \times \langle R_l^\dagger(t) R_j^-(t) \rangle - \frac{4}{\hbar^4} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \gamma_{eff}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) n(k_1)n(k_2) \langle R_{zj}(t) \rangle, \\
 \frac{d}{dt} \langle R_i^\dagger(t) R_m^-(t) \rangle &= \frac{2}{\hbar^4} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \sum_{l=1}^N \gamma_{eff}^0(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \left[[1 + n(k_1) + n(k_2)] \times \right. \\
 & \times \left(\exp(i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_l]) \frac{\langle R_i^\dagger(t) R_{zm}(t) R_l^-(t) \rangle}{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{21} - 2i\Gamma)}} - \right. \\
 & \left. \left. - \exp[-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l]) \frac{\langle R_l^\dagger(t) R_{zi}(t) R_m^-(t) \rangle}{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{21} + 2i\Gamma)}} \right) \right], \tag{14}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \gamma_{eff}^0(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= \left[\frac{(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{31})(\mathbf{g}_{k_2} \mathbf{d}_{32})}{\omega_{23} - \omega_{k_2}} - \frac{(\mathbf{g}_{k_1} \mathbf{d}_{32})(\mathbf{g}_{k_2} \mathbf{d}_{31})}{\omega_{31} - \omega_{k_2}} \right]^2, \\
 \gamma_{eff}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= \gamma_{eff}^0(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \frac{2\Gamma}{[2\Gamma]^2 + [\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{21}]^2}.
 \end{aligned}$$

Далее, ограничиваясь рассмотрением только одной моды микрорезонатора, мы будем изучать кинетику одного, двух и большого числа атомов, приняв во внимание квантовые флуктуации в случае одного или двух атомов и пренебрегая ими в случае большого числа атомов.

Рассмотрим сначала один атом в микрорезонаторе. Из уравнений (14) мы получаем следующее уравнение для населенности атомной подсистемы:

$$\frac{d}{dt} \langle R_z(t) \rangle = -\frac{1}{\tau_0^{(b)}} \langle R^\dagger R^- \rangle - \frac{1}{\tau^{(b)}} \langle R_z \rangle, \tag{15}$$

где

$$\frac{1}{\tau_0^{(b)}} = \frac{4g^4 d_0^4}{\Gamma \Delta^2 \hbar^4} (1 + 2n), \quad \frac{1}{\tau^{(b)}} = \frac{8g^4 d_0^4 n^2}{\Gamma \Delta^2 \hbar^4} (1 + 2n).$$

Для начального условия $\langle R_z(t=0) \rangle = 1/2$ мы имеем

$$\langle R_z(t) \rangle = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{a+1}{a} \left(1 - \exp \left[-\frac{at}{\tau_0^{(b)}} \right] \right) \right], \quad (16)$$

где

$$a = 1 + \frac{\tau_0^{(b)}}{\tau^{(b)}} = 1 + \frac{2n^2}{1+2n}.$$

В случае двух атомов, разделенных расстоянием $r_{21} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, из (14) можно прийти к замкнутой системе уравнений для переменных $Z(t) = \langle R_{z1}(t) \rangle + \langle R_{z2}(t) \rangle$, $Y(t) = \langle R_2^\dagger(t) R_1^-(t) \rangle + \langle R_1^\dagger(t) R_2^-(t) \rangle$, $X(t) = \langle R_{z1}(t) R_{z2}(t) \rangle$:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} Z(\tau) \\ Y(\tau) \\ X(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -1 & 4\cos\theta \\ -0.5 & 0.5a\cos\theta & -2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(\tau) \\ Y(\tau) \\ X(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где $\tau = t/\tau_0^{(b)}$, $\theta = (\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{21})$. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\lambda^3 + (3a+1)\lambda^2 + (3a+2a^2-2a\cos^2\theta+\cos^2\theta)\lambda + 2a^2-2\cos^2\theta-2a^2\cos^2\theta+2a\cos^2\theta=0.$$

Следует отметить, что можно легко решить это уравнение методом Кардана, однако вследствие его громоздкости мы ограничимся лишь аппроксимацией $a \approx 1$, что соответствует небольшому числу термализованных фотонов в моде микрорезонатора. Учитывая начальные условия $Z(t=0) = 1$, $Y(t=0) = 0$, $X(t=0) = 0.25$, в этом приближении мы получаем следующее решение системы (17):

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= -\frac{4p^2}{1-p^2} e^{-2\tau} + \frac{1-p}{1+p} e^{-(1-p)\tau} + \frac{1+p}{1-p} e^{-(1+p)\tau} - 1, \\ Y(\tau) &= -\frac{4p^2}{1-p^2} e^{-2\tau} - \frac{1-p}{1+p} e^{-(1-p)\tau} + \frac{1+p}{1-p} e^{-(1+p)\tau}, \\ X(\tau) &= \frac{1+p^2}{1-p^2} e^{-2\tau} - \frac{1-p}{2(1+p)} e^{-(1-p)\tau} - \frac{1+p}{2(1-p)} e^{-(1+p)\tau} + 0.25, \end{aligned} \quad (18)$$

где $p = \cos\theta$.

Для большого числа атомов процесс кооперативного двухфотонного распада системы заметно усиливается. Если пренебречь флуктуациями числа частиц в случае большого числа атомов $N \gg 1$, нетрудно получить следующее уравнение для оператора атомной инверсии:

$$\frac{d}{dt} \langle R_z(t) \rangle = -\frac{1}{\tau^{(b)}} \langle R_z \rangle - \frac{1}{\tau_0^{(b)}} (j(j+1) - \langle R_z \rangle^2 + \langle R_z \rangle), \quad (19)$$

где $j = N/2$. Решение этого уравнения есть

$$\langle R_z(t) \rangle = \frac{1+q}{2} - \frac{c}{2} \operatorname{th} \left[\frac{1}{2\tau_r} (t - t_0) \right],$$

где $\tau_r = \tau_0^{(b)}/c$ — время кооперативного спонтанного распада ансамбля атомов, $t_0 = \tau_r \ln \left((N - [1 + q - c]) / ([1 + q + c] - N) \right)$ — время задержки импульса коллективного излучения пар фотонов в микрорезонаторе, $q = \tau_0^{(b)}/\tau^{(b)}$, $c = \sqrt{(1+q)^2 + 4j(j+1)}$.

Из уравнения Дикке (19) для двухфотонного кооперативного спонтанного распада следует, что термализованное поле влияет не только на коэффициент Эйнштейна $1/\tau^{(b)}$, соответствующий индуцированному распаду, но и на скорость двухфотонного спонтанного распада $1/\tau_0^{(b)}$. Нетрудно заметить, что термализованное поле усиливает процесс кооперативного двухфотонного распада (см. выражение для $1/\tau_0^{(b)}$ после формулы (15)). Это является одним из основных различий между двухфотонным дипольно-запрещенным и однофотонным каскадным кооперативным спонтанным излучением. Очевидно, что двухфотонное кооперативное спонтанное излучение может преобладать над индуцированными термализованными переходами в случае, если

$$N(1 + 2n) > n^2.$$

Из этих оценок следует, что для $n < 1$ член $1/\tau^{(b)}$, соответствующий индуцированному распаду, пренебрежимо мал по сравнению с членом $1/\tau_0^{(b)}$, соответствующим спонтанному распаду. В самом деле, при $n = 0.3$ мы получаем

$$\frac{1}{\tau^{(b)}} = \frac{8g^4 d_0^4}{\Gamma \Delta^2 \hbar^4} \cdot 0.3^2 \ll \frac{1}{\tau_0^{(b)}} = \frac{4g^4 d_0^4}{\Gamma \Delta^2 \hbar^4} [1 + 2 \cdot 0.3].$$

В заключение этого раздела отметим, что однофотонный каскадный процесс становится несущественным по сравнению с двухфотонным спонтанным распадом при определенном экспериментальном выборе ридберговского атома и моды микрорезонатора. Для тушения однофотонного каскадного перехода скорость потерь фотонов из микрорезонатора Γ должна быть меньше отстройки от резонанса $\Delta = |\omega_c - \omega_{23}|$ ($\Delta = |\omega_c - \omega_{31}|$), чтобы удовлетворялось неравенство $\Gamma^2 \ll \Delta^2$ (здесь ω_c — частота моды микрорезонатора). Учитывая условия применимости приближения Борна—Маркова во втором порядке теории возмущения $\Gamma > N/\tau_0^{(b)}$, получим следующие ограничения снизу и сверху на скорость потерь фотонов:

$$\frac{4g^4 d_0^4 N}{\Delta^2 \hbar^4} (1 + 2n) < \Gamma^2 \ll \Delta^2. \tag{20}$$

Экспериментальная реализация нашей модели может быть осуществлена для переходов $|n'S\rangle \rightarrow |(n' - 1)S\rangle$ с промежуточным виртуальным состоянием $|(n' - 1)P\rangle$ с учетом условия (20). Поскольку мы хотим учесть влияние термостата на процесс двухквантового спонтанного распада, рассмотрим экспериментальную модель возбуждения для атомов Rb с $n' = 40$ [5]. Среднее число n термализованных фотонов в моде микрорезонатора при температуре $T = 4$ К порядка $n \approx 0.79$. Условие (20) в обозначениях работы [5] имеет следующий вид:

$$\frac{4\Omega_{if}^4 N(1 + 2n)}{\Delta^2} < \Gamma^2 \ll \Delta^2.$$

Тогда для значений матричного элемента Ω_{if} и отстройки Δ , полученных в [5], нетрудно получить

$$1.6 \cdot 10^7 N(1 + 2 \cdot 0.79) < \Gamma^2 \ll 1.5 \cdot 10^{15},$$

т.е. неравенство (20) выполнено. Заметим, что в этом случае скорость коллективного двухфотонного спонтанного распада в 2.6 раз превышает скорость двухфотонного распада в отсутствие термализованных фотонов в моде резонатора (т.е. при $T = 0$).

3. ЗАВИСИМОСТЬ ФЛУКТУАЦИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ОТ ДИНАМИКИ АТОМНОЙ ИНВЕРСИИ

В отсутствие атомов внутри микрорезонатора мы можем вычислить флуктуации операторов электромагнитного поля:

$$\delta_0^2 = \langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle - \langle a^{\dagger} a \rangle^2 = n^2.$$

Было бы интересно найти флуктуации числа фотонов электромагнитного поля, генерируемых возбужденной атомной системой в процессе двухфотонного излучения в микрорезонаторе. Для этого введем функцию, учитывающую флуктуации электромагнитного поля относительно термализованных флуктуации:

$$\delta_r^2 = \delta^2 - \delta_0^2, \quad (21)$$

где $\delta^2 = \langle a^{\dagger 2}(t) a^2(t) \rangle - \langle a^{\dagger}(t) a(t) \rangle^2$.

Так как экспериментально часто следят за динамикой изменения разности населенностей атомной подсистемы в микрорезонаторе [10], в этом разделе мы будем выражать флуктуации δ_r^2 электромагнитного поля через кинетику инверсии атомной населенности. Для упрощения этой задачи мы можем исключить виртуальные уровни $c_{j3}^{\dagger}(t)$, $c_{j3}(t)$ из гамильтониана (1), поскольку, как было показано в предыдущем разделе, они практически не заселены. Тогда после исключения этого уровня мы получим следующий эффективный гамильтониан взаимодействия атомной подсистемы с одной модой микрорезонатора при $T \neq 0$:

$$H^{eff} = \hbar\omega_{21}R_z + \hbar\omega_c J_z + 2\hbar\chi(J^{\dagger}R^- + R^{\dagger}J^-) + \int_0^{\infty} d\omega \hbar\omega b_{\omega}^{\dagger} b_{\omega} + i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa(\omega)(b_{\omega} a^{\dagger} - a b_{\omega}^{\dagger}), \quad (22)$$

где $\chi = 2g^2 d_{31} d_{32} / \Delta \hbar^2$. Операторы $J^{\dagger} = a^{\dagger 2} / 2$, $J^- = a^2 / 2$ и $J_z = (a^{\dagger} a + 1/2) / 2$ принадлежат алгебре $su(1, 1)$ и удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[J^{\dagger}, J^-] = -2J_z, \quad [J_z, J^{\pm}] = \pm J^{\pm}.$$

Пусть $G^{(1)}(t) = \langle a^{\dagger}(t) a(t) \rangle$, тогда

$$\frac{d}{dt} G^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} \langle a^{\dagger}(t) a(t) \rangle = \left\langle \frac{da^{\dagger}(t)}{dt} a(t) + a^{\dagger}(t) \frac{da(t)}{dt} \right\rangle. \quad (23)$$

После подстановки уравнения Гейзенберга для операторов электромагнитного поля микрорезонатора в (23) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G^{(1)}(t) = & 4i\chi\langle R^\dagger(t)J^-(t) - J^\dagger(t)R^-(t) \rangle - 2\Gamma\langle a^\dagger(t)a(t) \rangle + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa(\omega)\langle b_\omega^\dagger(0)a(t) \rangle e^{i\omega t} + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa(\omega)\langle a^\dagger(t)b_\omega(0) \rangle e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (24)$$

Исключая операторы термостата, получим следующее уравнение для корреляционной функции первого порядка:

$$\frac{d}{dt}G^{(1)}(t) = -2\Gamma G^{(1)}(t) + 4i\chi\langle R^\dagger(t)J^-(t) - J^\dagger(t)R^-(t) \rangle + 2\Gamma n.$$

В приближении Борна–Маркова $dG^{(1)}(t)/dt \ll \Gamma G^{(1)}(t)$ можно выразить функцию $G^{(1)}(t)$ через оператор атомной инверсии:

$$G^{(1)}(t) = n - \frac{1}{\Gamma} \frac{d}{dt} \langle R_z(t) \rangle. \quad (25)$$

Таким же образом находим корреляционную функцию второго порядка $G^{(2)}(t) = \langle a^{\dagger 2}(t)a^2(t) \rangle$:

$$\frac{d}{dt}G^{(2)}(t) = \frac{d}{dt} \langle a^{\dagger 2}(t)a^2(t) \rangle = \left\langle \frac{da^{\dagger 2}(t)}{dt} a^2(t) + a^{\dagger 2}(t) \frac{da^2(t)}{dt} \right\rangle. \quad (26)$$

Учитывая уравнение Гейзенберга для оператора $a^{\dagger 2}(t)$,

$$\frac{da^{\dagger 2}}{dt} = 4i\omega_c J^\dagger - 4\Gamma J^\dagger + 8i\chi R^\dagger J_z + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa(\omega) b_\omega^\dagger(0) a^\dagger(t) e^{i\omega t}, \quad (27)$$

и подставляя его в уравнение (26) в приближении Борна–Маркова $dG^{(2)}(t)/dt \ll \Gamma G^{(2)}(t)$, получим, что $G^{(2)}(t)$ и $G^{(1)}(t)$ связаны следующим соотношением:

$$G^{(2)}(t) = \frac{4i\chi}{\Gamma} [\langle R^\dagger J_z J^- \rangle - \langle R^- J^\dagger J_z \rangle] + 2nG^{(1)}(t). \quad (28)$$

Теперь, ослабляя корреляторы

$$\langle R^\dagger J_z J^- \rangle \approx \langle R^\dagger J^- \rangle \langle J_z \rangle, \quad \langle R^- J^\dagger J_z \rangle \approx \langle R^- J^\dagger \rangle \langle J_z \rangle$$

для случая большого числа возбужденных атомов и учитывая соотношение

$$\langle J_z(t) \rangle = \frac{1}{2} [G^{(1)}(t) + 1/2] = \frac{1}{2} \left[n + 1/2 - \frac{1}{\Gamma} \frac{d}{dt} \langle R_z(t) \rangle \right],$$

получим следующее выражение для корреляционной функции второго порядка, выраженной через оператор инверсии атомной подсистемы:

$$G^{(2)}(t) = 2n^2 - \left[3n + \frac{1}{2} \right] \frac{1}{\Gamma} \frac{d}{dt} \langle R_z(t) \rangle + \left[\frac{1}{\Gamma} \frac{d}{dt} \langle R_z(t) \rangle \right]^2. \quad (29)$$

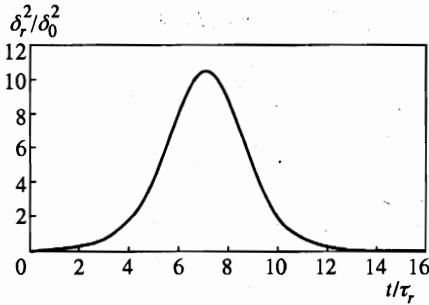


Рис. 2. Зависимость δ_r^2/δ_0^2 от t/τ_r при $N = 1500$, $\Delta/2\pi = 39$ МГц, $\Gamma = 2 \cdot 10^6$ 1/с, $\omega_c/2\pi = 68.4$ ГГц, $\Omega = 7 \cdot 10^5$ 1/с

Заметим, что так как вероятность двухфотонного поглощения $w \propto \langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle = G^{(2)}(t)$, то при низких температурах она пропорциональна двухфотонному потоку Φ_0 :

$$w \propto d/dt \langle R_z(t) \rangle \propto \Phi.$$

Отметим, что также существует зависимость вероятности w от квадрата двухфотонного потока, которой мы будем пренебрегать в нашем приближении. Следует заметить, что в случае однофотонного сверхизлучения функция $G^{(2)}$ пропорциональна квадрату однофотонного потока Φ^2 . Это имеет место, потому что $a^{\dagger} \sim R^{\dagger}$ в случае однофотонного излучения, в то время как $a^{\dagger 2} \sim R^{\dagger 2}$ в случае двухфотонного. Поэтому для однофотонного сверхизлучения

$$w \propto \langle R^{\dagger 2} R^{-2} \rangle \propto \langle [dR_z/dt]^2 \rangle,$$

а для двухфотонного

$$w \propto \langle R^{\dagger} R^{-} \rangle \propto d \langle R_z \rangle / dt.$$

Теперь нетрудно получить выражение для относительных флуктуаций электромагнитного поля внутри микрорезонатора:

$$\delta_r^2 = - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\Gamma} \frac{d}{dt} \langle R_z(t) \rangle. \quad (30)$$

Отсюда следует, что при каждом акте распада фотоны генерируются парами и интенсивность излучения становится пропорциональной N^2 , а корреляционная функция второго порядка для фотонов остается много больше квадрата корреляционной функции первого порядка. В этом случае при низких температурах и большом числе атомов можно говорить о сверхгруппировке фотонов, т. е. $\delta_r^2/\delta_0^2 \gg 1$ (см. рис. 2).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основная цель работы заключалась в исследовании кооперативного спонтанного двухфотонного распада возбужденных ридберговских атомов в микрорезонаторе в присутствии термализованного поля. Мы показали, что термализованное электромагнитное поле способствует ускорению двухфотонного спонтанного излучения, и в этом слу-

чае данное излучение может доминировать над индуцированным. Кроме того, мы исследовали флуктуации электромагнитного поля, обусловленные генерацией возбужденной атомной подсистемы, относительно флуктуаций термализованного поля в микро-резонаторе. В приближении Борна—Маркова получено, что эти флуктуации линейно зависят от генерируемого потока пар фотонов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, как исключить операторы термализованного электромагнитного поля и операторы электромагнитного поля микрорезонатора, для того чтобы получить уравнение (5). Для этого мы запишем уравнения Гейзенберга для операторов электромагнитного поля

$$\frac{d}{dt} a_k(t) = -i\omega_k a_k(t) + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa(\omega) b_\omega(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^2 \frac{\mathbf{g}_k \mathbf{d}_{3\beta}}{\hbar} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j) [U_{j\beta}^3(t) + U_{j\beta}^\beta(t)] \quad (A.1)$$

и термализованного электромагнитного поля

$$b_\omega(t) = b_\omega(0) e^{-i\omega t} - \sum_k \int_0^t d\tau e^{-i\omega\tau} a_k(t-\tau) \kappa(\omega). \quad (A.2)$$

Подставляя (A.2) в (A.1), в приближении Маркова относительно операторов электромагнитного поля микрорезонатора получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_k(t) = & - \sum_{k'} \left(i\omega_{k'} \delta_{k,k'} + \int_0^{\infty} d\omega \kappa^2(\omega) \frac{\varepsilon + i(\omega_{k'} - \omega)}{\varepsilon^2 + (\omega_{k'} - \omega)^2} \right) a_{k'}(t) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa(\omega) b_\omega(0) e^{-i\omega t} + \sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^2 \frac{\mathbf{g}_k \mathbf{d}_{3\beta}}{\hbar} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} [U_{j\beta}^3(t) + U_{j\beta}^\beta(t)]. \end{aligned} \quad (A.3)$$

Пренебрегая вкладом соседних мод в перераспределение частот и в потери микрорезонатора, получим

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k - P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{|\kappa(\omega)|^2}{\omega - \omega_k}, \quad \Gamma(\omega_k) = \pi |\kappa(\omega_k)|^2.$$

В этом приближении формальное решение для оператора электромагнитного поля микрорезонатора можно представить в следующем виде:

$$a_k(t) = A_k^f(t) + a_k^s(t), \quad a_k^\dagger(t) = [a_k(t)]^\dagger. \quad (A.4)$$

Здесь

$$A_k^f(t) = a_k(0) \exp[-i[\omega_k - i\Gamma(\omega_k)]t] + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa(\omega) b_\omega(0) \frac{\exp(-i\omega t) - \exp(-i[\omega_k - i\Gamma(\omega_k)]t)}{\Gamma(\omega_k) + i(\omega_k - \omega)},$$

$$a_k^s(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^2 \frac{(d_{3\beta} g_k)}{\hbar} \exp(-ikr_j) \int_0^t d\tau \exp(-i[\omega_k - i\Gamma(\omega_k)]\tau) \times \\ \times [U_{j\beta}^3(t-\tau) + U_{j\beta}^\beta(t-\tau)],$$

где введено обозначение $\tilde{\omega}_k = \omega_k$.

Следует отметить, что решения (А.4) учитывают все следствия квантовой регрессионной теоремы. В самом деле, для свободных частей операторов $a_k(t)$, $a_k^\dagger(t-\tau)$ можно получить

$$\langle A_k^{f\dagger}(t-\tau) A_k^f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\kappa(\omega)|^2 \exp(-i\omega\tau) \frac{\langle b_\omega^\dagger(0) b_\omega(0) \rangle}{\Gamma^2(\omega_k) + (\omega - \omega_k)^2} = n(k) \exp(-i\omega_k\tau - \Gamma|\tau|),$$

где $n(k)$ — среднее число фотонов в k -ой моде микрорезонатора.

Теперь, подставляя (А.4) в уравнение (2), мы можем исключить $A_k^{f\dagger}(t)$, $A_k^f(t)$, используя при этом лемму Боголюбова [14]. Поскольку

$$\langle a_k^\dagger(0) B(t) \rangle = n(\omega_k) \langle [B(t), a_k^\dagger(0)] \rangle, \quad \langle b_\omega^\dagger(0) B(t) \rangle = n(\omega) \langle [B(t), b_\omega^\dagger(0)] \rangle,$$

коррелятор $\langle A_k^{f\dagger}(t) B(t) \rangle$ можно выразить через $a_k^{s\dagger}(t)$:

$$\langle A_k^{f\dagger}(t) B(t) \rangle = n(\omega_k) \langle [a_k^{s\dagger}(t), B(t)] \rangle,$$

где положили $n(\omega) \approx n(\omega_k)$.

Литература

1. E. M. Purcell, Phys. Rev. **69**, 681 (1946).
2. D. Kleppner, Phys. Rev. Lett. **47**, 233 (1981).
3. G. Breit and E. Tetter, Astrophys. J. **91**, 215 (1940); R. Marrus and R. W. Schmieder, Phys. Lett. A **32**, 431 (1970); R. W. Schmieder and R. Marrus, Phys. Rev. Lett. **25**, 1245 (1970); R. Marrus and R. W. Schmieder, Phys. Rev. A **5**, 1160 (1972).
4. B. Nikolaus, D. Z. Zhang, and P. E. Toshek, Phys. Rev. Lett. **47**, 171 (1981).
5. M. Brune, J. M. Raimond, P. Goy et al., Phys. Rev. Lett. **59**, 1899 (1987); M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. A **35**, 154 (1987).
6. W. Lange, G. S. Agarwal, and H. Walther, Phys. Rev. Lett. **76**, 3293 (1996).
7. Н. А. Енаки, ЖЭТФ **94**, 135 (1988).
8. Zh. Chen and H. Freedhoff, Phys. Rev. A **44**, 546 (1991); N. A. Enaki and M. A. Macovei, Phys. Rev. A **56**, 3274 (1997).
9. Н. А. Енаки, О. Б. Препелица, Опт. и спектр. **69**, 617 (1990).
10. И. М. Бетеров, П. Б. Лернер, УФН **159**, 665 (1989).
11. D. Meschede and H. Walther, Phys. Rev. Lett. **54**, 551 (1985).
12. Q. Rempe and H. Walther, Phys. Rev. Lett. **58**, 353 (1987).
13. W. Lange and H. Walther, Phys. Rev. A **48**, 4551 (1993); G. S. Agarwal, W. Lange, and H. Walther, Phys. Rev. A **48**, 4555 (1993).
14. N. N. Bogolubov and N. N. Bogolubov, Jr., Elem. Particles and Nucl. **11**, 245 (1980).